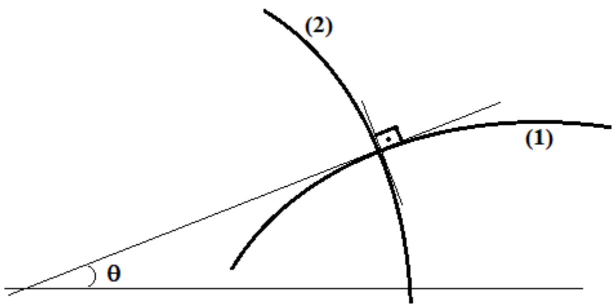
Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Uygulama Alanları

Diferansiyel denklemlerin çeşitli mühendislik ve bilim dallarında yaygın uygulamaları vardır. Genel olarak sıcaklık, basınç, yer değiştirme, hız, gerilme, şekildeğiştirme, akım, voltaj veya yüksek konsantrasyon gibi fiziksel bir niceliğin zaman, konuma veya her ikisine göre değişimi diferansiyel denklem ile modellenir. Isı iletimi, mekanik titreşim veya yapı dinamiği veya elektrik devreleri gibi birçok mühendislik konusu, diferansiyel denklemler teorisine dayanmaktadır. Mühendislerin matematiksel denklemleri kullanarak fiziksel problemleri modelleyebilmeleri ve daha sonra bu matematiksel modelleri çözebilmeleri, ilgili sistemlerin davranışlarının incelenmesi açısından uygulamalarda büyük öneme sahiptir.

Bu kısımda birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çeşitli mühendislik uygulama alanlarından bazı örnekler verilecektir.

1. *Ortogonal Yörüngelerin (Eğri Ailelerinin) Bulunması*

Verilen bir eğri ailesine dik olan (ortogonal) eğri ailesinin bulunması problemlerinde birinci mertebeden diferansiyel denklemler kullanılır. Bilindiği gibi eğrisel koordinat sistemleri birbirine dik eğri aileleridir.



Şekil 1. Ortogonal eğriler

Solda verilen şekilde (1) numaralı eğri ile (2) numaralı eğrilerin kesişim noktalarındaki teğetleri birbirine diktir. Buna göre (1) ve (2) eğrileri birbirine diktir denir. Belirtelim ki, eğer iki doğru birbirine dik ise, bu doğruların eğimleri çarpımı -1 'e eşittir.

Buna göre verilen bir F(x,y)=C eğri ailesine dik olan eğri ailesinin belirlenmesi, bu iki eğri ailesinin kesişim noktalarındaki teğetlerinin eğimleri çarpımının -1 olması kuralından belirlenir. Eğrinin teğetinin eğimi ise, birinci mertebeden türev yardımıyla bulunur.

Örnek 1

$x^2 + y^2 = C$ eğri ailesine dik olan eğri ailesini bulunuz.

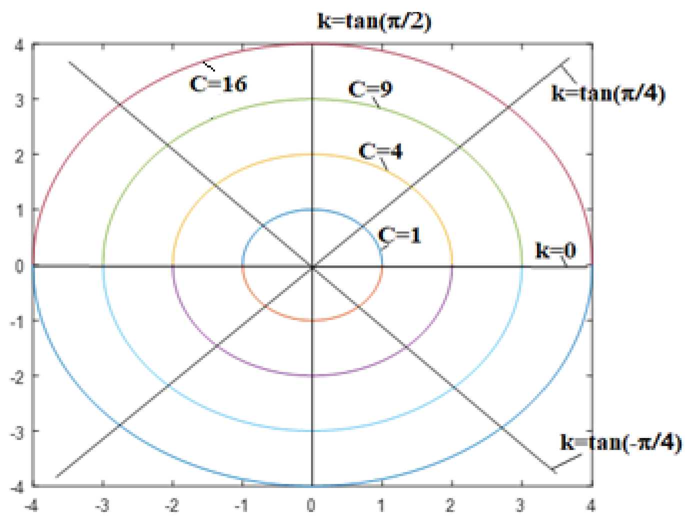
$F(x, y) = x^2 + y^2 = C$ için $y^2 = C - x^2$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Doğrunun denkleminin $y(x) = mx + n$ ve doğrunun eğiminin $m = \tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$ olduğu hatırlanırsa, bu eğri ailesine ait eğimin yani, $m = -\dfrac{x}{y}$ olduğu görülür. Buna dik olan doğrunun eğimine $\overline{m}$ denirse,

$m.\bar{m} = -1 \Rightarrow \bar{m} = \frac{y}{x}$ bulunur. Buradan, yeni eğri ailesinin aynı noktadaki teğetinin eğimi türev yardımıyla;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln y = \ln x + \ln k, \quad y = k.x \text{ (k=sabit)}$$

Bulunur. Buna göre verilen $x^2 + y^2 = C$ çember ailesine ortogonal eğri ailesi $y = k.x$ doğru ailesidir (Şekil 2).



