T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDOSİMETRİK BANACH FONKSİYON UZAYLARI

Feyza Elif DAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Şubat, 2022

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDOSİMETRİK BANACH FONKSİYON UZAYLARI

Feyza Elif DAL tarafından hazırlanan tez çalışması 04.02.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Yusuf ZEREN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Yonca TURGUT SEZER, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Yusuf ZEREN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Pseudosimetrik Banach Fonksiyon Uzayları başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Feyza Elif DAL

İmza

Bu çalışma,

TÜBİTAK-ANAS ULUSLARARASI İKİLİ İŞ BİRLİĞİ PROJESİ (Proje No: 118F447) kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)

ve

2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmiştir.

Aileme

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında sırası ile Banach fonksiyon uzayları, simetrik uzaylar ve pseudosimetrik Banach fonksiyon uzayları verilmiş olup pseudosimetrik uzayların simetrik uzaylarla aralarındaki ilişki ifade edilmiştir.

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam boyunca değerli bilgileriyle bana yol gösteren, her daim fikirleriyle bana ışık tutan, her zaman desteğini hissettiğim tez danışmanım sayın Prof. Dr. Yusuf ZEREN hocama teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, birlikte çalışma fırsatı bulduğum ve beni her zaman destekleyen hocam sayın Prof. Dr. Bilal BİLALOV'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm eğitim hayatım boyunca her zaman maddi manevi destek veren biricik ailem Gürkan – Emine DAL'a ve kardeşlerime ayrıca tezim için fikir alışverişinde bulunduğum tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Feyza Elif DAL

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **vii**
KISALTMA LİSTESİ **viii**
ÖZET **ix**
ABSTRACT **xi**
1 GİRİŞ **1**
1.1 Literatür Özeti ... 1
1.2 Tezin Amacı ... 2
1.3 Hipotez ... 2
2 TEMEL KAVRAMLAR **3**
2.1 Temel Tanım ve Teoremler ... 3
3 BANACH FONKSİYON UZAYLARI **15**
3.1 Banach Fonksiyon Uzayları ... 15
3.2 İlişik Uzay ... 20
3.3 Normun Mutlak Sürekliliği ... 22
3.4 Duallik ve Yansıma ... 25
3.5 Dağılım Fonksiyonları ve Azalan Yeniden Düzenlemeler ... 25
3.6 Hardy-Littlewood Eşitsizliği ... 27
3.7 Elementer Maksimal Fonksiyon(Hardy-Littlewood) ... 30
3.8 Yeniden Düzenleme Altında Değişmez Uzaylar(Simetrik Uzaylar) ... 34
3.9 Temel Fonksiyon ... 36
3.10 L_1 *ve* L_∞ Arasındaki İnterpolasyon ... 41
3.11 Hardy Littlewood Maksimal Operatörü ... 41
3.12 Hilbert Dönüşümü ... 44
3.13 Zayıf Tipli$(p_0, q_0; p_1, q_1)$ Bağlantı Operatörleri ... 46
3.14 Fourier Serilerinin Norm-Yakınsaklığı ... 53
4 PSEUDOSİMETRİK UZAYLAR **59**
4.1 Pseudosimetrik Uzayların Temel Özellikleri ... 59
5 SONUÇ VE ÖNERİLER **63**
KAYNAKÇA **64**
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **66**

SİMGE LİSTESİ

S_σ	Calderón operatörü
χ_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
μ_f	f nin dağılım fonksiyonu
f^{**}	f^* fonksiyonunun maksimal fonksiyonu
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
H	Hilbert dönüşümü
$L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfı
$L_p(\Omega)$	Lebesgue uzayı
$\mathcal{H}$	Maksimal Hilbert dönüşümü
$M(R,\mu)$	R deki bütün μ −ölçülebilir fonksiyonların sınıfı
$M_0(R,\mu)$	$M(R,\mu)$ deki hemen her yerde sonlu fonksiyonların sınıfı
$M_+(R,\mu)$	$M(R,\mu)$ de negatif olmayan fonksiyonların sınıfı
$M_0^+(R,\mu)$	$M_0(R,\mu)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel uzay
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup (-\infty, +\infty)$ genişletilmiş reel sayılar
(R,μ)	Ölçü uzayı
X^*	X uzayının Banach dual uzayı
X'	X uzayının dual uzayı

KISALTMA LİSTESİ

B.f.u	Banach fonksiyon uzayı
h.h.y	hemen hemen her yerde

ÖZET

Pseudosimetrik Banach Fonksiyon Uzayları

Feyza Elif DAL

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm sırası ile literatür özeti, tezin amacı ve hipotez kısımlarından oluşur. İkinci bölümde bu çalışma ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, pseudosimetrik uzayların teorisini aktarabilmek için Banach fonksiyon uzaylarına giriş yapılarak, bu fonksiyonların ilişik uzayları, normun mutlak sürekliliği, duallik ve refleksivliği verilmiştir. Banach fonksiyon uzayları, aslında ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayları olarak tanımlanmıştır. Buradan hareketle pseudosimetrik uzaylar ve simetrik uzaylar arasındaki ilişkiyi keşfetmek adına simetrik uzaylar verilmek istenmiş bu sebeple öncesinde dağılım fonksiyonları ve azalan düzenlemeleri, Hardy-Littlewood eşitsizliği, elementer maksimal fonksiyonları ifade edilmiştir. Uzaylar arasında geçiş yapabilmek için gerekli tanımlamalar sağlandıktan sonra simetrik uzaylar verilmiş ve bu uzayda L_1 ve L_∞ arasındaki interpolasyon, operatörlerin interpolasyonu, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Hilbert dönüşümü, zayıf tipli operatörler ve Fourier serilerinin norm yakınsaklığı incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise çalışmanın ana bölümünü oluşturan

pseudosimetrik uzaylar ile ilgili önemli tanımlar verilerek bu uzaylara bağlı Luxemburg temsil teoremi, temel fonksiyonlar, Calderón teoremi ve Boyd indeksleri ifade edilmiştir. Ayrıca bu bölümde üçüncü bölümün içinde yer alan simetrik uzaylar ile pseudosimetrik uzaylar arasındaki ilişki hakkında bilgiler açıklanmıştır. Burada pseudosimetrik uzaylar ile simetrik uzaylar arasındaki en önemli ilişkisi ise Pseudosimetrik uzayların simetrik uzaylarla ilgili sonuçların uygulama aralığının genişletilmesini sağlamasıdır. Beşinci bölümde, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pseudosimetrik uzaylar, Banach fonksiyon uzayları, simetrik uzaylar, Hilbert dönüşümü, Boyd indeksi

ABSTRACT

Pseudosimmetric Banach Function Spaces

Feyza Elif DAL

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Advisor: Prof. Dr. Yusuf ZEREN

The thesis consists of five chapters. The first chapter includes the literature review, the purpose of the thesis and the hypothesis. In the second chapter, basic definitions and theorems related to this study are given. In chapter 3, in order to explain the theory of pseudosymmetric spaces, Banach function spaces are introduced and its associate spaces, the absolute continuity of the norm, duality and reflexivity are given. Banach function spaces are actually defined as Banach spaces of measurable functions. From this point of view, it is desired to give symmetric spaces in order to explore the relationship between pseudosymmetric spaces and symmetric spaces. For this reason, distribution functions and their decreasing rearrangements, Hardy-Littlewood inequality, elementary maximal functions are expressed before. After providing the necessary definitions to be able to switch between spaces, symmetric spaces are given and the interpolation between L_1 and L_∞ in this space, the interpolation of operators, the Hardy-Littlewood maximal operator, the Hilbert transform, the weak type operators and the norm convergence of the Fourier series are examined. In chapter 4,

important definitions of pseudosymmetric spaces, which form the main part of the study, are given and Luxemburg representation theorem, fundamental functions, Calderón theorem and Boyd indexes related to these spaces are expressed. In addition, in this chapter, information about the relationship between symmetrical spaces and pseudosymmetric spaces is explained. Here, the most important relationship between pseudosymmetric spaces and symmetric spaces is that pseudosymmetric spaces enable the application interval of results related to symmetric spaces to be expanded. Finally, chapter 5 summarises the results of this thesis and provides hints for future work.

Keywords: Pseudosymmetric spaces, Banach function spaces, symmetric spaces, Hilbert transformation, Boyd indices

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Fonksiyon uzayları tarihte S. L. Sobolev, A. P. Calderón G. G. Lorentz, W. A. J. Luxemburg, gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir. Bu uzaylar, harmonik analiz, Fourier serileri, yaklaşım teorisi, kısmi türevli denklemler teorisi, diferansiyel denklemlerin spektral teorisi vb. gibi matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir rol oynar. Tarihsel olarak, diferansiyel denklemler başlangıçta sürekli ve Hölder fonksiyonlarının Banach uzaylarında çalışılmaya başlanmıştır. Zamanla, çözülebilecek problemler Lebesgue uzaylarının (ağırlıklı olarak Hilbert uzayı L_2) dahil edilmesini gerektirmiş, sonrasında hem teorik olarak hem de mekanik ve matematiksel fiziğin somut problemlerinde yeni fonksiyon uzayları ortaya çıkmış ve bununla birlikte matematiğin bu uzaylarına ait çeşitli problemler incelenmeye başlanmıştır. İlgili konular hakkında daha fazla ayrıntı kaynaklarda [1]-[8] bulunabilir. Banach uzaylarının aksine, Banach fonksiyon uzaylarının zengin yapısı (latis yapısı, farklı yakınsama türleri, vb.), çeşitli analiz problemlerinin (harmonik analiz dahil) ve bu uzaylardaki diferansiyel denklemler teorisinin daha derin araştırılmasına izin verir. Görünüşe göre, Banach fonksiyon uzaylarının genel tanımı Luxemburg'a [9] aittir (ayrıca bkz. [1], [10]-[12]). Bu alana farklı yazarlar tarafından çok sayıda makale ayrılmıştır (örneğin bkz. [13]-[29]) ve bu eğilim gelişmeye devam etmektedir. Banach fonksiyon uzayları, aslında ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayları olarak da tanımlanır. Bu durum fonksiyonel-analitik ve ölçü-teorik teknikler arasında verimli bir etkileşime izin verir. Simetrik uzayların Banach fonksiyon uzayları için ayrıca önemi büyüktür. Bu uzaylar hakkında ayrı bir teori oluşturulmuş ve çok iyi bilinen Luxemburg, Calderon, Boyd vb. teoremleri sayesinde harmonik analizin birçok özelliği bu uzaylar üzerinden aktarılmıştır. Bu sebeple uzayların simetrik olmadığı, ancak simetrik uzaylara yakın olduğu durumda bir benzer

teoriler oluşturulabileceği ortaya çıkarılabilir. Buradan hareketle Pseudosimetrik uzay, simetrik uzay kavramının doğal bir genellemesi olarak tanımlanır. Luxemburg temsil teoremi, Boyd indeksleri, temel fonksiyon ve özellikleri, Calderon teoremi vb. gibi tüm temel özellikler, pseudosimetrik durum üzerinden aktarılır. Pseudosimetrik uzaylar kavramı, simetrik uzaylarla ilgili sonuçların uygulama aralığının genişletilmesini sağlar.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, Banach fonksiyon uzayları üzerinden daha geniş uygulama alanlarına sahip olan simetrik uzaylar ile ilgili tanımlamalar verilip buradan simetrik uzayların daha bir genellemesi olan pseudosimetrik uzaylara geçiş yapmaktır. Burada sözü geçen pseudosimetrik uzaylar kavramı, simetrik olmayan, ancak simetrik uzaylara yakın olan uzaylar için kullanılır.

1.3 Hipotez

Pseudosimetrik uzayların tanımlamaları verilmeden önce Banach fonksiyon uzaylarının tanımı, ilişik normu, normlarının mutlak sürekliliği, dualliği verilecektir. Sonrasında simetrik uzay tanımı yapılacak ve bu uzay üzerinde dağılım fonksiyonları, Hardy-Littlewood eşitsizliği, temel maksimal fonksiyonları vb. fonksiyonların özellikleri araştırılacaktır. Son olarak pseudosimetrik uzay tanımlamaları verilerek simetrik uzaylarla arasındaki benzerliklere ve farklılıklar incelenecektir.

2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1. X, bir cisim üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $x \in X$ ve

$\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \|.\| &: X \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \|x\| \end{aligned} \tag{2.1}$$

reel değerli fonksiyonuna

(i) $\|x\| \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $\|ax\| = |\alpha|\|x\|$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (Üçgen Eşitsizliği)

koşullarını sağlaması halinde norm denir.

Tanım 2.2. $\forall x \in X$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ pozitif sayıları için

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0 \tag{2.2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, X vektör uzayı üzerindeki $\|.\|$ normu yine X vektör uzayı üzerindeki $\|.\|_0$ normuna denk normdur denir.

Tanım 2.3. X, normlu uzay ve $x \in X$ olmak üzere, $(x_n) \in X$ dizisi,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \tag{2.3}$$

sağlarsa (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.4. X, normlu uzay olmak üzere $(x_n) \in X$ dizisi eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\exists N \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad , \quad \forall m, n > N \tag{2.4}$$

sağlarsa (x_n) Cauchy dizisidir.

Tanım 2.5. Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzay olmak üzere bu uzaydaki her Cauchy dizisi X üzerinde bir limite yakınsıyorsa, bu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.6. Eğer her bir $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X < \infty$$

olacak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$ sağlayan bir $u \in X$ varsa $(X, \|.\|_X)$ normlu lineer uzayı Riesz-Fisher özelliğine sahiptir denir. Bir başka deyişle,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} u_k - u \right\|_X = 0 \tag{2.5}$$

şeklindedir.

Teorem 2.7. Normlu lineer bir uzayın tamlık özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul bu uzayın Riesz-Fisher özelliğini sağlamasıdır [30].

Tanım 2.8. $\{E_\lambda\}$ kümelerinin bir topluluğu,

$$E \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$$

sağlarsa bu topluluğa E kümesinin bir örtüsü denir. Ayrıca E nin X uzayının açık kümelerini içeren bir örtüsüne E nin açık örtüsü denir.

Tanım 2.9. $E, bir\ (X, \|.\|)$ normlu uzayının alt kümesi olsun. E kümesinin her açık örtüsünün sonlu alt örtüsü olması durumunda E kümesi X üzerinde kompakttır denir. Eğer E kümesinin kapanışı $\bar{E}$ de X üzerinde kompakt ise E ye ön-kompakt küme denir. X kompakt ise $(X, \|.\|)$ normlu uzayına kompakt normlu uzay denir.

Tanım 2.10. $X\ ve\ Y$, bir K cismi üzerinde lineer uzaylar olsun. A, tanım kümesi $D(A) \in X$ ve görüntü kümesi $\mathscr{R}(A) \in Y$ olan $A: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, x \in D(A)$ vektörleri için,

$i)\ A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$;

$ii)\ A(ax) = \alpha A(x)$,

ise A lineer operatördür denir. Burada keyfi $n \in \mathbb{N}$ için $i\ ve\ ii)$ den,

$$A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \cdots + \alpha_n A x_n$$

olur. Ayrıca $ii)$ de $\alpha = 0$ alarak

$$A(0) = 0$$

olduğu görülür. Buna ek olarak

$\aleph(A) = \{x \in D(A): Ax = 0\}$

uzayı A operatörünün sıfır uzayıdır denir.

Tanım 2.11. $\forall x \in X$ için $I_X x = x$ biçiminde tanımlanan $I_X: X \to X$ operatörüne birim operatör denir.

Tanım 2.12. X, Y normlu uzaylar, $D(A) \subset X$ olmak üzere $A: D(A) \to Y$ bir lineer operatör olsun. $c \in \mathbb{R}$ ve $x \in D(A)$ olmak üzere,

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \tag{2.6}$$

sağlanıyorsa A operatörüne sınırlı operatör denir.

Tanım 2.13. A bir operatör olmak üzere, A operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{2.7}$$

şeklindedir.

Tanım 2.14. $D(A) \subset X$ ve X, Y birer normlu uzay olmak üzere $A: D(A) \to Y$ keyfi bir operatör, eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ olacak şekilde $\|x - x_0\| < \delta$ sağlayan

$$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon \quad , \quad x \in D(A) \tag{2.8}$$

varsa A operatörü bir $x_0 \in D(A)$ noktasında süreklidir denir.

Teorem 2.15. X, Y birer normlu uzay ve $D(A) \subset X$ olsun. $A: D(A) \to Y$ lineer operatör olmak üzere,

$i)$ A operatörü süreklidir $\Leftrightarrow$ A operatörü sınırlıdır.

$ii)$ Eğer A operatörü tek bir noktada sürekli ise o uzayda her yerde süreklidir.

Tanım 2.16. X, Y birer normlu uzay ve $X \subset Y$ olsun. $D(I_X) = \mathcal{R}(I_X) = X$ olmak üzere $\forall u \in X$ için $I_x u = u$ olacak şekilde $I_X : X \to Y$ operatörünü birim operatörü olarak tanımlarız ki burada $I_x u = u$, Y nin bir elemanı kabul edilir.

