Cauchy-Goursat Teorem;

02.05.201
Salı

Bir önceki teoremde sürekli bir $f(z)$ fonksiyonu bir ters türeve sahip olduğunda $f(z)$'in tamamen D bölgesinde kalan verilen herhangi bir c çevresi etrafındaki integralin sıfır olduğunu gördük. Bu bölümde $f(z)$ fonksiyonu üzerinde ek koşullar vererek $f(z)$'nin bir basit kapalı çevre üzerindeki integralinin sıfır olduğunu gösteren bir teorem vereceğiz.

İki reel değerli $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonların 1. mertebeden kısmi türevleri basit kapalı bir c yolunun üzerindeki ve içindeki noktalardan oluşan kapalı bir R bölgesi boyunca sürekli olduğunu kabul edelim. Reel değişkenli fonksiyonlar teorisindeki eğrisel integraller için olan Green teoremine göre

$$\int_c [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

şeklindedir.

z düzlemindeki bölge bir R bölgesi boyunca analitik olan $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Ayrıca $f'(z)$yi sürekli kabul edelim. Bu durumda bileşen fonksiyonlar U, V, U_x, U_y, V_x, V_y kısmi türevleri ile birlikte Rde süreklidir. Buna göre

$$\int_c f(z)dz = \int_c (U+iV)(dx+idy)$$

$$= \int_c (Udx - Vdy) + i\int_c (Vdx + Udy)$$

$$\int_c (\overbrace{U}^{P}dx - \overbrace{V}^{Q}dy) = \iint_R (-V_x - U_y)\,dx\,dy$$

$$\int_c (\overbrace{V}^{P}dx + \overbrace{U}^{Q}dy) = \iint_R (U_x - V_y)\,dx\,dy$$

$f(z)$ analitik $\Rightarrow$ C-R sağlanır.

$U_x = V_y \qquad U_y = -V_x$

$$\boxed{\int_c f(z)dz = 0}$$

Örnek: ① $\int_c dz = 0 \; ; \; c : |z| = 1$

$$\int_c f(z)dz = \int_c f(z(t))\, z'(t)dt$$

$$\int_c dz = \int_0^{2\pi} (-\sin t + i\cos t)dt = \cos t\Big|_0^{2\pi} + i\sin t\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\left.\begin{array}{l} z = \cos t + i\sin t \\ z'(t) = -\sin t + i\cos t \end{array}\right\} 0 \le t \le 2\pi$

② $\int_c z\,dz = 0$

③ $\int_c z^2 dz = 0$

ÖDEV!

NOT! $f'(z)$ üzerindeki süreklilik koşulunu kaldırabileceğini ilk olarak gösteren Goursat oldu. Cauchy-Goursat teoremi olarak da bilinen Cauchy'nin revize edilmiş formdaki sonucu aşağıdaki teoremdir.

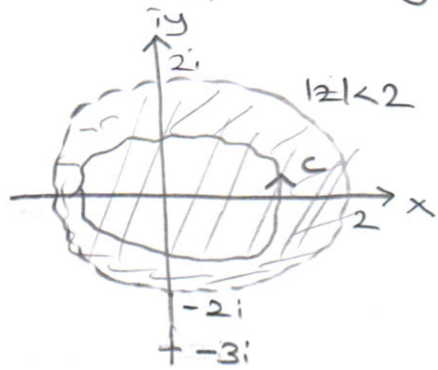
Teorem: Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu basit, kapalı bir C yolunun üzerindeki ve içindeki tüm noktalarda analitik ise

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz=0} \text{ 'dır.}$$

Örnek: C ile açık $|z|<2$ diskinde kalan herhangi bir kapalı çevreyi gösterirsek;

$$\int_C \frac{ze^z}{(z^2+9)^5}\,dz=0, \quad f(z)=\frac{ze^z}{(z^2+9)^5}$$

$z=\mp 3i$
Analitik değil.
$z^2+9=0$
$z^2=-9$
$z=\mp 3i$



Sonuç: Bir basit bağlantılı D bölgesi boyunca analitik olan $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde her yerde bir anti türeve sahiptir.

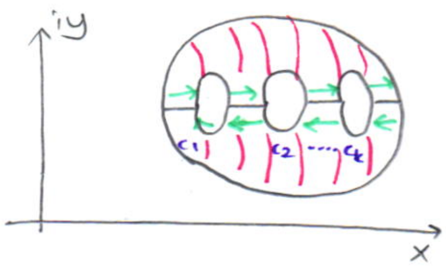
Çok Bağlantılı Bölge

Basit bağlantılı olmayan bölgeye çok bağlantılı bölge denir. Yazacağımız teorem Cauchy-Goursat teoreminin çok bağlantılı bölgelere bir uygulamasıdır.

