**T.C.**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ÜÇ BOYUTLU BENZERLİK KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜNDE DÖRDEYLERİN KULLANIMI

**Recep CANDAN**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Harita Mühendisliği Anabilim Dalı

Geomatik Programı

Danışman

Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

TEMMUZ, 2023

**T.C.**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# ÜÇ BOYUTLU BENZERLİK KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜNDE DÖRDEYLERİN KULLANIMI

Recep CANDAN tarafından hazırlanan tez çalışması 27/07/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Harita mühendisliği Anabilim Dalı, Geomatik Programı **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cüneyt AYDIN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. Cüneyt AYDIN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Burak AKPINAR, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Mahmut Oğuz SELBESOĞLU, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Cüneyt AYDIN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan "Üç Boyutlu Koordinat Dönüşümlerinde Dördeylerin Kullanımı" başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Recep CANDAN

İMZA

*Aileme*

# TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim sırasında benden desteğini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Cüneyt AYDIN hocama ve Dr. Müh. Süreyya ÖZGÜR hocama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Recep CANDAN

# İÇİNDEKİLER

**TEŞEKKÜR** iv
**SİMGE LİSTESİ** vi
**KISALTMA LİSTESİ** vii
**ŞEKİL LİSTESİ** ıx
**TABLO LİSTESİ** ix
**ÖZET** x
**ABSTRACT** xii
**1 GİRİŞ** 14
1.1 Literatür Özeti ..... 14
1.2 Tezin Amacı ..... 16
1.3 Hipotez ..... 16
**2 ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ** 17
2.1 Genel Dönüşüm Modeli ..... 17
2.2 Dönüşüm Modelinin Dördeyliler ile İfadesi ..... 17
2.3 Euler Açılarına Göre Dengelemenin Fonksiyonel Modeli ..... 18
2.4 Dördeylere Göre Dengelemenin Fonksiyonel Modeli ..... 19
2.5 Diferansiyel Açılar için Dengelemenin Fonksiyonel Modeli ..... 20
2.6 Dönüşüm için Simetrik Model ve Çözümü ..... 22
2.7 Küçültmüş Başlangıç Koordinatlarına Göre Çözüm ..... 25
2.8 Dönüşüm Parametreleri ve Kovaryans Matrisi ..... 28
**3 SAYISAL UYGULAMA** 32
3.1 SimTrSim Yazılımı ..... 32
3.2 Sayısal Uygulama Hedefleri ve Simülasyon Stratejisi ..... 36
3.3 1 Derece Dönüklük Açıları için Örnek Uygulama Sonuçları ..... 36
3.4 Küçük Açılı Örnekler için Dönüşüm Modellerinin Performansı ..... 41
**4 SONUÇ** 46
**KAYNAKÇA** 48
**TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR** 50

# SİMGE LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbf{M}$ | Affinite Matrisi |
| $\mathbf{P}$ | Ağırlık Matrisi |
| $\mathbf{\Delta x}$ | Ağırlık Merkezine Ötelenmiş Başlangıç Sistem Koordinatları |
| $\mathbf{x}$ | Başlangıç Sistemi Koordinat Vektörü |
| $\boldsymbol{\beta}$ | Bilinmeyenler Vektörü |
| $c$ | Bir Açının Kosinüsü |
| $s$ | Bir Açının Sinüsü |
| $\varphi$ | Dönüklük Açısı |
| $\mathbf{R}$ | Dönüklük Matrisi |
| $q$ | Dördey Elemanı |
| $\mathbf{A}$ | Düzeltme Denklemleri Katsayılar Matrisi |
| $p$ | Eşlenik Nokta Sayısı |
| $\mathbf{X}$ | Hedef Sistemi Koordinat Vektörü |
| $\mathbf{e}$ | Koordinat Hata Vektörü |
| $\mathbf{Q}$ | Koordinat Kofaktör Matrisi |
| $\chi^2$ | Ki-Kare (Ki-Kare güven sınırı) |
| $\mathbf{t}$ | Öteleme Vektörü |
| $\mathbf{A}_c$ | Ötelenmiş Koordinatlarla Katsayılar Matrisi |
| $\boldsymbol{\lambda}$ | Ölçek Matrisi |
| $\lambda$ | Ölçek Çarpanı |
| $\mathbf{y}$ | Ölçü Vektörü |
| $f$ | Serbestlik Derecesi |
| $s_0^2$ | Varyans Çarpanı |
| $\alpha$ | Yanılma Olasılığı |

# KISALTMA LİSTESİ

| | |
|---|---|
| BW | Bursa-Wolf |
| KOH | Karesel Ortalama Hata |
| MP | Ki-Kare Tutarsızlık Oranı |
| TLS | Toplam En Küçük Kareler (Total Least-Squares) |

# ŞEKİL LİSTESİ

**Şekil 3.1** SimTrSim adlı Matlab yazılımın grafik arayüzü…..33

**Şekil 3.2** 10 eşlenik noktalı bir konfigürasyon örneği…..34

**Şekil 3.3** Bir konfigürasyon için 500 farklı rasgele örneklemin TLS çözümü sonucunda elde edilen dönüklük açıları standart sapmaları örneği….35

**Şekil 3.4** 1 derece dönüklük açılı örnekler için öteleme belirsizlikleri…. .....39

**Şekil 3.5** 1 derece dönüklük açılı örnekler için dönüklük açı belirsizlikleri…... ..39

**Şekil 3.6** 1 derece dönüklük açılı örnekler için ölçek çarpanı belirsizlikleri …. .40

**Şekil 3.7** 1 derece dönüklük açılı örnekler için konum hatası belirsizlikleri… ...40

**Şekil 3.8** 1 derece dönüklük açılı örnekler için konum hatası $\chi^2$ tutarsızlık oranları…. .....41

**Şekil 3.9** 1 derece dönüklük açılı örnekler için dördeyli model (TLS) ve diferansiyel açılı model (BW) için sonsal varyanslar…..42

**Şekil 3.10** Eşlenik nokta sayısına bağlı olarak çeşitli dönüklük açıları için diferansiyel modelden elde edilen ortalama $\chi^2$ tutarsızlık oranları (MP) …. .....45

# TABLO LİSTESİ

**Tablo 2.1** Dördeyli simetrik dönüşüm modeli için TLS çözüm algoritması.....24

**Tablo 2.2** Diferansiyel dönüklük açılı simetrik dönüşüm modeli için TLS çözüm algoritması.....25

**Tablo 2.3** Küçültülmüş koordinatların kullanılması durumunda dördeyli simetrik dönüşüm modelinde esas bilinmeyenlere geçiş $< \delta t, q > \rightarrow < t, q >$ katsayılar matrisi ($Fq$).....27

**Tablo 2.4** Küçültülmüş koordinatların kullanılması durumunda diferansiyel açılı simetrik dönüşüm modelinde esas bilinmeyenlere geçiş $< \delta t, \lambda, \varphi > \rightarrow < t, \lambda, \varphi >$ katsayılar matrisi ($F\varphi$).....28

**Tablo 2.5** Dördeyli simetrik dönüşüm modelinde esas dönüşüm parametrelerine geçiş $< t, q > \rightarrow < t, \lambda, \varphi >$ katsayılar matrisi ($Dq$) .....30

**Tablo 3.1** 1 derece dönüklük açı örneği için χ^2 tutarsızlık oranları (MP)……..41

**Tablo 3.2** [-2’; 2’] dönüklük açısı aralığı için diferansiyel açılı dönüşüm modelinde χ^2 tutarsızlık oranları (MP:%) (Koyu olanlar:>%5)……...43

**Tablo 3.3** [-1’; 1’] dönüklük açısı aralığı için diferansiyel açılı dönüşüm modelinde χ^2 tutarsızlık oranları (MP:%)(Koyu olanlar:>%5)……43

**Tablo 3.4** [-0,1’; 0,1’] dönüklük açısı aralığı için diferansiyel açılı dönüşüm modelinde χ^2 tutarsızlık oranları (MP:%) (Koyu olanlar: >%5)……44

**Tablo 3.5** [-1’; 1’] dönüklük açısı aralığı için elde edilen belirsizlikler ve χ^2 tutarsızlık oranları…….46

**Tablo 3.6** [-0,2’; 0,2’] dönüklük açısı aralığı için elde edilen belirsizlikler ve χ^2 tutarsızlık oranları…….46

**Tablo 3.7** [-0,1’; 0,1’] dönüklük açısı aralığı için elde edilen belirsizlikler ve χ^2 tutarsızlık oranları…….46

# ÖZET

## Üç Boyutlu Benzerlik Koordinat Dönüşümünde Dördeylerin Kullanımı

Recep CANDAN

Harita Mühendisliği Anabilim Dalı

Geomatik Programı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

Üç boyutlu (Kartezyen) koordinat dönüşümleri birçok mühendislik probleminde önemli bir yer tutar. Bu dönüşümlerden 7 parametreli (üç öteleme, üç dönüklük, bir ölçek çarpanı ) benzerlik dönüşümü Harita Mühendisliğinin hemen hemen tüm alanlarında en çok uygulanan modeldir. Genellikle, diferansiyel dönüklük açı varsayımına bağlı Bursa-Wolf ve Molodensky-Badekas çözüm modelleri kullanılır. Bu nedenle, söz konusu modeller dönüklük açılarının büyük olduğu problemlerde uygulanamaz. Bu çalışmada, üç boyutlu benzerlik dönüşümünün dördeyler kullanılarak çözümü ele alınmaktadır. Dönüşümün gerçekleştirildiği iki sisteme karşılık gelen koordinatların tümünün hatalı olduğu duruma karşılık gelen simetrik model için dördeyli simetrik üç boyutlu dönüşüm modeli ve çözüm algoritması irdelenmiştir. Ayrıca, söz konusu dönüklük açısı yaklaşımına bağlı diferansiyel açılı simetrik üç boyutlu dönüşüm modeli ele alınmaktadır. Modellerin performansları, çok geniş perspektifte çalışabilen bir yazılım (SimTrSim) sayesinde

simülasyonlar ile ortaya konmuştur. Söz konusu analiz sonuçlarına göre, dördeyli modelin tüm durumlarda tutarlı ve doğru sonuçlar ürettiği, diferansiyel açılı modelin tutarlılığının ve doğruluğunun ise temel olarak dönüklük açılarının büyüklüğüne bağlı olduğu belirlenmiştir. Tüm analizler neticesinde, alışılageldik yaklaşımın dönüklük açılarının ancak 0,1 derece dakikası ve daha küçük olması durumunda kullanılabileceği gösterilmiştir. Dördeyli model için böyle bir şart bulunmamaktadır. Bu nedenle, dördeyli modelin üç boyutlu koordinat dönüşüm uygulamalarında ileride daha da öne çıkacağı sonucuna ulaşılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Dördeyler, üç boyutlu koordinat dönüşümü, toplam en küçük kareler, bursa-wolf modeli.

# ABSTRACT

## The Using of Quaternions in Three Dimensional Similarity Coordinate Transformation

Recep CANDAN

Department of Geomatic Engineering

Master of Science

Supervisor: Prof. Dr. Cüneyt AYDIN

Three-dimensional (Cartesian) coordinate transformations play an important role in many engineering problems. Among these transformations, the one with 7 parameters (three translations, three rotations and one scale factors)-similarity transformation is the most adapted model in almost all areas of Geomatics Engineering discipline. In general, the so-called Bursa-Wolf and Molodensky-Badekas solution models based on the differential rotation angles-assumption are used. These models, therefore, cannot be applied to the problems with non-differential angles. In this study, the solution of three-dimensional similarity transformation problem is considered by using the so-called quaternions. For the symmetric model, which corresponds to the case where the coordinates of both systems used for the transformation are all erroneous, the symmetric three-dimensional transformation model based on quaternions and its solution algorithm are studied. Furthermore, the symmetric three-dimensional transformation model based on differential rotations for corresponding rotation-assumption and its solution algorithm are examined. The performances of both models are presented in a broad perspective by using simulations generated by a software called SimTrSim. According to the analysis results, it is shown that the symmetric model

based on quaternions produces very consistent and correct solutions whereas the consistency and precision of the model based on differential rotations mainly rely on the magnitude of the differential rotation angle along the coordinate axes. Finally, it is depicted that this conventional approach can be used effectively just for the cases with angles smaller than or equal to 0.1-degree minute. There exists no such a restriction for the model with quaternions. Therefore, it is concluded that the model based on quaternions will be more important in future for three-dimensional transformation applications.

**Keywords:** Quaternions, three-dimensional coordinate transformation, total least-squares, bursa-wolf model.

# 1
# GİRİŞ

## 1.1 Literatür Özeti

Mühendislik çalışmalarının temel esası, gözlenen olayların birbirleriyle olan bağlantısını kurmaktır. Bunu da matematiksel modeller aracılığıyla gerçekleştiririz. İki ya da üç boyutlu koordinat dönüşümleri Harita Mühendisliği çalışmalarında böylesi bir amaca yönelik olarak başvurulan temel modellerdir. Benzerlik ya da afin dönüşümü biçimindeki bu koordinat dönüşümleri, datum dönüşüm modellerinin oluşturulması, iki farklı zaman periyodunda bir bölgede ya da yapıda meydana gelen deformasyonların araştırılması, bağlantı noktalarının test edilmesi, fotogrametrik ve görüntü işleme çalışmalarında vazgeçilmez araçlar olarak karşımıza çıkar [1]. Genel bir dönüşüm modeli aşağıdaki parametrelere sahiptir [2], [3]:

-Koordinat eksenleri arasındaki ötelemeler,

-Koordinat eksenleri etrafındaki dönüklükler,

-Koordinat eksenleri boyunca büyüme ya da küçülme oranları (ölçek çarpanları),

-Koordinat eksenleri arasındaki afinite parametreleri.