Eğer birim operatörü sürekli ise, bir başka deyişle, $\forall u \in X$ ve $c > 0$ için

$$\|u\|_Y \leq c\|u\|_X$$

ise X uzayı, Y uzayına gömülüdür. Buradan I_X operatörü gömme operatörü olur.

Bu duruma alternatif olarak, X *den* Y ye sürekli bir gömme var olsun.

$$\|I_X\|_{X \hookrightarrow Y} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X} \tag{2.9}$$

operatörün normuna karşılık gelir.

Tanım 2.17. f, (a, b) aralığında tanımlı reel değerli fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in (a, b)$ ve $0 < t < 1$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.10}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonuna konvekstir denir. Benzer tanım kapalı aralık için de verilebilir. Kesin konvekslik eşitsizlik de kesin eşitsizlik olduğunda denir. (2.9) eşitsizliğine bazen Jensen eşitsizliği de denir.

Ayrıca, eğer $-f$, konveks ise f konkavdır. Eğer f hem konveks hem konkav ise f fonksiyonuna afin denir [6].

Tanım 2.18. Bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ koleksiyonuna

$i)$ $\emptyset, X \in X$

$ii)$ $A \in X \Rightarrow A^c \in X$

$iii)$ $(A_n), X$ üzerinde bir dizi olmak üzere $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in X$

koşulları sağlanıyorsa σ −cebiri denir.

Tanım 2.19. P bir topolojik uzay olsun. P 'nin tüm açık alt kümelerinin ailesi tarafından üretilen $B(P)$ σ −cebiri, P 'nin Borel σ −cebiri olarak adlandırılır; elemanlarına Borel kümeleri denir.

Tanım 2.20. Bir X kümesi ve X'in alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri içeren sıralı $(X,\mathcal{A})$ çiftine ölçülebilir uzay denir.

Tanım 2.21. $X \neq \emptyset$ olmak üzere X'nin alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri üzerinde tanımlanan genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu;

$i)$ $\mu(\emptyset) = 0$;

$ii)$ $\forall E \in X$ için $\mu(E) \geq 0$;

$iii)$ $\{E_n\}$ herhangi bir ayrık dizi olmak üzere μ sayılabilir toplamsal bir başka deyişle,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

koşullarını sağlarsa, μ fonksiyonu ölçü olarak adlandırılır.

Tanım 2.22. Ölçü uzayı, boştan farklı bir X kümesi, X 'in alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebirinden ve X üzerinde tanımlanan bir μ ölçüsünden oluşan $(X,\mathcal{A},\mu)$ üçlüsüne denir.

Uyarı. $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçü uzayında

$i)$ Eğer $\mu X < +\infty$ ise ölçü sonludur;

$ii)$ Eğer $M_n \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\mu M_n < +\infty$ ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ ise ölçü $\sigma-$sonludur denir.

Tanım 2.23. $(X,\mathcal{A})$ ölçülebilir bir uzay ve μ, bu uzay üzerinde bir ölçü olsun. Eğer $\mu(A) > 0$ olmak üzere A'nın keyfi ölçülebilir bir B alt kümesi için $\mu(A) > \mu(B)$ ya da $\mu(B) = 0$ sağlanırsa $A \in \mathcal{A}$ kümesine atom adı verilir. Atomu olmayan ölçü uzayına ise atomik olmayan ölçü uzayı denir [6].

Lemma 2.24. μ, $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri üzerinde bir ölçü olmak üzere eğer $E,F \in \mathcal{A}$ ve $E \subseteq F$ ise $\mu(E) \leq \mu(F)$ ve $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$ olur.

Lemma 2.25. μ, $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri üzerinde bir ölçü olmak üzere,

$i)$ Eğer (E_n) ölçülebilir kümelerin bir artan topluluğu ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n), \tag{2.11}$$

ii) Eğer (F_n) ölçülebilir kümelerin bir azalan topluluğu ve $\mu(F_1) < +\infty$ ise

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim \mu F_n. \tag{2.12}$$

Tanım 2.26. $\mu(N) = 0$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer bir özellik $\mathcal{A}$ üzerinde sadece $\mathcal{A} \setminus N = N^c$'da sağlanıyorsa bu özellik h.h.y$-\mu$ sağlanır denir.

Örnek. $\mu(N) = 0$ ve $N \in \mathcal{A}$ olsun. $x \notin N$ için

$$f(x) = g(x)$$

$\mathcal{A}$ üzerinde h.h.y$-\mu$ geçerlidir.

Tanım 2.27. $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay olmak üzere $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna

$$\{x \in X: f(x) > a\} \in \mathcal{A} \quad , \ a \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

olması durumunda ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki tüm ölçülebilir genişletilmiş reel değerli fonksiyonların kümesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Bununla birlikte eğer $f \in M(X, \mathcal{A})$ ise,

$$\{x \in X: f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f(x) > n\} \in X \tag{2.14}$$

ve

$$\{x \in X: f(x) = -\infty\} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f(x) > -n\}\right]^C \tag{2.15}$$

olur.

Lemma 2.28. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

$$\forall a \in \mathbb{R}, A_a = \{x \in X: f(x) > a\} \subset \mathcal{A}; \tag{2.16}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, B_a = \{x \in X: f(x) \leq a\} \subset \mathcal{A}; \tag{2.17}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, C_a = \{x \in X: f(x) \geq a\} \subset \mathcal{A}; \tag{2.18}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, D_a = \{x \in X: f(x) < a\} \subset \mathcal{A}. \tag{2.19}$$

Tanım 2.29. $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay olmak üzere eğer $\Sigma \subset \mathcal{A}$ ise,

$$\{x \in \Sigma : f(x) > a\} \in \mathcal{A} \quad , \ a \in R \tag{2.20}$$

olacak şekilde $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\mathcal{A}-$ ölçülebilir(ölçülebilir) fonksiyondur.

Lemma 2.30. *f ve g* reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. O halde,

$$cf, \ f^2, \ f+g, \ fg, \ |f|,$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Tanım 2.31. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için negatif olmayan f^+ ve f^- fonksiyonları X üzerinde,

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \quad , \quad f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda f^+ fonksiyonu f fonksiyonunun pozitif parçası, f^- fonksiyonu ise f fonksiyonunun negatif parçasıdır. Buradan,

$$f = f^+ - f^- \text{ ve } |f| = f^+ + f^-$$

açık olup,

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \text{ ve } f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

özellikleri sağlanır.

Lemma 2.32. Genişletilmiş reel değerli bir f fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow$

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} \in X \quad , \quad B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

kümeleri ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin A \cup B \\ 0, & x \in A \cup B \end{cases} \tag{2.21}$$

fonksiyonu ölçülebilirdir.

Lemma 2.33. $(f_n) \in M(X, \mathcal{A})$ olmak üzere

$$\inf f_n(x) \quad , \quad \sup f_n(x) \quad , \quad \liminf f_n(x) \quad , \quad \limsup f_n(x)$$

fonksiyonları da $M(X, \mathcal{A})$ kümesine aittir.

Sonuç. Eğer $(f_n) \in M(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir fonksiyon dizisi $f \in X$ fonksiyonuna yakınsarsa, $f \in M(X, \mathcal{A})$ olur.

Tanım 2.34. $X \neq \emptyset$ ve $E \subset X$ olsun.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$$

fonksiyonuna E nin karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 2.35. X'e ait bir kümenin karakteristik fonksiyonlarının sonlu lineer kombinasyonlarına basit fonksiyonlar denir. $a_j \in R$, E_j $(j = 1,2, \dots, n)$ bir küme ve χ_{E_j} onun karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \tag{2.22}$$

fonksiyonu basit fonksiyondur. S kümesi, reel değerli X de tanımlı, $\mathcal{A}$ −ölçülebilir basit fonksiyonların kümesidir.

Tanım 2.36. Eğer

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

olmak üzere $\varphi \in M^+(X, \mathcal{A})$ basit fonksiyon ve $\mu(E_j)$, $E_j \subset X$'in ölçüsü ise φ fonksiyonunun integrali,

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) \tag{2.23}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.37. (R, μ) ölçü uzayında reel değerli herhangi bir s fonksiyonu, eğer μ −ölçülebilir sonlu ölçülü kümelerin karakteristik fonksiyonlarının sonlu lineer bir kombinasyonu ise s fonksiyonuna μ −basit fonksiyon adı verilir. Başka bir anlamda, eğer $\{a_{1,\dots}, a_m\}$ sonlu bir dizi ve $\{E_1, \dots, E_m\}$ sonlu dizisi, sonlu ölçünün R ayrık μ −ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ varsa

$$s(x) = \begin{cases} a_j, \ \ x \in E_j, \ \ j = 1, \dots, m \\ 0, x \in R \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j \end{cases} \tag{2.24}$$

olur.

Lemma 2.38. a) Eğer $\varphi, \psi \in M^+(X, \mathcal{A})$ basit fonksiyonlar ve $c \geq 0$ ise,

$$\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu,$$

$$\int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu,$$

b) $\lambda, \mathcal{A}$ üzerinde E için tanımlanmış olmak üzere

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E \, d\mu$$

fonksiyonu $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçüdür.

Tanım 2.39. $f \in M^+(X, \mathcal{A})$ μ ölçüsüne göre f fonksiyonunun integrali $\forall x \in X$ için,

$$\int f \, d\mu = \sup \int \varphi \, d\mu \quad , \quad 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \tag{2.25}$$

olarak tanımlanır. Burada $\varphi \in M^+(X, \mathcal{A})$ basit fonksiyondur.

Ayrıca $f \in M^+(X, \mathcal{A})$, $E \in \mathcal{A}$ ve $f\chi_E \in M^+(X, \mathcal{A})$ olsun. f nin μ ölçüsüne göre integrali,

$$\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu \tag{2.26}$$

olarak tanımlıdır.

Lemma 2.40. a) $f, g \in M^+(X, \mathcal{A})$ ve $f \leq g$ olsun. O zaman

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu,$$

b) $f \in M^+(X, \mathcal{A})$, $E \, ve \, F \in \mathcal{A}$ ve $E \subseteq F$ ise

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu$$

olur.

Tanım 2.41. Eğer (f_n), $M^+(X, \mathcal{A})$ üzerindeki f ye yakınsayan fonksiyonların monoton artan dizisi ise,

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu. \tag{2.27}$$

Sonuç. a) $f \in M^+$ ve $c \geq 0$ ise $cf \in M^+$ ve

$$\int cf\, d\mu = c\int f\, d\mu.$$

$b)$ $f, g \in M^+$ ise $f + g \in M^+$ ve

$$\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Lemma 2.42 (Fatou Lemması).

$(f_n) \in M^+(X, \mathcal{A}) \Rightarrow \int (\liminf f_n)\, d\mu \leq \liminf \int f_n\, d\mu.$

Teorem 2.43 (Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi). (f_n), μ −ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olup hemen hemen her yerde $f_n \uparrow f$ olsun.

$$\int_X f_1\, dx > -\infty$$

sağlanırsa,

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$$

olur.

Teorem 2.44 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi). (f_n), μ −ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olup hemen hemen her yerde $f_n \to f$ yakınsasın. Eğer $\forall n \in N$ için hemen hemen her yerde $|f_n| \leq h$ olacak şekilde $h \in L_1$ varsa $f \in L_1$ ve

$$\int_X f\, d\mu = \lim \int_X f_n\, d\mu.$$

Teorem 2.45 (Beppo-Levi Teoremi). $\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k|\, d\mu$ sonlu olduğunu kabul edelim. O halde hemen hemen her x için $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi için yakınsaktır ve integrali

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k\, d\mu \qquad (2.28)$$

şeklindedir.

Lemma 2.46. Eğer $f \in M(X, \mathcal{A})$ negatif olmayan bir fonksiyon ise,

$i)$ $x \in X, n \in N$ için $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$;

$ii)$ $\forall x \in X$ için $f(x) = \lim \varphi_n(x)$;

$iii)$ Her bir φ_n sadece bir reel değerli sonlu sayıya sahiptir.

Tanım 2.47. f^+, f^-, μ' ye göre sonlu integrallere sahip olacak şekilde, f' nin pozitif ve negatif kısımları olsun. X üzerinde tanımlanan tüm reel değerli X - ölçülebilir f integrallenebilir fonksiyonların kümesi $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ olarak gösterilir. Bu durumda

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

olur.

Teorem 2.48. f ölçülebilir fonksiyon olmak üzere,

$$f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

olup bu durumda

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$$

olur.

Sonuç. f ölçülebilir, g integrallenebilir fonksiyon ve $|f| \leq |g|$ olsun. O halde,

f integrallenebilirdir $\Rightarrow \int |f|\, d\mu \leq \int |g|\, d\mu$.

Teorem 2.49. $f, g,\ \alpha f,\ f + g \in \mathcal{L}$ olsun.

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu \quad , \quad \int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Tanım 2.50 (Hölder Eşitsizliği). $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p$ ve

$g \in L_q$ olsun. O halde, $fg \in L_1$ ve

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}. \tag{2.29}$$

Tanım 2.51 (Minkowski Eşitsizliği). $f, h \in L_p, p \geq 1\ ise\ f + h \in L_p$ ve

$$\|f + h\|_{l_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|h\|_{L_p}. \tag{2.30}$$

Tanım 2.52 (Young Eşitsizliği). $1 < p < \infty$ q, p'nin eşleniği ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.31}$$

Tanım 2.53. Eğer bir X metrik uzayı sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahipse ayrılabilirdir.

Tanım 2.54. (X, ϱ) bir metrik uzayı olmak üzere $u: X \to [0, \infty]$ olsun.

$$\overline{\{x \in X: u(x) \neq 0\}}$$

kümesi, (X, ϱ) uzayının kapanışını göstermiş olup bu kapanışa u fonksiyonunun desteği denir ve $\operatorname{supp} u$ ile gösterilir.

Tanım 2.55. $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümeleri için

$$\int_K |f| \, d\mu < \infty$$

olmak üzere $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna lokal integrallenebilir fonksiyon denir ve $L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Teorem 2.56 (Fubini Teoremi). $i = 1,2, \ldots$ için $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$ ölçülebilir ve $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ olsun. $f(x, y)$, Ω üzerinde integrallenebilir olsun. O halde hemen her $x \in \Omega_1$ ve $y \in \Omega_2$ için

$$\int_{\Omega_1} f(x, y) \, dx \text{ ve } \int_{\Omega_2} f(x, y) \, dy$$

mevcuttur. Ayrıca,

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

3
BANACH FONKSİYON UZAYLARI

3.1 Banach Fonksiyon Uzayları

Banach fonksiyon uzayları, normun temel ölçü ile uygun bir şekilde ilişkili olduğu, ölçülebilir fonksiyonların Banach uzaylarıdır. Bu bölümde fonksiyon uzaylarının Luxemburg sınıflandırması verilecektir. Bu sınıflandırma Banach fonksiyon uzayları kısaca B.f.u olarak isimlendirilir ([1], [11]- [12]). Bu çalışma boyunca (R,μ) ikilisi σ −sonlu ölçü uzayı olarak verilmiştir. Bir başka deyişle,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mu(R_n) < \infty$$

olacak şekilde

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

için $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ mevcuttur.

Tanım 3.1 (Banach Fonksiyon Normu). $\forall f, g, f_n \in M_+, (n = 1,2,3,\cdots), \forall a \geq 0$ sabiti ve R'nin her μ −ölçülebilir E alt kümeleri için

(i) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ h.h.y $-\mu$; $\quad \rho(af) = a\rho(f)$; $\quad \rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

(ii) $0 \leq g \leq f$ h.h.y $-\mu \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$

(iii) $0 \leq f_n \uparrow f$ h.h.y $-\mu \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$

(iv) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$

(v) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f\, d\mu \leq C_E \rho(f)$

özellikleri sağlanacak şekilde bazı $C_E \in (0,\infty)$ sabiti varsa, $\rho: M_+ \to [0,\infty]$ fonksiyoneline Banach fonksiyon normu (ya da kısaca fonksiyon normu) denir.

Tanım 3.2 (Banach Fonksiyon Uzayı). ρ bir Banach fonksiyon normu olsun. $\rho(|f|) < \infty$ şartını sağlayan $\forall f \in M$ için $X = X(\rho)$ koleksiyonuna (ρ tarafından üretilen uzaylara) Banach fonksiyon uzayı denir. $\forall f \in X$ için

$$\|f\|_X \coloneqq \rho(|f|) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere ρ_p Lebesgue fonksiyoneli

$$\rho_p(f) = \begin{cases} \left\{ \int_R f^p \, d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}, (1 \leq p < \infty) \\ ess \sup f, (p = \infty) \end{cases} \tag{3.2}$$

olup $L_p (1 \leq p \leq \infty)$ uzayı bir Banach fonksiyon uzayıdır [1].

Teorem 3.3. ρ bir Banach fonksiyon normu olmak üzere $X = X(\rho)$ ve $\|.\|_X$, (3.1)'deki gibi tanımlansın. O zaman $(X, \|.\|_X)$ bir normlu lineer uzaydır. Ayrıca,

$$S \subset X \hookrightarrow M_0 \tag{3.3}$$

sağlanır.

