T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TASARIM ETİKETLEMELERİ

Dilara ERDEMİR

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU

Haziran, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TASARIM ETİKETLEMELERİ

Dilara ERDEMİR tarafından hazırlanan tez çalışması 19.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Murat ALAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Mehmet Emin KÖROĞLU, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üyesi Uğur ODABAŞI, Üye
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa _____

Danışmanım Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU sorumluluğunda tarafımca hazırlanan TASARIM ETİKETLEMELERİ başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Dilara ERDEMİR

İmza

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

Annem Navruz ERDEMİR' e

TEŞEKKÜR

Altı yıllık bir emeğin ve sürecin sonunda doktora tezimi tamamlamış olmanın sevinci ve heyecanı içerisindeyim. Bu altı yıl süren uzun yolun benim için çok kolay geçmediğini itiraf etmeliyim. Bu yolu tamamlamış olmanın huzur ve mutluluğunu yaşamanın yanı sıra; geriye dönüp baktığımda, bu yolu yürürken oldukça endişeli ve yorgun zamanlar yaşadığımı da söylemeliyim.

Öncelikle tez çalışmamın her aşamasında bilgisi ve tecrübesi ile bana yol gösterdiği, doktora sürecim boyunca desteğini ve sabrını benden esirgemediği, tasarım teorisi araştırma alanında ufkumu genişlettiği, araştırmalarım süresince bana farklı bakış açıları kazandırdığı ve problem seçiminden çalışmamın her aşamasına kadar kendimi geliştirebilmem adına bana sınırlar koymayıp yeterli özgürlük alanı sağladığı için kıymetli ve saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU' na içtenlikle teşekkür ederim.

Hayatımın her anında ve her koşulda sevgisini ve desteğini kalbimin en derinlerinde hissettiğim, daima her şeyi başarabileceğime inanan ve umutsuzluğa düştüğüm her an bana umut ışığı olan biricik annem Navruz ERDEMİR' e gönülden şükranlarımı sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca her daim neşe kaynağım olan abim Cem ERDEMİR'e tüm stresli anlarımda yüzümü güldürebilmek adına harcadığı yoğun çaba için teşekkür ederim.

Bu altı yıllık süreç boyunca manevi desteğini ve kıymetli dostluğunu benden esirgemeyerek bana güç veren arkadaşlarım Bedia Merih ÖZÇETİN' e ve Gülşah YEŞİLMEN' e tüm kalbimle teşekkür ederim.

Ayrıca, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu' na (TÜBİTAK) 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destek için çok teşekkür ederim.

Dilara ERDEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ viii

TABLO LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xi

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 2

1.3 Orijinal Katkı 2

2 TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER 4

2.1 Grup Kavramı 4

2.2 Halkalar ve Cisimler 5

2.3 Kombinatoryal Tasarımlar 6

2.4 Graf Kavramı ve Graf Etiketlemeleri 15

3 BLOK ZARİF TASARIM 16

3.1 Blok Zarif Tasarım Kavramı ve Blok Zarif Tasarımlara Dair Temel Sonuçlar 16

3.2 Steiner Üçlü Sistemler 21

3.3 Afin ve Projektif Geometriler 26

3.4 Küçük Parametreli Tasarımlar 30

4 ÇİZGİ ZARİF TASARIM 32

4.1 Çizgi Zarif Tasarım Kavramı ve Çizgi Zarif Tasarımlara Dair Temel Sonuçlar 32

4.2 Steiner Üçlü Sistemler 33

4.3 Afin ve Projektif Geometriler 36

4.4 Steiner Dörtlü Sistemler 37

5 SONUÇ 39

KAYNAKÇA **41**

A BİLGİSAYAR ARAMASI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN BLOK ZARİF TASARIM ÖRNEKLERİ **43**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **54**

SİMGE LİSTESİ

$G =< a >$	a ile üretilmiş devirli grup
$U(R)$	Birimli bir R halkasında tersinir elemanların kümesi
MOLS	Karşılıklı dik latin kareler
SQS(v)	Mertebesi v olan bir Steiner dörtlü sistemi
TS(v, λ)	Mertebesi v olan bir üçlü sistem
L	n. dereden bir latin kare
MOLS(n)	n. dereceden karşılıklı dik latin karelerin kümesi
(V, B)	Noktalar kümesi V ve bloklar kümesi B olan bir blok tasarım
$G = (V, E)$	Noktalar kümesi V ve kenarlar kümesi E olan bir G grafı
$\mathbb{F}_q$	q elemanlı sonlu cisim
(v, b, r, k, λ)-BIBD	r ve b parametreli bir $(v, k, \lambda)-$ dengeli tamamlanmamış blok tasarım
t-tasarım	$t - (v, k, \lambda)$-tasarım
(v, k, λ)-BIBD	(v, k, λ)- dengeli tamamlanmamış blok tasarım
STS(v)	v mertebeli bir Steiner üçlü sistemi

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Devirli Steiner üçlü sistemlerin fark üçlüleri 14
Tablo 3.1 Küçük Parametreler 31
Tablo 4.1 Mertebesi 33 Olan Bir Steiner Üçlü Sisteminin Çizgi-Zarif Etiketlemesi 35

ÖZET

TASARIM ETİKETLEMELERİ

Dilara ERDEMİR

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU

Bu tez çalışmasında beş bölüm bulunmaktadır.
Birinci bölümde; literatür özeti, tezin amacı ve orijinal katkı verilmiştir. İkinci bölümde ise tez içerisinde ihtiyaç duyulan temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.
Üçüncü ve dördüncü bölümlerde çalışmanın orijinal kısımları anlatılmaktadır.
Üçüncü bölümde, blok-zarif tasarım tanımı verilmiş ve blok-zarif tasarımlara dair elde edilen temel sonuçlardan bahsedilmiştir. Ayrıca, blok-zarif Steiner üçlü sistemlerin, afin ve projektif geometrilerin, dahası, küçük parametreli tasarımların üzerinde durulmuştur.
Dördüncü bölümde ise çizgi-zarif tasarım tanımı verilerek; çizgi-zarif Steiner üçlü sistemlerin, afin ve projektif geometrilerin ve Steiner dörtlü sistemlerin üzerine eğilinmiştir.
Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlara değinilerek, açık problemlere yer verilmiş ve gelecekte yapılabilecek çalışmalara dair önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Blok-zarif tasarım, çizgi-zarif tasarım, Steiner üçlü sistemi, afin geometri, projektif geometri, Steiner dörtlü sistemi.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Design Labelings

Dilara ERDEMİR

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU

There are five chapters in this thesis.
In the first chapter; literature review, the objective of the thesis and original contribution are given. In the second chapter, the basic concepts and theorems needed in the thesis are given.
In the third and fourth chapters, the original parts of the study are explained.
In the third chapter, the definition of block-graceful design is given and the basic results of the block-graceful designs are mentioned. In addition, emphasis is placed on block-graceful Steiner triple systems, affine and projective geometries, moreover, designs with small parameters.
In the fourth chapter, the definition of line-graceful design is given; focused on line-graceful Steiner triple systems, affine and projective geometries, and Steiner quadruple systems.
In the fifth chapter, the results obtained in the thesis are mentioned, open problems are included and suggestions for future work are made.

Keywords: Block-graceful design, line-graceful design, Steiner triple system, affine geometry, projective geometry, Steiner quadruple system.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Graf etiketlemelerine ilk kez 1960'ların ortalarında başlanmıştır. Rose 1967 yılında bir $G = (V, E)$ grafının β-değeri tanımını yapmıştır [1]. G, q kenarlı bir graf olmak üzere; eğer $f : V \to \{0, 1, ..., q\}$ bire-bir bir fonksiyon ise öyle ki her $\{x, y\}$ kenarı için kenar ağırlıkları $|f(x) - f(y)|$ ile hesaplandığında birbirlerinden farklı oluyorsa, f fonksiyonu G grafının bir β-değeridir. Daha sonra, Solomon W. Golomb tarafından $\beta-$ etiketlemesi zarif olarak yeniden adlandırıldı ve zarif ismi o zamandan sonra graf etiketlemelerinde popüler hale geldi [2]. Alternatif olarak, Buratti, Rinaldi ve Traetta zarif tanımını şu şekilde vermiştir; $G = (V, E)$, q kenarlı bir graf olmak üzere; eğer $f : V \to \{0, 1, ..., q\}$ bire-bir bir fonksiyon ise öyle ki $\{|f(x) - f(y)| : \{x, y\} \in E\} = \{1, 2, ..., q\}$ oluyorsa, G grafı zariftir [3]. Çoğu graf etiketleme yönteminin kökeni Rose' nin 1967 ve Graham ve Sloane' in 1980 yılındaki çalışmalarına dayanır. Graham ve Sloane 1980 yılında ahenkli graf etiketleme tanımını yapmıştır [4]. G, q kenarlı bir graf olmak üzere; eğer $f : V \to (\mathbb{Z}_q, +)$ bire-bir bir fonksiyon ise öyle ki her $\{x, y\}$ kenarı için kenar ağırlıkları $f(x) + f(y) \pmod q$ şeklinde hesaplandığında tümü birbirirlerinden farklı oluyorsa, G grafı ahenklidir. O yıllardan günümüze dek 200'den fazla graf etiketleme tekniği 3000'nin üzerinde makalede çalışılmıştır. J. A. Gallian, çalışılan farklı graf etiketleme teknikleri hakkında kapsamlı bir araştırma ve literatür incelemesi ortaya koymuştur [5].