Bu parametrelerin belirlenmesi ile iki koordinat sistemi arasındaki matematiksel ilişki kurulmuş olur; koordinat dönüşümü gerçekleştirilir. Bunlardan geçilmek istenen sisteme hedef sistemi, geçilen sisteme ise başlangıç sistemi denir. Koordinat dönüşümü için her iki sistemde koordinatları bilinen noktalara ihtiyaç vardır. Bu noktalara eşlenik noktalar adı verilir. Eşlenik nokta sayısının koordinat sisteminin boyut sayısı ile çarpımının modelde geçen bilinmeyen parametreye eşit olması durumunda çözüm matematiksel olarak gerçekleştirilirken, büyük olması durumunda çözüm en küçük kareler dengelemesi biçiminde sağlanır [1].

Harita Mühendisliğinde GPS ve lazer tarama sistemlerinin gelişmesiyle birlikte üç boyutlu dönüşüm modelleri daha çok kullanılır hale gelmiştir. Bu modellerden Bursa-Wolf ya da Modelendesky-Badekas çözüm modelleri altında ele alınan üç boyutlu benzerlik dönüşümü en çok uygulama alanı bulan modeldir. Bu modelde,

-$X, Y, Z$ eksenleri arasındaki 3 öteleme,

-$X, Y, Z$ eksenleri arasındaki 3 dönüklük

-$X, Y, Z$ eksenleri boyunca 1 ölçek çarpanı

olmak üzere 7 parametre bulunur [4]. Dengelemeli çözüm için iki farklı model kullanılır:

-Asimetrik model

-Simetrik model

Asimetrik model, yalnızca hedef sistemi koordinatlarının hatalı olarak ele alındığı alışıldık en küçük kareler dengelemesi ile gerçekleştirilen modele ilişkindir. Simetrik model ise hem hedef hem de başlangıç sistemi koordinatlarının hatalı olduğu dengeleme modeline karşılık gelir [5]. Simetrik modelin bilindik dengeleme modeli ile çözümü yapılamaz: Çözüm, toplam en küçük kareler dengelemesi ile gerçekleştirilir [6]. Toplam en küçük kareler dengelemesi için birçok algoritma bulunur. Koordinat dönüşümleri için bu modeller özdeş sonuçlar üretirler. Uygur [7] ve Uygur vd. [8]'de gösterildiği gibi, hangi modelin kullanılması gerektiği, pratik olarak başlangıç ve hedef sistemlerinin genel konum hatalarının oranına (noise ratio) bağlıdır. Eğer başlangıç sisteminin koordinatları hedef sisteminin koordinatlarına göre yaklaşık olarak 10 kat ya da daha yüksek doğruluğa sahipse, simetrik model yerine asimetrik model kullanılabilir. Aksi halde, simetrik modeli düşünmek gerekir. Bu durumda, dönüşümün alışıldık en küçük kareler dengelemesi biçiminde yapılması parametrelerin ve bunların kovaryans matrisinin yanlış belirlenmesine sebep olur. Bu da, dönüşüm modelinin hem yanlış oluşturulmasına hem de oluşturulan dönüşüm modeline bağlı olarak yapılacak ileri analizlerin yanlı olmasına yol açar.

Bursa-Wolf ya da Moledensky-Badekas gibi çözüm modellerinde dönüklüğü ifade eden Euler dönüklük açıları diferansiyel anlamda küçük açılardır. Bu yaklaşım, çoğu jeodezik çalışmada sistemler arasında çok küçük dönüklükler olduğu için yeterli bir yaklaşımdır. Ancak büyük dönüklük açılarına sahip başka başka mühendislik problemlerini bu çözüm modelleri ile ele almak doğru olmaz. Bu amaçla, Andrei [2] ve Aydın vd. [9]'da belirtildiği gibi farklı bir fonksiyonel modele ihtiyaç vardır. Bu fonksiyonel modeli Taylor açınımı kullanarak oluşturmak kavramsal olarak zor bir ödev değildir. Ancak, uygulamada Euler açılarının yaklaşık değerlerine ihtiyaç vardır ve büyük dönüklük açılarında çözümün

tutarlılığını sağlamak kolay değildir. Bu amaçla, Mercan [10], ilk kez İrlandalı matematikçi Hamilton tarafından tanımlanan dördeyleri (quaternions) üç boyutlu benzerlik dönüşümünde simetrik modelde kullanmışlardır. Dördeylerin kullanımı ile,

-Dönüklük açıları için yaklaşık değer belirleme problemi ortadan kalkar,

-Her dönüklük açısı büyüklüğü için dönüşüm gerçekleştirilir,

-Simetrik modelin çözümünde geçerli olan iteratif çözümde tutarlılık sağlanır.

## 1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında üç boyutlu benzerlik koordinat dönüşümü modeli için dördeylerin kullanımı simetrik model altında araştırılmaktadır. Yaygın olarak kullanılan Bursa-Wolf çözüm modeline göre üstünlükleri ortaya çıkarılmaktadır. Söz konusu dördeyli modelin tüm dönüklük açıları için sağlam bir şekilde çalışıp çalışmadığı, çözümdeki tutarlılığı incelenmektedir. Diğer taraftan, Bursa-Wolf modelinin hangi dönüklük açılarına kadar geçerli olduğu irdelenmektedir. Bunun için YTÜ-Harita Mühendisliği Bölümünde geliştirilmiş olan SimTrSim adlı Matlab simülasyon ve analiz program kullanılmıştır. Çok sayıdaki örneklerle parametrelerin karesel ortalama hataları ve kovaryans matristen elde edilen standart sapmaları karşılaştırılmakta, $\chi^2$-testi yardımıyla geçerli olabilecek istatistiki anlamda çıkarımlar yapılmaktadır.

## 1.3 Hipotez

Tezin hipotezleri şöyledir:

-Üç boyutlu benzerlik koordinat dönüşümü dördeylerin kullanımı ile herhangi bir dönüklük açısı için tutarlı biçimde çözülür.

-Diferansiyel açılı model ancak belli bir dönüklük açısına kadar doğru çözüm verir.

# 2
# ÜÇ BOYUTLU KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ

## 2.1 Genel Dönüşüm Modeli

Bir nokta için geçerli üç boyutlu $(x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$ dik koordinat dönüşümü için temel model aşağıdaki gibidir ([3]):

$$\mathbf{X} = \mathbf{t} + \mathbf{R}\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x} \tag{2.1}$$

Burada, **X** hedef sistem koordinat vektörü; **x** başlangıç sistem koordinat vektörü; **t**, $3 \times 1$ boyutlu $x, y, z$ öteleme vektörü; **R**, $3 \times 3$ boyutlu dönüklük matrisi; **M**, $3 \times 3$ boyutlu affinite matrisi ve $\boldsymbol{\lambda}$, $3 \times 3$ boyutlu köşegenleri $x, y, z$ ölçek çarpanlarını içeren köşegen ölçek matrisidir. Söz konusu 12 parametreli dönüşüm modeli, **M** matrisi birim matris ($\mathbf{I}_3$) ve $\boldsymbol{\lambda}$ matrisi, üç eksen için bir ortak ölçek çarpanı olan $\lambda$ ile $\lambda\mathbf{I}_3$ biçiminde ele alınarak,

$$\mathbf{X} = \mathbf{t} + \lambda\mathbf{R}\mathbf{x} \tag{2.2}$$

biçimine dönüşür. Bu modele 7 parametreli Helmert dönüşümü ya da üç boyutlu benzerlik dönüşümü adı verilir. Dönüşümde geçen **R** dönüklük matrisi aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_y c_z & c_x s_z + s_x s_y c_z & s_x s_z - c_x s_y c_z \\ -c_y s_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & s_x c_z + c_x s_y s_z \\ s_y & -s_x c_y & c_x c_y \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Burada, $c_i$ ve $s_i$, $i$. koordinat ekseni etrafındaki $\varphi_i$ Euler dönüklük açısının kosinüs ve sinüs değerleridir ($i = x, y, z$).

## 2.2 Dönüşüm Modelinin Dördeyliler ile İfadesi

(2.2) ile ifade edilen dönüşüm modeli, $q_0$, $q_1$, $q_2$ ve $q_3$ ölçeklendirilmiş dördeyler kullanılarak ve

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \lambda \tag{2.4}$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$\mathbf{X} = \mathbf{t} + \mathbf{R}_\lambda \mathbf{x} \tag{2.5}$$

biçiminde oluşturulur [10], [7], [11]. Burada $\mathbf{R}_\lambda$ ölçeklendirilmiş dönüklük matrisidir:

$$\mathbf{R}_\lambda = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Dönüşüm problemi, böylece, 3 adet öteleme ve 4 adet dördeyin tanımlanmış olduğu dönüşüm problemi, yani, dördeylerin kullanıldığı üç boyutlu benzerlik dönüşüm problemi haline gelmiş olur.

## 2.3 Euler Açılarına Göre Dengelemenin Fonksiyonel Modeli

En küçük kareler yöntemine göre benzerlik dönüşüm problemini çözebilmek için en az $p = 3$ nokta gereklidir. Dengelemenin serbestlik derecesi,

$$f = 3p - 7 > 0 \tag{2.7}$$

olur. Dengelemenin fonksiyonel modelini (2.2) ya da (2.6) eşitliklerine göre oluşturabilmek için Taylor açınımı uygulanmalıdır.

(2.2) modeli aşağıdaki biçimde doğrusallaştırılır ([9]):

$$\mathbf{X} = \mathbf{t} + \lambda_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda}\right)_0 \mathbf{x}\delta\lambda + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi_x}\right)_0 \mathbf{x}\delta\varphi_x + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi_y}\right)_0 \mathbf{x}\delta\varphi_y + \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi_z}\right)_0 \mathbf{x}\delta\varphi_z \tag{2.8}$$

Burada, $(\dots)_0$ yaklaşık değer gösterimi, $\delta$ ifadeleri ise yaklaşık değerlere getirilecek diferansiyel düzeltmelerdir. Söz konusu Taylor açınımın geçerli olabilmesi için yaklaşık değerlerin oldukça iyi bilinmesi gerekir. (2.7) eşitliğinde,

$$\mathbf{R}_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \lambda}\right)_0, \mathbf{R}_{x0} = \lambda_0 \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi_x}\right)_0, \mathbf{R}_{y0} = \lambda_0 \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi_y}\right)_0 \text{ ve } \mathbf{R}_{z0} = \lambda_0 \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi_z}\right)_0, \tag{2.9}$$

$3 \times 3$ boyutlu matrisler düşünülerek ([2]):

$$(\mathbf{X} - \lambda_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{x}) = \mathbf{t} + \mathbf{R}_0 \mathbf{x} \delta\lambda + \mathbf{R}_{x0} \mathbf{x} \delta\varphi_x + \mathbf{R}_{y0} \mathbf{x} \delta\varphi_y + \mathbf{R}_{z0} \mathbf{x} \delta\varphi_z \tag{2.10}$$

elde edilir. $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi ve $\boldsymbol{\beta}$ bilinmeyenler vektörü aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{I}_3 \;\; \mathbf{R}_0\mathbf{x} \;\; \mathbf{R}_{x0}\mathbf{x} \;\; \mathbf{R}_{y0}\mathbf{x} \;\; \mathbf{R}_{z0}\mathbf{x}] \,, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \delta\lambda \\ \delta\varphi_x \\ \delta\varphi_y \\ \delta\varphi_z \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

sonuç olarak,

$$(\mathbf{X} - \lambda_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{x}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \tag{2.12}$$

doğrusal modeli elde edilir. $p$ nokta için söz konusu model,

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ (\mathbf{X}_i - \lambda_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{x}_i) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{A}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \;\; , \;\; (i = 1, \dots, p) \tag{2.13}$$

şeklinde son haline dönüşür.

## 2.4 Dördeylere Göre Dengelemenin Fonksiyonel Modeli

(2.6) eşitliğine Taylor açınımı uygulanırsa ([10], [7]):

$$\mathbf{X} = \mathbf{t} + \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_0}\right)_0 \mathbf{x}\delta q_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_1}\right)_0 \mathbf{x}\delta q_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_2}\right)_0 \mathbf{x}\delta q_2 + \left(\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_3}\right)_0 \mathbf{x}\delta q_3 \tag{2.14}$$

elde edilir. Burada kısmi-türev fonksiyonları şöyledir:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_0} = \mathbf{G}_0 = 2\begin{bmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \;\; , \;\; \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_1} = \mathbf{G}_1 = 2\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_2} = \mathbf{G}_2 = 2\begin{bmatrix} -q_2 & q_1 & q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \end{bmatrix} \;\; , \;\; \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial q_3} = \mathbf{G}_3 = 2\begin{bmatrix} -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Böylece,

$$\mathbf{X} - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{G}_{0,0}\mathbf{x}\delta q_0 + \mathbf{G}_{1,0}\mathbf{x}\delta q_1 + \mathbf{G}_{2,0}\mathbf{x}\delta q_2 + \mathbf{G}_{3,0}\mathbf{x}\delta q_3 \qquad (2.17)$$

ve

$$\mathbf{A} = [\mathbf{I_3}\ \mathbf{G}_{0,0}\mathbf{x}\ \ \mathbf{G}_{1,0}\mathbf{x}\ \ \mathbf{G}_{2,0}\mathbf{x}\ \ \mathbf{G}_{3,0}\mathbf{x}]\ ,\ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

gösterimleriyle,

$$\left(\mathbf{X} - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x}\right) = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \qquad (2.19)$$

elde edilir. $p$ nokta için fonksiyonel model, böylece,

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \left(\mathbf{X}_i - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x}_i\right) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{A}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}\ \ ,\ (i = 1, \dots, p) \qquad (2.20)$$

olur. Bir önceki bölümde Euler açılarına göre yazılan fonksiyonel modelde ihtiyaç duyulan iyi yaklaşık değer tahmini burada bulunmaz: Dördeylerin yaklaşık değerleri için

$$q_{0,0} = 1, q_{1,0} = q_{2,0} = q_{3,0} = 0 \qquad (2.21)$$

kullanılması yeterlidir.