Özellikle eğer $f_n \to f \in X$ ise $f_n \to f$ sonlu ölçü kümelerinde bir ölçüdür ve dolayısıyla bazı alt diziler f'e h.h.y $-\mu$ noktasal yakınsar.

İspat. μ σ-sonlu olduğundan X Banach fonksiyon uzayı üzerindeki her fonksiyon integrallenebilir ve h.h.y $-\mu$ sonludur. Bu nedenle $X \subset M_0$ olur. Bu nedenle X kümesi, vektör uzay işlemlerini M_0'den devralır ve bu sayede $(X, \|.\|_X)$ 'nin normlu bir lineer uzay olduğunu doğrulamak için Teorem 3.1(i) ve (3.1)'i kullanabiliriz. Teorem 3.1(iv) özelliği, X uzayının, sonlu ölçülü tüm kümelerin karakteristik fonksiyonlarını ve lineerlikten dolayı da her μ-basit fonksiyonunu da içerdiğini gösterir. Bütün μ-basit fonksiyonların kümesi S ile gösterilmek üzere (3.3)'deki kapsama sağlanmış olur.

Geriye $X \hookrightarrow M_0$ gömmesinin sürekli olduğunu göstermek kalıyor. Her iki uzayda metriklenebilir olduğundan X üzerindeki yakınsak her dizi M_0 üzerinde de yakınsaktır. Ancak X üzerinde $f_n \to f$ ise, (3.1)'den dolayı $\rho(|f - f_n|) \to 0$

$(n \to \infty)$ olur. $\varepsilon > 0$ ve E, R'nin sonlu ölçülü herhangi bir alt kümesi olsun. Teorem 3.1(v) özelliğinden

$$\mu = \{x \in E: |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \leq \int_E \frac{1}{\varepsilon} |f - f_n| \, d\mu$$

$$\leq \tfrac{1}{\varepsilon} C_E \rho(|f - f_n|),$$

C_E, n'den bağımsız olduğundan $(n \to \infty)$ 0'a yakınsar. Her sonlu ölçülü kümedeki $f_n \to f$ olur. Bu nedenle M_0 üzerinde de $f_n \to f$ olur. ■

Aşağıda verilecek olan lemma, her Banach fonksiyon uzayı için doğal bir benzerlik taşır.

Lemma 3.4. $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayı olmak üzere varsayalım ki $f_n \in X$ $(n = 1,2, \dots)$ olsun.

(i) Eğer $0 \leq f_n \uparrow f$ h.h.y $-\mu$ ise ya $f \notin X$ ve $\|f_n\|_X \uparrow \infty$, ya da $f \in X$ ve

$$\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$$

olur.

(ii) (Fatou Lemma) Eğer $f_n \to f$ h.h.y $-\mu$ ve $\lim_{n\to\infty} inf \, \|f_n\|_X < \infty$ ise

$$\|f\|_X \leq \lim_{n\to\infty} inf \, \|f_n\|_X$$

olur.

İspat. İlk iddia Tanım 3.2 ve Tanım 3.1'in (iii) şıkkından direkt olarak çıkarılabilir. (ii) için $0 \leq h_n \uparrow |f|$ olacak şekilde $h_n(x) \coloneqq \inf_{m \geq n} |f_m(x)|$ tanımlayalım. Yine Tanım 3.1'in (ii) ve (iii) özelliğinden,

$$\rho(|f|) = \lim_{n\to\infty} \rho(h_n) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m \geq n} \rho(|f_m|) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} inf \, \|f_n\|_X < \infty.$$

Ancak f kesin ölçülebilirdir bu durumda $f \in X$ ve $\|f\|_X \leq \lim_{n\to\infty} inf \, \|f_n\|_X$ olur. ■

Fatou Lemması bir sonraki sonuçta kurulan Banach fonksiyon uzaylarının tamlığının anahtarıdır.

Teorem 3.5. X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Kabul edelim ki $f_n \in X$ $(n = 1,2,\dots)$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty \tag{3.4}$$

olsun. O halde, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in X$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, X üzerinde bir f fonksiyonuna yakınsar ve

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X \tag{3.5}$$

olur. Ayrıca burada X tamdır.

İspat. $(N = 1,2,3,\dots)$ olmak üzere $t = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ ve $t_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$ olarak tanımladığımızda $0 \leq t_N \uparrow t$ olur.

$$\|t_N\|_X \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X , \quad (N = 1,2,3,\dots)$$

olduğundan (3.4) ve Lemma 3.4(i) şıkkından $t \in X$ olur. (3.3)'den $\sum |f_n(x)|$ serisi h.h.y $-\mu$ noktasal yakınsar. Bundan dolayı $\sum f_n(x)$ serisi de aynı şekilde h.h.y $-\mu$ noktasal yakınsar. Yani eğer,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n , \qquad s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n , \qquad (N = 1,2,3,\dots),$$

ise h.h.y $-\mu$, $s_N \to f$ olur. Herhangi bir M için $(N \to \infty)$ h.h.y $-\mu$ olacak şekilde $s_N - s_M \to f - s_M$ elde ederiz. Üstelik (3.4)'ten,

$$\lim_{N\to\infty} \inf \|s_N - s_M\|_X \leq \lim_{N\to\infty} \inf \sum_{n=M+1}^{N} \|f_n\|_X = \sum_{n=M+1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

$(M \to \infty)$, 0'a yakınsar. Fatou Lemmasından (Lemma 3.4.(ii)) $f - s_M \in X$ ve $(M \to \infty)$ $\|f - s_M\|_X \to 0$ dir. Ancak $\forall M = 1,2,3 \dots$ için

$$\|f\|_X \leq \|f - s_M\|_X \to \|s_M\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \sum_{n=1}^{M} \|f_n\|_X$$

olup istenilen (3.5) eşitsizlik $M \to \infty$ oluşturulmuş olur. Kurulan bu özeliğe Riesz-Fisher özelliği denir. Riesz-Fisher özelliğinin, herhangi bir normlu lineer uzayın tamlığına eşit olması doğrulanabilirdir. Bu durumda X tamdır. ■

Teorem 3.6. Kabul edelim ki ρ bir fonksiyon normu ve

$$X = \{f \in M: \rho(|f|) < \infty\}$$

olsun. Her $f \in X$ için $\|f\|_X = \rho(|f|)$ sağlansın. O zaman $(X, \|.\|_X)$ bir Banach uzayıdır. Ayrıca $\forall f, g, f_n \in M, (n = 1,2,3, \cdots)$ ve R'deki her ölçülebilir E alt kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır;

(i) (Latis özelliği) Eğer h.h.y $-\mu$ için $|g| \leq |f|$ ve $f \in X \Rightarrow g \in X$ ve $\|g\|_X \leq \|f\|_X$ dir; özellikle, ölçülebilir bir f fonksiyonu X' e aittir $\Leftrightarrow |f| \in X$. Bu durumda f ve $|f|$ aynı norma sahiptir.

(ii) (Fatou Özelliği) Kabul edelim ki $f_n \in X$, $f_n \geq 0$ $(n = 1,2,3, \cdots)$ ve h.h.y $-\mu$ olmak üzere $f_n \uparrow f$ olsun.

$$f \in X \Rightarrow \|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$$

$$f \notin X \Rightarrow \|f_n\|_X \uparrow \infty$$

(iii) (Fatou Lemması) $f_n \in X$ $(n = 1,2,3, \cdots)$, h.h.y $-\mu$ $f_n \to f$ ve

$$\lim_{n\to\infty} inf \|f_n\|_X < \infty \Rightarrow f \in X$$

ve

$$\|f\|_X \leq \lim_{n\to\infty} inf \|f_n\|_X$$

(iv) X Banach fonksiyon uzayı her basit fonksiyonu içerir.

(v) $\forall f \in X$ için sonlu ölçüye sahip her bir E kümesine,

$$\int_E |f| \, d\mu \leq C_E \|f\|_X$$

olacak şekilde $0 < C_E < \infty$ sağlayan bir C_E sabiti karşılık gelir.

(vi) X üzerinde $f_n \to f \Rightarrow$ sonlu ölçüye sahip bütün kümeler üzerinde $f_n \xrightarrow{\mu} f$ olur. Ayrıca bazı $\{f_n\}$ alt dizileri h.h.y $-\mu$ olacak şekilde f fonksiyonuna noktasal yakınsar.

Teorem 3.7. X ve Y aynı ölçü uzayı altında Banach fonksiyon uzayları olsun.

$$X \subset Y \Rightarrow X \hookrightarrow Y. \qquad (3.6)$$

Eşit olarak, f fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti için

$$\|f\|_Y \leq C\|f\|_X \quad (f \in X) \tag{3.7}$$

olur.

İspat. $X \subset Y$ olduğunu kabul edelim ancak $X \hookrightarrow Y$ sağlanmasın. O halde

$$\|f_n\|_x \leq 1, \quad \|f_n\|_Y > n^3, \ (n = 1,2,3,\cdots),$$

olacak şekilde $f_n \in X$ fonksiyonları mevcuttur.

Her n için tüm f_n'leri $|f_n|$ ile değiştirerek $f_n \geq 0$ varsayabiliriz. Riesz-Fisher özelliğinden $\sum \frac{f_n}{n^2}$ $serisi$, bazı $f \in X$ fonksiyonlarına yakınsar. $f \in X$ ve $X \subset Y$ olduğundan $f \in Y$ olur. Ancak bu durum, her n için $0 \leq n^{-2} f_n \leq f$ ve $\|f\|_Y \geq n^{-2}\|f_n\|_Y > n$ olduğundan imkansızdır. Bu nedenle eşitsizlik f'den bağımsız C'ler için sağlanmalıdır. $X \hookrightarrow Y$ olduğundan ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç. İki Banach fonksiyon uzayı aynı fonksiyon kümelerini içerirse normları eşittir.

3.2 İlişik Uzay

$\forall f \in L_p$ ve $g \in L_{p'}$ olmak üzere klasik Hölder eşitsizliği,

$$1 \leq p \leq \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{3.8}$$

için

$$\int_R |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_{p'}}$$

olduğunu iddia eder. $\forall g \in L_{p'}$ için

$$\|g\|_{L_{p'}} = \sup\left\{\int_R |fg| \, d\mu : f \in L_p, \|f\|_{L_p} \leq 1\right\} \tag{3.9}$$

ve (3.8) sağlayan tüm p ve p' için eşitsizlik açıktır. (3.8) de L_p ile ilişkili olan $L_{p'}$ uzayı, (3.9) da L_p cinsinden açıkça ifade edilmiştir. Buradan hareketle bu bölümde, ilişik uzayı tanımlamak için verilen bir X Banach uzayına karşılık gelen X' uzayını tanımlamak için yukarıdaki eşitsizliğin uygun bir analoğu kullanılmıştır.

Tanım 3.8. ρ bir Banach fonksiyon normu olmak üzere M_+ üzerinde

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int_R fg\, d\mu : f \in M_+, \rho(f) \leq 1\right\}, \qquad (g \in M_+) \qquad (3.10)$$

ile tanımlanan fonksiyonel, ρ'nun ilişik normudur.

Aşağıdaki teorem ρ' fonksiyonelinin bir Banach fonksiyon normu olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.9. ρ bir Banach fonksiyon normu olmak üzere ρ 'nun ilişik normu ρ' de bir Banach fonksiyon normudur [1].

İspat. Bu teoremin ispatı Tanım 3.1'den çıkarılabilir.

Tanım 3.10. ρ bir Banach fonksiyon normu ve $X = X(\rho)$ (ρ tarafından üretilen Banach fonksiyon uzayı) bir Banach fonksiyonu olsun. ρ' , ρ Banach fonksiyon normunun ilişik uzayı olmak üzere X' uzayı da ρ' tarafından üretilen Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde X' uzayı X in ilişik uzayıdır.

Bu duruma ek olarak (3.1) ve (3.10) dan dolayı X' ilişik uzayında g Banach fonksiyon normu

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\int_R |fg|\, d\mu : f \in X, \|f\|_X \leq 1\right\} \qquad (3.11)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.11 (Hölder Eşitsizliği). X ve onun ilişik uzayı X' birer Banach fonksiyon uzayı olsun. $f \in X$ ve $g \in X'$ ise fg integrallenebilirdir ve

$$\int_R |fg|\, d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'} \qquad (3.12)$$

olur.

İspat. Eğer $\|f\|_X = 0$ ise h.h.y $-\mu\ f = 0$ olup eşitsizliğin her iki tarafı da 0'a eşit olur. Eğer $\|f\|_X \geq 0$ ise $\frac{f}{\|f\|_X}$ fonksiyonu 1 normuna sahiptir. (3.11)'den

$$\int \left|\left(\frac{f}{\|f\|_X}\right) g\right| d\mu \leq \|g\|_{X'}$$

ve $\|f\|_X$ ile çarparak (3.12) eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 3.12. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere p ve p', $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ özelliğini sağlarsa L_p nin ilişik uzayı $L_{p'}$ olur.

Aşağıdaki lemma Teorem 3.11'in integrallenebilirliği için kullanışlı bir karşılaştırmadır. Bu lemma bazen Landau rezonans teoremi olarak adlandırılır.

Lemma 3.13. g ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$g \in X' \Leftrightarrow \forall f \in X$ için fg integrallenebilirdir.

Teorem 3.14 (G. G. Lorentz; W. A. J. Luxemburg). Her Banach fonksiyon uzayı X, kendisinin ikinci ilişik uzayı X'' ile çakışır. Bir başka deyişle,

$$f \in X \Leftrightarrow f \in X'' \tag{3.13}$$

ve

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}. \tag{3.14}$$

Yukarıda verilen teorem refleksivliğin bir analoğu niteliğindedir [1].

Lemma 3.15. g fonksiyonunun X' ilişik uzayındaki normu

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\left|\int_R fg\, d\mu\right| : f \in X, \|f\|_X \leq 1\right\} \tag{3.15}$$

ile ifade edilir.

Teorem 3.16. X Banach fonksiyon uzayının X' ilişik uzayı, X in kapalı normlu temel alt uzayı olan X^* Banach uzayı dualine kanonik ve izometrik olarak izomorfiktir.

Önerme 3.17. X, Y iki Banach fonksiyon uzayı ve $X \hookrightarrow Y$ ise $Y' \hookrightarrow X'$ olur. Ayrıca,$\forall f \in X$ için

$$\|f\|_Y \leq c\|f\|_X \Rightarrow \forall g \in Y' \text{ için } \|g\|_{X'} \leq c\|g\|_{Y'}\ .$$

3.3 Normun Mutlak Sürekliliği

Bu bölümde, $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, R'nin μ −ölçülebilir altkümelerinin keyfi bir dizisi olarak tanımlanacaktır.

Tanım 3.18. X Banach fonksiyon uzayındaki bir f fonksiyonuna, h.h.y $-\mu$ $E_n \to \emptyset$ olmak üzere her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\|f\chi_{E_n}\|_X \to 0$ sağlıyorsa mutlak sürekli norma sahiptir denir.

X üzerinde sürekli norma sahip tüm fonksiyonların kümesi X_a ile gösterilir. Eğer $X_a = X$ ise X uzayının kendisi mutlak sürekli norma sahiptir.

Önerme 3.19. X Banach fonksiyon uzayı ve $f \in X$ olmak üzere

f mutlak sürekli norma sahiptir $\Leftrightarrow$ $\|f\chi_{E_n}\|_X \downarrow 0$ olmasıdır.

Burada $\forall\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi h.h.y $-\mu$ $E_n \downarrow \emptyset$ sağlamalıdır.

Örnek. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(R,\mu)$ Lebesgue uzayı mutlak sürekli norma sahiptir.

Lemma 3.20. f fonksiyonu mutlak sürekli norma sahip $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ öyle ki $\mu(E) < \delta$ için $\|f\chi_E\| < \varepsilon$.

İspat. Kabul edelim ki olmasın. O halde $\exists\delta > 0$ $(n = 1,2,\dots)$ için

$$\mu(E_n) < 2^{-n}, \qquad \|f\chi_{E_n}\|_X \geq \varepsilon$$

sağlayan E_n ölçülebilir kümeleri vardır. Ancak

$$\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) < 2^{-m+1},\ (m = 1,2,\cdots)$$

gösteriyor ki h.h.y $-\mu$ $E_n \to \emptyset$. Bu durum f fonksiyonunun mutlak sürekli norma sahip olduğu gerçeğiyle çelişir. ■

Önerme 3.21. X Banach fonksiyon uzayı ve $f \in X$ olsun.

f mutlak sürekli norma sahiptir $\Leftrightarrow \|f_n\|_X \downarrow 0$.

Burada $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve $\mu-$ölçülebilir fonksiyon f için h.h.y $-\mu$ $|f| \geq f_n \downarrow 0$ sağlanmış olmalıdır.

Tanım 3.22. X Banach fonksiyon uzayı olsun. Basit fonksiyonlar kümesinin X üzerindeki kapanışı X_b ile tanımlanır.