1977' de Bloom ve Golomb, graf etiketlemesinin x-ışını kristalografisi, kodlama teorisi, radar, astronomi, devre tasarımı, ağ ve iletişim tasarımı gibi çok çeşitli uygulama alanları ile ilişkilerini incelediler [6]. Günümüzde, graf etiketleme konusundaki araştırmalar giderek genişlemektedir ve çeşitli araştırmacılar tarafından aktif bir şekilde çalışılmaktadır. Bu anlamda, Journal of Mathematics dergisinin 1 Şubat 2022 tarihli özel sayısı "Advances in Graph Labeling" incelenebilir. Graf etiketlemelerinin aksine, tasarım etiketlemeleri ise çok fazla çalışılmamıştır.

Akbari ve arkadaşları sıfır-toplam akış graf etiketleme tekniğini blok tasarımlara uyarlayarak; 2011 ve 2017 yıllarında n bir pozitif tam sayı olmak üzere; tasarımların sıfır-toplam n-akış etiketlemesini incelediler [7, 8].
Colbourn nokta ağırlıkları mümkün olduğunca eşit olacak şekilde bir tasarımın bloklarının etiketlenmesini incelemiş ve tüm nokta ağırlıkları eşit olduğunda tasarıma eşitlikçi adını vermiştir. 2021 ve 2022 yıllarında Colbourn eşitlikçi Steiner sistemler üzerinde çalışmıştır [9, 10].

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı, geçmiş yıllardan günümüze dek graflar üzerinde çalışılan etiketleme tekniklerinden bazılarını, blok tasarımlara uyarlayarak; bu etiketlemelerin blok tasarımlar üzerindeki varlık problemini araştırmak ve blok tasarımlar üzerinde inşasını kurmaktır.
Graf etiketleme tekniklerinden, blok tasarımların yapılarına uygun olan tanımların tespit edilip; bu tanımların blok tasarımlara uyarlanması ve ardından, gerek bilgisayar araması, gerek teorik ispat ve inşa metotları ile hangi blok tasarımlar için bu etiketlemelerin var olduğu üzerine çalışılması hedeflenmektedir.

1.3 Orijinal Katkı

Üçüncü bölümde, blok-zarif tasarım tanımı yapılarak; blok-zarif $(v, k, \lambda)-$BIBD' lerin varlığı için gerek şart tespit edilecektir. Dahası, $(v, r) = 1$ şartını sağlayan, devirli bir $(v, k, \lambda)-$BIBD' nin blok-zarif bir tasarım olduğu ispat edilecektir. Ardından, eğer blok-zarif bir $(v, k, \lambda)-$BIBD varsa, tümleyen tasarımının da blok-zarif olduğu gösterilecektir. Bunların yanı sıra, eğer blok-zarif bir $(v, k, \lambda)-$BIBD varsa ve $(v, k, m\lambda)$ parametreleri bir blok-zarif BIBD tasarımının varlığı için gerek koşulu sağlıyorsa, o zaman, blok-zarif bir $(v, k, m\lambda)-$BIBD' nin de var olduğu ispatlanacaktır.
Daha sonra, öncelikle her $v \equiv 1 \pmod 6$ için blok-zarif bir STS(v)' nin var olduğu gösterilecektir. Ardından, üçlü sistemler için blok-zarif olmaya dair mv inşası yapılarak, belirli şartlar altında eğer blok-zarif bir TS(v, λ) varsa, o zaman, blok-zarif bir TS(mv, λ)' nın da var olduğu ispat edilecektir. Dahası, $v \equiv 3 \pmod 6$ için mertebesi v olan blok-zarif Steiner üçlü sistemlerinin bazı sonsuz aileleri belirlenecektir. Ayrıca, her $q \geq 2$ asal kuvveti ve $d \geq 2$ tam sayısı için blok-zarif bir $(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \frac{q^d-1}{q-1}, \frac{q^{d-1}-1}{q-1})-$BIBD' nin ve her q tek asal kuvveti için q mertebeli blok-zarif bir afin düzlemin var olduğu ispat edilecektir. Bunların yanı sıra, her q asal kuvveti ve $d \geq 2$ tam sayısı için eğer blok-zarif bir $(q^d, q, 1)-$BIBD varsa, o zaman, blok-zarif bir $(q^{d+1}, q, 1)-$BIBD' nin de var olduğuna dair bir inşa

verilecektir. Ardından, eğer her $d \geq 2$ bir tam sayı ve q bir tek asalın kuvveti veya $q = 4$ ise, blok-zarif bir $(q^d, q, 1)-$BIBD nin var olduğu gösterilecektir. Bu bölümün sonunda, bazı küçük parametreli tasarımların blok-zarifliği hakkında bir tablo oluşturulacaktır.

Dördüncü bölümde, çizgi-zarif tasarım tanımı yapılarak; her $v \equiv 1, 3 \pmod 6$ için çizgi-zarif bir STS(v)'nin var olduğu gösterilecektir. Dahası, her q asal kuvveti için q mertebeli çizgi-zarif bir afin düzlemin var olduğu ispat edilecektir. Ardından, her q asal kuvveti ve $d \geq 2$ tam sayısı için eğer çizgi-zarif bir $(q^d, q, 1)-$BIBD varsa, o zaman, çizgi-zarif bir $(q^{d+1}, q, 1)-$BIBD' nin de var olduğuna dair bir inşa verilecektir. Bu bilgiler ışığında, her $q \geq 2$ asal kuvveti için, mertebesi q olan çizgi-zarif bir $(q^d, q, 1)-$BIBD' nin var olduğu gösterilecektir. Ayrıca, çizgi-zarif t-tasarımların varlığı için gerek şart tespit edilip; eğer çizgi-zarif bir SQS(v) var ise çizgi-zarif bir SQS$(2v)$'nin de var olduğu ispatlanarak, her $n \geq 3$ için çizgi-zarif bir SQS(2^n)'nin var olduğu gösterilecektir. Bunun sonucu olarak da, her $n \geq 3$ için çizgi-zarif bir $2-(2^n, 4, 2^{n-1}-1)$-tasarımın var olduğu söylenecektir.

EK A' da bilgisayar araması yardımıyla elde edilen blok-zarif tasarım örneklerine yer verilecektir.

2
TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tez içerisinde ihtiyaç duyacağımız genel bilgilere yer vereceğiz. Sırasıyla, grup, halka, cisim, alt cisim kavramlarına ve bu kavramlara dair bazı detaylara, kombinatoryal tasarımlara, kombinatoryal tasarımlar ile ilgili temel teoremlere ve bazı inşa metotlarına ve son olarak da graf tanımına ve bazı graf etiketleme tekniklerine değineceğiz.
Burada, 2.1 ve 2.2'deki bilgiler için [11]'e, 2.3'deki bilgiler için [12–22] kaynaklarına ve 2.4'deki bilgiler için ise [5]'e bakılabilir.

2.1 Grup Kavramı

Bu kısımda grup tanımını vererek; değişmeli grup, bir grubun mertebesi, alt grup, bir grubun üreteçleri, devirli grup, grup etkisi ve yörünge gibi bazı temel kavramlardan bahsedeceğiz. Bu kavramlara dair bazı teoremlere de yer vereceğiz.

Tanım 2.1. G boş kümeden farklı bir küme olsun. $G \times G$ den G ye tanımlanan bir fonksiyona G üzerinde bir ikili işlem denir.

Tanım 2.2. G boş kümeden farklı bir küme ve $*$, G üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $(G, *)$ ikilisine bir grup denir.

1. $\forall x, y \in G$ için $x * y \in G$ dir (kapalılık özelliği),
2. $\forall x, y, z \in G$ için $(x * y) * z = x * (y * z)$ dir (birleşme özelliği),
3. Öyle bir $e \in G$ vardır ki $\forall x \in G$ için $x * e = e * x = x$ olur (etkisiz eleman),
4. $\forall x \in G$ için $x * y = y * x = e$ olacak şekilde bir $y \in G$ elemanı vardır (x elemanının tersi).

Tanım 2.3. $(G, *)$ bir grup olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için $x * y = y * x$ eşitliği sağlanıyorsa $(G, *)$ grubuna değişmeli (abelyan) grup denir.

Tanım 2.4. G sonlu bir küme ise $(G, *)$ grubuna bir sonlu grup, G nin eleman sayısına da grubun mertebesi denir ve bir G grubunun mertebesi $|G|$ ile gösterilir.

Tanım 2.5. $(G, *)$ bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G deki $*$ işlemine göre kendi başına bir grup ise H ye, G nin bir alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. M bir G grubunun bir alt kümesi olsun. M yi kapsayan, G nin bütün alt gruplarının arakesitine M nin ürettiği alt grup denir ve $< M >$ ile gösterilir. M nin elemanlarına da $< M >$ grubunun üreteçleri denir.

Tanım 2.7. Bir G grubu için, $G =< M >$ olacak şekilde bir $M \subset G$ alt kümesi bulunabiliyorsa, G ye M ile üretilmiş grup denir. Eğer M sonlu bir küme ise G ye sonlu üretilmiş grup ve $M = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise G ye a ile üretilmiş devirli grup denir ve $G =< a >$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. G bir grup ve $a \in G$ olsun, a nın ürettiği $< a >$ devirli grubunun mertebesine a elemanının mertebesi denir ve $o(a)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1. *$G =< a >$, n. mertebeden bir devirli grup olsun. Bu durumda a^k nın G grubunun bir üreteci olması için gerek ve yeter koşul $(k, n) = 1$ olmasıdır.*

Teorem 2.2. *G bir grup, $a \in G$ ve $o(a) = n$ olsun. O zaman, $o(a^k) = \frac{n}{ebob(k,n)}$ dir.*

Tanım 2.9. $A \neq \emptyset$ bir küme ve $(G, *)$ bir grup olsun. $G \times A \to A$, $(g, a) \to g.a$ ile aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyona, G nin A üzerindeki bir etkisi denir. $\forall g_1, g_2 \in G, \forall a \in A$ için,

1. $g_1.(g_2.a) = (g_1 * g_2).a$, ve
2. e_G, G nin etkisiz elemanı olmak üzere; $e_G.a = a$.