## 2.5 Diferansiyel Açılar için Dengelemenin Fonksiyonel Modeli

Harita Mühendisliğinin jeodezik çalışmalarında **R** dönüklük matrisinde geçen Euler açıları diferansiyel büyüklüklerdir:

$$\varphi_x \approx 0, \varphi_y \approx 0, \varphi_z \approx 0 \qquad (2.22)$$

Böylece, dönüklük matrisinde geçen elemanlar için

$$cos\varphi_i = c_i = 1 \text{ ve } sin\varphi_i = s_i = \varphi_i \ (i = x, y, z) \tag{2.23}$$

alınabilir. Buna göre, $\mathbf{R}$ dönüklük matrisi aşağıdaki ters simetrik yapı şekline dönüşür:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z & 1 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Buradan, (2.10) eşitliğine benzer biçimde

$$\mathbf{X} - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x} = \mathbf{t} + \mathbf{R}_0\mathbf{x}\delta\lambda + \mathbf{R}_{x0}\mathbf{x}\delta\varphi_x + \mathbf{R}_{y0}\mathbf{x}\delta\varphi_y + \mathbf{R}_{z0}\mathbf{x}\delta\varphi_z \tag{2.25}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte kısmi türevler aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{R}_{x0} = \lambda_0 \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi_x}\right)_0 = \lambda_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{R}_{y0} = \lambda_0 \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi_y}\right)_0 = \lambda_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{z0} = \lambda_0 \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi_z}\right)_0 = \lambda_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

$\mathbf{A}$ katsayılar matrisi ve $\boldsymbol{\beta}$ bilinmeyenler vektörü,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{I_3}\ \mathbf{R}_0\mathbf{x}\ \ \mathbf{R}_{x0}\mathbf{x}\ \ \mathbf{R}_{y0}\mathbf{x}\ \ \mathbf{R}_{z0}\mathbf{x}] \ , \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \delta\lambda \\ \delta\varphi_x \\ \delta\varphi_y \\ \delta\varphi_z \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

olmak üzere, *p* nokta için fonksiyonel model,

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \left(\mathbf{X}_i - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x}_i\right) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{A}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \ , \ (i = 1, \dots, p) \tag{2.28}$$

olur. (2.28) modeli, (2.13) modeliyle özdeş gibi görünse de (2.26) ve (2.27) eşitlikleri düşünüldüğünde daha basit bir yapıya sahiptir. Dahası, jeodezi problemlerinde dönüklük açıları küçük değerler olduğu için dengelemede

düzeltilecek elemanlar olarak ele alınmaz ve bunların yaklaşık değerleri 0 kabul edilir. Ayrıca, $\lambda_0 = 1$'dir. Böylece, $\mathbf{R}_{\lambda,0} = \mathbf{I_3}$ olur. Buna göre, (2.28) modeli,

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ X_i - x_i \\ Y_i - y_i \\ Z_i - z_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \vdots & & \\ 1 & 0 & 0 & x_i & 0 & -z_i & y_i \\ 0 & 1 & 0 & y_i & z_i & 0 & -x_i \\ 0 & 0 & 1 & z_i & -y_i & x_i & 0 \\ & & & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \delta\lambda \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{X}_i - \mathbf{x}_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{A}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \quad (2.29)$$

modeline dönüşür. Bu model, uygulamada Bursa-Wolf modeli olarak adlandırılır.

## 2.6 Dönüşüm için Simetrik Model ve Çözümü

Çoğu koordinat dönüşümü çalışmasında yalnız hedef sistem koordinatlarının hatalı olduğu öngörülür. Ancak, başlangıç sistem koordinatları da hatalı olabilir. Bu durumda dengelemenin fonksiyonel modeli iki türden hatayı içerir. Böylesi bir dengeleme modeline "Katsayıların da hatalı olduğu dengeleme modeli" (errors-in-variables) adı verilir [12]. Söz konusu modelin çözümü klasik en küçük kareler dengelemesi biçiminde gerçekleştirilemez. Bunun için toplam en küçük kareler (total least-squares-TLS) yöntemi uygulanır. Ağırlıklı TLS çözümü, modeldeki tüm hataların ağırlıklı karelerinin toplamını minimum yapan bir Lagrange fonksiyonuna dayanır. Bu fonksiyonun düşünülmesiyle elde edilen denklem sistemi iteratif olarak çözülür. Fonksiyonun farklı biçimlerde ele alınmasıyla jeodezide farklı algoritmalar oluşturulmuştur. Bu algoritmalar, Aydın vd. [13] ve Uygur [12] tarafından aşağıdaki şekilde sınıflandırılmıştır:

-Genelleştirilmiş normal denklem temelli algoritma [14],

-En küçük kareler temelli algoritma [14], [15],

-Genişletilmiş normal denklem temelli algoritma [16]

-Gauss-Helmert modeli yapısındaki algoritma [17], [18], [10].

Söz konusu algoritmalar, koordinat dönüşümleri için özdeş sonuçlar verir. Uygulamadaki kolaylıkları nedeniyle birçok çalışmada Gauss-Helmert modeli yapısındaki algoritma düşünülür. Bu çalışmada da çözüm, söz konusu Gauss-Helmert dengeleme modeli altında ele alınmaktadır.

Her iki sistem koordinatlarının hatalı olması durumunda elde edilen dengeleme modeline simetrik model adı verilir. En genel haliyle bu model, (2.2)'den $p$ nokta için aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 - \mathbf{e}_{X1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_p - \mathbf{e}_{Xp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \vdots \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{R} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \lambda\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_{x1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p - \mathbf{e}_{xp} \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{xx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{XX} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Bu modelde, $\mathbf{e}_{Xi}$, $3 \times 1$ boyutlu $\mathbf{X}_i$ koordinat vektörünün rasgele hata vektörü; $\mathbf{e}_{xi}$, $3 \times 1$ boyutlu $\mathbf{x}_i$ koordinat vektörünün rasgele hata vektörü; $\mathbf{Q}_{xx}$, $3p \times 3p$ başlangıç sistem koordinatlarının kofaktör matrisi ve $\mathbf{Q}_{XX}$, $3p \times 3p$ hedef sistem koordinatlarının kofaktör matrisidir.

(2.30) modelinde hem bilinmeyenler hem de başlangıç sisteminin koordinat hatalarına göre doğrusallaştırma yapılırsa, aşağıdaki Gauss-Helmert modeline ulaşılır [9], [11]:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{X}_p - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{X1} - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{e}_{x1} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{Xp} - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{e}_{xp} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_X - \mathbf{H}_0\mathbf{e}_x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{c,1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{c,p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_c} \boldsymbol{\beta}, \ \mathbf{P} = (\mathbf{Q}_{XX} + \mathbf{H}_0\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{H}_0^T)^{-1} \tag{2.31}$$

$$\mathbf{y} - (\mathbf{e}_X - \mathbf{H}_0\mathbf{e}_x) = \mathbf{A}_c\boldsymbol{\beta}, \ \mathbf{P} = (\mathbf{Q}_{XX} + \mathbf{H}_0\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{H}_0^T)^{-1} \tag{2.32}$$

Burada, $\mathbf{H}_0$, $3p \times 3p$ boyutlu blok-köşegen matris,

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\lambda,0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_{\lambda,0} \end{bmatrix}; \tag{2.33}$$

$\mathbf{P}$, $3p \times 3p$ boyutlu ağırlık matristir. $i$. nokta için geçerli olan $\mathbf{A}_{c,i}$ alt ağırlık katsayılar matrisi, dördeyli model için (2.18) eşitliği, diferansiyel açılara göre yazılan model için (2.27) eşitliği ile verilenle özdeş yapıdadır. Ancak simetrik model çözümünde başlangıç sistem koordinatlarına $(\mathbf{x}_i)$ göre değil, yaklaşık olarak düzeltilmiş başlangıç sistem koordinatlarına $(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})$ göre oluşturulur. Her iki yaklaşıma göre söz konusu ağırlık katsayıları matrisi aşağıda sırasıyla gösterilmiştir:

Dördeyli model için

$$\mathbf{A}_{c,i} = [\mathbf{I_3}\ \mathbf{G}_{0,0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{G}_{1,0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{G}_{2,0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{G}_{3,0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})] \tag{2.34}$$

Diferansiyel açılı model için

$$\mathbf{A}_{c,i} = [\mathbf{I_3}\ \mathbf{R}_0(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{R}_{x0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{R}_{y0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{R}_{z0}(\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})] \tag{2.35}$$

(2.32) modeli Gauss-Helmert dengelemesi biçiminde iteratif olarak çözülür: Her bir defasında bilinmeyenler ($\boldsymbol{\beta}$) ve başlangıç sistemi koordinatlarının hata vektörü ($\mathbf{e}_x$) kestirilir; model güncellenir ve kestirim işlemine devam edilir. Benzer kestirim işlemi, parametre değerleri değişmeyinceye dek sürdürülür.

Söz konusu simetrik modeller için algoritmalar aşağıda verilmiştir:

**Tablo 2.1** Dördeyli simetrik dönüşüm modeli için TLS çözüm algoritması

| | |
|---|---|
| **Başlangıç:** | Yaklaşık dördeyler: $\boldsymbol{q_{0,0} = 1, q_{1,0} = q_{2,0} = q_{3,0} = 0}$<br>Yaklaşık ölçeklendirilmiş $\mathbf{R}_{\lambda,\mathbf{0}}$: (2.6 eşitliği)<br>Yaklaşık x koordinatları hatası: $\mathbf{e}_{x,\mathbf{0}} = \mathbf{0}$ |
| **Tekrarla:** | Yaklaşık düzeltilmiş **x** koordinat vektörü: $\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0}$<br>Katsayılar matrisi: $\mathbf{A}_{c,i}$ (2.34 Eşitliği)→ $\mathbf{A}_c$ (2.32 Eşitliği)<br>Blok-Köşegen matris: $\mathbf{H}_0$ (2.33 Eşitliği)<br>Ölçü vektörü: $\mathbf{y} = \mathbf{X} - \mathbf{H}_0\mathbf{x}$<br>Ağırlık matrisi: $\mathbf{P} = (\mathbf{Q}_{XX} + \mathbf{H}_0\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{H}_0^T)^{-1}$<br>Bilinmeyenler vektörü: $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{A}_c)^{-1}(\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{y})$<br>Başlangıç sistem hata vektörü: $\mathbf{e}_x = -\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{H}_0^T\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{A}_c\boldsymbol{\beta})$<br>Yaklaşık **x** koordinatları hatası: $\mathbf{e}_{x,0} = \mathbf{e}_x$<br>Yaklaşık dördeyler: $q_{0,0} = q_{0,0} + \delta q_0, \ldots, q_{3,0} = q_{3,0} + \delta q_3$<br>Yaklaşık ölçeklendirilmiş dönüklük m.: $\mathbf{R}_{\lambda,0}$: (2.6 eşitliği)<br>**Kontrol:** Bilinmeyenler önceki iterasyona göre değişmemişse (aralarında $\varepsilon=10^{-12}$ fark varsa), **Sonuç** adımına geç. |
| **Sonuç:** | Bilinmeyenler vektörü: $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{A}_c)^{-1}(\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{y})$<br>Başlangıç sistem hata vektörü: $\mathbf{e}_x = -\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{H}_0^T\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{A}_c\boldsymbol{\beta})$<br>Hedef sistem hata vektörü: $\mathbf{e}_X = \mathbf{Q}_{XX}\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{A}_c\boldsymbol{\beta})$<br>Varyans çarpanı: $s_0^2 = (\mathbf{e}_x^T\mathbf{Q}_{xx}^{-1}\mathbf{e}_{xx} + \mathbf{e}_X^T\mathbf{Q}_{XX}^{-1}\mathbf{e}_{XX})/f$ |

**Tablo 2.2** Diferansiyel dönüklük açılı simetrik dönüşüm modeli için TLS çözüm algoritması

| | |
|---|---|
| **Başlangıç:** | **Yaklaşık ölçek ve dönüklükler:** $\boldsymbol{\lambda_0 = 1, \varphi_{x,0} = \varphi_{y,0} = \varphi_{z,0} = 0}$<br>**Yaklaşık ölçeklendirilmiş** $\mathbf{R_{\lambda,0}} := \boldsymbol{\lambda_0 \mathbf{I_3}}$<br>**Yaklaşık x koordinatları hatası:** $\mathbf{e_{x,0} = 0}$ |
| **Tekrarla:** | Yaklaşık düzeltilmiş **x** koordinat vektörü: $\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0}$<br>Katsayılar matrisi: $\mathbf{A}_{c,i}$ (2.35 Eşitliği)$\rightarrow \mathbf{A}_c$ (2.32 Eşitliği)<br>Blok-Köşegen matris: $\mathbf{H}_0$ (2.33 Eşitliği)<br>Ölçü vektörü: $\mathbf{y} = \mathbf{X} - \mathbf{H}_0\mathbf{x}$<br>Ağırlık matrisi: $\mathbf{P} = (\mathbf{Q}_{XX} + \mathbf{H}_0\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{H}_0^T)^{-1}$<br>Bilinmeyenler vektörü: $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{A}_c)^{-1}(\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{y})$<br>Başlangıç sistem hata vektörü: $\mathbf{e}_x = -\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{H}_0^T\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{A}_c\boldsymbol{\beta})$<br>Yaklaşık **x** koordinatları hatası: $\mathbf{e}_{x,0} = \mathbf{e}_x$<br>Yaklaşık parametreler: $\lambda_0 = \lambda_0 + \delta\lambda,\ \varphi_{x,0} = \varphi_{x,0} + \delta\varphi_x$ ...<br>Yaklaşık ölçeklendirilmiş dönüklük m. $\mathbf{R}_{\lambda,0} = \lambda_0\mathbf{R}_0$ (2.24 eşitliği)<br>**Kontrol:** Bilinmeyenler önceki iterasyona göre değişmemişse (aralarında $\varepsilon=10^{-12}$ fark varsa), **Sonuç** adımına geç. |
| **Sonuç:** | Bilinmeyenler vektörü: $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{A}_c)^{-1}(\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{y})$<br>Başlangıç sistem hata vektörü: $\mathbf{e}_x = -\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{H}_0^T\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{A}_c\boldsymbol{\beta})$<br>Hedef sistem hata vektörü: $\mathbf{e}_X = \mathbf{Q}_{XX}\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{A}_c\boldsymbol{\beta})$<br>Varyans çarpanı: $s_0^2 = (\mathbf{e}_x^T\mathbf{Q}_{xx}^{-1}\mathbf{e}_{xx} + \mathbf{e}_X^T\mathbf{Q}_{XX}^{-1}\mathbf{e}_{XX})/f$ |

Söz konusu çözümlerde, başlangıç sistemi koordinatlarının kofaktör matrisi, $\mathbf{Q}_{XX} = \mathbf{0}$ alınırsa, çözüm, asimetrik modelin en küçük kareler dengelemesi biçiminde çözümüne, yani alışıldık dengeleme çözümüne dönüşür.