Şekil 2. Ortogonal eğri aileleri (Örnek 1)

Örnek 2

$y = Cx^2$ parabol ailesine dik olan eğri ailesini bulunuz.

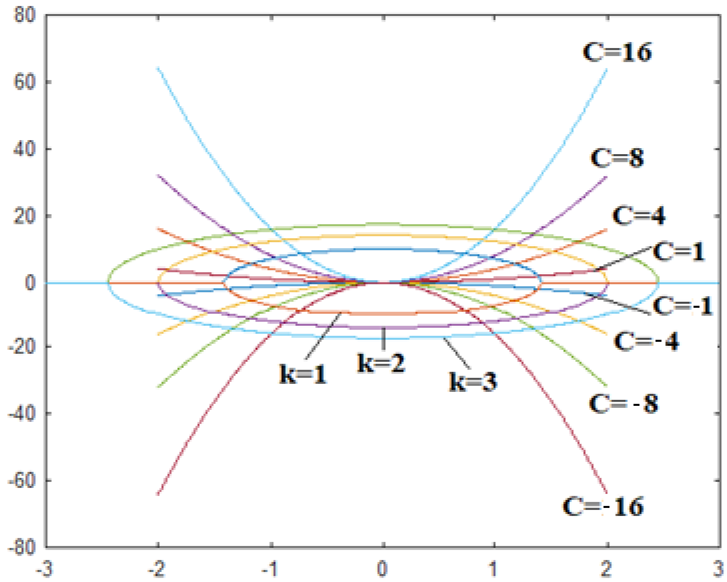
$$\frac{dy}{dx} = 2Cx \Rightarrow y = Cx^2 \text{ denkleminden } C = y/x^2 \text{ için,}$$

$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}$ olur. parabol ailesine ait teğetin eğim yani, $m = 2\frac{y}{x}$ olduğu görülür. Buna dik olan doğrunun eğimine $\bar{m}$ denirse,

$m.\bar{m} = -1 \Rightarrow \bar{m} = -\frac{x}{2y}$ bulunur. Buradan, yeni eğri ailesinin aynı noktadaki teğetinin eğimi türev yardımıyla;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \Rightarrow 2ydy = -xdx, \quad y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + k, \quad y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 = k \text{ (k=sabit)}$$

Bulunur. Buna göre verilen $y = Cx^2$ parabol ailesine ortogonal eğri ailesi $y^2 + \frac{1}{2}x^2 = k$ elips eğri ailesidir (Şekil 3).



Şekil 3. Ortogonal eğri aileleri (Örnek 2)

2. Verilen Açı ile Kesişen Eğri Ailelerinin Bulunması

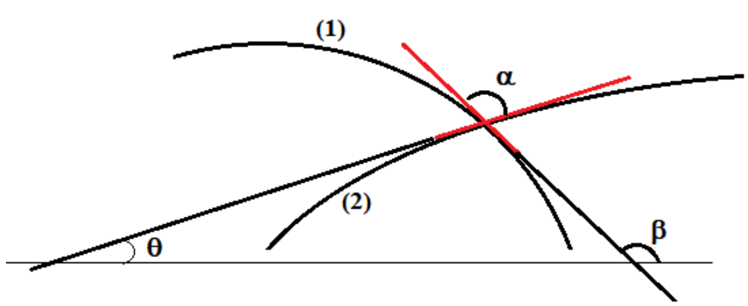
Eğri ailelerinin verilen açı ile kesişmesi durumunu ($\alpha \neq \pi/2$) ele alalım. Buna göre F(x,y)=C eğri ailesi (Örneğin Şekil 4 de gösterilen (1) eğrisi için) ve bu eğri ailesine ait $\dfrac{dy}{dy} = f(x,y)$ olsun.