Not 2.1. G, A üzerine etki etsin. a, $b \in A$ için, $a \sim b \iff a = g.b$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır, olarak tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.10. G, A üzerine etki etsin. Not 2.1 de tanımladığımız denklik bağıntısı ile ortaya çıkan denklik sınıflarından her birine bir yörünge denir. Burada, $a \in G$ nin temsil ettiği yörüngeye a' nın yörüngesi denir ve $Ga = \{g.a \mid g \in G\}$ olarak ifade edilir.

2.2 Halkalar ve Cisimler

Tanım 2.11. Boş kümeden farklı bir R kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $+$ ve $.$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, .)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

1. $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.

2. . işleminin R de birleşme özelliği vardır.

3. . işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır: $\forall a, b, c \in R$ için, $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$.

Halkanın $+$ işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_R ile gösterilir. Halkanın . işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer halkanın . işlemine göre etkisiz elemanı varsa bu elemana, halkanın birim elemanı denir. Böyle bir halkaya da birimli halka denir. Ayrıca, halka . işlemine göre değişme özelliğine sahip ise halkaya değişmeli halka denir. Birimli bir R halkasında, . işlemine göre tersinir elemanların kümesi $U(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.12. R birimli ve değişmeli bir halka ve $(R - \{0_R\}, .)$ bir grup ise R ye bir cisim denir.

Tanım 2.13. F bir cisim ve $S \subset F$ olsun. S kendi başına F cismindeki işlemlere göre bir cisim ise S ye F nin bir alt cismi denir.

2.3 Kombinatoryal Tasarımlar

Kombinatoryal tasarım kuramı (kombinatoryal tasarım teori), matematiğin, bir sonlu kümenin elemanlarının belirli özellikleri sağlayan alt kümeler halinde düzenlenmesinin mümkün olup olmadığı hakkındaki sorularına cevap arayan, sonlu küme sistemlerinin varlığını, inşasını ve özelliklerini ele alan bir parçasıdır. Bu kısımda kombinatoryal tasarımlar ile ilgili temel tanımları, teoremleri ve bazı inşa metotlarını vereceğiz.

Tanım 2.14. Bir tasarım (veya kombinatoryal tasarım veya blok tasarım), V sonlu elemanlı bir küme ve B, V kümesinin boş olmayan alt kümelerinin bir topluluğu olmak üzere bir (V, B) ikilisidir. V kümesinin elemanlarına noktalar, B kümesinin elemanlarına bloklar denir.

Tanım 2.15. $v > k \geq 2$ olmak üzere, v, k ve λ pozitif tam sayılar olsunlar. Bir $(v, k, \lambda)-$dengeli tamamlanmamış blok tasarım (biz kısaca $(v, k, \lambda)-$BIBD olarak ifade edeceğiz), aşağıdaki özellikleri sağlayan bir (V, B) blok tasarımıdır:

1. $|V| = v$,

2. her blokta tam olarak k tane nokta bulunur,

3. her farklı nokta çifti tam olarak λ blokta görünür.

Yukarıdaki tanımda, son özellik denge özelliğidir. Bir dengeli tamamlanmamış blok tasarım bir tamamlanmamış blok tasarımdır çünkü $k < v$ dir. Dolayısıyla, bu tasarımın blokları tamamlanmamış bloklardır.

Örnek 2.1. $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ve
$B = \{\{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 4, 5\}, \{0, 2, 4, 6\}, \{0, 3, 7, 8\}, \{0, 5, 7, 9\}, \{0, 6, 8, 9\}, \{1, 2, 7, 8\}, \{1, 3, 6, 9\}, \{1, 4, 7, 9\}, \{1, 5, 6, 8\}, \{2, 3, 5, 9\}, \{2, 4, 8, 9\}, \{2, 5, 6, 7\}, \{3, 4, 5, 8\}, \{3, 4, 6, 7\}\}$ olmak üzere; (V, B) ikilisi bir $(10, 4, 2)-$BIBD dir.

Teorem 2.3. *Bir $(v, k, \lambda)-$BIBD de*

1. *her nokta tam olarak $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ blokta bulunur,*
2. *tam olarak $b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda(v^2-v)}{k^2-k}$ tane blok bulunur.*

Bir $(v, k, \lambda)-$BIBD, r ve b parametreleri ile birlikte $(v, b, r, k, \lambda)-$BIBD şeklinde de gösterilir.

Sonuç 2.1. *Eğer bir $(v, k, \lambda)-$BIBD varsa;*

$$\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1} \tag{2.1}$$

$$\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)} \tag{2.2}$$

denklikleri sağlanır. Bu sonuç, dengeli tamamlanmamış blok tasarımların varlığı için gerek şartları belirlemektedir.

Tanım 2.16. Bir $(v, b, r, k, \lambda)-$BIBD (V, B) tasarımının tümleyen tasarımı $\overline{B} = \{V \setminus A : A \in B\}$ olmak üzere; bir $(v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda)-$BIBD $(V, \overline{B})$ tasarımıdır.

Teorem 2.4 (Fisher Eşitsizliği). *Bir dengeli tamamlanmamış blok tasarımda $b \geq v$ eşitsizliği sağlanır.*

Tanım 2.17. Bir dengeli tamamlanmamış blok tasarımda $b = v$ ise (veya eşdeğer olarak $r = k$ veya $\lambda(v-1) = k^2 - k$), bu tasarıma bir simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarım denir.

Örnek 2.2. $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $B = \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 0\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 0, 2\}\}$ olmak üzere bir (V, B) tasarımını ele alalım. Burada, $b = v = 7$ olduğundan; (V, B) tasarımı simetriktir.

Tanım 2.18. Bir $(v, 3, \lambda)-$BIBD' ye üçlü sistem denir ve TS(v, λ) ile gösterilir.

Teorem 2.5. *Bir TS*(v, λ) *vardır ancak ve ancak* $v \neq 2$ *ve* $\lambda \equiv 0 \pmod{(v-2, 6)}$. *Bir başka deyişle, bir TS*(v, λ) *vardır ancak ve ancak*

1. $\lambda \equiv 1, 5 \pmod 6$ *ve* $v \equiv 1, 3 \pmod 6$,
2. $\lambda \equiv 2, 4 \pmod 6$ *ve* $v \equiv 0, 1 \pmod 3$,
3. $\lambda \equiv 3 \pmod 6$ *ve* $v \equiv 1 \pmod 2$,
4. $\lambda \equiv 0 \pmod 6$ *ve* $v \geq 3$.

Tanım 2.19. Bir üçlü sistemde eğer $\lambda = 1$ ise bu üçlü sisteme bir Steiner üçlü sistemi denir. Mertebesi v olan bir Steiner üçlü sistemi kısaca STS(v) ile gösterilir.

Örnek 2.3. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}\}$ olmak üzere; (V, B) ikilisi bir STS(7) dir.

Sonuç 2.2. *Mertebesi* v *olan bir Steiner üçlü sistemi vardır ancak ve ancak* $v \equiv 1$ *veya* $3 \pmod 6$.

Teorem 2.6. *Eğer* $v \equiv 1$ *veya* $3 \pmod 6$ *ise bir TS*(v, λ) *nin blokları, bir STS*(v) *nin bloklarının* λ *kez alınması ile elde edilebilir.*

Tanım 2.20. (X, A) ile (Y, B) iki tasarım ve $|X| = |Y|$ olsun. Eğer bir $\alpha : X \to Y$ eşlemesi varsa öyle ki $\{\{\alpha(x) : x \in S\} : S \in A\} = B$, o zaman, (X, A) ile (Y, B) izomorfiktir denir ve α eşlemesine de bir izomorfizma denir.

Örnek 2.4. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
$A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}$ ve
$Y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$B = \{\{a, b, d\}, \{b, c, e\}, \{c, d, f\}, \{d, e, g\}, \{a, e, f\}, \{b, f, g\}, \{a, c, g\}\}$ olmak üzere;
$\alpha : X \to Y$, $\alpha(1) = a$, $\alpha(2) = b$, $\alpha(3) = d$, $\alpha(4) = c$, $\alpha(5) = g$, $\alpha(6) = e$, $\alpha(7) = f$
eşlemesi ile:
$\{1, 2, 3\} \to \{a, b, d\}$
$\{1, 4, 5\} \to \{a, c, g\}$
$\{1, 6, 7\} \to \{a, e, f\}$
$\{2, 4, 6\} \to \{b, c, e\}$
$\{2, 5, 7\} \to \{b, f, g\}$
$\{3, 4, 7\} \to \{c, d, f\}$
$\{3, 5, 6\} \to \{d, e, g\}$
olduğundan; (X, A) ve (Y, B), $(7, 3, 1)-$BIBD leri izomorfiktir.

Tanım 2.21. (V, B) bir tasarım olsun. Bir $\alpha : V \to V$ izomorfizmasına bir otomorfizm denir.

Tanım 2.22. Eğer bir $(v, k, \lambda)-$BIBD' nin otomorfizmi, v uzunluklu tek bir devirden oluşan bir permütasyon ise bu $(v, k, \lambda)-$BIBD' ye devirlidir denir.