Önerme 3.23. X_b alt uzayı, sonlu ölçü kümelerinde destekli sınırlı fonksiyonlar kümesinin X'deki kapanışıdır. Bir başka deyişle, X Banach fonksiyon uzayı olmak üzere

$$X_b = \overline{\{f \in X: f \text{ sınırlı } ve\ \mu(\operatorname{supp} f) < \infty\}}\ .$$

İspat. Sonlu bir ölçü kümesinde desteklenen her sınırlı fonksiyonun X_b'ye ait olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki f sınırlı ve $E = \{x: f(x) \neq 0\}$ sonlu ölçülü olsun.

$f \geq 0$ ise negatif olmayan basit fonksiyonların $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi E' de desteklidir ve $f_n \to f$ düzgün yakınsar. Ancak

$$\|f_n - f\|_X = \|(f_n - f)\chi_E\|_X \leq \|f_n - f\|_{L_\infty}\|\chi_E\|_X\ ,$$

E sonlu ölçülü ve $\|\chi_E\|_X < \infty$ olduğundan $n \to \infty$ için 0'a götürür.

Buradan genel durum f fonksiyonunu reel ve sanal bölümlerine ayırarak takip eder ve bu bölümler pozitif ve negatif parçalara ayrılır.

Teorem 3.24. X_b alt uzayı X uzayının bir sıralı idealidir ve

$$X_a \subset X_b \subset X\ . \tag{3.16}$$

Teorem 3.25. X in X_b alt uzayı $(X')^*$ norm temel alt uzayına izometrik izomorftur.

Teorem 3.26. X bir Banach fonksiyon uzayı olmak üzere,

$X_a = X_b \Leftrightarrow$ Her E sonlu ölçü kümesi için χ_E karakteristik fonksiyonu mutlak sürekli norma sahiptir.

İspat. Gereklilik her E sonlu ölçülü kümesi için χ_E karakteristik fonksiyonu X_b ye ait olduğundan sağlanır. Tersine, $\mu(E) < \infty$ olmak üzere her χ_E mutlak sürekli norma sahip olsun. O halde her basit fonksiyonda sahiptir. X_a kapalı olduğundan $X_b \subset X_a$ ispatlanır. $X_a \subset X_b$, teorem 3.24'ten sağlanır. Bu nedenle $X_a = X_b$

olur. ■

3.4 Duallik ve Yansıma

Teorem 3.27. X Banach fonksiyon uzayı olmak üzere Y, X uzayının basit fonksiyonları içeren sıralı ideali olsun. O halde

$$Y^* = X' \Leftrightarrow Y \subset X_a$$

veya

$$Y = X_a = X_b \ . \tag{3.17}$$

Sonuç. X Banach fonksiyon uzayı olsun. S, basit fonksiyonların kümesi olmak üzere

$$S \subset X_a \Rightarrow (X_a)^* = X' \ .$$

İspat. $Y = X_a$ ise Y basit fonksiyonları kapsayan bir sıralı idealdir. Teorem 3.27'yi Y için uygularsak ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.28. Mutlak sürekli norm fonksiyonlarının X_a alt uzayı, X Banach fonksiyon uzayının bir sıralı idealidir.

Sonuç. X^*, X Banach fonksiyon uzayının Banach dual uzayı olsun.

$$X^* = X' \Leftrightarrow X = X_a \ .$$

Sonuç. Bir Banach fonksiyon uzayı olan X yansımalıdır $\Leftrightarrow$ X ve ilişik uzayı X' mutlak sürekli norma sahiptir.

3.5 Dağılım Fonksiyonları ve Azalan Yeniden Düzenlemeler

Tanım 3.29. $f \in M_0 = M_0(R, \mu)$ için dağılım fonksiyonu μ_f,

$$\mu_f(\lambda) = \mu\{x \in R: |f(x)| > \lambda\}, \ (\lambda \geq 0) \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca μ_f yalnızca f fonksiyonunun $|f|$ mutlak değerine bağlıdır ve μ_f, $+\infty$ değerini alabilir [1].

Tanım 3.30. $f \in M_0(R,\mu)$ ve $g \in M_0(S,\nu)$ olmak üzere eğer f ve g fonksiyonları aynı dağılım fonksiyonuna sahipse bu fonksiyonlara denk ölçülebilirdir denir. Yani

$$M_f(\lambda) = v_g(\lambda), \quad \forall \lambda \geq 0 \ .$$

Önerme 3.31. $f, g, f_n \in M_0(R,\mu)$ $n = (1,2,\cdots)$ ve α sıfırdan farklı bir skaler olsun. μ_f dağılım fonksiyonu, negatif olmayan, azalan ve $[0,\infty)$ aralığında sağdan süreklidir. Ayrıca

$$\text{h.h.y} -\mu \quad |g| \leq |f| \Rightarrow \mu_g \leq \mu_f \tag{3.19}$$

$$\mu_{af}(\lambda) = \mu_f(\lambda \setminus |a|) \ , (\lambda \geq 0) \tag{3.20}$$

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2) \ , \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \tag{3.21}$$

$$\text{h.h.y} -\mu \quad |f| \leq \lim_{n\to\infty} inf|f_n| \Rightarrow \mu_f \leq \lim_{n\to\infty} inf\mu_{f_n} \tag{3.22}$$

ve

$$\text{h.h.y} -\mu \ |f_n| \uparrow |f| \Rightarrow \mu_{f_n} \uparrow \mu_f \tag{3.23}$$

Tanım 3.32. $f \in M_0(R,\mu)$ olduğunu kabul edelim. f^*, f'nin

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\} \ , \ (t \geq 0) \tag{3.24}$$

şeklinde $[0,\infty)$ aralığında tanımlanan azalan yeniden düzenlemesidir.

Uyarı. $f \in M_0(R,\mu)$ fonksiyonunun μ_f dağılım fonksiyonu sürekli ve kesin azalan fonksiyon ise f^*, μ_f fonksiyonunun uygun aralıkta adi tersidir. Ayrıca μ_f dağıtım fonksiyonunun monotonluğundan ve Tanım 3.32'den

$$f^*(t) = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m_{Mf}(t) \ , (t \geq 0) \tag{3.25}$$

elde edilir.

Önerme 3.33. $f, g, f_n \in M_0(R,\mu)$ $n = (1,2,\cdots)$ ve α'nın herhangi bir skaler olduğunu kabul edelim. f^*, negatif olmayan, azalan, $[0,\infty)$ aralığında sağdan sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca;

(i) $\text{h.h.y} -\mu \quad |g| \leq |f| \Rightarrow g^* \leq f^*$;

(ii)$(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$;

(iii) $(f+g)^*(t_1+t_2) \le f^*(t_1) + g^*(t_2)$, $(t_1, t_2 \ge 0)$;

(iv) h.h.y $-\mu$ $|f| \le \lim_{n\to\infty} \inf |f_n| \Rightarrow f^* \le \lim_{n\to\infty} \inf f_n^*$;

Bunun yanı sıra

$$\text{h.h.y } -\mu \ \ |f_n| \uparrow |f| \Rightarrow f_n^* \uparrow f^*;$$

$$f^*\left(\mu_f(\lambda)\right) \le \lambda, \ \left(\mu_f(\lambda) < \infty\right); \qquad \mu_f\left(f^*(t)\right) \le t, \ \ \left(f^*(t)\right) < \infty;$$

f ve f^* denk ölçülebilirdir;

$$(|f|^p)^* = (f^*)^p, \ \ (0 < p < \infty).$$

Önerme 3.34. $f \in M_0$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\int_R |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) \, d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt. \tag{3.26}$$

Özel olarak $p = \infty$ ise

$$x \in R \ için \ ess \sup |f(x)| = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0). \tag{3.27}$$

3.6 Hardy ve Littlewood'un Bir Eşitsizliği

Lemma 3.35. $g, (R, \mu)$ üzerinde negatif olmayan bir basit fonksiyon ve E, R'nin keyfi μ −ölçülebilir alt kümesi olsun. O halde

$$\int_E g \, d\mu \le \int_0^{\mu(E)} g^*(s) \, ds \tag{3.28}$$

olur.

Teorem 3.36 (G. H. Hardy & J. E. Littlewood).

$$f, g \in M_0 = M_0(R, \mu) \Rightarrow \int_R |fg| \, d\mu \le \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) \, ds \tag{3.29}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat. f^* ve g^* sadece $|f|\ ve\ |g|$ fonksiyonlarına bağlı olduğu için

$$\int_R |fg|\, d\mu \le \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\, ds$$

eşitsizliğini negatif olmayan f ve g fonksiyonları için kurmak yeterlidir. Diğer yandan Önerme 3.33'ün 4. maddesinden ve monoton yakınsaklık teoreminden, f ve g'nin basit olduğunu varsaymada genelliği bozan bir durum yoktur.

Bu durumda,

$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m$ ve $a_j > 0, j = (1,2,\dots,m)$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x)$$

yazabiliriz. Buradan da

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j)]}(t)$$

elde edilir. Lemma 3.35'ten

$$\int_R |fg|\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_j} g\, d\mu \le \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(s)\, ds$$

$$= \int_0^\infty \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j)]}(s)\, g^*(s)\, ds$$

$$= \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\, ds$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Tanım 3.37. $\forall f, g \in M_0(R,\mu)$ için

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)\, dt = \sup \int_R |f\tilde{g}|\, d\mu \qquad (3.30)$$

eşitsizliği sağlanırsa, tamamen $\sigma-$sonlu ölçü uzayı (R,μ) rezonant olarak tanımlanır. Burada $\tilde{g} \in R$, g ile denk ölçülebilirdir.

Tanım 3.38. $\forall f, g \in M_0(R,\mu)$ olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t)\,dt = \int_R |f\tilde{g}|\,d\mu \tag{3.31}$$

sağlanıyorsa ve $\tilde{g}$, R üzerinde g fonksiyonu ile denk ölçülebilir ise (R,μ) güçlü rezonanttır.

Örnek. $f(x) = 1 - e^{-x}$, $(0 \le x < \infty)$, $f^* \equiv 1$ ve $g = g^* = \chi_{[0,1)}$ olsun. $\tilde{g} \in M_0(R,\mu)$, g fonksiyonu ile denk ölçülebilir olsun. O zaman $|\tilde{g}|$, $\mu(E) = 1$ olmak üzere $(0,\infty)$ aralığının herhangi bir alt kümesi olan E'nin karakteristik fonksiyonu olur. Ancak,

$$\int_R |f\tilde{g}|\,d\mu = \int_E (1 - e^{-x})\,dx < 1 = \int_0^{\infty} f^*(t)g^*(t)\,dt$$

olduğundan eşitlik sağlanmaz.

Uyarı. Her güçlü rezonant ölçülebilir uzay rezonanttır. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Yukarıda verilen örnek bu duruma bir örnektir.

Örnek. $\mu(a) = 1\ ve\ \mu(b) = 2$ olmak üzere $a, b \in (R,\mu)$ olsun.

$$f = \chi_b\,, \qquad g = \chi_a\,, \qquad f^* = \chi_{[0,2)}\,, \qquad g^* = \chi_{[0,1)}$$

ise $\int f^*g^* = 1$ olur. Ancak, g^* denk ölçülebilir fonksiyonu için

$$\int |f\tilde{g}|\,d\mu = 0$$

olup $f\ ve\ \tilde{g}$, ayrık destekliye sahip olmak zorundadır.

Bu argüman aslında pozitif ama denk olmayan ölçülere sahip iki atom içeren hiçbir atomik ölçü uzayının rezonant olamayacağını gösterir.

Lemma 3.39. (R,μ) sonlu atomik olmayan bir ölçü uzayı olsun. Kabul edelim ki $f \in M_0(R,\mu)$ ve t, $0 \le t \le \mu(R)$ sağlayan keyfi bir sayı olsun. O halde

$\mu(E_t) = t$ olmak üzere,

$$\int_{E_t} |f|\, d\mu = \int_0^t f^*(s)\, ds \tag{3.32}$$

eşitsizliğini sağlayan bir ölçülebilir E_t kümesi mevcuttur. Üstelik,

$$0 \le s \le t \le \mu(R) \Rightarrow E_s \subset E_t \tag{3.33}$$

t ile artacak şekilde inşa edilebilir.

Aşağıdaki teorem ölçü uzayının güçlü rezonant olması için gerekli olan kriterleri göstermektedir.

Teorem 3.40. (R, μ) tamamen σ −sonlu ölçülebilir uzayının güçlü rezonant olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki türden biri olmasıdır;

(i) Atomik olmayan uzay,

(ii) Tüm atomları aynı ölçüye sahip, tamamen atomik uzay.

Aşağıdaki teorem ölçü uzayının rezonant olmasının kriteridir

Teorem 3.41. (R, μ) tamamen σ −sonlu ölçülebilir uzayının rezonant olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki türden biri olmasıdır;

(i) Atomik olmayan uzay,

(ii) Tüm atomları aynı ölçüye sahip, tamamen atomik uzay.

3.7 Elementer Maksimal Fonksiyon (Hardy-Littlewood)

g, pozitif ölçü t'nin bir E kümesinin karakteristik fonksiyonu olduğunda, Hardy-Littlewood eşitsizliği

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f|\, d\mu \le \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds,\ (f \in M_0) \tag{3.34}$$

eşitsizliğine indirgenir.

İkinci ortalamanın, t ölçü kümeleri üzerinden alınan tüm f ortalamaları arasında da maksimum olduğunu gözlemleyelim. Bu nedenle eşitsizliğin sağ tarafındaki fonksiyona elementer maksimal fonksiyon denir.

Tanım 3.42. $f \in M_0(R,\mu)$ olsun. f^{**} fonksiyonuna, f^* fonksiyonunun maksimal fonksiyonu denir ve

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \quad (t>0) \tag{3.35}$$

ile gösterilir.

$f \to f^{**}$ maximal operatörünün bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.43. $f, g, f_n (n = 1,2,\cdots) \in M_0$ ve a keyfi bir skaler olsun. O halde, f^{**} negatif olmayan, azalan ve $(0,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır;

(i) h.h.y $-\mu$ $f^{**} \equiv 0 \Leftrightarrow f = 0$; (3.36)

(ii) $f^* \le f^{**}$; (3.37)

(iii) h.h.y $-\mu$ $|g| \le |f| \Rightarrow g^{**} \le f^{**}$ (3.38)

(iv) $(af) = |a| f^{**}$ (3.39)

(v) h.h.y $-\mu$ $|f_n| \uparrow |f| \Rightarrow f_n^{**} \uparrow f^{**}$. (3.40)

Önerme 3.44. (R,μ) tamamen σ −sonlu ölçü uzayı ve t, μ'nün görüntüsündeki herhangi bir pozitif sayı olsun. $f \in M_0(R,\mu)$ olmak üzere

$a)$ (R,μ) rezonant ise,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\sup\left\{\int_E |f|\,d\mu : \mu(E) = t\right\}, \tag{3.41}$$

$b)$ (R,μ) güçlü rezonant ise $\mu(E) = t$ olmak üzere

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_E |f|\,d\mu \tag{3.42}$$

olacak şekilde R'nin bir E alt kümesi mevcuttur.

Uyarı. Keyfi ölçüm uzayları için maksimal operatörün alt toplamsallığı geri çekme adı verilen yöntem uygulanarak atomik olmayan ölçüm uzayları için de türetilebilir.

Bu prosedür, keyfi bir (R,μ) tamamen σ −sonlu ölçü uzayını, atomik olmayan bir $(\bar{R},\bar{\mu})$ ölçü uzayına gömmemizi sağlar.

Uyarı. $\forall f \in M_0(R,\mu)$ için $\varepsilon_1 f$, R_0 üzerinde f ile çakışan $M_0(\bar{R},\bar{\mu})$'ın elemanı olsun. A_j, sonlu pozitif bir ölçünün atomu ve $I_j, m(I_j) = \mu(A_j)$ sağlayan reel sayılar doğrusu ayrık alt aralıkları olmak üzere burada $\varepsilon_1 f$, her I_j'deki sabit değerin, A_j deki f değerine denk olduğunu varsayar. Böylece f ve $\varepsilon_1 f$ denk ölçülebilirdir ve

$$(\varepsilon_1 f)^* = f^*,\ (\varepsilon_1 f)^{**} = f^{**} \tag{3.43}$$

Teorem 3.45. (R,μ) tamamen $\sigma-$sonlu ölçülebilir uzay ve $f,g \in M_0(R,\mu)$ olsun. O zaman,

$$(f+g)^{**}(t) \le f^{**}(t) + g^{**}(t),\ \ (0 < t < \infty). \tag{3.44}$$

İspat. ε_1 lineer olduğundan

$$\varepsilon_1(f+g) = \varepsilon_1 f + \varepsilon_1 g$$

olur. Ancak $(\bar{R},\bar{\mu})$ atomik olmadığından

$$[\varepsilon_1(f+g)]^{**}(t) = [\varepsilon_1 f + \varepsilon_1 g]^{**}(t)$$

$$\le [\varepsilon_1 f]^{**}(t) + [\varepsilon_1 g]^{**}(t),$$

yukarıda (3.43)'dan yapılan gözlemle atomik olmayan ölçü uzaylarında sağlanır. (3.6)'yı eşitsizliğe uygularsak ispat tamamlanır. ■

Sonuç. Teorem 3.45, $f \to f^{**}$ maximal operatörünün alt toplamsallık özelliğini sağladığını gösterir. Bir diğer anlamda, $t \in \Re(\mu)$ ve (R,μ) rezonant olmak üzere

$$(f+g)^{**}(t) \le f^{**}(t) + g^{**}(t), \tag{3.45}$$

sağlanır.