## 2.7 Küçültmüş Başlangıç Koordinatlarına Göre Çözüm

Koordinat dönüşümlerinde en büyük problemlerden biri, fonksiyonel modelde geçen başlangıç sistem koordinatlarının büyük oluşudur. Fonksiyonel modele ilişkin katsayılar matrisinde ötelemelere ilişkin katsayılar her zaman 1 iken, diğer bilinmeyenlere ilişkin $x, y, z$ koordinatlarından oluşan katsayıların büyük oluşu, çözümde kondisyon hatasına neden olur. Bu hata, simetrik model çözümünde daha

baskındır ([9]). Bu hatayı ortadan kaldırmak için çeşitli yöntemler bulunur. Aydın vd. [9], her iki sistem koordinatlarını ağın merkezine öteler ve meydana gelen değişimi çözüm sırasında gidererek optimum çözümü sağlar. Güncel bir çalışma olan Hu vd. [19], Aydın vd. [9]'da verilen stratejinin ne kadar doğru çalıştığını vurgulamaktadır. Bu çalışmada da söz konusu kondisyon hatasını ortadan kaldırmak için benzer yaklaşım kullanılacaktır.

(2.17) eşitliğinde, öteleme vektörü yerine

$$\mathbf{t} = \delta\mathbf{t} - \mathbf{G}_{0,0}\bar{\mathbf{x}}\delta q_0 - \mathbf{G}_{1,0}\bar{\mathbf{x}}\delta q_1 - \mathbf{G}_{2,0}\bar{\mathbf{x}}\delta q_2 - \mathbf{G}_{3,0}\bar{\mathbf{x}}\delta q_3 \tag{2.36}$$

eşitliği düşünülsün. Bu durumda (2.17) eşitliği aşağıdaki gibi olur:

$$\mathbf{X} - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x} = \delta\mathbf{t} + \mathbf{G}_{0,0}\Delta\mathbf{x}\delta q_0 + \mathbf{G}_{1,0}\Delta\mathbf{x}\delta q_1 + \mathbf{G}_{2,0}\Delta\mathbf{x}\delta q_2 + \mathbf{G}_{3,0}\Delta\mathbf{x}\delta q_3 \tag{2.37}$$

Burada, $\bar{\mathbf{x}}$ vektörü, $3 \times 1$ boyutlu başlangıç sistemi ağırlık merkezi koordinatları vektörü; $\Delta\mathbf{x}$ ise ilgili noktanın $3 \times 1$ boyutlu ağırlık merkezine ötelenmiş başlangıç sistemi koordinatlarıdır. Böylece, dördeyli simetrik model için geçerli (2.34) eşitliğinde verilen alt katsayılar matrisi,

$$\overbrace{\mathbf{A}_{c,i} = [\mathbf{I_3}\ \mathbf{G}_{0,0}(\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{G}_{1,0}(\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{G}_{2,0}(\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\ \ \mathbf{G}_{3,0}(\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})]}^{\text{Dördeyli model için}} \tag{2.38}$$

biçimine dönüşür. Bir başka deyişle, katsayılar matrisi küçültülmüş koordinatlara göre oluşturulur. Tablo 2.1'de verilen TLS çözüm algoritması halen geçerlidir: Yalnızca, katsayılar matrisinde $\mathbf{x}$'ler yerine $\Delta\mathbf{x}$'ler kullanılır ve çözümde elde edilen $\boldsymbol{\beta}$ bilinmeyenler vektörü $\mathbf{t}$'yi değil, $\delta\mathbf{t}$'yi içerir. Esas bilinmeyenler vektörü, (2.36)'dan aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_q \begin{bmatrix} \delta\mathbf{t} \\ \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Burada, $\mathbf{F}_q$, $7 \times 7$ boyutlu bir katsayılar matristir; Tablo 2.3'de tanımlanmıştır.

**Tablo 2.3** Küçültülmüş koordinatların kullanılması durumunda dördeyli simetrik dönüşüm modelinde esas bilinmeyenlere geçiş $< \delta\mathbf{t}, \boldsymbol{q} > \rightarrow < \mathbf{t}, \boldsymbol{q} >$ katsayılar matrisi ($\mathbf{F}_{\boldsymbol{q}}$)

| $\mathbf{I_3}$ | $-\mathbf{G_{0,0}}\bar{\mathbf{x}}$ | $-\mathbf{G_{1,0}}\bar{\mathbf{x}}$ | $-\mathbf{G_{2,0}}\bar{\mathbf{x}}$ | $-\mathbf{G_{3,0}}\bar{\mathbf{x}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

Diferansiyel dönüklük açılı modelin çözümünde de benzer yol izlenir. (2.25) eşitliğinde,

$$\mathbf{t} = \delta\mathbf{t} - \mathbf{R}_0\bar{\mathbf{x}}\delta\lambda - \mathbf{R}_{x0}\bar{\mathbf{x}}\delta\varphi_x - \mathbf{R}_{y0}\bar{\mathbf{x}}\delta\varphi_y - \mathbf{R}_{z0}\bar{\mathbf{x}}\delta\varphi_z \tag{2.40}$$

düşünülürse,

$$\mathbf{X} - \mathbf{R}_{\lambda,0}\mathbf{x} = \delta\mathbf{t} + \mathbf{R}_0\Delta\mathbf{x}\,\delta\lambda + \mathbf{R}_{x0}\Delta\mathbf{x}\,\delta\varphi_x + \mathbf{R}_{y0}\Delta\mathbf{x}\,\delta\varphi_y + \mathbf{R}_{z0}\Delta\mathbf{x}\,\delta\varphi_z \tag{2.41}$$

elde edilir. Buna göre, (2.35) katsayılar matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$\overbrace{\mathbf{A}_{c,i} = [\mathbf{I_3}\ \mathbf{R}_0(\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\quad \mathbf{R}_{x0}(\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\quad \mathbf{R}_{y0}(\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})\quad \mathbf{R}_{z0}(\Delta\mathbf{x}_i - \mathbf{e}_{xi,0})]}^{\text{Diferansiyel açılı model için}} \tag{2.42}$$

Tablo 2.2'deki algoritmada katsayılar matrisi $\mathbf{x}$'ler yerine ağırlık merkezine ötelenmiş $\Delta\mathbf{x}$'lere göre oluşturulur. Benzer biçimde, $\boldsymbol{\beta}$ bilinmeyenler vektörü $\mathbf{t}$'yi değil, $\delta\mathbf{t}$'yi içerir. Esas bilinmeyenler vektörü, (2.40)'a göre,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \delta\lambda \\ \delta\varphi_x \\ \delta\varphi_y \\ \delta\varphi_z \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{\varphi} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{t} \\ \delta\lambda \\ \delta\varphi_x \\ \delta\varphi_y \\ \delta\varphi_z \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

biçiminde belirlenir. Burada, $\mathbf{F}_{\varphi}$, $7 \times 7$ boyutlu katsayılar matrisidir ve Tablo 2.4'de tanımlanmıştır.

**Tablo 2.4** Küçültülmüş koordinatların kullanılması durumunda diferansiyel açılı simetrik dönüşüm modelinde esas bilinmeyenlere geçiş $< \delta\mathbf{t}, \lambda, \varphi > \rightarrow < \mathbf{t}, \lambda, \varphi >$ katsayılar matrisi ($\mathbf{F}_{\varphi}$)

| $\mathbf{I_3}$ | $-\mathbf{R_0}\bar{\mathbf{x}}$ | $-\mathbf{R}_{x0}\bar{\mathbf{x}}$ | $-\mathbf{R}_{y0}\bar{\mathbf{x}}$ | $-\mathbf{R}_{z0}\bar{\mathbf{x}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathbf{00_{1\times3}}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

## 2.8 Dönüşüm Parametreleri ve Kovaryans Matrisi

### 2.8.1 Dördeyli Simetrik Dönüşüm Modeli için Dönüşüm Parametreleri ve Kovaryans Matrisi

TLS çözümü sonrasında bilinmeyenler,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_0 \\ q_{0,0} \\ q_{1,0} \\ q_{2,0} \\ q_{3,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta\mathbf{t} \\ \delta q_0 \\ \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

elde edilir. (2.4) eşitliğine göre, (2.44)'den bulunan ölçeklendirilmiş dördeyler yardımıyla ölçek çarpanı belirlenir:

$$\lambda = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{2.45}$$

Ölçeklendirilmiş dördeyler ve ölçek çarpanı kullanılarak dönüklük açıları hesaplanır ([11]):

$$\begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} atan2[-2(q_2q_3 + q_0q_1), (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)] \\ arcsin[2(q_1q_3 - q_0q_2)\lambda^{-1}] \\ atan2[-2(q_1q_2 + q_0q_3), (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)] \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

Burada, $atan2[\dots]$ fonksiyonu, dört bölgeli arctan ters-trigonometrik fonksiyonudur ([11]):

$$atan2[y,x] = \begin{cases} \pi/2 & (y > 0, x = 0)\ için \\ -\pi/2 & (y < 0, x = 0)\ için \\ tan^{-1}(y/x) & (x > 0)\ için \\ tan^{-1}(y/x) + \pi & (y > 0, x < 0)\ için \\ tan^{-1}(y/x) - \pi & (y < 0, x < 0)\ için \end{cases} \tag{2.47}$$

Söz konusu çözüm, $\varphi_y$ dönüklük açısı $-\pi/2$ ve $\pi/2$ aralığında ise geçerlidir. Gimbal-lock ve diğer eş çözüm bu çalışmada ele alınmamaktadır.

TLS çözümü sonrasında, $\delta\mathbf{t}$ ve $q$ ölçeklendirilmiş dördeylerin kovaryans matrisi bulunur:

$$\mathbf{C}_{\delta\mathbf{t},q} = s_0^2(\mathbf{A}_c^T\,\mathbf{P}\mathbf{A}_c)^{-1} \tag{2.48}$$

$\mathbf{t}$ ve $q$ ölçeklendirilmiş dördeylerin kovaryans matrisi ise Eşitlik (2.39)'a göre, kovaryans yayılma kuralından,

$$\mathbf{C}_{\mathbf{t},q} = \mathbf{F}_q\mathbf{C}_{\delta\mathbf{t},q}\mathbf{F}_q^T \tag{2.49}$$

bulunur. (2.45) ve (2.46) eşitliklerine kovaryans yayılma kuralı uygulanırsa, (2.49) eşitliğinden benzerlik dönüşümü paramatrelerinin (ötelemeler, ölçek çarpanı ve dönüklüklerin) kovaryans matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{D}_q \mathbf{C}_{\mathbf{t},q} \mathbf{D}_q^T \tag{2.50}$$

Burada $\mathbf{D}_q$, $7 \times 7$ boyutlu kısmi türevler alınarak belirlenen katsayılar matrisidir [7], [11], Tablo 2.5'de verilmektedir:

**Tablo 2.5** Dördeyli simetrik dönüşüm modelinde esas dönüşüm parametrelerine geçiş $< \mathbf{t}, \boldsymbol{q} > \rightarrow < \mathbf{t}, \lambda, \varphi >$ katsayılar matrisi ($\mathbf{D}_q$)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{I_3}$ | $\mathbf{0_{3\times1}}$ | $\mathbf{0_{3\times1}}$ | $\mathbf{0_{3\times1}}$ | $\mathbf{0_{3\times1}}$ |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | $2\boldsymbol{q_0}$ | $\mathbf{2}\boldsymbol{q_1}$ | $\mathbf{2}\boldsymbol{q_2}$ | $\mathbf{2}\boldsymbol{q_3}$ |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_1 c_x + q_0 s_x})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_0 c_x - q_1 s_x})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_3 c_x - q_2 s_x})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_2 c_x + q_3 s_x})$ |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_2 + q_0 s_y})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{-q_3 + q_1 s_y})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_0 + q_2 s_y})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{-q_1 + q_3 s_y})$ |
| $\mathbf{0_{1\times3}}$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_3 c_z + q_0 s_z})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_2 c_z + q_1 s_z})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_1 c_z - q_2 s_z})$ | $-\frac{\mathbf{2}}{\lambda \boldsymbol{c_y}}(\boldsymbol{q_0 c_z - q_3 s_z})$ |

*) $\boldsymbol{c_i}$ ve $\boldsymbol{s_i}$, çözüm sonrası belirlenen $\boldsymbol{\varphi_i}$ Euler dönüklük açısının kosinüs ve sinüs değerleridir ($\boldsymbol{i = x, y, z}$).