Teorem 2.7. *Bir devirli TS*(v, λ) *vardır ancak ve ancak*

1. $\lambda \equiv 1, 5 \pmod 6$ *ve* $v \equiv 1, 3 \pmod 6, (v, \lambda) \neq (9, 1)$,
2. $\lambda \equiv 2, 10 \pmod{12}$ *ve* $v \equiv 0, 1, 3, 4, 7, 9 \pmod{12}, (v, \lambda) \neq (9, 2)$,
3. $\lambda \equiv 3 \pmod 6$ *ve* $v \equiv 1 \pmod 2$,
4. $\lambda \equiv 4, 8 \pmod{12}$ *ve* $v \equiv 0, 1 \pmod 3$,
5. $\lambda \equiv 6 \pmod{12}$ *ve* $v \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$,
6. $\lambda \equiv 0 \pmod{12}$ *ve* $v \geq 3$.

Sonuç 2.3. *Her* $v \equiv 1$ *veya* $3 \pmod 6$ *için* $v \neq 9$ *olmak üzere; devirli bir STS*(v) *vardır.*

Not 2.2. Eğer (V, B), bir G otomorfizm grubu ile $(v, k, \lambda)-$BIBD ise, G nin B üzerindeki etkisi, B yi denklik sınıflarına (yörüngelere) böler.

Not 2.3. Devirli bir Steiner üçlü sisteminde eğer $v \equiv 1 \pmod 6$ ise her bir yörünge v tane blok (tam yörünge) içerir. Eğer $v \equiv 3 \pmod 6$ ise bir tane yörünge $\frac{v}{3}$ tane blok (kısa yörünge) ve geriye kalan her bir yörünge de v tane blok içerir.

Tanım 2.23. Bir $(n^m, n, 1)-$BIBD, $n, m \geq 2$ olmak üzere mertebesi n olan bir afin geometri olarak adlandırılır (eğer $m = 2$ ise, o zaman $(n^2, n, 1)-$BIBD, mertebesi n olan bir afin düzlemdir).

Örnek 2.5. $STS(9)$ (yani, $(9, 3, 1)-$BIBD) mertebesi 3 olan bir afin düzlemdir.

Teorem 2.8 (Afin Düzlemlerin Sonlu Cisimler ile İnşası). $\mathbb{F}_q$, *q elemanlı bir cisim ve* $V = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ *olsun. Her* $a, b \in \mathbb{F}_q$ *için* $C_{a,b} = \{(x, y) \in V : y = ax + b\}$ *ve* $B_1 = \{C_{a,b} : a, b \in \mathbb{F}_q\}$ *kümelerini tanımlayalım. Ayrıca, her* $c \in \mathbb{F}_q$ *için* $C_c = \{(x, y) \in V : x = c\}$ *ve* $B_2 = \{C_c : c \in \mathbb{F}_q\}$ *kümelerini tanımlayalım.* $B = B_1 \cup B_2$ *olsun. O zaman,* (V, B) *mertebesi* q *olan bir afin düzlemdir.*

Tanım 2.24. Bir $(\frac{n^{m+1}-1}{n-1}, \frac{n^m-1}{n-1}, \frac{n^{m-1}-1}{n-1})-$BIBD, $n, m \geq 2$ olmak üzere mertebesi n olan m boyutlu bir projektif geometri olarak adlandırılır. Eğer $m = 2$ ise, o zaman, $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)-$BIBD, mertebesi n olan 2 boyutlu bir projektif düzlemdir. Projektif geometrilerin birer simetrik tasarım oldukları kolayca görülebilir.

Örnek 2.6. Örnek 2.2 de vermiş olduğumuz $(7,3,1)-$BIBD olan (V,B) tasarımı mertebesi 2 olan bir projektif düzlemdir.

Teorem 2.9. *$\forall q \geq 2$ asal kuvveti ve $\forall m \geq 2$ tam sayısı için, bir (simetrik) $(\frac{q^{m+1}-1}{q-1}, \frac{q^m-1}{q-1}, \frac{q^{m-1}-1}{q-1})-$BIBD (yani, mertebesi q olan m boyutlu bir projektif geometri) ve bir $(q^m, q, 1)-$BIBD (yani, mertebesi q olan bir afin geometri) vardır.*

Teorem 2.10. *$\forall q \geq 2$ asal kuvveti ve $\forall m \geq 2$ tam sayısı için, devirli olan bir $(\frac{q^{m+1}-1}{q-1}, \frac{q^m-1}{q-1}, \frac{q^{m-1}-1}{q-1})-$BIBD (yani, mertebesi q olan m boyutlu bir projektif geometri) vardır.*

Tanım 2.25. $1, 2, ..., n$ sayıları (ya da n tane simge), $n \times n$ boyutlu bir ızgaraya (tabloya), her biri her satır ve her sütunda birer kez belirecek biçimde yerleşmişse, elde edilen sayı dizinine $n.$ dereceden Latin kare denir ve $n.$ dereceden bir Latin kare L ile sembolize edilir.

Örnek 2.7.

1	2	3
2	3	1
3	1	2

3. dereceden bir latin karedir.

Tanım 2.26. L_1 ve L_2 , sırasıyla, girdileri X ve Y semboller kümesinden olan $n.$ dereceden latin kareler olsunlar. Eğer L_1 ve L_2 latin kareleri birleştirildiğinde; $1 \leq i, j \leq n$ için (i, j) hücreleri farklı birer (x, y) ikilisine tekabül ediyorsa, o zaman, L_1 ve L_2 latin karelerine dik latin kareler denir.

Örnek 2.8. $L_1 =$

1	2	3
2	3	1
3	1	2

ve $L_2 =$

1	2	3
3	1	2
2	3	1

olsun. O zaman, L_1 ve L_2 birleştirildiğinde;

(1,1)	(2,2)	(3,3)
(2,3)	(3,1)	(1,2)
(3,2)	(1,3)	(2,1)

elde edilir. O halde, tanım 2.26'dan L_1 ve L_2 latin kareleri, dik latin karelerdir.

Tanım 2.27. Eğer her $1 \leq i < j \leq s$ için $n.$ dereceden L_i ve L_j latin kareleri dik latin kareler ise, o zaman, $n.$ dereceden $L_1, L_2, ..., L_s$ latin karelerine karşılıklı dik latin kareler denir ve karşılıklı dik latin kareler kısaca MOLS ile gösterilir. Ayrıca, s tane $n.$ dereceden karşılıklı dik latin karelerin kümesi de s MOLS(n) ile sembolize edilir.

Teorem 2.11. *$\forall q \geq 2$ asal kuvveti için, $q-1$ MOLS(q) vardır.*

Teorem 2.12 (Afin Düzlemlerin Latin Kareler ile İnşası). *$L_1, L_2, ..., L_{n-1}$ için $\{L_i\}_{i=1}^{n-1}$ $n-1$ $MOLS(n)$ ve $P = \{(i,j) \,|\, 0 \leq i, j \leq n-1\}$ olsun. Bu n^2 sıralı*

ikili bir $n \times n$ lik A matrisinin aşağıdaki gibi olacak şekilde girdileri olsunlar:

$$A = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & ... & (0,n-1) \\ (1,0) & (1,1) & ... & (1,n-1) \\ . & . & .... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & .... & . \\ (n-1,0) & (n-1,1) & ... & (n-1,n-1) \end{pmatrix}.$$

B, P nin her biri aşağıdaki şekilde tanımlanan n tane sıralı ikililerinden oluşan alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun:

1. *A matrisinin n tane sütununun her birindeki sıralı ikililerin kümesi B dedir,*
2. *A matrisinin n tane satırının her birindeki sıralı ikililerin kümesi B dedir,*
3. *Her L_i latin karesi ve her $j = 0, 1, ..., n-1$ sayısı için, L_i latin karesinde j sayısının bulunduğu hücrelerin, A matrisinde karşılık geldiği hücrelerdeki sıralı ikililerin kümesi B dedir.*

Bu durumda, (P, B) mertebesi n olan bir afin düzlemdir.

Örnek 2.9. Teorem 2.12 yi kullanarak mertebesi 3 olan bir afin düzlem inşa edelim. $P = \{(i,j) \,|\, 0 \leq i,j \leq 2\}$, $L_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$, $L_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$ olsun ve P nin elemanlarını kullanarak A matrisini oluşturalım:

$$A = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) \end{pmatrix}.$$

Bu durumda, A matrisinin sütunlarına karşılık gelen bloklar: $\{(0,0),(1,0),(2,0)\}$, $\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$ ve $\{(0,2),(1,2),(2,2)\}$, A matrisinin satırlarına karşılık gelen bloklar: $\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$, $\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$ ve $\{(2,0),(2,1),(2,2)\}$ dir.

Ayrıca L_1 latin karesinde 0 sembolünün bulunduğu hücrelerin, A matrisinde karşılık geldiği hücrelerdeki sıralı ikililerin oluşturduğu blok: $\{(0,0),(1,2),(2,1)\}$, L_1 latin karesinde 1 sembolünün bulunduğu hücrelerin, A matrisinde karşılık geldiği hücrelerdeki sıralı ikililerin oluşturduğu blok: $\{(0,1),(1,0),(2,2)\}$ ve yine L_1 latin karesinde 2 sembolünün bulunduğu hücrelerin, A matrisinde karşılık geldiği

hücrelerdeki sıralı ikililerin oluşturduğu blok: $\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$ dir.
Benzer şekilde, L_2 latin karesinde 0 sembolünün bulunduğu hücrelerin, A matrisinde karşılık geldiği hücrelerdeki sıralı ikililerin oluşturduğu blok: $\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$, L_2 latin karesinde 1 sembolünün bulunduğu hücrelerin, A matrisinde karşılık geldiği hücrelerdeki sıralı ikililerin oluşturduğu blok: $\{(0,1),(1,2),(2,0)\}$ ve yine L_2 latin karesinde 2 sembolünün bulunduğu hücrelerin, A matrisinde karşılık geldiği hücrelerdeki sıralı ikililerin oluşturduğu blok: $\{(0,2),(1,0),(2,1)\}$ dir.
O halde, $B = \{\{(0,0),(1,0),(2,0)\},\{(0,1),(1,1),(2,1)\},\{(0,2),(1,2),(2,2)\},$ $\{(0,0),(0,1),(0,2)\},\{(1,0),(1,1),(1,2)\},\{(2,0),(2,1),(2,2)\},\{(0,0),(1,2),$ $(2,1)\},\{(0,1),(1,0),(2,2)\},\{(0,2),(1,1),(2,0)\},\{(0,0),(1,1),(2,2)\},\{(0,1),$ $(1,2),(2,0)\},\{(0,2),(1,0),(2,1)\}\}$ olur.
Burada noktaları: $(0,0) \to 1$, $(0,1) \to 2$, $(0,2) \to 3$, $(1,0) \to 4$, $(1,1) \to 5$, $(1,2) \to 6$, $(2,0) \to 7$, $(2,1) \to 8$, $(2,2) \to 9$ olarak adlandırırsak; o zaman, $(9,3,1)-$BIBD için noktalar kümesi $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ve bloklar kümesi $\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\},\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{1,6,8\},\{2,4,9\},$ $\{3,5,7\},\{1,5,9\},\{2,6,7\},\{3,4,8\}\}$ olarak yazılabilir.