Burada $\tan\theta = f(x,y)$ veya

$\theta = \tan^{-1}\left(f(x,y)\right) = \text{Arctan}\left(f(x,y)\right)$

olur. Aranan eğri ailesi için

$\dfrac{dy}{dy} = \tan(\tan^{-1}\left(f(x,y) + \alpha\right)$ olur.



Şekil 4. Verilen açı ile kesişen eğri aileleri

Buradan ,

$$\frac{dy}{dy} = \tan(\tan^{-1}\left(f(x,y) + \alpha\right) = \frac{\tan\left[\tan^{-1}\left(f(x,y)\right)\right] + \tan\alpha}{1 - \tan\left(\tan^{-1}\left(f(x,y)\right)\right)\tan\alpha} = \frac{f(x,y) + \tan\alpha}{1 - f(x,y)\tan\alpha}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x,y)\cot\alpha+1}{\cot\alpha-f(x,y)}$$

bulunur. Son ifade de $\alpha=\pi/2$ alınırsa, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{f(x,y)}$ bulunur. Bu ise bir önceki kısımda verilen, bir eğri ailesine dik olan eğri ailesinin teğetinin eğimini verir.

<u>Örnek 3</u>

$y=Cx$ doğru ailesini $\alpha=\pi/4$ açı ile kesen eğri ailesini bulunuz.

$\dfrac{dy}{dx}=C$ $\Rightarrow$ $y=Cx$ için $C=y/x$ bulunur. Buradan,

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$ olur.

Verilen doğru ailesini $\alpha=\pi/4$ açı ile kesen eğri ailesine ait eğim:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\alpha=\pi/4}=\left.\frac{f(x,y)\cot\alpha+1}{\cot\alpha-f(x,y)}\right|_{\alpha=\pi/4}=\frac{\frac{y}{x}\cot\frac{\pi}{4}+1}{\cot\frac{\pi}{4}-\frac{y}{x}}=\frac{\frac{y}{x}+1}{1-\frac{y}{x}}=\frac{y+x}{x-y}$$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{x-y}$ homojen diferansiyel denklemdir. $\dfrac{y}{x}=v$ değişken dönüşümü ile çözülür. İstenen eğri ailesinin denklemi,

$\ln\left(k^2\left(x^2+y^2\right)\right)-2\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$ (burada, k=sb. integrasyon sabitidir) bulunur.

Ödev Aşağıda verilen eğri aileleri için ortogonal eğri ailelerini bulunuz.

1. $y=Cx^3$
2. $y^2=Cx$
3. $y=e^{Cx}$

3. Mekanik Problemleri

Bu kısımda bazı cisimlerin hareket denklemleri elde edilecektir.

<u>Örnek 4</u>

m kütleli bir parçacığın doğrusal hareketini ele alalım. Newton'un lineer momentum kanunu (2. Kanunu) yardımıyla, bu parçacığın lineer momentumunun değişimi, üzerine etki eden tolam kuvvete eşittir yani,

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \quad \text{burada } \vec{p}=m\vec{v} \text{ dir.}$$

Genel durumda örneğin $m=m(v,t)$ olabilir, ele alınan örnekte m=sb ve tek doğrusal hareket incelendiğinden vektörel formdan skaler forma geçersek;

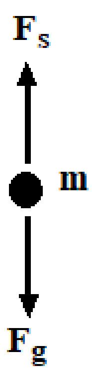
$v=\dfrac{dx}{dt}$ ve $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}$ göz önüne alınırsa, $\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{d(mv)}{dt}=F$ için,

$$mv\frac{dv}{dx}=F$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem m kütleli parçacığın doğrusal hareketine ait diferansiyel denklemdir.

Örnek 5

Benzer şekilde serbest düşen cisimlerin hareketi de birinci mertebede diferansiyel denklem ile verilebilir. h yüksekliğinden düşen m kütleli parçacık ele alınsın.



m kütleli cisme etki eden 2 kuvvet vardır. Bir tanesi yerçekimi ivmesi nedeniyle olan $F_g=mg$ ve diğeri harekete zıt yönde etki eden havanın direnç kuvveti F_s dir. Bu direnç kuvveti pratikte hızdan bağımlıdır (yani, $F_s=F_s(v)$ dir. Bu kuvvet düşük hızlar için v, yüksek hızlar için v^2 ile orantılıdır) ve hız arttıkça direnç kuvveti artar. Ancak, birbiri üzerinde harekete zorlanan cisimler arasında oluşan Coulomb sürtünmesi ($F_s=\mu N$ burada μ statik (cisim durağan ise) / kinetik (cisim hareketli ise) sürtünme katsayısıdır) hızdan bağımsız kabul edilir.