### 2.8.2 Diferansiyel Açılı Dönüşüm Modeli için Dönüşüm Parametreleri ve Kovaryans Matrisi

TLS çözümü sonrasında dönüşüm modelinin parametreleri elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \lambda \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda_0 \\ \varphi_{x,0} \\ \varphi_{y,0} \\ \varphi_{z,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \delta\lambda \\ \delta\varphi_x \\ \delta\varphi_y \\ \delta\varphi_z \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

$\delta\mathbf{t}$, $\lambda$ ve $\varphi$ bilinmeyenlerinin kovaryans matrisi,

$$\mathbf{C}_{\delta\mathbf{t},\lambda,\varphi} = s_0^2 (\mathbf{A}_c^T \mathbf{P} \mathbf{A}_c)^{-1} \tag{2.52}$$

olur. Dönüşüm parametrelerinin ($\mathbf{t}$, $\lambda$ ve $\varphi$) kovaryans matrisi ise Eşitlik (2.43)'e kovaryans yayılma kuralı uygulanarak,

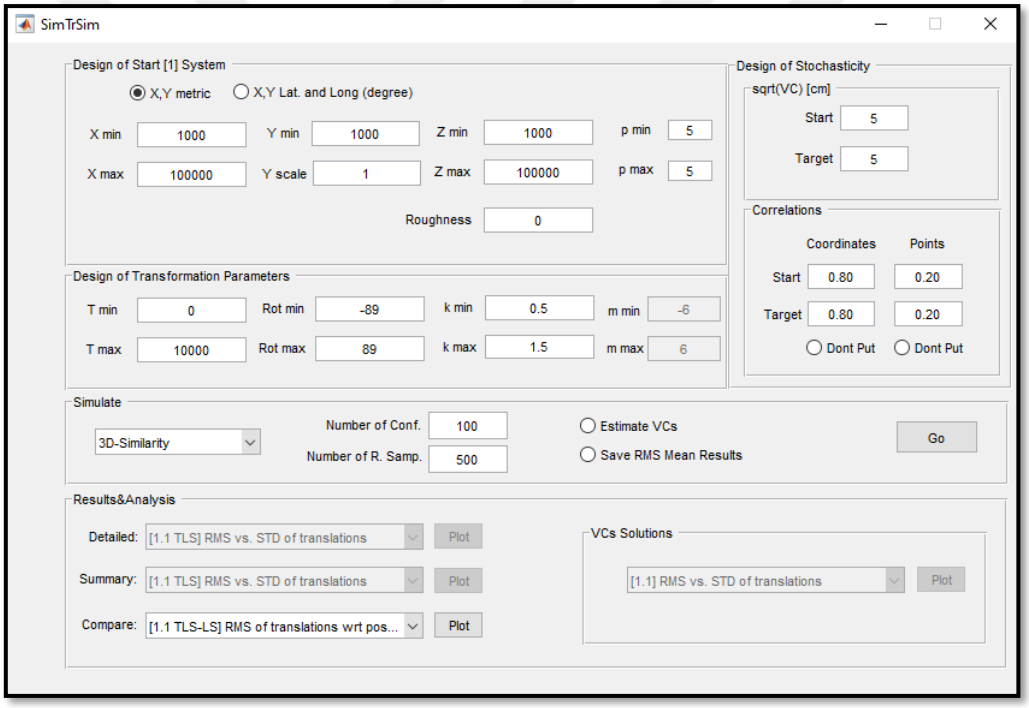
$$\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{F}_q \mathbf{C}_{\delta\mathbf{t},\lambda,\varphi} \mathbf{F}_q^T \tag{2.53}$$

bulunur.

# 3
# SAYISAL UYGULAMA

## 3.1 SimTrSim Yazılımı

Çalışmada, YTÜ Harita Mühendisliği Bölümünde geliştirilen [7] SimTrSim adlı Matlab yazılımı [7] kullanılmıştır. Bu yazılım, üç boyutlu benzerlik ve afin koordinat dönüşümlerinde en küçük kareler ve TLS çözümlerinin performanslarını analiz etmek için geliştirilmiş çok kapsamlı bir yazılımdır. Yazılımın grafik arayüzü Şekil 3.1'de gösterilmiştir.

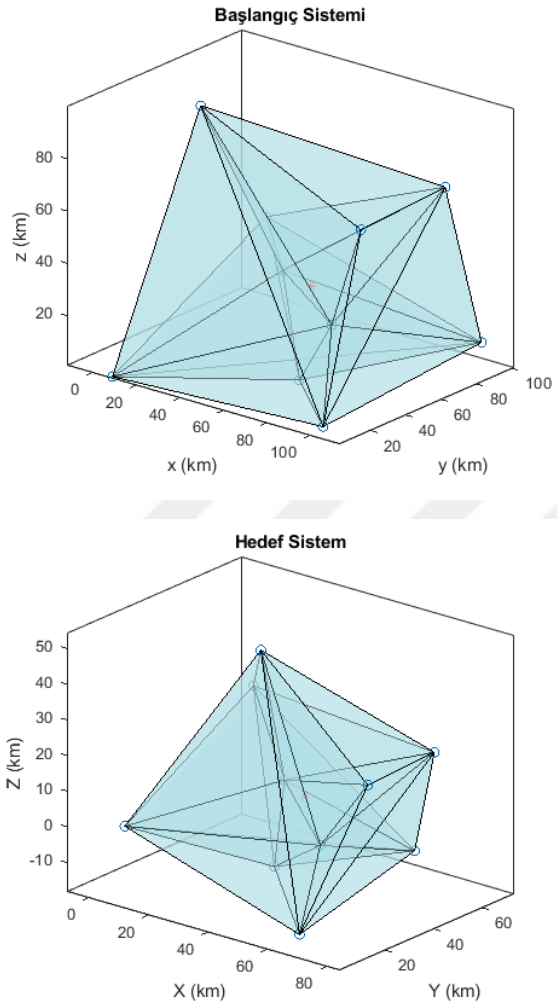



**Şekil 3.1** SimTrSim adlı Matlab yazılımın grafik arayüzü

SimTrSim'in temel özellikleri şöyledir:

- Çok geniş ölçekte istenen koordinat aralıkları ve bilinen dönüşüm parametreleri için istenen konfigürasyonda istenen örneklem oluşturabilir.
- Söz konusu bir konfigürasyonun eşlenik nokta hataları yine istenen korelasyon aralığına bağlı olarak oluşturulan dolu kovaryans matrislerine göre oluşturulmaktadır. Bu kovaryans matrisinin sürekli pozitif tanımlı

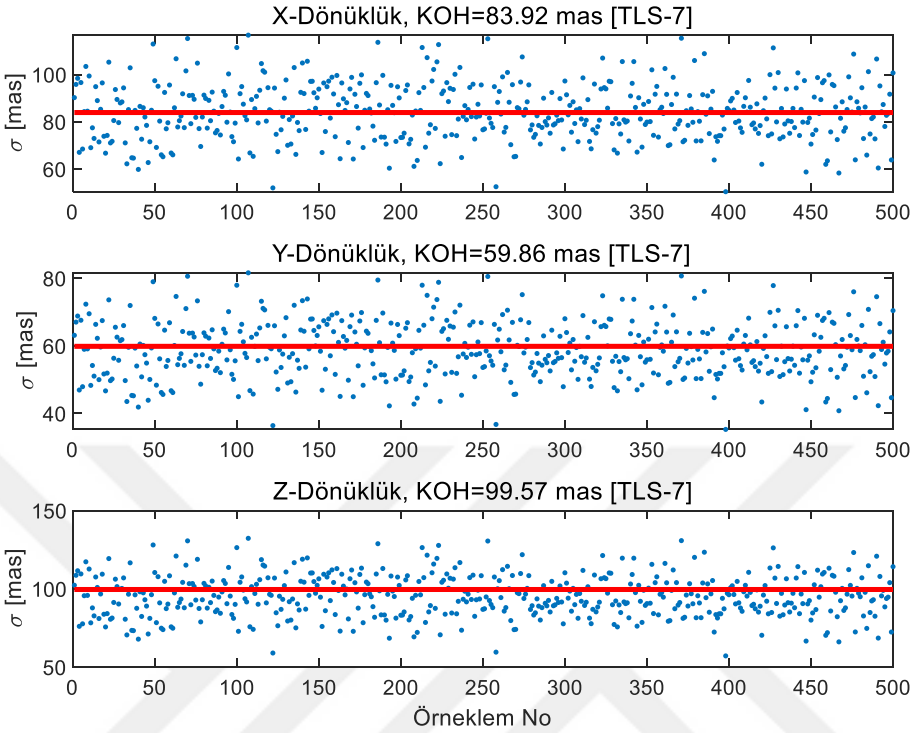
olması için özel bir algoritma olan nearestcorr algoritması kullanılmaktadır [7]. Oluşturulan bir konfigürasyon örneği Şekil 3.2'de gösterilmiştir.




**Şekil 3.2** 10 eşlenik noktalı bir konfigürasyon örneği

- Söz konusu örneklemler, üç boyutlu benzerlik ve afin asimetrik ve simetrik dönüşüm modellerine göre çözülmektedir. Asimetrik model çözümü LS, simetrik model çözümü ise TLS olarak adlandırılmıştır. Simetrik modelin çözümü ayrıca genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemine göre de çözülebilmektedir. Her modelin çözümü dördeylere göre yapılmakta, elde edilen sonuçlar geniş örneklemler için analiz edilmektedir. Örneğin, yukarıdaki Şekil 3.2'de gösterilmiş konfigürasyon için 500 rasgele örnek oluşturularak TLS sonucunda elde edilmiş dönüklük standart sapmalarını

gösteren grafik Şekil 3.3'te verilmiştir. Bunun gibi tüm parametreler için benzer sonuçlar grafik arayüz üzerinden kolayca elde edilebilmektedir.




**Şekil 3.3** Bir konfigürasyon için 500 farklı rasgele örneklemin TLS çözümü sonucunda elde edilen dönüklük açıları standart sapmaları örneği [mas: mili arc-second]

- Elde edilen sonuçlar için $\chi^2$-testi ile tutarsızlık oranları (programda MP ile tanımlanmaktadır) olarak adlandırılan önemli bir istatistik belirlenmektedir. Bu oranın belirlenmesi amacıyla, bir konfigürasyonda bir parametre için geçerli Karesel Ortalama Hata (KOH) (Şekil 3.3'te kırmızı düz çizgi) ve o konfigürasyona ilişkin örneklemlerden elde edilen parametre standart sapmaları (Şekil 3.3'teki mavi ile gösterilmiş noktalar) kullanılmaktadır. KOH, aşağıdaki eşitlik kullanılarak hesaplanmaktadır:

$$KOH = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\delta_i^2} \tag{3.1}$$

Burada, $m$, ilgili konfigürasyon için örneklem sayısı, $\delta_i$ ise ilgili parametrenin çözümden elde edilen parametre değerinin simülasyondan bilinen gerçek değerinden sapmasıdır. Parametrelerin standart sapmaları ($s$)

ise bir önceki bölümde ifade edilmiş kovaryans matrislerinden belirlenmektedir. Bu sonuçlara göre, $1-\alpha = \%95$ güven düzeyine karşılık gelen aşağıdaki aralık düşünülmektedir:

$$P\left(\chi^2_{f,\alpha/2} < f\frac{s^2}{KOH^2} < \chi^2_{f,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \tag{3.2}$$

Burada $\chi^2$, ilgili güven sınır değerini göstermektedir. $m$ sayıda örneklemden bu aralığa düşmeyen örneklem sayısı $(p)$ saydırılmakta ve MP belirlenmektedir:

$$\mathrm{MP} = |\alpha - p/m| \tag{3.3}$$

Bu oran, ilgili koordinat dönüşüm algoritmalarının hangi oranda yanlı çözüm verdiklerine ilişkin bir istatistiktir. Pratik olarak, Şekil 3.3'teki gibi standart sapma noktalarının kırmızı çizgi etrafında düzenli olarak dağılması MP oranını sıfıra götürmekte, noktaların kırmızı çizgiden küme olarak uzaklaşmaları MP oranını %5'lerin üzerine çıkarmaktadır. Simülasyondaki hatalar da göz önüne alındığında %5'in üzerindeki MP değerlerinin elde edilmesi parametre kestirimi ve bunların kovaryans matrisleri arasında tutarsızlık olduğunu gösterir. Bir başka deyişle, ilgili algoritmanın ya da yaklaşımın yanlı sonuçlar ürettiği anlamına gelmektedir.

- Parametre belirsizlikleri yanı sıra dönüşüm sonrasında merkez noktanın konum hatası da istatistiki olarak yukarıdakilere benzer şekilde elde edilmektedir. Bu konum hatasının da KOH biçiminde ve varyans-yayılma kuralından elde edilen koordinat varyanslarına göre de değeri belirlenebilmektedir. Konum hatasının ayrıntılı açıklaması Uygur [7]'de verilmiştir.
- Özel bir çalışma olarak sistem koordinatlarının varyans çarpanları, yukarıda belirtilen model algoritması ile paralel olarak çalışan varyans bileşenleri kestirimleri algoritması ile kestirilebilmektedir. (Bu analiz tez çalışmasında kullanılmamaktadır.)

## 3.2 Sayısal Uygulama Hedefleri ve Simülasyon Stratejisi

Çalışmanın temel amacı, dördeyli simetrik dönüşüm modelinin diferansiyel açılı simetrik dönüşüm modeline göre üstünlüklerini ve benzer özelliklerini ortaya çıkarmaktır. Bu amaçla, SimTrSim programına diferansiyel açılı simetrik model algoritması eklenmiştir. Bu algoritma, bursa_wolf fonksiyon dosyası olarak adlandırılmıştır. 12 parametreli diferansiyel açılı dönüşümden bu çalışmadaki diferansiyel açılı benzerlik dönüşüm problemine dönüştürülerek oluşturulmuş bu fonksiyon aşağıdaki biçimde çalışmaktadır:

```
[par,parstd,R,s02,pos]=bursa_wolf(x1,x2,Cx1,Cx2,10^-12,x1mean');
```

Konfigürasyonlar oluşturulurken aşağıdaki adımlar takip edilmiştir:

- Başlangıç sisteminin $xyz$ koordinatları [1000, 100000] m aralığında; ölçek çarpanları [0.999999999-1.00000001] aralığında; ötelemeler, [0, 10000] m aralığında rasgele oluşturulmuştur.
- Eşlenik nokta sayısı için [5, 21] aralığı kabul edilmiştir.
- Sistem koordinatlarının kofaktör matrisleri, bir noktanın koordinatları arasında [-80%, 80%], noktalar arasında ise [-20%, 20%] aralığında korelasyonlar olacak şekilde oluşturulmuştur.
- Her iki modelin karşılaştırılmasında dönüklük açıları için $[-1^0;\ 1^0]$, $[-1';\ 1']$, $[-0{,}1';\ 0{,}1']$, $[-0{,}2';\ 0{,}2']$ aralıkları öngörülmüştür.
- Eşlenik noktaların konum hataları için σ=5 cm, 3 cm, 1 cm ve 0,1 cm standart sapmaları kullanılmıştır. (Söz konusu kofaktör matrisler bu standart sapmaların kareleriyle çarpılmıştır.)
- Her bir analiz için 100 konfigürasyona karşılık 500 örneklem oluşturulmuştur.