Tanım 2.28. $(G,+)$ mertebesi v olan sonlu bir grup ve k ile λ, $2 \leq k < v$ olacak şekilde birer pozitif tam sayı olsun. Bir (v,k,λ)-fark kümesi D, G nin aşağıdaki şartları sağlayan bir alt kümesidir:

1. $|D| = k$,
2. çoklu küme $[x-y : x,y \in D, x \neq y]$, $G \setminus \{0\}$ kümesinin her elemanını tam olarak λ kez içerir.

Burada dikkat edecek olursak bir (v,k,λ)-fark kümesinin varlığı için gerek koşul $\lambda(v-1) = k(k-1)$ olmasıdır.
Bir $(v,k,\lambda)-$*fark ailesi,* G *kümesinin* $\bigcup_{i=1}^{n}[x-y : x,y \in B_i, x \neq y]$ *çoklu kümesi* $G \setminus \{0\}$ *kümesinin her elemanını tam olarak* λ *kez içerecek şekildeki* k *elemanlı alt kümelerinin bir* $[B_1,B_2,\ldots,B_n]$ *kolleksiyonudur. Eğer* G *grubu devirli ise fark ailesine devirlidir denir. Bir genişleme,* $B_i + g = \{x+g : x \in B_i\}$ *, nokta kümesi* G *olan bir* $(v,k,\lambda)-$*BIBD tasarımının bloklarını üretmek üzere;* $Dev(B_1,B_2,\ldots,B_n) = [B_i + g : 1 \leq i \leq n$ *ve* $g \in G]$ *şeklinde tanımlanır.*

Örnek 2.10. $(\mathbb{Z}_{21}, +)$ grubu için bir $(21, 5, 1)$-fark kümesi: $D = \{0, 1, 6, 8, 18\}$ dir. Kontrol edecek olursak mod 21 de:

$1 - 0 = 1$ $\quad$ $0 - 1 = 20$
$6 - 0 = 6$ $\quad$ $0 - 6 = 15$
$8 - 0 = 8$ $\quad$ $0 - 8 = 13$
$18 - 0 = 18$ $\quad$ $0 - 18 = 3$
$6 - 1 = 5$ $\quad$ $1 - 6 = 16$
$8 - 1 = 7$ $\quad$ $1 - 8 = 14$
$18 - 1 = 17$ $\quad$ $1 - 18 = 4$
$8 - 6 = 2$ $\quad$ $6 - 8 = 19$
$18 - 6 = 12$ $\quad$ $6 - 18 = 9$
$18 - 8 = 10$ $\quad$ $8 - 18 = 11$

olur.

Tanım 2.29. Bir üçlü sistemde, her v tam sayısı için bir fark üçlüsü; $\{1, 2, ..., v-1\}$ kümesinin toplamları mod v de 0 olan veya bir eleman mod v de diğer ikisinin toplamına denk olan, üç farklı elemanından oluşan bir alt kümesi olarak tanımlanır. Eğer $\{x, y, z\}$ bir fark üçlüsü (yani, $x + y \equiv \pm z \pmod{v}$) ise, Steiner üçlü sistemleri için bu fark üçlüsüne karşılık gelen temel bloğu $\{0, x, x + y\}$ olarak tanımlarız. Temel bloklar kullanılarak, devirli Steiner üçlü sistemlerin blokları elde edilir.

Örnek 2.11. STS(7) için fark üçlüsü $D = \{1, 2, 3\}$ ve bu fark üçlüsüne karşılık gelen temel blok da $\{0, 1, 3\}$ tür. Böylece, noktalar kümesi $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere; blokların kümesi $B = \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 0\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 0, 2\}\}$ olarak elde edilir.

Not 2.4. Tablo 2.1' de $s \geq 1$ olmak üzere; $v = 18s + 7, v = 18s + 13, v = 18s + 3$ ve $v = 18s+15$, $s \geq 2$ olmak üzere; $v = 18s+1$ ve $s \geq 4$ olmak üzere; $v = 18s+9$ mertebeli devirli Steiner üçlü sistemler için fark üçlüleri verilmiştir.

$v = 18s+1,\ s \geq 2$	$\{3r+1, 4s-r+1, 4s+2r+2\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3r+2, 8s-r, 8s+2r+2\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3r+3, 6s-2r-1, 6s+r+2\}, 0 \leq r \leq s-2$ $\{3s, 3s+1, 6s+1\}$
$v = 18s+7,\ s \geq 1$	$\{3r+1, 8s-r+3, 8s+2r+4\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3r+2, 6s-2r+1, 6s+r+3\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3r+3, 4s-r+1, 4s+2r+4\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3s+1, 4s+2, 7s+3\}$
$v = 18s+13,\ s \geq 1$	$\{3r+2, 6s-2r+3, 6s+r+5\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3r+3, 8s-r+5, 8s+2r+8\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3r+1, 4s-r+3, 4s+2r+4\}, 0 \leq r \leq s$ $\{3s+2, 7s+5, 8s+6\}$
$v = 18s+3,\ s \geq 1$	$\{3r+1, 8s-r+1, 8s+2r+2\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3r+2, 4s-r, 4s+2r+2\}, 0 \leq r \leq s-1$ $\{3r+3, 6s-2r-1, 6s+r+2\}, 0 \leq r \leq s-1$
$v = 18s+9,\ s \geq 4$	$\{3r+1, 4s-r+3, 4s+2r+4\}, 0 \leq r \leq s$ $\{3r+2, 8s-r+2, 8s+2r+4\}, 0 \leq r \leq s-2$ $\{3r+3, 6s-2r+1, 6s+r+4\}, 0 \leq r \leq s-2$ $\{2, 8s+3, 8s+5\}, \{3, 8s+1, 8s+4\}, \{5, 8s+2, 8s+7\}, \{3s-1, 3s+2, 6s+1\}, \{3s, 7s+3, 8s+6\}$
$v = 18s+15,\ s \geq 1$	$\{3r+1, 4s-r+3, 4s+2r+4\}, 0 \leq r \leq s$ $\{3r+2, 8s-r+6, 8s+2r+8\}, 0 \leq r \leq s$ $\{3r+3, 6s-2r+3, 6s+r+6\}, 0 \leq r \leq s-1$

Tablo 2.1 Devirli Steiner üçlü sistemlerin fark üçlüleri

Tanım 2.30. $v > k \geq t$ olmak üzere, v, k, λ ve t pozitif tam sayılar olsunlar. Bir t-(v, k, λ)-tasarım (biz kısaca t-tasarım olarak ifade edeceğiz), aşağıdaki özellikleri sağlayan bir (V, B) blok tasarımıdır:

1. $|V| = v$,
2. her blokta tam olarak k tane nokta bulunur,
3. noktaların tümü birbirinden farklı olmak üzere; her t noktalı küme tam olarak λ blokta görünür.

Bir t-(v, k, λ)-tasarım $\lambda > 1$ için tekrar eden bloklar içerebilir. Eğer bir t-(v, k, λ)-tasarım tekrar eden bloklar içermiyorsa bu tasarıma bir basit t-tasarım denir. $\lambda > 1$ durumunda, genellikle basit t-tasarımları oluşturmak basit olmayanları oluşturmaktan daha zordur.
Dikkat edilirse $k < v$ olmak üzere v elemanlı bir kümenin her k elemanlı alt kümesinin λ kopyası alınırsa bir t-$(v, k, \lambda\binom{v-t}{k-t})$ -tasarım elde ederiz. Bu tasarıma bir aşikar t-tasarım denir.
Bir 2-(v, k, λ)-tasarım bir (v, k, λ)-BIBD dir. Dahası, $t > 2$ durumunda t-tasarımların varlığı hakkında BIBD ler için olduğu kadar çok bilinen sonuç yoktur.

Örnek 2.12. $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve
$B = \{\{0, 1, 3, 7\}, \{1, 2, 4, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}, \{3, 4, 6, 7\}, \{0, 4, 5, 7\}, \{1, 5, 6, 7\},$
$\{0, 2, 6, 7\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{0, 3, 5, 6\}, \{0, 1, 4, 6\}, \{0, 1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{0, 2, 3, 4\},$
$\{1, 3, 4, 5\}\}$ olmak üzere; (V, B) ikilisi bir 3-(8,4,1)-tasarımdır.

