(117)

İntegraller

I. Belirli İntegraller

$f(z)$ nin integrallerini basit bir şekilde ortaya koymak için önce tek reel t değişkenli kompleks değerli w fonk.larının türevlerini göz önüne almamız gereklidir.

u ve v fonk.ları t nin reel değerli fonk.ları olmak üzere

(1) $\boxed{w(t) = u(t) + i\,v(t)}$ yazalım.

(1) fonk.nun bir t nok.daki türevi u' ve v' türevlerinin herbirinin t de mevcut olması koşuluyla

(2) $\boxed{w'(t) = u'(t) + i.v'(t)}$ olarak tanımlanır. ⇒ ara

__Not:__ Calculus te bilinen kuralların çoğu t reel değişkenli komplex değerli fonk.lar için geçerli olmasına karşın oradaki her kural (1) tipindeki fonk.lar için uygulanamaz. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir:

__Örnek:__ $w(t)$ nin $a \le t \le b$ üzerinde sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda bileşen fonk.ları $u(t)$ ve $v(t)$ süreklidirler ($a \le t \le b$ için). $w'(t)$ mevcut olsa bile $a < t < b$ üzerinde türevler için ort. değer teoremi uygulanamaz. Daha açık olarak $w'(c) = \dfrac{w(b) - w(a)}{b-a}$ o.ş. $a < t < b$ aralığına ait

118 ora (2) tanımından her komplex sabit

$z_0 = x_0 + iy_0$ için

(3) $\frac{d}{dt}\left(z_0\, w(t) \right) = z_0\, w'(t)$ sonucu alınır

(4) $\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 . e^{z_0 t}$

(5) $\frac{d}{dt}\left(w_1(t) \mp w_2(t) \right) = w_1'(t) \mp w_2'(t)$

(6) $\frac{d}{dt}\left(w_1(t) . w_2(t) \right) = w_1'(t).w_2(t) + w_1(t).w_2'(t)$

---

bir c sayısının mevcut olduğu herzaman doğru değildir. Bunu görmek için $0 \le t \le 2\pi$ aralığı üzerinde $w(t) = e^{it}$ fonk.u göz önüne alalım. Bu fonk. kullanıldığında

$|w'(t)| = |i.e^{it}| = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}$ için

$w(2\pi) - w(0) = 0$ olmasına karşın $w'(t)$ türevi herzaman $\neq$ sıfırdır.

Not-ben $w'(t) = \frac{w(2\pi) - w(0)}{2\pi - 0} = \frac{0}{2\pi} = 0 \Rightarrow$

$w'(t) = 0 \Leftrightarrow |w'(t)| = 0$ fakat $|w'(t)| \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$w(t)$ fonksiyonlarının belirli integralleri

$w(t)$ tek reel t değişkenli komplex değerli fonk ve

$w(t) = u(t) + i v(t)$ (1)

yazıldığından $w(t)$ nin $a \le t \le b$ aralığı üzerindeki belirli integrali $\int_a^b u(t)dt$, $\int_a^b v(t)dt$ int. mevcut olması koşuluyla

$$\boxed{\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)dt + i.\int_a^b v(t)dt} \quad (2)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre

$$\operatorname{Re}\int_a^b w(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} w(t)dt$$

$$\operatorname{Im}\int_a^b w(t)dt = \int_a^b \operatorname{Im} w(t)dt$$

Örnek :

$$\int_0^1 (1+it)^2 dt = \int_0^1 (1-t^2)dt + i.\int_0^1 2t\,dt$$

$$= \left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 + i.t^2\Big|_0^1 = \left(1-\frac{1}{3}\right)+i.1 = \frac{2}{3}+i$$

Not: $w(t)$ nin sınırsız aralıklar üzerindeki improper (has olmayan, genişletilmiş) benzer bir integralleri yolla tanımlanır.

Not: u ve v nin (2) tanımındaki integrallerinin varlığı eğer bu fonk.lar $a \le t \le b$ aralığında parçalı sürekli ise garanti edilir. Böyle bir fonk. ifade edilen aralıkta muhtemelen sonlu sayıdaki nokta hariç (orada süreksiz olmasına karşın kenar limitlere sahiptir.) her yerde süreklidir. Burada sadece a da sağ limit b de sol limitin varlığı gereklidir.