Tanım 3.46. $f_1, f_2 \in M_0(R,\mu)$ olmak üzere

$$f_1^{**} \le f_2^{**} \Rightarrow f_1 \prec f_2. \tag{3.46}$$

Bir diğer manada $t > 0$ için

$$\int_0^t f_1^*(s)\,ds \le \int_0^t f_2^*(s)\,ds \Rightarrow f_1 \prec f_2. \tag{3.47}$$

Tanım 3.47 (Hardy-Littlewood-Pólya). $f,g \in M_0(R,\mu)$ ve $\forall t \in [0,\mu(R)]$ olmak üzere eğer t değerlerinden biri için,

$$\int_0^t f^*(s)\,ds \le \int_0^t g^*(s)\,ds \tag{3.48}$$

eşitsizliği sağlanırsa f ve g fonksiyonları arasında Hardy-Littlewood-Pólya bağıntısı vardır denir ve $f \prec g$ şeklinde gösterilir [30].

Hardy-Littlewood-Pólya'dan da bilinen "$\prec$" bağıntısı, genellikle aşağıdaki sonuçla birlikte kullanılacaktır.

Önerme 3.48 (Hardy Lemması). ε_1 ve ε_2, $(0,\infty)$ aralığı üzerinde pozitif ölçülebilir fonksiyon olmak üzere $t > 0$ için

$$\int_0^t \varepsilon_1(s)\,ds \le \int_0^t \varepsilon_2(s)\,ds \tag{3.49}$$

olduğunu varsayalım. η, $(0,\infty)$ aralığında keyfi pozitif azalan fonksiyon olsun. O halde,

$$\int_0^\infty \varepsilon_1(s)\eta(s)\,ds \le \int_0^\infty \varepsilon_2(s)\eta(s)\,ds \tag{3.50}$$

olur.

İspat. Monoton yakınsama teoreminden, negatif olmayan azalan bir η basamak fonksiyonu için sonucu kanıtlamanın yeterli olduğu görülür. Bu durumda, η fonksiyonunu;

$$\eta(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{(0,t_j)}(s)$$

a_j pozitif ve $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. (3.49)'u kullanarak

$$\int_0^\infty \varepsilon_1 \eta\,ds = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{t_j} \varepsilon_1\,ds \le \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{t_j} \varepsilon_2\,ds = \int_0^\infty \varepsilon_2 \eta\,ds$$

olur ki bu (3.50) eşitsizliğini gösterir. ■

3.8 Yeniden Düzenleme Altında Değişmez Uzaylar (Simetrik uzay)

Bu bölümde Banach fonksiyon uzaylarını daha genel ölçü uzaylarına taşıyacağız. Yeniden düzenleme altında değişmez kalan uzaylar olarak adlandırılan bu uzaylar, genel olarak Banach fonksiyon uzaylarından daha zengin bir yapıya sahiptir.

Aşağıdaki tanım, simetrik uzaylar üzerinde ρ Banach fonksiyon normunun ve ρ dan üretilen Banach fonksiyon uzayının durumunu açıklar.

Tanım 3.49. ρ (R,μ) üzerinde bir Banach fonksiyon normu olsun. Her denk ölçülebilir $f, g \in M_0^+(R,\mu)$ için

$$\rho(f) = \rho(g)$$

sağlandığı takdirde ρ normuna, yeniden düzenleme altında değişmezdir(simetriktir) denir. Bu durumda ρ tarafından üretilen $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayına, yeniden düzenleme altında değişmez uzay (simetrik uzay) denir.

Uyarı. X Banach fonksiyon uzayı olmak üzere X'in simetrik uzay olması için gerek ve yeter koşul $f \in X$, $g \sim f$ olmak üzere

$$g \in X \; ve \; \|g\|_X = \|f\|_X$$

olmasıdır.

Örnek. $L_p(R,\mu)$ Lebesgue uzayları simetrik uzaylardır. Bu durum önerme 3.34'ten çıkarılabilir.

Uyarı. Temeldeki ölçü uzayı rezonant olduğunda f'nin denk ölçülebilir f^* fonksiyonu var olduğundan f yerine f^* cinsinden bir yorumlama yapabiliriz.

Önerme 3.50. ρ, (R,μ) üzerinde simetrik bir norm olsun. Öyleyse onun ρ' ilişik normu da simetriktir. Ayrıca bu normlar;

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds : \rho(f) \le 1\right\}, (g \in M_0^+) \qquad (3.51)$$

ve

$$\rho(f) = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds : \rho'(g) \le 1\right\}, \quad (f \in M_0^+) \tag{3.52}$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç (Hölder Eşitsizliği). ρ, (R,μ) üzerinde simetrik bir norm olsun. Eğer $f, g \in M_0^+(R,\mu)$

ise

$$\int_R fg\,d\mu \le \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds \le \rho(f)\rho'(g). \tag{3.53}$$

İspat. Eşitsizliğin ilk kısmı teorem 3.36'dan, ikinci kısmı ise önerme 3.50'den sağlanır.

Sonuç. X bir rezonant ölçü uzayı üzerinde Banach fonksiyon uzayı olsun. Bu durumda X'in simetrik olması için gerek ve yeter koşul onun X' ilişik uzayının da simetrik olmasıdır. Normları da

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds : \|f\|_X \le 1\right\}, \quad (g \in X') \tag{3.54}$$

$$\|f\|_X = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds : \|g\|_{X'} \le 1\right\}, \quad (f \in X) \tag{3.55}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç (Hölder Eşitsizliği). X, (R,μ) rezonant ölçü uzayında simetrik uzay olsun. Eğer $f \in X$ ve $g \in X'$ ise

$$\int_R |fg|\,d\mu \le \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds \le \|f\|_X \|g\|_{X'}. \tag{3.56}$$

Teorem 3.51. (R,μ) rezonant ölçü uzayı olmak üzere $f_1, f_2 \in M_0^+(R,\mu)$ olduğunu kabul edelim. ρ, (R,μ) üzerinde keyfi simetrik fonksiyon normu olsun. O halde

$$f_1 \prec f_2 \Rightarrow \rho(f_1) \le \rho(f_2)$$

Sonuç. X bir rezonant ölçü uzayında simetrik uzay olsun. $f_1 \in M_0$ ve $f_2 \in X$ olsun.

$$f_1 \prec f_2 \Rightarrow f_1 \in X \text{ için } \|f_1\|_x \le \|f_2\|_x$$

olur.

Teorem 3.52. (R,μ) herhangi bir tamamen σ −sonlu ölçü uzayı ve λ, (R^+,m) üzerinde simetrik fonksiyon normu olsun.

$$\underline{\lambda}(f) = \lambda(f^*) \ , \ \left(f \in M_0^+(R,\mu)\right) \tag{3.57}$$

şeklinde ifade edilen $\underline{\lambda}$ fonksiyoneli, (R,μ) üzerinde simetrik fonksiyon normudur.

Teorem 3.53 (Luxemburg Temsil Teoremi). ρ bir rezonant ölçü uzayı olan (R,μ) üzerinde simetrik fonksiyon normu olsun. O zaman

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*) \ , \ \left(f \in M_0^+(R,\mu)\right) \tag{3.58}$$

sağlayan (R^+,m) üzerinde bir $\bar{\rho}$ simetrik fonksiyon normu olsun. Ayrıca σ, (R^+,m) üzerinde ρ'yu temsil eden herhangi bir simetrik fonksiyon normu olsun.

$$\rho(f) = \sigma(f^*) \ , \ \left(f \in M_0^+(R,\mu)\right) \tag{3.59}$$

sağlanır. O halde ilişik norm ρ' ve ρ, ilişik norm σ' ve σ ile aynı şekilde temsil edilir ki bu temsil;

$$\rho'(g) = \sigma'(g^*) \ , \ \left(g \in M_0^+(R,\mu)\right) \tag{3.60}$$

şeklindedir (ispat için bkz. [1]).

3.9 Temel Fonksiyon

Bu bölümde ele alınan bütün simetrik uzayların bir (R,μ) rezonant ölçü uzayı üzerinde olduğu kabul edilmiştir.

Tanım 3.54. X, bir (R,μ) rezonant ölçü uzayı üzerinde simetrik Banach fonksiyon uzayı olsun. $\Re(\mu)$ görüntü kümesine ait her sonlu t değeri ve $\mu(E) = t$ olmak üzere R'nin bir E alt kümesi için

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X \tag{3.61}$$

olsun. φ_X fonksiyonuna X uzayının temel fonksiyonu denir.

Yukarıda verilen tanım, alınan X uzayı simetrik olduğu için doğru olur. Pseudosimetrik uzaylarda temel fonksiyon daha farklı şekilde tanımlanır.

Uyarı. $\mu(E) = t$ özelliğini sağlayan E kümesinin seçimi önemsizdir. Aynı şekilde $\mu(F) = t$ sağlayan R üzerinde başka bir F kümesi alalım. $\chi_E \, ve \, \chi_F$ denk ölçülebilir olup X uzayının simetrikliğinden

$$\|\chi_E\|_X = \|\chi_F\|_X$$

olur. Buradan φ_X iyi tanımlıdır.

Örnek. (i) (R, μ) atomik olmasın. $\Re(\mu)$, $[0, \mu(R)]$'den oluşur.

$$\varphi_{L_p}(t) = t^{\frac{1}{p}} \quad , \quad (1 \leq p < \infty) \quad , \quad \big(0 \leq t < \mu(R)\big) \tag{3.62}$$

ve

$$\varphi_{L_\infty}(0) = 0 \quad , \quad \varphi_{L_\infty}(t) = 1 \quad , \quad \big(0 < t < \mu(R)\big) \tag{3.63}$$

olarak verilen $L^p(R, \mu)$ temel fonksiyonudur.

(ii) (R, μ) rezonant ölçü uzayının diğer durumu, (R, μ) uzayının tüm atomlarının aynı ölçüye sahip olup tamamen atomik olduğu durumdur. En tipik örnek, sonlu görüntüsü $Z^+ = \{0,1,2, \dots\}$ olan sayma ölçülü Z tam sayılar kümesidir.

$L^p(Z)$ yerine l^p yazılırsa ;

$$\varphi_{lp}(n) = n^{\frac{1}{p}} \quad , \quad (1 \leq p < \infty) \quad , \quad n = (0,1,2, \cdots) \tag{3.64}$$

$$\varphi_{l_\infty}(0) = 0 \quad , \quad \varphi_{l_\infty}(n) = 1 \quad , \quad n = (0,1,2, \cdots) \tag{3.65}$$

elde edilir.

Teorem 3.55. X, (R, μ) uzayında simetrik uzay olsun ve X', X in ilişik uzayı olsun. $\Re(\mu)$ de bulunan her sonlu t değeri için

$$\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t) = t. \tag{3.66}$$

Bu özelliklerden $L^p(R, \mu)$ ve ilişik uzayı $L^{p'}(R, \mu)$ temel fonksiyonları aynı şekilde t ye eşittir.

Sonuç. X, (R, μ) uzayında simetrik uzay olsun. O halde X üzerindeki φ_X temel fonksiyonu için aşağıdakiler sağlanır:

(i) φ_X artan olmak üzere $\varphi_x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$; (3.67)

(ii) $\frac{\varphi_X(t)}{t}$ azalandır; (3.68)

(iii) φ_X orijin dışında süreklidir. (3.69)

Teorem 3.56. (R,μ) tamamen $\sigma-$sonlu atomik olmayan ölçü uzayı ve X, (R,μ) üzerinde simetrik uzay olsun.

(a) Aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

(i) $\lim_{t\to 0^+}\varphi_X(t)=0$;

(ii) $X_a = X_b$;

(iii) $(X_b)^* = X'$.

Eğer μ ayrılabilir ise $i)$, $ii)$, $iii)$ koşulları $iv)$ koşuluna denk olur;

(iv) X_b ayrılabilirdir.

(b) $\lim_{t\to 0^+}\varphi_X(t) > 0 \Rightarrow X_a = \{0\}$.

Yukarıda verilen teoremde temel fonksiyon ve duallik, ayrılabilirlik ve basit fonksiyon arasındaki ilişki verilmiştir.

Tanım 3.57. φ, $R^+ = [0,\infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer

$\varphi(t)$, $(0,\infty)$ aralığında artan olmak üzere $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$;

$\frac{\varphi(t)}{t}$, $(0,\infty)$ aralığında azalan fonksiyon ise φ fonksiyonuna kuasikonkav adı verilir.

Uyarı. $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sadece orijinde 0 olan her negatif olmayan fonksiyon kuasikonkavdır. Bunun yanısıra konkav olmayan kuasikonkav fonksiyonlarda vardır;

$$\varphi(t) = \max(1,t) \quad , \quad (t>0)$$

$$\varphi(0) = 0.$$

Uyarı. (R^+,m) üzerindeki simetrik her uzayın temel fonksiyonları da kuasikonkavdır.

Tersine keyfi φ kuasikonkav fonksiyonu, (R^+, m) üzerinde temel fonksiyonu φ olan simetrik M uzayına karşılık gelir.

Tanım 3.58. φ, R^+ da kuasikonkav fonksiyon olsun. Lorentz uzayı

$M_\varphi = M_\varphi(R^+, m)$,

$$\|f\|_{M_\varphi} = \sup\{f^{**}(t)\varphi(t)\} \quad , \quad 0 < t < \infty \tag{3.70}$$

sağlayan $f \in M_0^+(R, \mu)$ sonlu fonksiyonellerinden oluşur.

Önerme 3.59. Eğer φ kuasikonkav ise Lorentz uzayı M_φ, temel fonksiyonları φ ile çakışan bir simetrik Banach fonksiyon uzayıdır.

Önerme 3.60. X, (R^+, m) üzerinde keyfi, simetrik uzay olsun. $X \hookrightarrow M_{\varphi_X}$ ve gömme 1 normuna sahiptir:

$$\|f\|_{M_{\varphi_X}} \leq \|f\|_X \quad , \quad f \in X \tag{3.71}$$

İspat. $t > 0$ olsun. Hölder Eşitsizliği ve (3.66) dan $\forall f \in X$ için

$$\int_0^t f^*(s)\, ds \leq \left\|\chi_{(0,t)}\right\|_{X'} \|f\|_X = \frac{t}{\varphi(t)} \|f\|_X.$$

Buradan,

$$f^{**}(t)\varphi(t) \leq \|f\|_X \quad , \quad (t > 0)$$

olup gösterilmek istenen eşitsizlik sağlanmış olur. ■

Uyarı. Konkav fonksiyonların noktasal infimumları da konkav olduğundan, buradan $\tilde{\varphi}$ ile gösterilen en küçük konkav fonksiyonun varlığı ortaya çıkar. $\tilde{\varphi}$ fonksiyonuna, φ'nin en küçük konkav majorantı denir.

Önerme 3.61. φ kuasikonkav ise, φ'nin en küçük konkav $\tilde{\varphi}$ majorantı için

$$\frac{1}{2}\tilde{\varphi} \leq \varphi \leq \tilde{\varphi} \tag{3.72}$$

sağlanır.

Önerme 3.62. X, (R^+,m) üzerinde simetrik uzay olsun. X, elde edilen temel fonksiyonun konkav olduğu simetrik norm ile denk olarak yeniden normlanabilir.

İspat. X uzayının $\varphi = \varphi_x$ temel fonksiyonu kuasikonkav olur. Önerme 3.61'den dolayı ise $\tilde{\varphi}$, (3.72)'yi sağlar. $M_{\tilde{\varphi}}$, $\tilde{\varphi}$ ile kurulan Lorentz uzayı ve

$$v(f) = \max\left(\|f\|_X, \|f\|_{M_{\tilde{\varphi}}}\right) \quad , \quad \left(f \in M_0^+(R^+,m)\right)$$

olsun. X ve $M_{\tilde{\varphi}}$ ikisi de yeniden düzenleme altında değişmez uzaylar olduğundan v, yeniden düzenleme altında değişmez norm olur. Ayrıca (3.71) ve (3.72)'den

$$\|f\|_X \le v(f) \le \max\left(\|f\|_X, 2\|f\|_{M_{\tilde{\varphi}}}\right) \le 2\|f\|_X,$$

olup v, X'in normuna denktir.

$$v(\chi_{(0,t)}) = \max\left(\varphi(t), \tilde{\varphi}(t)\right) = \tilde{\varphi}(t)$$

olduğundan $X = X(v)$'nin $\tilde{\varphi}$ konkav temel fonksiyonuna sahip olduğu gösterilmiş olur. ■

Tanım 3.63. X, (R^+,m) üzerinde simetrik uzay olsun. X 'in Önerme 3.62'deki şekilde yeniden normlanmış olduğunu kabul edelim. Böylece φ_X konkav olur. O halde $\Lambda(X)$ ve $M(X)$ Lorentz uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır. $M(X)$;

$$\|f\|_{M_X} = \sup\{f^{**}(t)\varphi(t)\} \quad , \quad 0 < t < \infty \tag{3.73}$$

normu ile tanımlanan M_{φ_X} uzayıdır.