Teorem 2.13. *Bir t-tasarımda:*

1. *her nokta tam olarak* $r = \frac{\lambda\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}}$ *blokta bulunur,*

2. *tam olarak* $b = \frac{\lambda\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$ *tane blok vardır.*

Teorem 2.14. *Her* t-(v, k, λ)*-tasarım,* $\lambda^* = \frac{\lambda(v-t+1)}{(k-t+1)}$ *olmak üzere bir* $(t-1)$-(v, k, λ^*)*-tasarımdır.*

Tanım 2.31. Bir 3-$(v, 4, 1)$-tasarıma mertebesi v olan bir Steiner dörtlü sistemi denir ve kısaca SQS(v) ile gösterilir.

Teorem 2.15. *Bir SQS*(v) *vardır* $\iff v \equiv 2, 4 \pmod 6$.

Teorem 2.13'den hesaplanacağı üzere bir SQS(v) *de her nokta tam olarak* $\frac{(v-1)(v-2)}{6}$ *blokta bulunur ve tam olarak* $\frac{v(v-1)(v-2)}{24}$ *tane dörtlü vardır.*

Teorem 2.16. *Her* $v \geq 3$ *tam sayısı için bir SQS*(2^v) *vardır.*

Teorem 2.17. (V, B) *ikilisi bir SQS*(v), $X = V \times \mathbb{Z}_2$,

$B_1 = \{\{(x, i), (y, j), (z, k), (t, l)\} : \{x, y, z, t\} \in B, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_2, i + j + k + l = \overline{0}\}$,
$B_2 = \{\{(a, \overline{0}), (b, \overline{0}), (a, \overline{1}), (b, \overline{1})\} : a, b \in V, a \neq b\}$

ve $A = B_1 \cup B_2$ *olsun. O zaman,* (X, A) *ikilisi bir SQS*$(2v)$ *dir.*

2.4 Graf Kavramı ve Graf Etiketlemeleri

Bir G *grafı,* $V = V(G)$ *köşeler (veya düğümler) kümesini ve* $E = E(G)$ *(düğümler ile ilişkili) kenarlar kümesini göstermek üzere; bir* (V, E) *ikilisidir. Graf etiketleme, belirli koşullar altında grafın köşelerine veya kenarlarına, ya da her ikisine tam sayıların atanmasıdır. Graf etiketlemelerine ilk kez 1960'ların ortalarında başlanmıştır. O yıllardan günümüze dek 200'den fazla graf etiketleme tekniği 3000'in üzerinde makalede çalışılmıştır.*

Tanım 2.32. $G = (V, E)$, p köşeli ve q kenarlı bir graf olsun. Eğer bir $f : E \to \{1, 2, ..., q\}$ eşlemesi varsa öyle ki $f^+(x) = \sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in E}} f(\{x, y\}) \pmod p$ şeklinde tanımlı $f^+ : V \to \mathbb{Z}_p$ fonksiyonu bir eşlemedir, o zaman, G grafı kenar-zarif etiketlemeye sahiptir denir.

Tanım 2.33. $G = (V, E)$, n köşeli bir graf olsun. Eğer bir $f : E \to \{0, 1, ..., n\}$ fonksiyonu varsa öyle ki $f^+(x) = \sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in E}} f(\{x, y\}) \pmod n$ bir eşlemedir, o zaman, bu grafa bir çizgi-zarif graf denir.

3
BLOK ZARİF TASARIM

Bu bölümde, blok-zarif tasarım tanımı yapılarak; blok-zarif bir tasarımın varlığı için gerek koşul, ayrıca devirli ve tümleyen tasarımların blok-zarif olmasına dair teoremler verilecektir. Dahası, var olan blok-zarif bir $(v, b, r, k, \lambda)-$*BIBD tasarımını kullanarak; blok-zarif bir* $(v, mb, mr, k, m\lambda)-$*BIBD tasarımını elde etmenin yolu anlatılacaktır.*
Daha sonra, her $v \equiv 1 \pmod 6$ *için blok-zarif bir STS*(v) *tasarımının var olduğunu göstereceğiz. Ayrıca, var olan blok-zarif üçlü sistemler kullanılarak yeni blok-zarif üçlü sistemlerin elde edileceği bir yinelemeli inşa metodu vererek, bu metot yardımı ile* $v \equiv 3 \pmod 6$ *olmak üzere; mertebesi* v *olan blok-zarif Steiner üçlü sistemlerin bazı sonsuz ailelerini elde edeceğiz.*
Ardından, her $q \geq 2$ *asal kuvveti ve* $d \geq 2$ *tam sayısı için blok-zarif bir* $(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \frac{q^d-1}{q-1}, \frac{q^{d-1}-1}{q-1})-$*BIBD tasarımının var olduğunu ve eğer* $d \geq 2$ *bir tam sayı ve* q *bir tek asal sayının kuvveti veya* $q = 4$ *ise, o zaman, blok-zarif bir* $(q^d, q, 1)-$*BIBD tasarımının var olduğunu ispatlayacağız.*
Son olarak, küçük parametreli bazı blok-zarif tasarımlar için bir özet tablosu oluşturacağız.

3.1 Blok Zarif Tasarım Kavramı ve Blok Zarif Tasarımlara Dair Temel Sonuçlar

Tanım 3.1. (V, B) bir blok tasarım, $|V| = v$ ve $|B| = b$ olsun. Eğer bir $f : B \to \{1, 2, ..., b\}$ eşlemesi varsa öyle ki $f^+(x) = \sum_{\substack{x \in A \\ A \in B}} f(A) \pmod v$ şeklinde tanımlı $f^+ : V \to \mathbb{Z}_v$ fonksiyonu bir eşlemedir, o zaman, bu tasarıma blok-zarif tasarım denir. Ayrıca, f fonksiyonuna bir blok-zarif etiketleme denir.

Örnek 3.1. Aşağıda bir $(9,3,1)-$BIBD' nin blok-zarif etiketlemesi verilmiştir.

$\{0,1,2\} \to 3 \quad f^+(0) = \overline{2}$
$\{3,4,5\} \to 6 \quad f^+(1) = \overline{6}$
$\{6,7,8\} \to 9 \quad f^+(2) = \overline{7}$
$\{1,3,8\} \to 4 \quad f^+(3) = \overline{5}$
$\{0,5,7\} \to 7 \quad f^+(4) = \overline{0}$
$\{2,4,6\} \to 1 \quad f^+(5) = \overline{1}$
$\{1,5,6\} \to 5 \quad f^+(6) = \overline{8}$
$\{0,4,8\} \to 8 \quad f^+(7) = \overline{3}$
$\{2,3,7\} \to 2 \quad f^+(8) = \overline{4}$
$\{1,4,7\} \to 12$
$\{0,3,6\} \to 11$
$\{2,5,8\} \to 10$

Teorem 3.1. *(V,B) bir $(v,k,\lambda)-$BIBD olsun. Eğer (V,B) bir blok-zarif tasarım ise $r(b+1)-v$ tam sayısı tektir.*

İspat. $(V,B),(v,k,\lambda)$-BIBD bir blok-zarif tasarım ve $V=\{0,1,...,v-1\}$ olsun. (V,B) bir blok-zarif tasarım olduğundan; nokta ağırlıkları mod v de $0,1,...,v-1$ olmalıdır. O zaman, nokta ağırlıklarının mod v deki toplamı,

$$f^+(0)+f^+(1)+...+f^+(v-1) \equiv 0+1+...+v-1 \equiv \frac{(v-1)v}{2} \pmod{v} \quad (3.1)$$

olur.

Diğer yandan, blok-zarif tasarım tanımından blokların etiketleri; $1,2,...,b$ olup, tanım 2.15 den de her blokta tam olarak k tane nokta bulunduğundan; nokta ağırlıklarının mod v deki toplamı:

$$f^+(0)+f^+(1)+...+f^+(v-1) \equiv k(1+2+...+b) \equiv k\frac{b(b+1)}{2} \pmod{v} \quad (3.2)$$

olarak elde edilir. O halde, (3.1) ve (3.2) den;

$$k\frac{b(b+1)}{2} \equiv \frac{(v-1)v}{2} \pmod{v} \quad (3.3)$$

bulunur. Böylece (3.3) den,

$$\frac{kb(b+1)-(v-1)v}{2} \equiv 0 \pmod{v} \quad (3.4)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.4) den,

$$v \mid \frac{kb(b+1)-(v-1)v}{2} \implies \frac{kb(b+1)-(v-1)v}{2v} \in \mathbb{Z} \quad (3.5)$$

olmalıdır.
Teorem 2.3 den $bk = vr$ olduğunu biliyoruz. Bunu (3.5) de kullanırsak;

$$\frac{r(b+1)-(v-1)}{2} \in \mathbb{Z} \tag{3.6}$$

elde edilir. O halde (3.6) dan, $2 \mid r(b+1)-v+1$, yani, $r(b+1)-v+1$ tam sayısı çifttir. Dolayısıyla, sonuç olarak; $r(b+1)-v$ tam sayısı tektir. ■

Teorem 3.1 bize blok-zarif $(v,k,\lambda)-$BIBD' lerin varlığı için gerek şartı belirler. Örnek olarak; $v = 6m+4, m \in \mathbb{Z}^+, k = 4$ ve $\lambda = 2$ olmak üzere; $(v,4,2)-$BIBD yi göz önüne alalım. Teorem 2.3 den $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ olduğunu biliyoruz. Buradan, $r = \frac{2(6m+3)}{3} = 2(2m+1)$ bulunur. O halde, r tam sayısı çift olduğundan; $r(b+1)$ tam sayısı da çifttir. Ayrıca, v tam sayısı da çift olduğundan; $r(b+1)-v$ tam sayısı çift olur. Sonuç olarak, Teorem 3.1 den $v = 6m+4, m \in \mathbb{Z}^+, k = 4$ için hiçbir $(v,4,2)-$BIBD blok-zarif tasarım olamaz.