Söz konusu simülasyon stratejisi ile diferansiyel açılı dönüşüm modelinin hangi dönüklük açı aralığı için uygun çözüm verdiği analiz edilmektedir. Böylece, pratikte Bursa-Wolf modeli olarak adlandırılan modelin hangi dönüklük açısına kadar uygun çözüm vereceği karşılaştırmalı olarak irdelenmektedir.

## 3.3 1 Derece Dönüklük Açıları için Örnek Uygulama Sonuçları

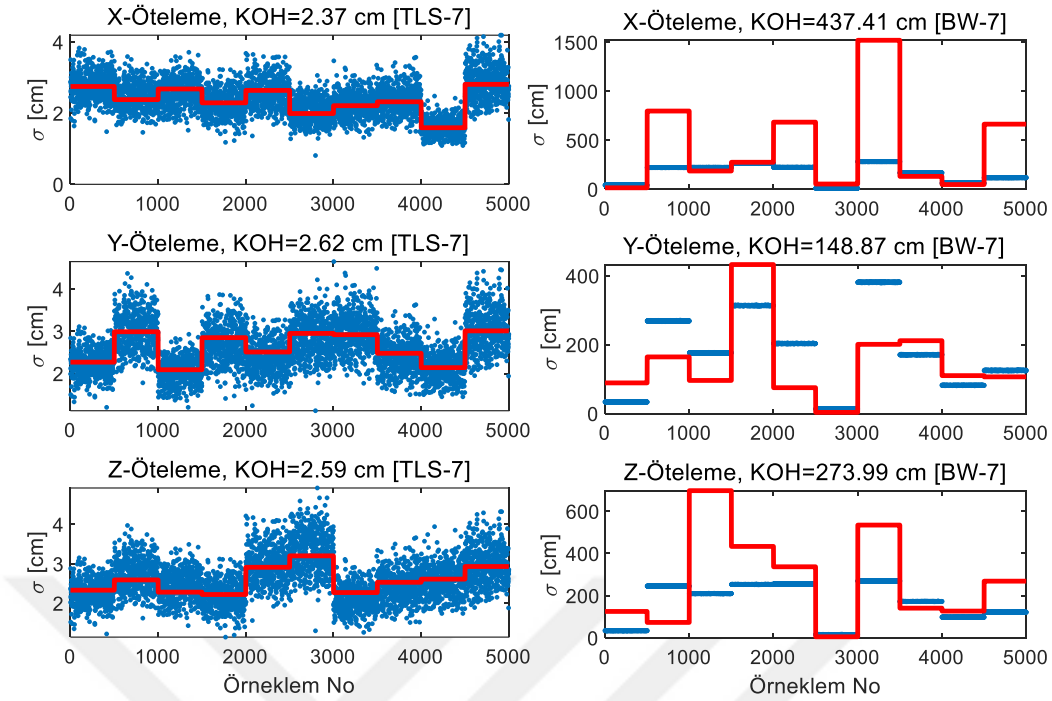
Diferansiyel açılı modelde her eksendeki dönüklük açılarının $1^0$ olması durumunda, Eşitlik (2.24) diferansiyel açı için geçerli dönüklük matrisi

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_z & -\varphi_y \\ -\varphi_z & 1 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \pi/180 & -\pi/180 \\ -\pi/180 & 1 & \pi/180 \\ \pi/180 & -\pi/180 & 1 \end{bmatrix}$$

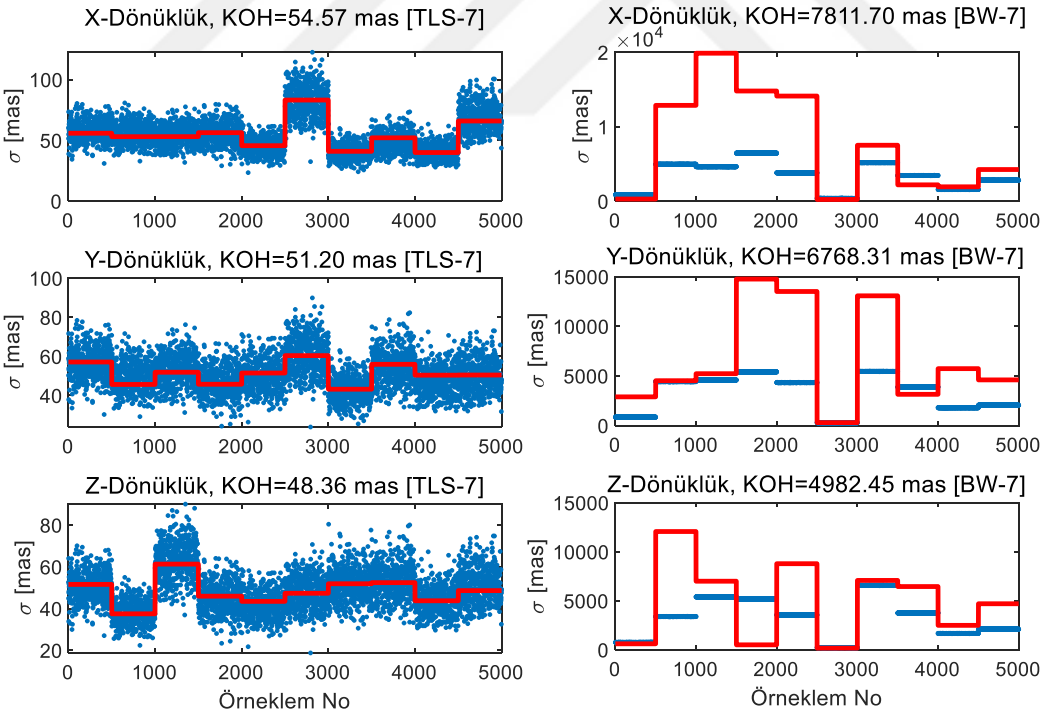
olur. Elbette böyle bir yaklaşım uygulamada öngörülemez; çünkü, 1 derecelik bir açı diferansiyel anlamda bir büyüklük değildir. Esas dönüklük matrisi, Eşitlik (2.3) ile hesaplanır ve yukarıdaki yaklaşımdan farkı alınırsa,

$$\begin{bmatrix} -0{,}3046 & 0{,}3010 & 0{,}3108 \\ 0{,}0035 & -0{,}3099 & 0{,}3010 \\ -0{,}0009 & 0{,}0035 & -0{,}3046 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

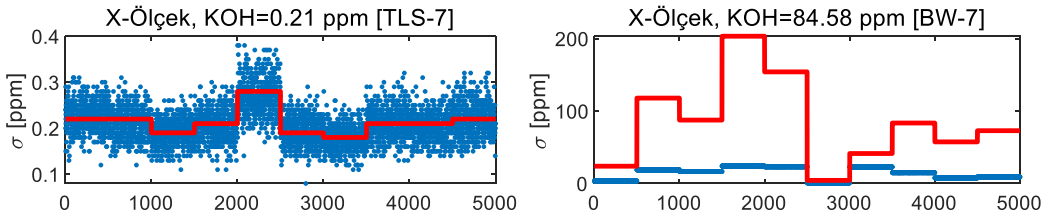
bulunur. Yani, diferansiyel yaklaşım, olması gerekenden bu kadar sapar. Bu ise her 1000 m'lik koordinat büyüklüğü için yaklaşık olarak 30 cm'lik hataya yol açar. Ancak, uygulamanın temel çıkış noktasını aktarabilmek için $[-1^0, 1^0]$'lik konfigürasyon örnekleri her iki modele göre çözülmüş ve sonuçlar bu bölümde paylaşılmıştır. Kofaktör matrisler σ=5 cm'lik standart sapmaya göre oluşturulmuştur. Çizimlerde uygunluk açısından 10 konfigürasyon ve her bir konfigürasyon için 500 örneklem çalışılmıştır. Şekil 3.4'te ötelemeler, Şekil 3.5'te dönüklükler, Şekil 3.6'da ölçek çarpanı ve Şekil 3.7'de konum hatalarına ilişkin elde edilen belirsizlik değerleri gösterilmiştir. Çizimlerde KOH olarak ifade edilen değerler, her bir konfigürasyon için elde edilen KOH değerlerinin aritmetik ortalamasına; BW-7 olarak ifade edilen çizimler ise diferansiyel açılı dönüşüm modeline ilişkindir. Söz konusu şekiller incelendiğinde, dördeyli dönüşüm modeli (TLS-7) ile elde edilen standart sapmaların (mavi noktalar) her bir konfigürasyona ait KOH çizgilerinin etrafında düzgün dağıldığını, diferansiyel açılı dönüşüm modeli (BW-7) ile elde edilen standart sapmaların ise KOH değerlerinden yüksek oranda saptığını göstermektedir. Dahası, diferansiyel açılı modelde KOH değerleri dördeyli modele göre çok farklı elde edilmiştir. Bu sonuçlar bize, 1 derecelik açı için dördeyli modelin tutarlı sonuçlar ürettiğini, diferansiyel açılı modelin ise tamamen tutarsız sonuçlar ürettiğini göstermektedir. Bu, elbette, yukarıda açıklandığı gibi beklenen bir durumdur. Ancak, dördeyli modelin ne denli uygun çalıştığını anlatması bakımında önemlidir. Uygur [7], halihazırda, çok büyük açılar için de dördeyli modelin uygun çalıştığını göstermiştir. Bu nedenle, daha büyük açılar için dördeyli modelin nasıl çalıştığı burada yeniden irdelenmemektedir.



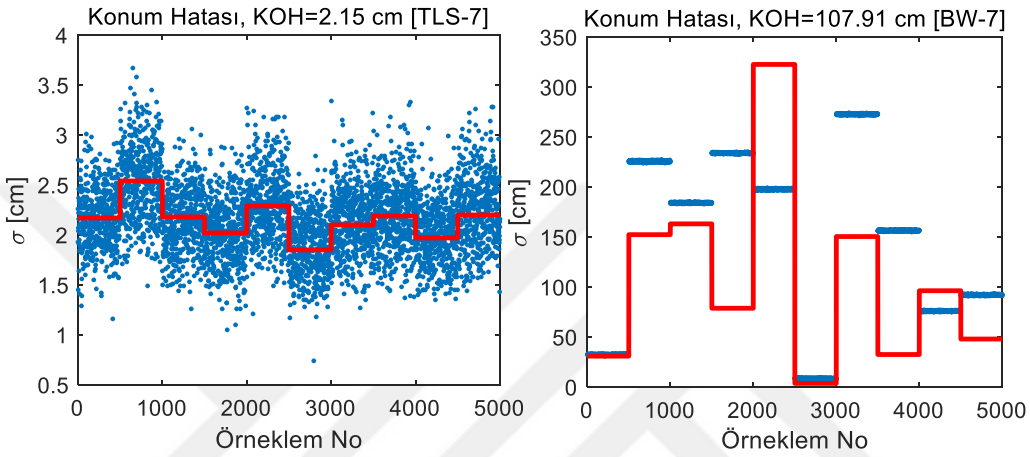

**Şekil 3.4** 1 derece dönüklük açılı örnekler için öteleme belirsizlikleri




**Şekil 3.5** 1 derece dönüklük açılı örnekler için dönüklük açı belirsizlikleri

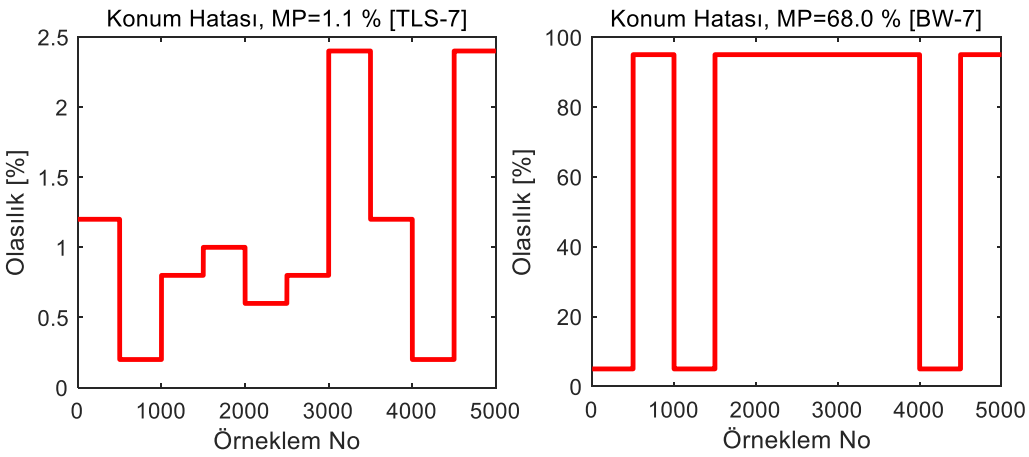



**Şekil 3.6** 1 derece dönüklük açılı örnekler için ölçek çarpanı belirsizlikleri




**Şekil 3.7** 1 derece dönüklük açılı örnekler için konum hatası belirsizlikleri

Yukarıdaki örneklerde, $\chi^2$ tutarsızlıkları (MP) (3.3) eşitliği ile hesaplanmıştır. Bu oranlar, konum hatası için örnek olarak Şekil 3.8'de gösterilmiştir. Şekil 3.7'de sol şekildeki dördeyli model için konum hatası tutarsızlığı ortalama %1,1 iken, sağdaki diferansiyel açılı model için ortalama %68 bulunmuştur. Söz konusu tutarsızlık oranları diğer parametreler için de benzerdir [20]. Bu oranlar Tablo 3.1'de özetlenmiştir $x, y, z$ ötelemeleri ve $x, y, z$ dönüklükleri için bu oranlar aritmetik ortalama olarak ifade edilmiştir. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde de öteleme ve dönüklüklere ilişkin istatistikler bu şekilde ortalamalar biçiminde ele alınmaktadır.