$\forall f \in M_0^+(R^+,m)$ için $\Lambda(X)$;

$$\|f\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty f^*(s)\, d\varphi_X(s) \tag{3.74}$$

sonlu fonksiyonellerinden oluşur.

Teorem 3.64. X, (R^+,m) üzerinde simetrik Banach fonksiyon uzayı olsun. Kabul edelim ki X, φ_X konkav temel fonksiyonuna sahip olmak üzere yeniden normlanmış olsun. O halde $\Lambda(X)$ ve $M(X)$ Lorentz uzayları simetrik Banach

fonksiyon uzayları olurlar ve her birinin φ_X'e denk temel fonksiyonu vardır. Üstelik,

$$\Lambda(X) \hookrightarrow X \hookrightarrow M(X) \tag{3.75}$$

ve her bir gömme 1 normuna sahiptir.

3.10 L_1 ve L_∞ Arasındaki İnterpolasyon

Önceki bölümler simetrik Banach fonksiyon uzaylar teorisinin temellerini sağladı. Bu sebeple artık simetrik uzaylar üzerindeki operatörlerin interpolasyonu hakkında bilgi verilebilir. İnterpolasyon teorisinin temeli fonksiyonel-analitiğe dayanır. Bu bölümde notasyonlar değişiklik göstererek teoremler sonraki bölümler için de kullanışlı olacak bir formatta tanımlanacaktır.

Teorem 3.65 (A. P. Calderón Teoremi). X bir rezonant ölçü uzayı üzerinde Banach fonksiyon uzayı olsun. O zaman, X uzayının L_1 ve L_∞ arasında kesin interpolasyon olması için gerek ve yeter koşul X'in simetrik uzay olmasıdır.

Sonuç. (R,μ) bir rezonant ölçü uzayı ve $\tilde{R}$, $\big(0,\mu(R)\big)$ üzerinde m Lebesgue ölçüsü ile tanımlansın. $f \in (L_1+L_\infty)(R,\mu)$ olmak üzere $(L_1,L_\infty)(R,\mu)$ ve $(L_1,L_\infty)\big(\tilde{R},m\big)$ çiftlerine göre $\tilde{R}$ üzerinde

$$\text{h.h.y} -\mu \quad Tf = f^*$$

olacak şekilde normu en fazla 1 olan bir T operatörü vardır.

3.11 Hardy Littlewood Maksimal Operatörü

Bu bölümde amaç güçlü hipotezlere karşın daha zayıf hipotezler altında bir interpolasyon teorisi geliştirmektir. Fourier serilerinin diğer özelliklerinin öğrenilmesinde harmonik analizin Hardy-littlewood maksimal operatörünün fonksiyonların Banach uzaylarında bazı özelliklerinin önemi büyüktür.

Aşağıdaki tanım Hardy-Littlewood maksimal operatörünü tanımlayarak bu operatörün sınırlılığı hakkında bilgi vermektedir.

Tanım 3.66. f, R^n üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyon olsun. f'in Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu Mf,

$$(Mf)(x) = \sup_{x\epsilon Q} \int_Q |f(y)|\,dy \quad , \quad x \in R^n \tag{3.76}$$

supremum, x içeren Q'lara uzanacak şekilde tanımlanır. $M: f \to Mf$ operatörüne Hardy-Littlewood maximal operatörü denir.

M sadece alt lineerdir öyle ki:

$$M(f+g) \leq M(f) + M(g) \quad , \quad M(\lambda f) = |\lambda| Mf.$$

M operatörünün L_∞ uzayının bir daralması olduğu açıktır:

$$\|Mf\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_\infty} \quad , \quad (f \in L_\infty). \tag{3.77}$$

Ancak bu durum L_1 için geçerli değildir. $(Mf)(x)$ hiçbir zaman $|x| \to \infty$, $|x|^{-n}$ den daha hızlı dönüşmez. Bir diğer deyişle, f pozitif ölçüde sıfır değilse

$$(Mf)(x) \geq \frac{c}{|x|^n} \quad , \quad (|x| > 1)$$

olur. Ayrıca Mf, h.h.y $f = 0$ olmadığı sürece integrallenemez.

Örnek Mf'in 1 boyutta lokal integrallenebilir olmasına gerek yoktur.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|(\log|x|)^2}, |x| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \qquad\qquad , |x| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

buna bir örnektir.

Maksimal operatörün birçok özelliklerinin öğrenilmesinde Vitali örtü lemmasının büyük rolü vardır.

Lemma 3.67 (Vitali Lemması). Ω, sonlu ölçünün R^n keyfi ölçülebilir bir alt kümesi olsun. $\mathcal{F}$, Ω'yu kapsayan Q küplerinin bir koleksiyonu olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^{K} |Q_k| \geq 4^{-n} |\Omega| \tag{3.78}$$

olacak şekilde $\mathcal{F}$ üzerinde sonlu ayrık bir çok $(Q_1, Q_2, \cdots, Q_k)$ küpü vardır.

Teorem 3.68. $f \in L^1(R^n) \Rightarrow t(Mf)^*(t) \leq 4^n \|f\|_{L_1} \quad , \quad (t > 0)$ (3.79)

Teorem 3.69 (Lebesgue'nin Diferansiyel Teoremi). f, R^n üzerinde lokal integrallenebilir ise hemen hemen her $x \in R^n$ için

$$\lim_{|Q|\to 0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \quad , \quad (x \in Q). \tag{3.80}$$

Sonuç. f, R^n üzerinde lokal integrallenebilir ise hemen hemen her $x \in R^n$ için

$$\lim_{|Q|\to 0} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy = f(x) \quad , \quad (x \in Q). \tag{3.81}$$

Sonuç. f, R^n üzerinde lokal integrallenebilir ise hemen hemen her $x \in R^n$ için

$$|f(x)| \le (Mf)(x). \tag{3.82}$$

Teorem 3.70. Her lokal integrallenebilir $f \in R^n$ fonksiyonu için

$$c(Mf)^*(t) \le f^{**}(t) \le c'(Mf)^*(t) \quad , \quad (t > 0) \tag{3.83}$$

sağlayan sadece n'ye bağlı c ve c' sabitleri mevcuttur.

Lemma 3.71 (G. H. Hardy Lemması). ψ, $(0, \infty)$ aralığında negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olsun. $-\infty < \lambda < 1$ ve $1 \le q \le \infty$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$\left\{ \int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t} \int_0^1 \psi(s)\, ds \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \le \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty \left(t^\lambda \psi(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \tag{3.84}$$

ve $q = \infty$ yer değiştirmesiyle

$$\left\{ \int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \int_0^\infty \psi(s) \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \le \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \psi(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}. \tag{3.85}$$

Teorem 3.72 (Hardy-Littlewood Maksimal Teoremi). $1 < p \le \infty$ ve $f \in L^p(R^n)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $Mf \in L^p(R^n)$ ve

$$\|Mf\|_{L_p} \le c \|f\|_{L_p} \tag{3.86}$$

olacak şekilde p ve n' ye bağlı c sabiti vardır.

İspat. $p > 1$ olduğundan lemma 3.71'in ilk eşitsizliğini $\lambda = \frac{1}{p}$ ve $q = p$ olarak uygulayabiliriz. Bu durumda teorem 3.70 ve sadece n' ye bağlı c sabitinden,

$$\|Mf\|_{L^p(R^n)} = \left(\int_0^\infty (Mf)^*(t)^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds \right)^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq cp' \left(\int_0^\infty f^*(t)^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = cp' \|f\|_{L^p(R^n)}$$

olur. İspat tamamlanmıştır. ■

3.12 Hilbert Dönüşümü

Hilbert dönüşümü, analitik fonksiyonların reel ve sanal kısımlarının sınır değerlerinin çalışılmasından ortaya çıkan lineer bir operatördür. Hilbert dönüşümü Fourier serileri ve Fourier integrallerinde normun yakınsaması sorularında belirleyici rol oynar. Burada gerçek değişken yaklaşımı kullanılacaktır.

Tanım 3.73. f, R üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f'nin Hf Hilbert dönüşümü, limitinin hemen hemen her yerde mevcut olması şartıyla, aşağıdaki ana değer integrali ile tanımlanır:

$$(Hf)(x) = p \cdot v \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{dt}{x-t} \tag{3.87}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} f(t) \frac{dt}{x-t} \quad , \quad (x \in R).$$

$H: f \to Hf$ operatörü de ayrıca bir Hilbert dönüşümüdür.

Uyarı. f, sonlu bir (a, b) aralığının karakteristik fonksiyonu olsun. O halde

$$H_{\chi_{(a,b)}}(x) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right|, \quad (x \neq a, b). \tag{3.88}$$

Tanım 3.74. f, R üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyon olsun. f'nin $\mathcal{H}f$ maksimal operatörü Hilbert dönüşümü,

$$(\mathcal{H}f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |(H_\varepsilon f)(x)| \quad , \quad (x \in R) \tag{3.89}$$

şeklinde tanımlanmış olup $\mathcal{H}: f \to \mathcal{H}f$ maksimal Hilbert dönüşümüdür. Burada

$$(H_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|\geq\varepsilon} f(t)\frac{dt}{x-t} \quad , \quad (x \in R). \tag{3.90}$$

Uyarı. $(0,\infty)$ aralığındaki her f ölçülebilir uzayı ve $t > 0$ için

$$(Sf)(t) = \int_0^\infty min\left(1,\frac{s}{t}\right) f(s)\frac{ds}{s} = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds + \int_t^\infty f(s)\frac{ds}{s}\,. \tag{3.91}$$

S'nin lineer olduğu açık olup $0 < t < t'$ iken,

$$min\left(1,\frac{s}{t'}\right) \leq min\left(1,\frac{s}{t}\right) \leq \frac{t^1}{t}\cdot min\left(1,\frac{s}{t'}\right) \quad , \quad (s > 0). \tag{3.92}$$

f negatif değilse bu eşitsizliklerin ilkinden $(Sf)(t)$'nin t'nin azalan bir fonksiyonu olduğu sonucu çıkar. Ayrıca

$(Sf)(t)$, herhangi bir $t > 0$ için sonludur $\Leftrightarrow (Sf)(t)$ $\forall t > 0$ için sonludur.

Uyarı. S operatörü sıklıkla başka bir ölçü uzayında tanımlı bir f fonksiyonunun azalan f^* yeniden düzenlemesine uygulanacaktır.

$S(f^*)$ azalan olduğundan,

$$[S(f^*)]^* = S(f^*). \tag{3.93}$$

Ayrıca,

$$[S(f^*)]^{**} = S(f^{**}). \tag{3.94}$$

Teorem 3.75. f, R üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyon olsun.

$$S(f^*)(1) = \int_0^1 f^*(s)\,ds + \int_1^\infty f^*(s)\frac{ds}{s} < \infty \tag{3.95}$$

olduğunu kabul edersek,

$$(\mathcal{H}f)^*(t) \leq cS(f^*)(t) \quad , \quad (0 < t < \infty) \tag{3.96}$$

olacak şekilde f ve t'den bağımsız bir c sabiti vardır.

Yukarıdaki teoremde de verildiği gibi eşitsizlik önemlidir. Çünkü "≤", eşitsizliğinde eşitsizliğin sağ tarafının sağladığı özelliği sol tarafta sağlar demektir.

Teorem 3.76. f, (3.95)'i sağlarsa, ana değer integrali,

$$(Hf)(x) = p \cdot v \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{dt}{x-t}$$

h.h.y mevcuttur. Bunun yanısıra,

$$(Hf)^*(t) \leq cS(f^*)(t) \quad , \quad (t > 0) \tag{3.97}$$

olacak şekilde f ve t'den bağımsız bir c sabiti vardır.

Teorem 3.77. (a) (M. Riesz Teoremi) $1 < p < \infty$ ve $f \in L^p(R)$ ise $Hf \in L^p(R)$ ve

$$\|Hf\|_{L_p} \leq c_p \|f\|_{L_p} \quad , \quad f \in L_{L_p} \tag{3.98}$$

sağlayan p'ye bağlı bir c_p sabiti vardır.

(b) (A. N. Kolmogorov) Bazı mutlak c sabiti için $f \in L^1(R)$ ise

$$\sup_{t>0} (Hf)^*(t) \leq c\|f\|_{L_1} \quad , \quad (f \in L^1). \tag{3.99}$$

Önerme 3.78. $S(f^*)(1) < \infty$ ise

$$S(f^*)(t) \leq 2\pi (Hg)^*(t) \quad , \quad (t > 0) \tag{3.100}$$

sağlayan f ile denk ölçülebilir bir g fonksiyonu mevcuttur.

3.13 Zayıf Tipli $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ Bağlantı Operatörleri

Tanım 3.79. $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ ve $q_0 \neq q_1$ olsun.

$$\sigma = \left[\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right), \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)\right],$$

şeklinde tanımlanan σ'ya interpolasyon aralığı denir. Bir başka deyişle σ, $\{(x,y): 0 \leq x, y \leq 1\}$ birim karesi, uç noktaları $i = 0{,}1$ için $\left(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{q_i}\right)$ olan doğru parçasıdır. m,

$$m = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \tag{3.101}$$

olarak tanımlanan σ doğru parçasının eğimi olsun. $(0,\infty)$ aralığındaki ölçülebilir her f fonksiyonu ve her $t>0$ için

$$(S_\sigma f)(t)=\int_0^\infty f(s)\cdot \min\left(\frac{s^{\frac{1}{p_0}}}{t^{\frac{1}{q_0}}},\frac{s^{\frac{1}{p_1}}}{t^{\frac{1}{q_1}}}\right)ds, \tag{3.102}$$

ya da denk olarak

$$(S_\sigma f)(t)=t^{-\frac{1}{q_0}}\int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}}f(s)\frac{ds}{s}+t^{-\frac{1}{q_1}}\int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}}f(s)\frac{ds}{s}. \tag{3.103}$$

$S_\sigma: f\to S_\sigma f$ operatörü σ ile ilişkilendirilmiş Calderón operatörüdür.

Uyarı. (3.91) de tanımlanan S operatörü tam olarak birim karenin

$$\sigma=[(1,1),(0,0)]$$

köşegen doğru parçası ile ilişkili S_σ Calderón operatörüdür.

Önerme 3.80. f, $(0,\infty)$ aralığında negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olsun. Her bir $t,u>0$ için

$$(S_\sigma f)(t)\le \max\left\{\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{q_0}},\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right\}(S_\sigma f)(u). \tag{3.104}$$

Özellikle, $S_\sigma f$ azalan ve her $t>0$ olduğu durumda

$$(S_\sigma f)(t)=(S_\sigma f)^*(t)\le S_\sigma(f^*)(t). \tag{3.105}$$

Tanım 3.81. (R_0,μ_0) *ve* (R_1,μ_1) tamamen $\sigma-$sonlu ölçü uzayı olsun. T operatörü, tanım kümesi $M_0(R_0,\mu_0)$'ın keyfi lineer alt uzayı ve görüntü kümesi ise R_1'deki μ_1-ölçülebilir fonksiyonları içeren bir operatör olsun. O halde,

$k\ge 1$, $f,g\in\mathfrak{D}(T)$ ve λ skalerleri için

$$|T(f+g)|\le k(|Tf|+|Tg|)\quad,\quad |T(\lambda f)|=|\lambda|\cdot|Tf| \tag{3.106}$$

bağıntıları R_1 üzerinde h.h.y $-\mu_1$ sağlandığında T operatörüne kuasilineer operatör denir. $k=1$ için T'nin altlineer olduğu açıktır.

Tanım 3.82. $1\le p_0<p_1\le\infty$ ve $q_0\ne q_1$ olmak üzere $1\le q_0,q_1\le\infty$ olduğunu kabul edelim. T kuasilineer operatör ve Tf,

$$S_\sigma(f^*)(1) = \int_0^1 s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s)\frac{ds}{s} + \int_1^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s)\frac{ds}{s} < \infty \qquad (3.107)$$

sağlayan R_0 üzerindeki μ_0 −ölçülebilir fonksiyonu için tanımlıdır. Bu durumda eğer bu eşitliği sağlayan her f fonksiyonu için

$$(Tf)^*(t) \le cS_\sigma(f^*)(t) \quad , \quad (0 < t < \infty) \qquad (3.108)$$

bir c sabiti varsa T operatörüne birleşik zayıf tipli $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ adı verilir.

Önerme 3.83. S_σ operatörü, $(R_0, \mu_0) = (R_1, \mu_1) = (R^+, m)$ ölçü uzaylarına göre birleşik zayıf tipli $(\rho_0, q_0; p_1, q_1)$dir.