Teorem 3.2. *Bir devirli fark ailesi tarafından üretilen her $(v,b,r,k,\lambda)-$BIBD tasarımı, eğer $(v,r) = 1$ ise, bir blok-zarif tasarımdır.*

İspat. $[B_1, B_2, \ldots, B_n]$, $\mathbb{Z}_v$ üzerinde devirli bir $(v,k,\lambda)-$fark ailesi ve $B = Dev(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ olsun. Burada, $f(B_i+g) = (i-1)v+g+1, \forall g \in \mathbb{Z}_v$ ve $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde bir $f : B \to \{1,2,\ldots,b\}$ etiketlemesini tanımlayalım ($(i-1)v+g+1$ hesaplaması yapılırken $g, \mathbb{Z}_v$ grubunun bir elemanı yerine bir tam sayı olarak alınır). Bu durumda, her $0 \leq g,h \leq v-1$ ve $1 \leq i,j \leq n$ için $f(B_i+g) = f(B_j+h)$ ise $(i-j)v = h-g$ olur. Buradan, $v \mid h-g$ olacağı görülür. O halde, $h-g \equiv 0 \pmod{v}$ olacaktır. Böylece, $0 \leq g,h \leq v-1$ olduğundan $g = h$ olur. Bu durumda, $(i-j)v = 0$ olur ve $v \neq 0$ olduğundan $i = j$ bulunur. Dolayısıyla, $B_i+g = B_j+h$ elde edileceğinden f bire-birdir. Burada, $b = |B| = |\{1,2,...,b\}|$ olduğunu biliyoruz. Dahası, f bire-bir olduğundan her $B_i+g \neq B_j+h$ için $f(B_i+g) \neq f(B_j+h)$ olur. Dolayısıyla, $f(B) = \{f(B_i+g) : B_i+g \in B\}$ için $|f(B)| = |B|$ olur. Böylece, $|f(B)| = |\{1,2,...,b\}|$ olduğu görülür. Burada, $f(B) \subseteq \{1,2,...,b\}$, $\{1,2,...,b\}$ kümesi sonlu ve $|f(B)| = |\{1,2,...,b\}|$ olduğundan $f(B) = \{1,2,...,b\}$ olur. O halde, f örtendir. Sonuç olarak, f fonksiyonu bijektiftir. $\forall a \in \mathbb{Z}_v$ için $f^+(a) \equiv f^+(0)+ar \pmod{v}$ elde edilir. Biliyoruz ki $(v,r) = 1$ olduğundan; $r, 2r, \ldots, (v-1)r$ tümü mod v de birbirlerinden farklıdır. Dolayısıyla, elde edilen tüm nokta ağırlıkları mod v de birbirlerinden farklı olacağından istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.3. *Eğer (V,B) bir blok-zarif $(v,b,r,k,\lambda)-$BIBD tasarım ise, o zaman, $(V,\overline{B})$ tümleyen tasarımı da blok-zariftir.*

İspat. Kabul edelim ki (V, B) tasarımı, $f^+ : V \to \mathbb{Z}_v$ fonksiyonu ile bir blok-zarif $f : B \to \{1, 2, \ldots, b\}$ etiketlemesine sahip olsun. Her $A \in B$ için, $g(V \backslash A) = f(A)$ olacak şekilde bir $g : \overline{B} \to \{1, 2, \ldots, b\}$ fonksiyonu tanımlayalım. Burada, f fonksiyonu bijektif olduğundan; g fonksiyonu da bijektiftir. Tümleyen tasarımda herhangi bir $x \in V$ noktasının ağırlığı g fonksiyonunun tanımından: $g^+(x) = (1 + 2 + \cdots + b) - f^+(x) \equiv \frac{b(b+1)}{2} - f^+(x) \pmod{v}$ olur. Burada, $f^+(x)$ nokta ağırlıklarının tümü mod v de birbirlerinden farklı olduğundan; tüm $g^+(x)$ nokta ağırlıkları da mod v de birbirlerinden farklı olur. Dolayısıyla, $(V, \overline{B})$ tümleyen tasarımı blok-zariftir. ■

Teorem 3.4. *Eğer blok-zarif bir $(v, b, r, k, \lambda)-$BIBD tasarımı varsa ve m, $(v, mb, mr, k, m\lambda)$ parametreleri Teorem 3.1 deki gerek koşulu sağlayacak şekilde bir pozitif tam sayı ise, o zaman, blok-zarif bir $(v, mb, mr, k, m\lambda)-$BIBD tasarımı vardır.*

İspat. Kabul edelim ki bir blok-zarif $f : B \to \{1, 2, \ldots, b\}$ etiketlemesi ile bir $(v, b, r, k, \lambda)-$BIBD (V, B) tasarımı var olsun ve $(v, mb, mr, k, m\lambda)$ parametreleri Teorem 3.1 deki gerek koşulu sağlasın.
Bir $(v, mb, mr, k, m\lambda)-$BIBD tasarımı (V, B) tasarımının her bir bloğu m kez tekrar edilerek elde edilebilir.
Eğer m bir tek tam sayı ise, bir $A \in B$ bloğunun $s.$ kopyasını $1 \leq s \leq \frac{m+1}{2}$ için $f(A) + (s-1)b$ ve $\frac{m+3}{2} \leq s \leq m$ için $(b + 1 - f(A)) + (s-1)b$ şeklinde etiketleyebiliriz. Kolayca görülebilir ki, bu şekilde, tüm bloklar 1 den mb ye kadar olan tam sayılarla etiketlenmiş olur. Bu durumda, $(v, mb, mr, k, m\lambda)-$BIBD tasarımında herhangi bir $x \in V$ noktasının ağırlığı,

$$\sum_{s=1}^{\frac{m+1}{2}} (f^+(x) + r(s-1)b) + \sum_{s=\frac{m+3}{2}}^{m} (r(b+1) - f^+(x) + r(s-1)b) =$$

$$\sum_{s=1}^{\frac{m+1}{2}} f^+(x) + rb \sum_{s=1}^{\frac{m+1}{2}} (s-1) + \sum_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} r(b+1) - \sum_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} f^+(x) + rb \sum_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} (s + \frac{m-1}{2}) =$$

$$\frac{m+1}{2} f^+(x) + (0+1+...+\frac{m-1}{2})rb + \frac{m-1}{2} r(b+1) - \frac{m-1}{2} f^+(x) + (\frac{m+1}{2} + ... + m-1)rb =$$

$$f^+(x) + (0 + 1 + ... + \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2} + ... + m - 1)rb + \frac{m-1}{2} r(b+1) =$$

$$f^+(x) + \frac{(m-1)m}{2}rb + \frac{m-1}{2}r(b+1) =$$

$$f^+(x) + \frac{r(m-1)(mb+b+1)}{2} \tag{3.7}$$

olarak elde edilir ve $f^+(x)$ nokta ağırlıklarının tümü mod v de birbirlerinden farklı olduğundan, elde edilen değerlerin tümü de mod v de birbirlerinden farklı olur.
Eğer m bir çift tam sayı ise, o zaman, $(v, mb, mr, k, m\lambda)$ parametrelerinin Teorem 3.1 deki gerek koşulu sağlaması için v bir tek tam sayı olmalıdır. Burada, bir $A \in B$ bloğunun $s.$ kopyasını $1 \leq s \leq \frac{m+2}{2}$ için $f(A) + (s-1)b$ ve $\frac{m+4}{2} \leq s \leq m$ için $(b + 1 - f(A)) + (s-1)b$ ile etiketleyebiliriz. Böylece, bu şekilde, tüm bloklar 1 den mb ye kadar olan tam sayılarla etiketlenmiş olur. Bu durumda, $(v, mb, mr, k, m\lambda)-$BIBD tasarımında herhangi bir $x \in V$ noktasının ağırlığı,

$$\sum_{s=1}^{\frac{m+2}{2}} (f^+(x) + r(s-1)b) + \sum_{s=\frac{m+4}{2}}^{m} (r(b+1) - f^+(x) + r(s-1)b) =$$

$$\sum_{s=1}^{\frac{m+2}{2}} f^+(x) + rb\sum_{s=1}^{\frac{m+2}{2}} (s-1) + \sum_{s=1}^{\frac{m-2}{2}} r(b+1) - \sum_{s=1}^{\frac{m-2}{2}} f^+(x) + rb\sum_{s=1}^{\frac{m-2}{2}} (s + \frac{m}{2}) =$$

$$\frac{m+2}{2}f^+(x) + (0+1+...+\frac{m}{2})rb + \frac{m-2}{2}r(b+1) - \frac{m-2}{2}f^+(x) + (\frac{m+2}{2} + \frac{m+4}{2} + ... + m-1)rb =$$

$$2f^+(x) + (0+1+...+\frac{m}{2} + \frac{m+2}{2} + ... + m-1)rb + \frac{m-2}{2}r(b+1) =$$

$$2f^+(x) + \frac{(m-1)m}{2}rb + \frac{m-2}{2}r(b+1) =$$

$$2f^+(x) + \frac{r(m^2b - 2b + m - 2)}{2} \tag{3.8}$$

bulunur ve $f^+(x)$ nokta ağırlıklarının tümü mod v de birbirlerinden farklı olduğundan, elde edilen değerlerin tümü de mod v de birbirlerinden farklı olur. ■

Teorem 3.3 ve 3.4'ün bir sonucu olarak; bir blok-zarif BIBD'nin var olduğu parametrelerin kümesini belirlemek için, yalnızca $k \leq v/2$ olduğu ve λ'nın bir $(v, k, \lambda)-$BIBD'nin varlığı için gerek koşulları ve Teorem 3.1'deki koşulu sağlayan minumum değer olduğu $(v, k, \lambda)-$BIBD' leri dikkate almak yeterlidir.