Ele alınan m kütleli serbest düşen cisim için direnç kuvvetini $F_s=2v$ olarak alalım. Buna göre Newton'un lineer momentum yasasına göre,

$$\frac{d(mv)}{dt}=m\frac{dv}{dt}=F \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt}=F_g-F_s=mg-2v$$

olur. Cismin kütlesini $m=1\text{kg}$, $g=10\text{m/sn}^2$ için

$$m\frac{dv}{dt}=10-2v$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklem değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla,

$$\frac{dv}{10-2v}=dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln|10-2v|=t+C_0$$

bulunur. $v(0)=0$ başlangıç değerlerini kullanırsak integral sabiti $C_0=-\frac{1}{2}\ln 10$ bulunur. Denklemde yerine konur ve düzenlenirse, çözüm,

$$-\frac{1}{2}\ln|10-2v|=t-\frac{1}{2}\ln 10 \text{ veya } \ln\left|\frac{10-2v}{10}\right|=\ln\left|1-\tfrac{v}{5}\right|=-2t\,, \quad \left|1-\frac{v}{5}\right|=e^{-2t}$$

Fonksiyonu için,

$$v(t)=\begin{cases} 5\left(1-e^{-2t}\right), & v<5 \\ 5\left(1+e^{-2t}\right), & v>5 \end{cases}$$

bulunur. Ancak verilen $v(0)=0$ başlangıç koşullarının sağlanabilmesi $v(t)=5\left(1-e^{-2t}\right)$ için mümkündür. Bu durumda çözüm bu fonksiyon olur. $v=\lim\limits_{t\to\infty}5\left(1-e^{-2t}\right)=5$ limit değerine (limit hız) eşit olur. $x(0)=0$ başlangıç koşulu için, cismin aldığı yol,

$$\frac{dx}{dt}=v(t)=5\left(1-e^{-2t}\right) \quad \Rightarrow \quad x(t)=5\left(t+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}\right)$$

bulunur.

<u>Örnek 6</u>

h yüksekliğinden serbest düşen m ağırlığındaki paraşütçü problemini ele alalım.

Paraşütçünün, paraşütünü açmadan önceki ve paraşütü açtıktan sonraki serbest düşme hareketi ayrı ayrı ele alınmalıdır. Bu durumda havanın direnç kuvvetinin $F_s \sim v^2$ ile orantılı olduğunu kabul edelim.

$t=t_1>0$ paraşütü açma anı olarak alınırsa, bu paraşütçünün hareket denklemi ($K,k\in R$ ve $K>k$) için,

$$0 < t < t_1 \qquad m\frac{dv}{dt} = F_g - F_s = mg - kv^2 \ , \quad v(0) = 0$$

$$t \geq t_1 \qquad m\frac{dv}{dt} = F_g - F_s = mg - Kv^2 \ , \quad v(t_1) = v_1$$

başlangıç değer problemleri elde edilir. Burada $t = t_1$ de verilen $v(t_1) = v_1$ başlangıç değeri, problemin ilk kısmının çözümünden elde edilir.

Yukarıda verilen matematiksel model bir sabit farkı ile birbirinden farklıdır. Dolayısıyla her iki kısım için diferansiyel denklemin çözümü aynı, başlangıç koşulları için özel çözümler birbirinden farklılaşmaktadır. Problemin birinci kısmının çözümünü ele alalım:

$$m\frac{dv}{dt} = F_g - F_s = mg - kv^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{mg - kv^2}dv = dt \ \text{ veya } \ \frac{1}{\frac{mg}{k} - v^2}dv = \frac{k}{m}dt$$

Değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü $\dfrac{1}{a^2 - v^2} = \dfrac{A}{a - v} + \dfrac{B}{a + v}$

($a^2 = mg/k$) için $A = B = 1/2a = 1\big/\left(2\sqrt{mg/k}\right)$

$$\frac{1}{2\sqrt{mg/k}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{mg/k} - v} + \frac{1}{\sqrt{mg/k} + v}\right)dv = \frac{k}{m}dt$$

$$\frac{1}{2\sqrt{mg/k}}\left\{-\ln\left(\sqrt{mg/k} - v\right) + \ln\left(\sqrt{mg/k} + v\right)\right\} = \frac{1}{2\sqrt{mg/k}}\ln\frac{\left(\sqrt{mg/k} + v\right)}{\left(\sqrt{mg/k} - v\right)} = \frac{k}{m}t + C_0$$

$$\frac{\left(\sqrt{mg/k} + v\right)}{\left(\sqrt{mg/k} - v\right)} = C_1 e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t} , \qquad C_1 = e^{2C_0\sqrt{mg/k}} ,$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{\left(C_1 e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t} - 1\right)}{\left(C_1 e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t} + 1\right)} \ \text{ çözüm fonksiyonu bulunur.}$$