Teorem 3.84. M Hardy-Littlewood maksimal operatörü, H Hilbert dönüşümü ve $\mathcal{H}$ maksimal Hilbert dönüşümü birer birleşik zayıf $(1,1;\infty,\infty)$tiplidir.

Teorem 3.85 (A. P. Calderón Teoremi). $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ ve $q_0 \ne q_1$ için $1 \le q_0, q_1 \le \infty$ olsun. X ve Y, sırasıyla (R_0, μ_0) ve (R_1, μ_1) rezonant ölçü uzaylarında simetrik Banach fonksiyon uzayları olsun. $\forall f \in X$ için $S_\sigma(f^*)(1) < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) Her birleşik zayıf $(\rho_0, q_0; p_1, q_1)$ tipli lineer operatör X'den Y'ye sınırlıdır.

(ii) Her birleşik zayıf $(\rho_0, q_0; p_1, q_1)$ tipli kuasilineer operatör $X'den\ Y'ye$ sınırlıdır.

(iii) $f \in X$ ve $g \in M_0(R_1, \mu_1)$ olmak üzere $g^* \le s_\sigma(f^*) \Rightarrow g \in Y$ ve c, f ve g'den bağımsız bir sabit olmak üzere $\|g\|_Y \le c\|f\|_X$ dir.

Uyarı. $(-\infty, \infty)$ üzerinde reel değerli bir ω fonksiyonu

$$\omega(s+t) \le \omega(s) + \omega(t) \quad , \quad (-\infty < s, t < \infty)$$

ise alt toplanabilirdir.

Lemma 3.86. ω, $(-\infty, \infty)$ üzerinde $\omega(0) = 0$ olan artan alttoplanabilir fonksiyon olsun. O halde,

$$-\omega(-s) \le \omega(s) \quad , \quad (-\infty < s < \infty). \qquad (3.109)$$

Ayrıca $\frac{\omega(s)}{s}$ ve $s \to \infty$,

$$\alpha = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega(s)}{s} = \inf_{s>0} \frac{\omega(s)}{s} \tag{3.110}$$

gibi sonlu bir $\alpha > 0$ sınırına eğilimlidir.

Uyarı. $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan ψ fonksiyonuna

$$\psi(st) \le \psi(s)\psi(t) \quad , \quad (0 < s,t < \infty)$$

sağlanıyorsa altçarpımsal denir.

Her bir ψ fonksiyonu için $(-\infty,\infty)$ aralığında bir ω fonksiyonu ile

$$\omega(s) = \log \psi(e^s) \quad , \ (-\infty < s < \infty) \tag{3.111}$$

bağlantısı kurabiliriz.

Uyarı.

$$\alpha = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega(s)}{s} = \inf_{s>0} \frac{\omega(s)}{s}$$

olmak üzere $\bar{\alpha}(\psi) = \alpha$ olsun. O halde $0 \le \bar{\alpha} < \infty$ için

$$\bar{\alpha}(\psi) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \psi(t)}{\log t} = \inf_{t>1} \frac{\log \psi(t)}{\log t} \tag{3.112}$$

Lemma 3.87. ψ, $(0,\infty)$ aralığında $\psi(1) = 1$ olacak şekilde artan altçarpımsal bir fonksiyon olsun. α keyfi pozitif bir sayı olmak üzere,

$$\bar{\alpha}(\psi) < \alpha \Leftrightarrow \int_1^\infty t^{-\alpha}\psi(t)\frac{dt}{t} < \infty. \tag{3.113}$$

Uyarı. Luxemburg temsil teoremi, (R^+, m) üzerinde,

$$\bar{\rho}(h) = \sup\left\{\int_0^\infty g^*(t)h^*(t)\,dt : \rho'(g) \le 1\right\} \tag{3.114}$$

şeklinde tanımlanan,

$\forall f \in M_0^+(R,\mu)$ ve $\rho(f) = \bar{\rho}(f^*)$ olacak şekilde $\bar{\rho}$ simetrik Banach fonksiyon normu sağlar. $\bar{\rho}$ normundan üretilen simetrik Banach fonksiyon uzayı ise $\bar{X}$ ile tanımlanır.

Tanım 3.88. Her bir $t > 0$ için $E_t, M_0(R^+, m)$ üzerinde tanımlı genişleme operatörü olmak üzere,

$$(E_t f)(s) = f(st) \quad , \quad (0 < s < \infty). \tag{3.115}$$

Ayrıca, $E_{\frac{1}{t}}: \bar{X} \to \bar{X}$ olmak üzere,

$$h_X(t) = \left\| E_{\frac{1}{t}} \right\|_{\mathfrak{B}(\bar{X})} \quad , \quad (0 < t < \infty). \tag{3.116}$$

Önerme 3.89. $t > 0$ için $E_t: \bar{X} \to \bar{X}$ operatörü sınırlıdır. h_X fonksiyonu

$$h_X(1) = 1 \text{ ve } h_x(t) \leq \max(1, t) \quad , \quad (0 < t < \infty) \tag{3.117}$$

sağlayan $(0, \infty)$ aralığında artan ve altçarpımsaldır. Üstelik, eğer X', X'in ilişik normu ise,

$$h_X(t) = t h_{X'}\left(\frac{1}{t}\right) \quad , \quad (0 < t < \infty). \tag{3.118}$$

Tanım 3.90. X, sonsuz, atomik olmayan tamamen $\sigma-$sonlu ölçü uzayı üzerinde simetrik Banach fonksiyon uzayı olsun. X'in $\alpha_x \; ve \; \beta_x$ Boyd indeksleri,

$$\alpha_X = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_X(t)}{\log t} \quad , \quad \beta_X = \inf_{1<t<\infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t} \tag{3.119}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 3.91. X'in $\alpha = \alpha_x \; ve \; \beta = \beta_x$ indekslerinin limitleri aşağıdaki gibidir:

$$\alpha_X = \lim_{t \to 0^+} \frac{\log h_X(t)}{\log t} \quad , \quad \beta_X = \lim_{t \to \infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t}. \tag{3.120}$$

Ayrıca $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. X' ilişik normunun $\alpha' = \alpha_{X'}$ ve $\beta' = \beta_{X'}$ indeksleri

$$\alpha' = 1 - \beta \quad , \quad \beta' = 1 - \alpha \tag{3.121}$$

olur.

Tanım 3.92. $(0 < a \leq 1)$ olmak üzere $P_a \in M_0(R^+, m)$ integral operatörü,

$$(P_a f)(t) = t^{-a} \int_0^t s^a f(s) \frac{ds}{s} \quad , \quad (0 < t < \infty) \tag{3.122}$$

sağlar. Benzer şekilde $(0 \leq a < 1)$ için $Q_a \in M_0(R^+, m)$ integral operatörü,

$$(Q_a f)(t) = t^{-a} \int_t^\infty s^a f(s) \frac{ds}{s} \quad , \quad (0 < t < \infty) \tag{3.123}$$

olur.

Uyarı. $a+b=1$ olmak üzere Q_b, P_a integral operatörünün formal eşleniğidir. Bir diğer anlamda, f ve g integrallenebilir olmak üzere,

$$\int_0^\infty (P_a f)(t) g(t)\, dt = \int_0^\infty f(t)(Q_b g)(t)\, dt. \tag{3.124}$$

Teorem 3.93. (i) P_a, $\bar{X}$ üzerinde sınırlıdır $\Leftrightarrow a > \beta_x$;

(ii) Q_a, $\bar{X}$ üzerinde sınırlıdır $\Leftrightarrow a < \alpha.$

Teorem 3.94 (D. W. Boyd Teoremi). $1 \le p < q \le \infty$ olsun. X, sonsuz, atomik olmayan tamamen $\sigma-$sonlu bir (R,μ) ölçü uzayı üzerinde simetrik Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde, birleşik zayıf $(p,p;q,q)$ tipinin her lineer T operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul X'in α ve β indekslerinin

$$\frac{1}{q} < \alpha \le \beta < \frac{1}{p} \tag{3.125}$$

sağlamasıdır.

İspat. Buradaki interpolasyon segmenti

$$\sigma = \left[\left(\frac{1}{p},\frac{1}{p}\right),\left(\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right)\right]$$

olup,

$$S_\sigma = P_{\frac{1}{p}} + Q_{\frac{1}{q}}$$

olarak verilen S_σ, Calderón operatörüdür. İlk olarak X indekslerinin

$$\frac{1}{q} < \alpha \le \beta < \frac{1}{p}$$

sağladığını kabul edelim. Teorem 3.93'ten $P_{\frac{1}{p}}$ ve $Q_{\frac{1}{q}}$, $\bar{X}$ üzerinde sınırlıdır. Bu durumda,

$$f \in X, g \in M_0(R,\mu)\ ve\ g^* \le S_\sigma(f^*) \Rightarrow \|g\|_X = \|g^*\|_{\bar{X}}$$

$$\le \left(\left\|P_{\frac{1}{p}}\right\| + \left\|Q_{\frac{1}{q}}\right\|\right)\|f^*\|_{\bar{X}} = c\|f\|_X.$$

X, teorem 3.85'in (iii) özelliğini sağlar. Bu sonuç X 'in istenilen interpolasyon özelliğinin kurulmasını sağlar.

Tersine kabul edelim ki X, teorem 3.85'in (iii) özelliğini sağlasın. S_σ, $\bar{X}$ üzerinde sınırlı operatör olduğu gösterilmelidir.

$h \in X \Rightarrow h^*(t)$ ve $S_\sigma(h^*)(t)$ $t \to \infty$ 0'a yakınsar. Sonrasında,

$$f^* = h^* \text{ ve } g^* = S_\sigma(h^*)$$

olacak şekilde $f, g \in R$ μ −ölçülebilir fonksiyonları vardır. Buradan $f \in X$'tir. Teorem 3.85'in (iii) özelliğinden $g \in X \; ve \; \|g\|_X \leq c\|f\|_X$ olduğu görülür. Buradan (3.105)'yı kullanarak,

$$\|S_\sigma(h)\|_{\bar{X}} \leq \|S_\sigma(h^*)\|_{\bar{X}} = \|g^*\|_{\bar{X}} = \|g\|_X$$

$$\leq \; c\|f\|_X = c\|f^*\|_{\bar{X}} = c\|h^*\|_{\bar{X}} = c\|h\|_{\bar{X}}$$

olup . S_σ, $\bar{X}$ üzerinde sınırlı olur. Bu nedenle $P_{\frac{1}{p}} \; ve \; Q_{\frac{1}{q}}$, $\bar{X}$ üzerinde sınırlıdır ve Teorem 3.93'den X'in indeksleri için

$$\frac{1}{q} < \alpha \leq \beta < \frac{1}{p}$$

sağlanır. ■

Teorem 3.95 (G. G. Lorentz & T. S. Shimogaki Teoremi). X, R^n üzerinde simetrik Banach fonksiyon uzayı olsun. Hardy-Littlewood maksimal operatörü M'nin X üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter koşul X'in β indeksinin $\beta_X < 1$ olmasıdır.

Teorem 3.96 (D. W. Boyd). X, R üzerinde simetrik Banach fonksiyon uzayı olsun. Hilbert dönüşümü H'nin X üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter koşul X'in indekslerinin

$$0 < \alpha \leq \beta < 1 \qquad (3.126)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta < 1$ olduğunu kabul edelim. Teorem 3.93'ten $P_1 \; ve \; Q_0$, $\bar{X}$ üzerinde sınırlıdır. Bu durumda teorem 3.76'dan H, X üzerinde sınırlı olur.

Tersine H, X üzerinde sınırlı olsun. Önerme 3.78'den her bir $f \in X$ fonksiyonuna

$$s(f^*) \leq 2(Hg)^*$$

olacak şekilde f ile denk ölçülebilir bir g fonksiyonu karşılık gelir.$\forall f \in X$ için,

$$\|S(f^*)\|_{\bar{X}} \leq 2\|(Hg)^*\|_{\bar{X}} = 2\|Hg\|_X \leq 2c\|g\|_X = 2c\|f^*\|_{\bar{X}}$$

olur. Buradan S'nin, $\bar{X}$ üzerinde sınırlı olduğu anlaşılır. $P_1 \, ve \, Q_0$, $\bar{X}$ üzerinde sınırlı olup teorem 3.93'ten X'in indeksleri,

$$\beta_X < 1 \, ve \, \alpha_X > 0$$

sağlamalıdır. İspat tamamlanmış olur. ■

3.14 Fourier Serilerinin Norm-Yakınsaklığı

Bu bölümde birim çemberi $\{e^{i\theta}: -\pi < \theta \leq \pi\}$ olan T, grup işlemlerinden çarpma ile Z ise tamsayıların toplamalı grubu ile gösterilecektir. Ayrıca bu bölümde bazı teoremlerde basit fonksiyon yerine trigonometrik polinom kullanılacaktır.

Uyarı. T üzerindeki integrallenebilir fonksiyonların $L_1 = L_1(T)$ uzayı,

$$\|f\|_{L_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta$$

normu ile

$$(f * g)(e^{i\theta}) = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(\theta-\phi)})g(e^{i\theta})\, d\phi \quad , \quad (f, g \in L_1(T))$$

konvolüsyonu altında bir Banach cebiridir.

Burada $f * g$ ölçülebilirdir ve Fubini teoreminden $f * g \in L_1$ olup

$$\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1}\|g\|_{L_1} \tag{3.127}$$

sağlar.

Uyarı. T üzerinde hemen hemen her yerde $f * g = g * f$.

Lemma 3.97. $f, g \in L_1(T) \Rightarrow f * g \prec \|g\|_{L_1} f$. (3.128)

Özellikle,

$$(f * g)^*(t) \leq \|g\|_{L_1} f^{**}(t) \quad , \quad (0 < t < 1). \tag{3.129}$$

Ayrıca X, simetrik Banach fonksiyon uzayı ve $f \in X$ olmak üzere $f * g \in X$ ve

$$\|f * g\|_X \leq \|g\|_{L_1}\|f\|_X. \tag{3.130}$$

Tanım 3.98. Eğer $f \in L_1(T)$ ise her bir $n \in Z$ için f'nin n. dereceden Fourier katsayısı,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta \tag{3.131}$$

olarak tanımlanır. $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}$ trigonometrik serisine f'nin Fourier serisi denir ve

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}$$

karşılık gelir. Fourier serisinin N. dereceden kısmi toplamı $S_N f$:

$$(S_N f)\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{in\theta} \tag{3.132}$$

ile gösterilir.

Uyarı. X, simetrik Banach fonksiyon uzayı olmak üzere $f \in X$ in Fourier serileri için,

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_X = 0 \quad , \quad f \in X \tag{3.133}$$

ise Fourier serileri yakınsaktır denir.

Uyarı. $P\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta}$

formunun keyfi toplamına trigonometrik polinom denir. Burada en fazla N dereceli keyfi trigonometrik polinom için $S_N P = P$ olduğu açıktır.

Uyarı. T_ϕ öteleme operatörü,

$$T_\phi f\left(e^{i\theta}\right) = f\left(e^{i(\theta+\phi)}\right) \quad , \quad (-\pi < \theta, \phi < \pi)$$

olup,

$\omega(f, \cdot)_X$ ile f'nin sürekliliğinin X modülü:

$$\omega(f,t)_X = \sup_{|\phi|\le t} \left\| T_\phi f - f \right\|_X \quad , \quad (0 \le t \le \pi)$$

ile gösterilir.

Lemma 3.99. X, bir simetrik Banach fonksiyon uzayı ve X_b, basit fonksiyonların X'deki kapanışı olsun. O halde aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

(i) $\varphi_X(0+) = 0$;

(ii) X_b, sürekli fonksiyonların X'deki kapanışıdır;

(iii) X_b, trigonometrik polinomların X'deki kapanışıdır;

(iv) X_b üzerindeki öteleme süreklidir yani,

$$\lim_{\phi \to 0} \left\| T_\phi f - f \right\|_X = 0 \quad , \quad (f \in X_b);$$

(v) $\lim_{t \to 0^+} \omega(f,t)_X = 0 \quad , \quad (f \in X_b)$.

Lemma 3.100. Fourier serilerinin X üzerinde norm yakınsaması için gerek ve yeter koşul S kısmi toplam operatörlerinin, operatör normlarının düzgün sınırlı olmasıdır:

$$\|S_N\|_{\mathfrak{B}(X_b)} \leq M \tag{3.134}$$

Uyarı. m çarpan operatörü,

$$mP\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{n=-N}^{N} -i \cdot \operatorname{sgn}(n)\, a_n e^{in\theta} \tag{3.135}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.101. P, trigonometrik polinom ve c bir sabit olmak üzere,

$$\|S_N\|_{\mathfrak{B}(X_b)} \leq M \Leftrightarrow \|m(P)\|_X \leq c\|P\|_X.$$

Bu durumda m, tüm X_b üzerinde $\|m\|_{\mathfrak{B}(X_b)} \leq c$ ve

$$(mf)\hat{}(n) = -i \cdot \operatorname{sgn}(n)\, \hat{f}(n) \quad , \quad (f \in X_b, n \in Z) \tag{3.136}$$

sağlayan sınırlı lineer bir operatöre, benzersiz bir uzantıya sahiptir.