Teorem:

a) C, saat yönünün tersi yönünde tanımlanmış basit kapalı çevre

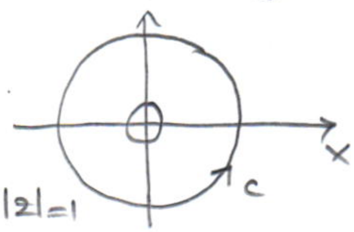
b) C_k'lar, C'nin içinde tümü saat yönünde tanımlanmış, ayrık ve içleri ortak noktalara sahip olmayan basit kapalı çevreler olsun.



Eğer $f(z)$ fonksiyonu bu çevrelerin tümü üzerinde, C'nin içinde ve her bir C_k'nın dışındaki noktalardan oluşan çok bağlantılı bölge boyunca analitik ise

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz \text{ 'dır.}$$

Örnek: C orijini çevreleyen herhangi bir pozitif yönlü basit kapalı çevre ise;



$$\int_C \frac{dz}{z}=2\pi i \text{ 'dir.}$$

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz=\int_{C_1}\frac{1}{z}\,dz=2\pi i$$

Cauchy-İntegral Formülü

Teorem: f, pozitif yönde alınmış bir basit kapalı eğri c'nin içinde ve üzerinde her yerde analitik olsun. Eğer z_0, c'nin içinde herhangi bir nokta ise;

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}} \text{ 'dır.} \quad \text{-----}\ (1)$$

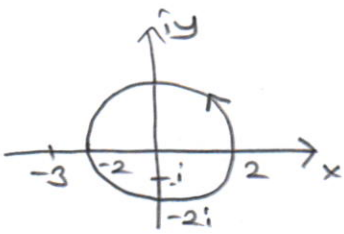
(1) formülüne Cauchy-integral formülü denir. Cauchy-integral formülü;

$$\boxed{\int \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}=2\pi i f(z_0)} \quad \text{----}(2)$$

şeklinde yazıldığında basit kapalı eğriler boyunca olan belirli integrali hesaplamak için kullanılır.

Örnek: c, + yönlü ve $|z|=2$, $\displaystyle\int \frac{z\,dz}{(9-z^2)(z+i)} = 2\pi i . f(-i)$

$$= 2\pi i . \left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}$$



$$f(z)=\frac{z}{9-z^2}$$

$$f(-i)=\frac{-i}{9-i^2}=\frac{-i}{10}$$

Örnek: c eğrisi + yönlü ve $|z-i|=1$ olsun. $\displaystyle\int_c \frac{2z}{z^2+2}dz = ?$

∴ c eğrisi + yönlü ve $|z|=2$, $\displaystyle\int_c \frac{2z}{z^2+2}dz$ integralini hesaplayalım.

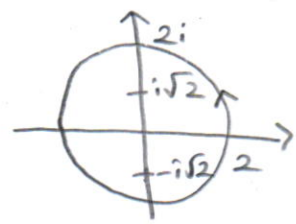
$\hookrightarrow$ $z^2+2=0$

$z^2=-2$

$z^2=2i^2$

$z=\mp i\sqrt{2}$

$$\frac{2z}{z^2+2}=\frac{A}{\underset{(z-i\sqrt{2})}{z+i\sqrt{2}}}+\frac{B}{\underset{(z+i\sqrt{2})}{z-i\sqrt{2}}}$$



$$2z = A(z-i\sqrt{2})+B(z+i\sqrt{2})$$

$$2z = z(A+B)+i\sqrt{2}(B-A)$$

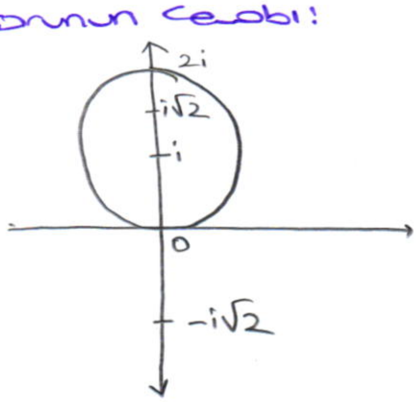
$$\left.\begin{array}{l} A+B=2 \\ -A+B=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=1 \\ B=1 \end{array}$$

$$\int_c \frac{2z}{z^2+2}dz = \underbrace{\int_c \frac{1}{z-(-i\sqrt{2})}dz}_{2\pi i} + \underbrace{\int \frac{1}{z-(i\sqrt{2})}dz}_{2\pi i} = 4\pi i$$

$f(z)=1$

$f(-i\sqrt{2})=1$

Sorunun cevabı:



$$\int_c \frac{2z}{z^2+2}dz = \int_c \frac{\frac{2z}{z+i\sqrt{2}}}{(z-i\sqrt{2})}dz = 2\pi i \text{ olur}$$

$$f(z)=\frac{2z}{z+i\sqrt{2}}$$

$$f(i\sqrt{2})=\frac{2i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=1$$

$2\pi i\ \underbrace{f(i\sqrt{2})}_{=1}$, olduğundan