Başlangıç koşulu $v(0) = 0$ için $C_1 = 1$ bulunur. Dolayısıyla problemin birinci kısmına ait özel çözüm,

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{\left(e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t}-1\right)}{\left(e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t}+1\right)}$$

olur. Problemin ikinci kısmı $t\geq t_1$ için de yukarıda verilen genel çözümde $k\rightarrow K$ ile değiştirilerek,

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{K}}\frac{\left(C_2e^{\left(2\sqrt{gK/m}\right)t}-1\right)}{\left(C_2e^{\left(2\sqrt{gK/m}\right)t}+1\right)}\ ,\ C_2=e^{2\bar{C}_0\sqrt{mg/K}}$$

bulunur. $v(t_1)=v_1$ başlangıç koşulu kullanılarak integral sabiti

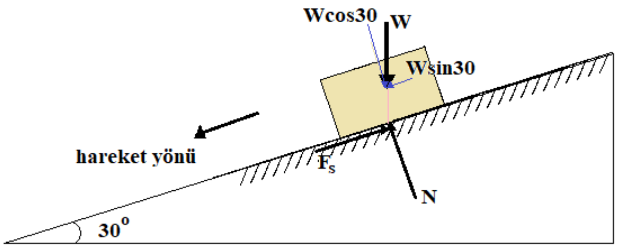
$$\sqrt{\frac{mg}{K}}\frac{\left(C_2e^{\left(2\sqrt{gK/m}\right)t_1}-1\right)}{\left(C_2e^{\left(2\sqrt{gK/m}\right)t_1}+1\right)}=v_1=\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{\left(e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t_1}-1\right)}{\left(e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t_1}+1\right)}$$ eşitliğinden C_2 çözülerek,

$C_2=A=A(m,g,k,K,t_1)$ olsun, buradan çözüm

$$v(t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{\left(e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t}-1\right)}{\left(e^{\left(2\sqrt{gk/m}\right)t}+1\right)}, & 0<t<t_1\\ \sqrt{\frac{mg}{K}}\frac{\left(Ae^{\left(2\sqrt{gK/m}\right)t}-1\right)}{\left(Ae^{\left(2\sqrt{gK/m}\right)t}+1\right)}, & t\geq t_1\end{cases}$$

bulunur. Belirtelim ki, $t\rightarrow\infty$ için $v\rightarrow v_\infty=\sqrt{\frac{mg}{K}}$ limit değeri bulunur.

Örnek 7



$W = 48N$ ağırlığındaki cismin $\theta = 30^0$ eğimli yüzey üzerinde kendi ağırlığı etkisinde kayması olayını inceleyelim. Verilen örnekte Coulomb sürtünme kanunu $F_S = \mu N$ geçerlidir. Kayma olayının başlaması için aktif kuvvetin yatay bileşeninin $(W \sin 30)$, yüzey üzerinde oluşan F_S sürtünme kuvvetini aşması gerekir. Burada $W \sin\theta > F_S$ olduğu için hareket olayı başlamıştır. Belirtelim ki, hareket başlangıcında $\mu = \mu_S$ statik sürtünme katsayısı, hareket başladıktan sonra $\mu = \mu_k$ kinetik sürtünme katsayısı Coulomb yasasında kullanılmalıdır. Verilen problemde $\mu = \mu_k = 0.25$ verilmiştir.

Dolayısıyla W ağırlığındaki cismin hareket denklemi, hava moleküllerinden dolayı oluşan direnç kuvveti için $F_{hava} = -\frac{1}{2}v$ kabul edilsin. Böylece,

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt} = W\sin\theta - \mu W\cos\theta - \tfrac{1}{2}v \quad \Rightarrow \quad 4.89\frac{dv}{dt} = 24 - 6\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}v$$ ve $v(0) = 0$ başlangıç koşulu olsun. Buradan çözüm,

$$v(t) = \left(48 - 12\sqrt{3}\right)\left(1 - e^{-t/10}\right)$$

(yerçekim ivmesi $g \simeq 10\, kg/sn^2$ alınmıştır) bulunur.