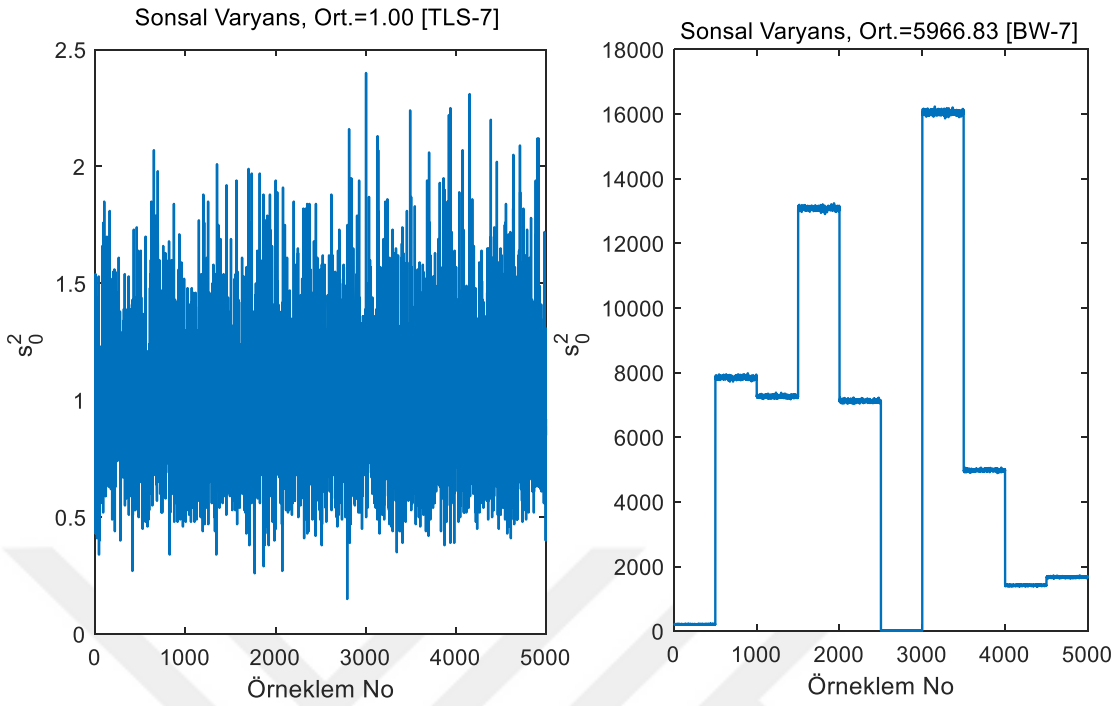

**Şekil 3.8** 1 derece dönüklük açılı örnekler için konum hatası $\chi^2$ tutarsızlık oranları

**Tablo 3.1** 1 derece dönüklük açı örneği için $\chi^2$ tutarsızlık oranları (MP)

| **Parametre** | **Dördeyli Model** | **Diferansiyel Açılı Model** |
|---|---|---|
| Öteleme | %1,3 | %64,3 |
| Dönüklük | %1,3 | %69,2 |
| Ölçek | %0,8 | %95 |
| Konum Hatası | %1,1 | %68 |

Son olarak, uygun bir model ve çözümünde sonsal varyansların "1" değerine gitmesi gerekir. Dördeyli ve diferansiyel açılı modelden burada elde edilen sonsal varyans değerleri Şekil 3.9'da gösterilmiştir. Yine beklendiği üzere, dördeyli model sonsal varyans değeri ortalama 1 olarak elde edilmişken, diferansiyel açılı modelde açı değerinin büyük olmasından dolayı oluşan model uyuşumsuzluğu bu beklentinin yüksek oranda karşılanmamasına neden olmuştur.

Bu bölümden elde edilen sonuçlara göre, 1 derecelik açılar için dördeyli model uygun bir şekilde çözüm verirken, beklendiği gibi, diferansiyel açılı model tutarsız sonuçlar vermiştir. Bu noktada ortaya çıkan soru, diferansiyel yaklaşımın hangi küçük açıya kadar tutarlı çözümler üretebileceğidir. Bu amaçla, küçük açılar için aşağıda farklı analizler yapılmaktadır.




**Şekil 3.9** 1 derece dönüklük açılı örnekler için dördeyli model (TLS) ve diferansiyel açılı model (BW) için sonsal varyanslar

## 3.4 Küçük Açılı Örnekler için Dönüşüm Modellerinin Performansı

Dönüklük açıları için öncelikle, $[-2'; 2']$, $[-1'; 1']$, $[-0{,}1'; 0{,}1']$, aralıkları düşünülmüştür. Bununla birlikte, her bir aralık için hem eşlenik nokta sayısı ($p$) hem de koordinatlarının standart sapmaları [σ=5 cm, 3 cm ve 1 cm] değiştirilerek MP oranları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, Tablo 3.2, 3.3 ve 3.4 sunulmuştur. Dördeyli dönüşüm modeli için tüm durumlarda MP oranları %2'den düşüktür.

**Tablo 3.2** $[-2'; 2']$ dönüklük açısı aralığı için diferansiyel açılı dönüşüm modelinde $\chi^2$ tutarsızlık oranları (MP:%) (Koyu olanlar: >%5)

| Nokta Sayısı | σ | Öteleme | Dönüklük | Ölçek | Konum H. |
|---|---|---|---|---|---|
| *p*=5 | 5 cm | 1,9 | 1,8 | **32,8** | 0,8 |
| | 3 cm | **7,1** | **5,2** | **71,5** | 1,6 |
| | 1 cm | **36,7** | **27,2** | **95,0** | **21,9** |
| | 0,1 cm | **49,5** | **53,7** | **95,0** | **76,8** |
| *p*=10 | 5 cm | **20,0** | **10,8** | **87,5** | 1,6 |
| | 3 cm | **48,9** | **29,7** | **95,0** | 3,2 |
| | 1 cm | **77,0** | **70,8** | **95,0** | **40,3** |
| | 0,1 cm | **80,0** | **79,7** | **95,0** | **58,6** |
| *p*=20 | 5 cm | **76,5** | **61,3** | **95,0** | 1,2 |
| | 3 cm | **92,0** | **82,9** | **95,0** | 3,6 |
| | 1 cm | **95,0** | **91,0** | **95,0** | **34,2** |
| | 0,1 cm | **95,0** | **95,0** | **95,0** | **40,9** |

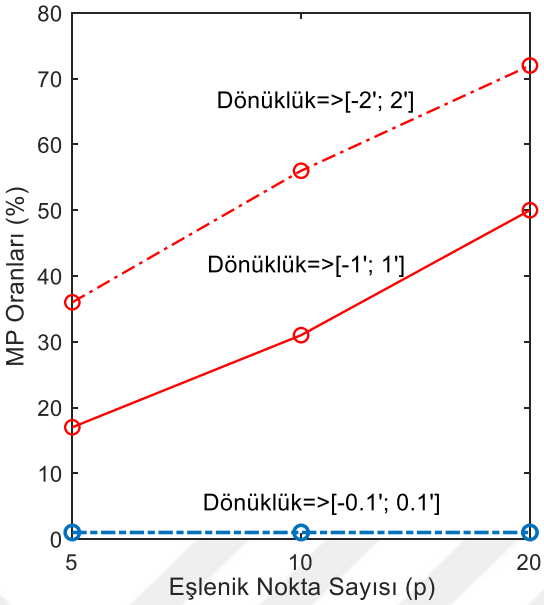
**Tablo 3.3** $[-1'; 1']$ dönüklük açısı aralığı için diferansiyel açılı dönüşüm modelinde $\chi^2$ tutarsızlık oranları (MP:%) (Koyu olanlar: >%5)

| Nokta Sayısı | σ | Öteleme | Dönüklük | Ölçek | Konum H. |
|---|---|---|---|---|---|
| *p*=5 | 5 cm | 0,9 | 1,2 | 1,0 | 0,9 |
| | 3 cm | 1,0 | 1,0 | 1,3 | 0,7 |
| | 1 cm | 3,3 | 1,2 | 2,1 | 1,0 |
| | **0,1 cm** | **44,2** | **46,2** | **95,0** | **67,0** |
| *p*=10 | 5 cm | 1,0 | 1,0 | 2,7 | 1,0 |
| | 3 cm | 1,9 | 1,4 | **18,6** | 1,3 |
| | **1 cm** | **46,2** | **17,2** | **93,8** | 1,9 |
| | **0,1 cm** | **79,5** | **78,2** | **95,0** | **58,7** |
| *p*=20 | 5 cm | 3,5 | 2,2 | **37,9** | 0,8 |
| | 3 cm | **15** | **9,5** | **89,1** | 0,7 |
| | **1 cm** | **87,4** | **73,8** | **95,0** | 2,1 |
| | **0,1 cm** | **95,0** | **95,0** | **95,0** | **95,0** |

**Tablo 3.4** $[-0{,}1';\ 0{,}1']$ dönüklük açısı aralığı için diferansiyel açılı dönüşüm modelinde $\chi^2$ tutarsızlık oranları (MP:%) (Koyu olanlar: >%5)

| Nokta Sayısı | σ | Öteleme | Dönüklük | Ölçek | Konum H. |
|---|---|---|---|---|---|
| *p*=5 | 5 cm | 0,8 | 1,0 | 1,3 | 0,7 |
| | 3 cm | 0,8 | 1,0 | 1,3 | 0,7 |
| | 1 cm | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 0,7 |
| | 0,1 cm | 1,0 | 1,2 | 1,2 | 0,8 |
| *p*=10 | 5 cm | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,1 |
| | 3 cm | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,1 |
| | 1 cm | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,1 |
| | 0,1 cm | 0,9 | 0,9 | 1,0 | 1,1 |
| *p*=20 | 5 cm | 1,4 | 1,6 | 1,1 | 0,9 |
| | 3 cm | 1,4 | 1,6 | 1,1 | 0,9 |
| | 1 cm | 1,4 | 1,6 | 1,1 | 0,9 |
| | 0,1 cm | 1,5 | 1,5 | 3,9 | 0,8 |

Tablo 3.2, 3.3 ve 3.4 incelendiğinde, dönüklük açıları küçüldükçe tutarsızlığın azaldığı, 0,1′ için tamamen ortadan kalktığı görülmektedir. Bununla birlikte, 2′ ve 1′ için sonuçlar incelendiğinde, eşlenik nokta sayısının ve konum hatalarının önemli olduğu görülmektedir: Nokta sayısı arttıkça ve konum hataları azaldıkça, tutarsızlık oranları artmaktadır. Nokta sayısına göre ortalama tutarsızlıkların değişimi Şekil 3.10'da özetlenmiştir. Bu aslında beklenen bir sonuçtur. Çünkü **R** dönüklük matrisine ilişkin yaklaşımdaki ufak gibi görünen hatalar, nokta sayısı arttıkça artmakta, eşlenik noktaların konum hatası arttıkça bunlar içindeki payları yükselmektedir. Elde edilen bu sonuçlar içinde en önemlisi, diferansiyel açılı dönüşüm modelinin 0,1′ dönüklük açısından daha büyük açılar için hem parametre kestirimlerini hem de bunların standart sapmalarını olumsuz etkilediğidir. Bu nedenle, bu büyüklükten daha büyük açılar için diferansiyel modelin geçerli olmadığı ortaya çıkmaktadır.




**Şekil 3.10** Eşlenik nokta sayısına bağlı olarak çeşitli dönüklük açıları için diferansiyel modelden elde edilen ortalama $\chi^2$ tutarsızlık oranları (MP)

Yukarıdaki analizler, her bir konfigürasyonda eşlenik nokta sayısı [7, 21] arasında rasgele seçilerek yeniden tekrarlanmıştır. Böylece, nokta sayısından bir nebze bağımsız sonuçların elde edilmesi amaçlanmıştır. Değerlendirmeler, $[-1'; 1']$, $[-0{,}2'; 0{,}2']$ ve $[-0{,}1'; 0{,}1']$ dönüklük açıları için yapılmıştır. Hem diferansiyel açılı hem de dördeyli dönüşüm modeli ile elde edilen KOH değerleri, standart sapmaları ve MP oranları Tablo 3.5, 3.6 ve 3.7'de verilmiştir. Bu sonuçlara göre, dördeyli model, yine beklendiği üzere, tüm durumlarda tutarlı sonuçlar üretmişken, diferansiyel açılı model, $[-0{,}1'; 0{,}1']$ aralığında hem kendi içinde hem de dördeyli model ile tutarlı sonuçlar vermiştir. Tablo 3.5'ten görüldüğü üzere, $[-1'; 1']$ aralığı için KOH değerleri dördeyli modeldeki KOH değerlerinden oldukça farklıdır. Yani, hem kendi içinde tutarsız sonuçlar üretmekte hem de parametre kestirimleri de oldukça değişmektedir. Tablo 3.6'daki $[-0{,}2'; 0{,}2']$ aralığı için sonuçlar incelendiğinde ise, diferansiyel açılı modelin dördeyli modelin kestirim değerlerine yakın bir sonuç ürettiği, ancak yine de eşlenik nokta konum hataları azaldığında KOH ve standart sapmalar arasında tutarsızlıklar olduğu, yani model yaklaşımının kestirimin kovaryans matrisini etkilediği görülmektedir. Özellikle, ölçek çarpanına ilişkin %56'lık oran bu sonucu destekler niteliktir. Bu nedenle, bir önceki simülasyonlarda olduğu gibi, diferansiyel açılı dönüşüm modelinin $0{,}1'$ ve daha küçük genlikli dönüklük açıları için geçerli olduğu görülmektedir.