Uyarı. $\tilde{f}\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon < |\emptyset| \leq \pi} f\left(e^{i(\theta-\phi)}\right) \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi$ (3.137)

olmak üzere $f \to \tilde{f}$ operatörü, Hilbert dönüşümünün periyodik benzeridir. Maksimal eşlenik fonksiyon operatörü,

$$(\xi f)\left(e^{i\theta}\right) = \sup_{0<\varepsilon\leq\pi} \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\varepsilon<|\emptyset|\leq\pi} f\left(e^{i(\theta-\phi)}\right)\cot\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi\right|. \qquad (3.138)$$

Ana sonuç S, Calderón operatörü olmak üzere,

$$S(f^*)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\, ds + \int_t^1 f^*(s)\frac{ds}{s}$$

olmasıdır.

Teorem 3.102. f'den bağımsız bazı c sabitleri için,

$$f \in L_1(T) \Rightarrow (\xi f)^*(t) \leq cS(f^*)(t) \quad , \quad (0 < t < 1).$$

Üstelik

$$\left(\tilde{f}\right)^*(t) \leq cS(f^*)(t) \quad , \quad (0 < t < 1)$$

olacak şekilde hemen hemen her yerde var olan $\tilde{f}$ eşlenik fonksiyonu mevcuttur.

Lemma 3.103. P trigonometrik polinom $\Rightarrow$ $mP = \tilde{P}$ olur.

Teorem 3.104. X, temel fonksiyonu $\varphi_X(0+) = 0$ 'ı sağlayan T üzerinde simetrik Banach fonksiyon uzayı olsun. O halde aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

(i) X_b normunda Fourier serileri yakınsaktır;

(ii) S_N kısmi toplam operatörleri X_b üzerinde düzgün sınırlıdır;

(iii) m çarpan operatörü, X_b üzerinde sınırlıdır;

(iv) Eşlenik fonksiyon operatörü X_b üzerinde sınırlıdır;

(v) $Sf^*(t) = \int_0^1 f^*(s)\cdot \min\left(1, \frac{s}{t}\right)\frac{ds}{s}$

Calderón operatörü [0,1] aralığında X_b'nin Luxemburg temsili $(X_b)^-$ üzerinde sınırlıdır.

Uyarı. Eğer Teorem 3.104'teki herhangi bir koşul sağlanırsa $\forall f \in X_b$ için hemen hemen her yerde $mf = \tilde{f}$ olur.

Sonuç. X, T üzerinde ayrılabilir simetrik Banach fonksiyon uzayı olsun.

Fourier serisi X normunda yakınsaktır $\Leftrightarrow$ X'in Boyd indekslerinin $0 < \alpha_x, \beta_x < 1$ sağlamasıdır.

Uyarı. Luxemburg Temsil teoreminden X, simetrik uzayının [0,1] aralığında tanımlandığını varsayabiliriz.

E_t genişleme operatörü,

$$(E_t f)(s) = \begin{cases} f(st) \ , \ 0 \le s \le \min\left(1, \frac{1}{t}\right) \\ 0 \ , \ \min\left(1, \frac{1}{t}\right) \le s \le 1 \end{cases} \tag{3.139}$$

olur.

$$h_X(t) = \left\| E_{\frac{1}{t}} \right\|_{\mathfrak{B}(X)}$$

tanımlayalım. O halde $h_{L_\infty}(t) \le 1$ ve $h_{L_1}(t) \le t$ olur.

$$(E_t f)^* \le E_t(f^*)$$

olup

$$h_X(t) = \sup\left\{ \int_0^1 E_{\frac{1}{t}} f^*(s) g^*(s)\, ds : \|f\|_X \le 1, \|g\|_{X'} \le 1 \right\}$$

şeklinde verilir. Burada h_X azalmayan fonksiyondur.

Yukarıdaki genişleme operatörü (0,∞) aralığında alınsaydı parçalı olarak göstermeye gerek yoktu. Ancak operatör (0,1) aralığında alındığı için operatör bölünür.

Uyarı. $h_X(t) = t h_{X'}\left(\frac{1}{t}\right) \ , \ (t > 0)$

olur. Ayrıca,

$$(P_a f)(t) = t^{-a} \int_0^t s^a f(s) \frac{ds}{s} \quad ,$$

$$(Q_a f)(t) = t^a \int_t^1 s^{-a} f(s) \frac{ds}{s} \quad .$$

4
PSEUDOSİMETRİK UZAYLAR

Pseudosimetrik uzay, simetrik uzay kavramının doğal bir genellemesi olarak tanımlanır. Luxemburg temsil teoremi, Boyd indeksleri, temel fonksiyon ve özellikleri, Calderon teoremi vb. gibi tüm temel özellikler, pseudosimetrik durum üzerinden aktarılır. Pseudosimetrik uzaylar kavramı, simetrik uzaylarla ilgili sonuçların uygulama aralığının genişletilmesini sağlar.

4.1 Pseudosimetrik Uzayların Temel Özellikleri

Bu bölümde Banach fonksiyon uzaylarının pseudosimetrikliği ile ilgili genel bilgilere yer verilmiştir.

Aşağıdaki tanımın varlığını kabul edelim.

Tanım 4.1. $(\Omega;\sigma_\Omega;\mu)$ rezonant ölçü uzayı ve $X(\Omega)$ bu uzayda Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer $\exists\delta>0: f,g\in X(\Omega)$ için

$$\mu_f=\mu_g(f\sim g)$$

olup

$$\delta\|f\|_{X(\Omega_1)}\le\|g\|_{X(\Omega_2)}\le\delta^{-1}\|f\|_{X(\Omega_1)} \qquad (4.1)$$

eşitsizliği sağlanırsa $X(\Omega)$ uzayı Pseudosimetriktir denir.

Uyarı. $\delta=1$ için $X(\Omega)$ Pseudosimetrik uzayı simetriktir.

Uyarı. $X(\Omega)$ Pseudosimetrik uzayı için,

$$\|f\|_{X(\Omega)}=\rho_\Omega(f)\quad,\quad S_\Omega=\{f\in X(\Omega):\rho_\Omega(f)\le 1\}$$

olup $X'(\Omega)$ ilişik uzayı için,

$$\|g\|_{X'(\Omega)}=\rho'_\Omega(g)\quad,\quad S'_\Omega=\{g\in X'(\Omega):\rho'_\Omega(g)\le 1\}$$

ile tanımlıdır.

Önerme 4.2. Eğer $X(\Omega)$ Pseudosimetrik ise $X'(\Omega)$ ilişik uzayı da Pseudosimetriktir. Ayrıca,

$$v'_\Omega(g) = sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds : f \in S_\Omega\right\}$$

ve

$$v_\Omega(f) = sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds : g \in S'_\Omega\right\}$$

ifadeleri sırasıyla $X'(\Omega)$ ve $X(\Omega)$ uzaylarında denk Banach fonksiyon normlarıdır. Bununla birlikte $\delta \in (0,1]$, (4.1) deki sabit olmak üzere,

$$\delta v'_\Omega(g) \le \rho'_\Omega(g) \le v'_\Omega(g), \forall g \in X'(\Omega),$$

$$\delta v_\Omega(f) \le \rho_\Omega(f) \le v_\Omega(f), \forall f \in X(\Omega), \qquad (4.2)$$

ifadeleri mevcuttur.

İspat. İlk olarak (4.2)'yi kanıtlayalım.

$$\rho'_\Omega(g) = \sup_{f\in S_\Omega} \int_\Omega |fg|\,d\mu,$$

Hardy-Littlewood Eşitsizliğinden,

$$\rho'_\Omega(g) = \sup_{f\in S_\Omega} \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds$$

olur. f ve $\tilde{f}$ fonksiyonları $X(\Omega)$ üzerinde denk ölçülebilir olsun. Bir başka deyişle,

$$\mu_f = \mu_{\tilde{f}}.$$

Eğer $f \in S_\Omega$ ise (4.1)'den $\delta\tilde{f} \in S_\Omega$ olur. Buradan,

$$\rho'_\Omega(g) \ge \sup_{f\in S_\Omega} \sup_{\tilde{f}\sim f} \int_\Omega \left|\delta\tilde{f}g\right| d\mu$$

sağlanır. $(\Omega;\sigma_\Omega;\mu)$ rezonant olduğundan,

$$\rho'_\Omega(g) \ge \delta \sup_{f\in S_\Omega} \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds$$

olup (4.2) sağlanmış olur. Şimdi $\tilde{g}, g \in X'(\Omega)$ olmak üzere $\mu_{\tilde{g}} = \mu_g$ olsun. O halde $\forall s > 0$ için

$$\tilde{g}^*(s) = g^*(s)$$

olur. Bu nedenle

$$\delta v'_\Omega(g) \leq v'_\Omega(g) \leq \delta^{-1} v'_\Omega(g)$$

olup $\tilde{g}$ ve g fonksiyonlarına (4.2)'deki 1. eşitsizliği uygularsak,

$$\rho'_\Omega(\tilde{g}) \leq v'_\Omega(\tilde{g}) \leq \delta^{-1} v'_\Omega(g) \leq \delta^{-2} \rho'_\Omega(g)$$

ve

$$\rho'_\Omega(g) \leq v'_\Omega(g) \leq \delta^{-1} v'_\Omega(\tilde{g}) \leq \delta^{-2} \rho'_\Omega(\tilde{g})$$

elde ederiz.

Böylece $X'(\Omega)$ uzayı Pseudosimetrik olur. Teorem 3.14'ten (4.2)'deki 2. eşitsizlik, önceki duruma benzer şekilde elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Sonuç. Önerme 4.2'deki tüm koşullar sağlansın. O halde $\delta \in (0,1]$, (4.1)'deki sabit olmak üzere,

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s)\, ds \leq \delta^{-1} \rho_\Omega(f)\, \rho'_\Omega(g)$$

eşitsizliği Hölder eşitsizliğidir.

Teorem 4.3. Önerme 4.2'deki tüm koşullar sağlansın. $\delta \in (0,1]$ sabit olmak üzere,

$$f_1 \prec f_2 \Rightarrow \rho(f_1) \leq \delta^{-1} \rho(f_2)$$

sağlanır.

İspat. $f_1 \prec f_2$ olsun. ([1],p.61, Teorem 4.6)

$$\int_0^\infty {f_1}^*(s) g^*(s)\, ds \leq \int_0^\infty {f_2}^*(s) g^*(s)\, ds \;\; \forall g: \rho'_\Omega(g) \leq 1$$

olup önerme 4.2'den

$$\delta^2 v_\Omega(f_1) \leq \delta\rho_\Omega(f_1) \leq \delta v_\Omega(f_1) \leq \delta v_\Omega(f_2) \leq \rho_\Omega(f_2)$$

ispat tamamlanır. ■

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Banach fonksiyon uzayları ile ilgili teoremler verilmiştir. Pseudosimetrik uzayların teorisini aktarabilmek için Banach fonksiyon uzaylarına giriş yapılarak, bu fonksiyonların ilişik uzayları, normun mutlak sürekliliği, duallik ve refleksivliği verilmiştir. Daha sonra dağılım fonksiyonları ve azalan düzenlemeleri, Hardy-Littlewood eşitsizliği, elementer maksimal fonksiyonları ifade edilmiştir. Uzaylar arasında geçiş yapabilmek için gerekli tanımlamalar sağlandıktan sonra simetrik uzaylar verilmiş ve bu uzayda L_1 ve L_∞ arasındaki interpolasyon, operatörlerin interpolasyonu, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, Hilbert dönüşümü, zayıf tipli operatörler ve Fourier serilerinin norm yakınsaklığı incelenmiştir. Son olarak pseudosimetrik uzaylar ile ilgili önemli tanımlar verilerek bu uzaylara bağlı Luxemburg temsil teoremi, temel fonksiyonlar, Calderón teoremi ve Boyd indeksleri ifade edilmiştir. Burada pseudosimetrik uzaylar, simetrik uzaylarla ilgili sonuçların uygulama aralığının genişletilmesini sağladığından bu alanda araştırmalar yapılıp orjinal çalışmalar çıkarılabilir.

KAYNAKÇA

[1] C. Bennett ve R. Sharpley, Interpolation of operators, New York: Academic, 1988.

[2] D. V. Cruz-Uribe ve A. Fiorenza, Variable Lebesgue spaces, Birkhauser, 2013.

[3] D. R. Adams, Morrey spaces, Switzherland: Springer, 2016.

[4] V. Kokilashvili, A. Meshki, H. Rafeiro ve S. Samko, Integral operators in non-standard function spaces, Volume 1: Variable exponent Lebesgue and Amalgam spaces, Springer, 2016.

[5] V. Kokilashvili, A. Meshki, H. Rafeiro ve S. Samko, Integral operators in non-standard function spaces, Volume 2: Variable exponent Hölder, Morrey-Campanato and Grand spaces, Springer, 2016.

[6] R. Castillo ve H. Rafeiro, An introductory course in Lebesgue spaces, Springer, 2016.

[7] P. Hasto ve P. Harjulehto, Orlicz spaces and generalized Orlicz spaces, Springer, 2019.

[8] M. Rao ve Z. Ren, Applications of Orlicz spaces, New-York-Basel, 2002.

[9] W. A. J. Luxemburg, Banach function spaces, Assen, 1955.

[10] S. G. Krein, J. I. Petunin ve E. M. Semenov, Interpolation of linear operators, Journal of Soviet Mathematics, 1988.

[11] J. Lindenstrauss ve L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Springer-Verlag, 1977.

[12] J. Lindenstrauss ve L. Tzafriri, Classical Banach Spaces II, Springer-Verlag,1979.

[14] B. T. Bilalov ve Z. G. Guseynov, Basicity of a system of exponents with a piecewise linear phase in variable spaces, Mediterranean Journal of Mathematics, cilt 9, no. 3, pp. 487-498, 2012.

[15] B. T. Bilalov ve A. Guliyeva, On basicity of the perturbed systems of exponents in Morrey-Lebesgue space, International Journal of Mathematics, pp. 1-10, 2014.

[16] B. T. Bilalov, The basis property of a perturbed systems of exponentials in Morrey-type spaces, Siberian Journal of Mathematics, cilt 60, no. 2, pp. 323-350, 2019.

[17] D. M. Israfilov ve N. Tozman, Approximation in Morrey-Smirnov classes, Azerbaijan Journal of Mathematics, cilt 1, no. 1, pp. 99-113, 2011.

[18] I. I. Sharapudinov, On direct and inverse theorems of approximation theory in variable Lebesgue and Sobolev spaces, Azerbaijan Journal of Mathematics, cilt 4, no. 1, pp. 55-72, 2014.

[19] B. T. Bilalov, A. A. Huseynli ve S. R. El-Shabrawy, Basis properties of trigonometric systems in weighted Morrey spaces, Azerbaijan J. Math, cilt 9, no. 2, pp. 200-226, 2019.

[20] B. T. Bilalov ve F. S. Seyidova, Basicity of a system of exponents with a piecewise linear phase in Morrey-type spaces, Turkish J. Math, pp. 1850-1866, 2019.

[21] B. T. Bilalov ve S. R. Sadigova, On solvability in the small of higher order elliptic equations in grand-Sobolev spaces, Complex variables and elliptic equations.

[22] B. T. Bilalov ve S. R. Sadigova, Interior Schauder-type estimates for higher order elliptic operators in grand-Sobolev spaces, Sahand Communications in Mathematical Analysis, cilt 18, no. 2, pp. 129-148, 2021.

[23] B. T. Bilalov ve S. R. Sadigova, On the fredholmness of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation in grand-Sobolev spaces, Ricerche Mat, 2021.

[24] L. Caso, R. D'Ambrosio ve L. Softova, Generalized Morrey spaces over unbounded domains, Azerbaijan J. Math, cilt 10, no. 1, pp. 193-208, 2020.

[25] L. G. Softova, The Dirichlet problem for elliptic equations with VMO coefficients in generalized Morrey spaces., pp. 365-380, 2013.

[26] D. K. Palagachev, M. A. Ragusa ve L. G. Softova, Regular obligue derivative problem in Morrey spaces, Elec. Jour. of Diff. Eq., cilt 2000, no. 39, pp. 1-17.

[27] D. K. Palagachev ve L. G. Softova, Singular integral operators, Morrey spaces and fine regularity of solutions to PDE's, pp. 237-263, 2004.

[28] Y. Zeren, M. Ismailov ve C. Karacam, Korovkin-type theorems and their statistical versions in grand Lebesgue spaces, Turkish J. of Math, pp. 1027-1041, 2020.

[29] Y. Zeren, M. Ismailov ve F. Sirin, On basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem for second order differential equation for grand-Lebesgue space, Turkish J. of Math, 2020.

[30] L. Pick, A. Kufner, J. Oldrich ve S. Fucik, Function spaces, Walter de Gruyter, 2012.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1.B. T. Bilalov, Y. Zeren, S. Sadigova ve F. E. Dal, “Interior Schauder-type Estimates for Higher-order Elliptic Operators in Grand-Sobolev Spaces” Fourth International E-Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA), May 2021, Istanbul, Turkey.