Örnek 8

V(t) hacimli bir sıvı içeren tank, t anında kirletici konsantrasyonu c(t) yüzdesine sahip bir kirletici ile kirlenmektedir. Tank içerisindeki kirleticinin konsantrasyonun düşürmek için içeri Q_{in} akış hızına sahip sıvı enjekte edilmektedir. Ancak, giren sıvının c_{in} konsantrasyonuna sahip kirletici içerdiği ve tanka giren sıvının tank içerisindeki sıvı ile mükemmel karıştığı kabul edilsin. Tanktan çıkan sıvının akış hızı Q_{out} dır.

t=0 başlangıç anında tanktaki sıvı miktarının V_0 ve kirletici konsantrasyonunun c_0 olduğunu verilsin. Bu durumda tanktaki kirletici konsantrasyonunu ifade eden denklem,

$$[V_0 + (Q_{in} - Q_{out})t]\frac{dc(t)}{dt} + Q_{in}\, c(t) = Q_{in}\, c_{in} \quad \text{ve} \quad c(0) = c_0 \quad \text{(başlangıç koşulu)}$$

şeklindedir.

Örnek 9

Yatayda yük taşıyan bir asma köprüyü ele alalım. Koordinat merkezini kablo eğrisinin en alt noktasına bağlarsak, denge halinde bu kablo eğrisinin denklemi,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w(x)}{H}$$

dir. Burada w(x) yataydaki yayılı yük yoğunluğu, H kablo kuvvetinin yatay bileşenidir.

Örnek 10

Deprem anında tek katlı bir yapının titreşimi ele alınsın. Bu yapının, k rijidliğine sahip kolonlar ile desteklenen m kütleli rijid bir kirişten oluşmaktadır. Bu rijid kirişin titreşimi, yatay yerdeğiştirme x(t) ile tanımlanabilir. Deprem, zeminin x0(t) yerdeğiştirmesiyle modellenir. Kiriş titreşmeye başladığı zaman, yapı bileşenleri arasında sürtünme nedeniyle sönümleyici kuvvet yani, $c[\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)]$ oluşur. Burada c sonum katsayısıdır. Kirişin bağıl yerdeğiştirmesi $y(t) = x(t) - x_0(t)$ için,

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -m\ddot{x}_0(t)$$

dir.

Örnek 11

Doğada birbirleri ile etkileşimde olan av ve avcı durumundaki canlıların aralarındaki ilişki de diferansiyel denklem ile verilir örneğin, Lotka-Voltera denklemidir. Bu denklemler iki tane lineer diferansiyel denklem yani system diferansiyel denklemler ile temsil edilir.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = \delta xy - \gamma y$$

dir. Burada x(t) zaman ile av olan canlının popülasyonu (örneğin tavşan), y(t) ise avcı olan canlının (örneğin tilki) popülasyonunu göstermekte ve α, β ve γ skalerlerdir.

Örnek 12

Newton'un bir cismin sıcaklığına dair ampirik yasasının matematiksel formülasyonu birinci dereceden lineer diferansiyel denklem ile verilir;

$$\frac{dT}{dt} = \alpha\left(T - T_m\right)$$

dir. Burada T sıcaklık, α skaler ve T_m ortam ısını (ısı kaybı) ifade etmektedir.

Örnek 13

Nüfus problemleri,

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$$

ile temsil edilir. Burada N(t), t anındaki mevcut nüfus, k orantılılık katsayısıdır. Bu model insan, hayvan veya böcek vb gibi canlıların nüfus problemlerini temsil eder. Canlı topluluğundaki doğum, ölüm, dışarıdan katılım vb parametreler modele dahil edilirse farklı versiyonları bulunur. Bu modelin en sade şekli yukarıda verilmektedir.

Diğer taraftan benzeri bir denklem ile radyoaktif maddelerin ömürleri veya resim, fosil veya kayaçların tarihlenmesinde kullanılan karbon yardımıyla zaman tespiti (carbon dating) için de kullanılır:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

Bu durumda ele alınan kütle için N, t anındaki mevcut atom sayısı ve dN/dt birim zamanda parçalanan atom sayısını göstermektedir.

Yine benzeri denklem, insan vücudunda biriken ilaç miktarını belirlemek içinde kullanılmaktadır.