**Tablo 3.5** $[-1';\ 1']$ dönüklük açısı aralığı için elde edilen belirsizlikler ve $\chi^2$ tutarsızlık oranları

| | | Diferansiyel Model | | | Dördeyli Model | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **σ** | | **KOH** | **s** | **MP** | **KOH** | **s** | **MP** |
| 0,1 cm | Öteleme (cm) | 0,45 | 0,13 | **%91** | 0,04 | 0,04 | %1 |
| | Dönüklük (mas) | 7,85 | 2,83 | **%88** | 0,92 | 0,91 | %1 |
| | Ölçek (ppm) | 0,09 | 0,01 | **%95** | 0,004 | 0,005 | %1 |
| | Konum (cm) | 0,10 | 0,12 | **%55** | 0,037 | 0,037 | %1 |
| 1 cm | Öteleme (cm) | 0,64 | 0,45 | **%56** | 0,44 | 0,43 | %1 |
| | Dönüklük (mas) | 12,34 | 9,50 | **%43** | 9,17 | 9,11 | %3 |
| | Ölçek (ppm) | 0,09 | 0,03 | **%92** | 0,04 | 0,04 | %1 |
| | Konum (cm) | 0,38 | 0,39 | %2 | 0,37 | 0,37 | %1 |

**Tablo 3.6** $[-0{,}2';\ 0{,}2']$ dönüklük açısı aralığı için elde edilen belirsizlikler ve $\chi^2$ tutarsızlık oranları

| | | Diferansiyel Model | | | Dördeyli Model | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **σ** | | **KOH** | **s** | **MP** | **KOH** | **s** | **MP** |
| 0,1 cm | Öteleme (cm) | 0,05 | 0,04 | **%9** | 0,04 | 0,04 | %1 |
| | Dönüklük (mas) | 0,98 | 0,92 | **%5** | 0,92 | 0,91 | %1 |
| | Ölçek (ppm) | 0,005 | 0,001 | **%56** | 0,004 | 0,005 | %1 |
| | Konum (cm) | 0,037 | 0,037 | %1 | 0,037 | 0,037 | %1 |
| 1 cm | Öteleme (cm) | 0,44 | 0,43 | %1 | 0,44 | 0,43 | %1 |
| | Dönüklük (mas) | 9,20 | 9,10 | %1 | 9,20 | 9,10 | %1 |
| | Ölçek (ppm) | 0,04 | 0,04 | %1 | 0,04 | 0,04 | %1 |
| | Konum (cm) | 0,37 | 0,37 | %1 | 0,37 | 0,37 | %1 |

**Tablo 3.7** $[-0{,}1';\ 0{,}1']$ dönüklük açısı aralığı için elde edilen belirsizlikler ve $\chi^2$ tutarsızlık oranları

| | | Diferansiyel Model | | | Dördeyli Model | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **σ** | | **KOH** | **s** | **MP** | **KOH** | **s** | **MP** |
| 0,1 cm | Öteleme (cm) | 0,04 | 0,04 | %1 | 0,04 | 0,04 | %1 |
| | Dönüklük (mas) | 0,92 | 0,91 | %1 | 0,92 | 0,91 | %1 |
| | Ölçek (ppm) | 0,005 | 0,004 | %2 | 0,004 | 0,005 | %1 |
| | Konum (cm) | 0,037 | 0,037 | %1 | 0,037 | 0,037 | %1 |
| 1 cm | Öteleme (cm) | 0,44 | 0,43 | %1 | 0,44 | 0,43 | %1 |
| | Dönüklük (mas) | 9,19 | 9,10 | %1 | 9,20 | 9,10 | %1 |
| | Ölçek (ppm) | 0,04 | 0,04 | %1 | 0,04 | 0,04 | %1 |
| | Konum (cm) | 0,37 | 0,37 | %1 | 0,37 | 0,37 | %1 |

.

# 4
# SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, üç boyutlu benzerlik dönüşümü simetrik modelinin hem dördeyler hem de diferansiyel açılı model altında çözümü irdelenmiştir. Söz konusu modeller, bunlara ilişkin algoritmalar ve çözüm sonrasında benzerlik dönüşüm parametrelerinin kovaryans matrislerinin elde edilmesi incelenmiştir. Bu algoritmalar ile genişletilmiş simülasyonlar yardımıyla çözümlerin performansı karşılaştırmalı olarak gerçekleştirilmiştir.

Diferansiyel açılı model, uygulamada Bursa-Wolf ve Moledensky-Badekas olarak adlandırılan koordinat dönüşüm modellerinin biraz daha geliştirilmiş hali olarak değerlendirilebilir. Adından da anlaşılacağı üzere, küçük dönüklükler için elde edilebilen ters-simetrik dönüklük matrisine dayanır. Burada önemli bir varsayım bulunur. Bu varsayım sayesinde fonksiyonel model doğrusaldır. Söz konusu model, Harita Mühendisliğinin Jeodezi bilim dalında datum dönüşümü vb. birçok çalışmada uygulanır. Jeodezinin çalışma alanı olan jeodezik ağlarda söz konusu dönüklükler gerçekten küçüktür (derece saniyesi civarında). Bu nedenle, biraz da alışılageldik sebeplerle, söz konusu model üç boyutlu dönüşümlerde vazgeçilmez bir modeldir. Ancak, buradaki varsayım, dönüklüklerin büyük olduğu problemlerde (örneğin, görüntü işlemede) geçerli olmayacaktır. Söz konusu model, simetrik yani her iki sistem koordinatlarının hatalı olduğu problemlerde, olası tüm büyüklüklerdeki dönüklük açılarına göre yeniden düzenlenebilir. Ancak, bu modelin çözümünde yaklaşık değer belirleme sıkıntıları nedeniyle çeşitli sorunlar oluşur. Tüm bu sorunlar, dördeylerin düşünülmesiyle kolayca çözülür. Dördeyler ile oluşturulan dönüşüm modeli hem büyük açılar için tutarlı biçimde çalışır hem de iteratif çözümde karşılaşılan başlangıç değer belirleme problemine sahip değildir. Özetle, üç boyutlu benzerlik dönüşümünde tüm durumlar için çalışır; genel bir çözüm modelidir.

Çalışmanın sayısal uygulama kısmında, YTÜ Harita Mühendisliği tarafından geliştirilmiş SimTrSim simülasyon yazılımı kullanılmıştır. Söz konusu yazılım çok geniş perspektifte simülasyonlar oluşturarak farklı modellerin analizine imkan tanır. Çalışma kapsamında, diferansiyel açılı modelin çözümünü yapan bursa_wolf

fonksiyonu yazılıma eklenmiştir. Bu sayede, karşılaştırmalı analizler yapılmıştır. Yapılan simülasyonlara göre, dördeyli model tüm durumlar için tutarlı çözümler üretirken, diferansiyel açılı modelin tutarlılığı, beklendiği üzere, dönüklük açılarının genliğine bağlı olarak değişmektedir. 1 derece, 1, 2, 0,2 ve 0,1 derece dakikalık dönüklük açıları için analizler yapılmıştır. En kötü sonuç 1 derece için, en tutarlı sonuç 0,1 derece dakikası için elde edilmiştir. Çözüm tutarlılıkları, eşlenik nokta sayısına ve konum hatalarının büyüklüğüne de bağlıdır. Eşlenik nokta sayısı arttıkça ve konum hataları azaldıkça parametre kestiriminin beklenen değerden sapmaları ve de elde edilen standart sapmaların bilinen karesel ortalama hatalardan sapmaları artmaktadır. Konum hatalarının azalması durumunda meydana gelen tutarsızlıklardaki artış beklenen bir sonuçtur; çünkü, diferansiyel açı için modelde yapılan yaklaşımın meydana getirdiği hatalar ile bu hataların birbirine karışması olasılığı artar. Genel olarak bakıldığında ise, tüm uygulamalarda bu tutarsızlıkların açının genliği küçüldükçe azaldığı ve 0,1 derece dakikasında tamamen ortadan kalktığı görülmüştür.

Sonuç olarak, dördeyli modelin üç boyutlu benzerlik koordinat dönüşümlerinde belli bir kısıtlayıcı olmaksızın rahatça kullanılabileceği, diferansiyel açılı modelin ise 0,1 derece dakikası ve daha küçük açılar için uygun olduğu, daha büyük açılar için kullanılamayacağı ortaya çıkmıştır. Söz konusu açı genliği limit değerinin, problemde geçen sistem noktalarından oluşan cismin büyüklüğü ve nokta konum hataları arasındaki orana (sinyal/noise-SNR oranına) bağlı olduğu düşünülmektedir. İleriki çalışmalarda bu oran göz önüne alınarak söz konusu limit değeri yeniden ele alınabilir. Ancak, çalışmada vurgulandığı üzere, dördeyli modelin hem asimetrik hem de simetrik problemlerde uygulanması neredeyse diferansiyel açılı modelin uygulanması kadar kolaydır. Bu nedenle, dördeyli üç boyutlu dönüşüm modelinin alışılageldik diğer model yaklaşımları yerine önemli bir alternatif olacağı değerlendirildiğinde, bu limit değeri belirleme probleminin uygulamada ne kadar anlamlı olacağı da göz önüne alınmalıdır.

.

# KAYNAKÇA


[1] C. Aydın, Jeodezide İstatistik Analiz, Ders Notları, YTU, 2023.

[2] C.-O. Andrei, "3d affine coordinate transformations," Masters of Science Thesis in Geodesy, No. 3091, School of Architecture and the Built Environment Royal Institute of Technology (KTH) Stockholm, Sweden, 2006.

[3] A. R. Amiri-Simkooei, "Parameter estimation in 3d affine and similarity transformation: Implementation of variance component estimation," Journal of Geodesy. vol. 92, pp. 1285–1297, 2018.

[4] T. Soler, "On differential transformations between cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates," Department of Geodetic Science/Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, Report No. 236, 1976.

[5] P. Teunissen, "The geometry of the geodetic inverse linear mapping and nonlinear adjustment," 1985, pp. 1–186. [Online]. Available: http://resolver.tudelft.nl/uuid:3dbe4d31-8b97-44d5-8831-f85b3b0781a7.

[6] B. Schaffrin, A. Wieser, "On weighted total least-squares adjustment for linear regression," Journal of Geodesy, vol. 82, pp. 415–421, 2008. doi: 10.1007/s00190-007-0190-9.

[7] S. Ö. Uygur, "Üç boyutlu simetrik jeodezik koordinat dönüşümünde stokastik model tasarımı," Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2021.

[8] S. Ö. Uygur, O. Akyilmaz, C. Aydin, "Solution of nine-parameter affine transformation based on quaternions," Journal of Surveying Engineering, vol. 147 (3). 2021. doi: 10.1061/(asce)su.1943-5428.0000364.

[9] C. Aydin, H. Mercan, S. Ö. Uygur, "Increasing numerical efficiency of iterative solution for total least-squares in datum transformations," Studia Geophysica et Geodaetica, vol. 92, pp. 223–242, 2018.

[10] H. Mercan, O. Akyilmaz, C. Aydin, "Solution of the weighted symmetric similarity transformations based on quaternions," Journal of Geodesy, vol. 92(10), pp. 1113–1130, 2018.

[11] S. Ö. Uygur, C. Aydın, O. Akyılmaz, "Retrieval of Euler rotation angles from 3D similarity transformation based on quaternions," Journal of Spatial Science, vol.67, no.2, pp.255-272.

[12] M. Uygur, "Katsayıların da rasgele hatalı oldugu dengeleme modeli için çözüm yöntemleri," Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2016.

[13] C. Aydın, M. Uygur, S. Ö. Uygur, "Ağırlıklı toplam en küçük kareler çözümü: üç farklı algoritma ve 2-boyutlu afin dönüsümüne uygulanması," Harita Dergisi, vol. 152, pp. 1–11, 2014.

[14] K. Snow, "Topics in total least-squares adjustment within the errors-in-variables model: Singular cofactor matrices and prior ınformation," Ph.D. Thesis,

Graduate Program in Geodetic Science and Surveying School of Earth Sciences, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA, 2012.

[15] A. Amiri-Simkooei, S. Jazaeri, “Weighted total least squares formulated by standard least squares theory,” Journal of Geodetic Science, vol. 2, no. 2, pp. 113–124, 2012. doi:10.2478/v10156-011-0036-5.

[16] X. Tong, Y. Jin, L. Li, “An ımproved weighted total least squares method with applications in linear fitting and coordinate transformation,” Journal of Surveying Engineering, vol. 137, no. 4, pp. 120–128, 2011. doi: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000055.

[17] F. Neitzel, “Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2d similarity transformation,” Journal of Geodesy, vol. 84, pp. 751–762, 2010.

[18] X. Fang, “Weighted total least squares solutions for applications in geodesy,” Ph.D. Dissertation, Nr. 294, Von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Geodäsie der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Germany, 2011.

[19] Y. Hu, X. Fang, H. Kutterer, “Center strategies for universal transformations: modified iteration policy and two alternative models.” GPS Solutions, vol 27 (92) 2023. doi:10.1007/s10291-023-01419-3

[20] R. Candan, C. Aydın "3 Boyutlu Koordinat Dönüşüm Problemlerinde Dördeylerin Kullanımı." Aktif Tektonik Araştırma Grubu (ATAG) Çalıştayı 2022, İstanbul, Türkiye, p.55, 2022.

# TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

**Konferans Bildirileri**

**1**. R. Candan, C. Aydın "3 Boyutlu Koordinat Dönüşüm Problemlerinde Dördeylerin Kullanımı." Aktif Tektonik Araştırma Grubu (ATAG) Çalıştayı 2022, İstanbul, Türkiye, p.55, 2022.