3.2 Steiner Üçlü Sistemler

Teorem 3.5. *Her* $v \equiv 1 \pmod 6$ *için blok-zarif bir STS*(v) *vardır.*

İspat. Burada $v \equiv 1 \pmod 6$ olduğundan; $v = 6k+1, \exists k \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. O halde, $r = \frac{6k}{2} = 3k$ olup $(v, r) = (6k+1, 3k) = 1$ bulunur. Ayrıca, Sonuç 2.3' ten her $v \equiv 1 \pmod 6$ için devirli bir STS(v)'nin var olduğunu biliyoruz. Böylece, Teorem 3.2' deki koşullar sağlandığından istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 3.6. *Bir TS*(m, λ) *üçlü sistemi ve blok-zarif bir TS*(v, λ) *üçlü sistemi var olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, o zaman, blok-zarif bir TS*(mv, λ) *üçlü sistemi vardır:*

(i) $m|v$,

(ii) v *bir tek tam sayıdır veya* $\frac{v}{m}$ *bir çift tam sayıdır,*

(iii) $(\lambda, m) = 1$,

(iv) $(j, v) = 1$ *ve* $(j + \frac{v}{m}, m) = 1$ *olacak şekilde bir* j *tam sayısı vardır.*

İspat. (V, B) tasarımı $V = \{0, 1, \ldots, v-1\}$ olmak üzere, $f^+ : V \to \mathbb{Z}_v$ fonksiyonu ile $f : B \to \{1, 2, \ldots, b\}$ blok-zarif etiketlemesine sahip bir TS(v, λ) (yani, bir $(v, b, r, 3, \lambda)-$BIBD) olsun. Ayrıca, (U, A) tasarımı $U = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ve $1 \leq s \leq b'$ için $x_s < y_s < z_s$ iken $A = \{\{x_s, y_s, z_s\} : 1 \leq s \leq b'\}$ olmak üzere bir TS(m, λ) ($(m, b', r', 3, \lambda)-$BIBD) olsun.
$X = V \times U$, $C_1 = \{\{(c, i), (d, i), (e, i)\} : \{c, d, e\} \in B,\ i \in U\}$, $C_2 = \{\{(c, x_s), (d, y_s), (c+d \pmod v, z_s)\} : c, d \in V, 1 \leq s \leq b'\}$ ve $C = C_1 \cup C_2$ kümelerini tanımlayalım. Burada, $|X| = |V \times U| = mv$ olur. C kümesinin tanımı gereği C kümesindeki her bir blokta tam olarak üç nokta bulunduğu açıktır. Dahası, (V, B) bir TS(v, λ) üçlü sistemi olduğundan; V kümesindeki her farklı nokta çifti B kümesinde tam olarak λ blokta bulunur. Böylece, $\forall v, w \in V$, $v \neq w$ ve $i \in U$ için X kümesindeki her $\{(v, i), (w, i)\}$ nokta çifti C_1 kümesinin tanımı gereği, C_1 kümesinde tam olarak λ blokta bulunur. Benzer şekilde, (U, A) bir $TS(m, \lambda)$ üçlü sistemi olduğundan; U kümesindeki her farklı nokta çifti A kümesinde tam olarak λ blokta bulunur. Böylece, $\forall x, y \in U$, $x \neq y$ ve $v, w \in V$ için X kümesindeki her $\{(v, x), (w, y)\}$ nokta çifti C_2 kümesinin tanımı gereği, C_2 kümesinde tam olarak λ blokta bulunur. Dolayısıyla, (X, C) ikilisi bir TS(mv, λ) üçlü sistemidir ve blok sayısı $b'' = |C| = |C_1| + |C_2| = m|B| + v^2|A| = m\frac{\lambda v(v-1)}{6} + v^2\frac{\lambda m(m-1)}{6} = \lambda mv(mv-1)/6$ olarak bulunur.

Bir $g : C \to \{1, 2, \ldots, b''\}$ fonksiyonunu, her $\{c, d, e\} \in B$, $i \in U$ için $g(\{(c, i), (d, i), (e, i)\}) = mf(\{c, d, e\}) - i$ ve $c, d \in V$, $1 \leq s \leq b'$ için $g(\{(c, x_s), (d, y_s), (c + d \pmod v, z_s)\}) = \frac{\lambda mv(v-1)}{6} + (s-1)v^2 + 1 + vc + d$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi g fonksiyonunun (X, C) tasarımı için bir blok-zarif etiketleme olduğunu gösterelim.

Her $\{c, d, e\} \in B$ ve $i \in U$ için, $f(\{c, d, e\}) \in \{1, 2, ..., b\}$ olduğundan $mf(\{c, d, e\}) - i$ blok etiketlerinin $1, 2, ..., mb$ olacağı görülür. Burada, her $\{c, d, e\}, \{y, z, w\} \in B$ ve $i, j \in U$ için $g(\{(c, i), (d, i), (e, i)\}) = g(\{(y, j), (z, j), (w, j)\})$ olsun. O zaman, $mf(\{c, d, e\}) - i = mf(\{y, z, w\}) - j$ olur. Bu durumda, $m(f(\{c, d, e\}) - f(\{y, z, w\})) = i - j$ olduğu görülür. O halde, $m \mid i - j$, yani, $i - j \equiv 0 \pmod m$ olur. Dolayısıyla, $0 \leq i, j \leq m - 1$ olduğundan $i - j = 0$ olmalıdır. Buradan, $i = j$ elde edilir. O halde, $m(f(\{c, d, e\}) - f(\{y, z, w\})) = 0$ olur. Böylece, $m \neq 0$ olduğundan $f(\{c, d, e\}) - f(\{y, z, w\}) = 0$, yani, $f(\{c, d, e\}) = f(\{y, z, w\})$ olduğu görülür. Burada, f bire-bir olduğundan $\{c, d, e\} = \{y, z, w\}$ elde edilir. O halde, $\{(c, i), (d, i), (e, i)\} = \{(y, j), (z, j), (w, j)\}$ olur.

Diğer durumda, $1 \leq s \leq \frac{\lambda m(m-1)}{6}$ ve $0 \leq c, d \leq v-1$ olduğundan blok etiketlerinin $mb+1, mb+2, ..., b''$ olacağı görülür. Burada, $c_1, c_2, d_1, d_2 \in V$, $1 \leq s_1, s_2 \leq b'$ için $g(\{(c_1, x_{s_1}), (d_1, y_{s_1}), (c_1 + d_1 \pmod v, z_{s_1})\}) = g(\{(c_2, x_{s_2}), (d_2, y_{s_2}), (c_2 + d_2 \pmod v, z_{s_2})\})$ olsun. Bu durumda, $(s_1 - s_2)v^2 + v(c_1 - c_2) + d_1 - d_2 = 0$ olur. O halde, $(s_1 - s_2)v^2 + v(c_1 - c_2) = d_2 - d_1$ olduğu görülür. Buradan, $v \mid d_2 - d_1$ olacağından $d_2 - d_1 \equiv 0 \pmod v$ elde edilir. Dolayısıyla, $0 \leq d_1, d_2 \leq v - 1$ olduğundan $d_2 - d_1 = 0$, yani, $d_1 = d_2$ olur. Buradan, $(s_1 - s_2)v^2 + v(c_1 - c_2) = 0$ olacağından $(s_1 - s_2)v = c_2 - c_1$ olur. O halde, $v \mid c_2 - c_1$ yani, $c_2 - c_1 \equiv 0 \pmod v$ elde edilir. Benzer şekilde, $0 \leq c_1, c_2 \leq v - 1$ olduğundan $c_2 - c_1 = 0$ ve böylece $c_1 = c_2$ olur. Buradan, $(s_1 - s_2)v = 0$ ve $v \neq 0$ olduğundan $s_1 - s_2 = 0$, yani, $s_1 = s_2$ bulunur. Böylece, $\{(c_1, x_{s_1}), (d_1, y_{s_1}), (c_1 + d_1 \pmod v, z_{s_1})\} = \{(c_2, x_{s_2}), (d_2, y_{s_2}), (c_2 + d_2 \pmod v, z_{s_2})\}$ elde edilir.

Sonuç olarak, g fonksiyonu bire-birdir. Dahası, burada $b'' = |C| = |\{1, 2, ..., b''\}|$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, g bire-bir olduğundan her $\{(c, i), (d, i), (e, i)\} \neq \{(y, j), (z, j), (w, j)\}$ için $g(\{(c, i), (d, i), (e, i)\}) \neq g(\{(y, j), (z, j), (w, j)\})$ ve her $\{(c_1, x_{s_1}), (d_1, y_{s_1}), (c_1 + d_1 \pmod v, z_{s_1})\} \neq \{(c_2, x_{s_2}), (d_2, y_{s_2}), (c_2 + d_2 \pmod v, z_{s_2})\}$ için $g(\{(c_1, x_{s_1}), (d_1, y_{s_1}), (c_1 + d_1 \pmod v, z_{s_1})\}) \neq g(\{(c_2, x_{s_2}), (d_2, y_{s_2}), (c_2 + d_2 \pmod v, z_{s_2})\})$ olur. Dolayısıyla, $|g(C)| = |C|$ olur. Buradan, $|g(C)| = |\{1, 2, ..., b''\}|$ olduğu görülür. Burada, $g(C) \subseteq \{1, 2, ..., b''\}$, $\{1, 2, ..., b''\}$ kümesi sonlu ve $|g(C)| = |\{1, 2, ..., b''\}|$ olduğundan $g(C) = \{1, 2, ..., b''\}$ olur. O halde, g örtendir. Böylece, g bir bijektif fonksiyondur.

Burada, tüm nokta ağırlıklarının mod mv de birbirlerinden farklı olduğunu göstermeliyiz. Herhangi bir $a \in V$ ve $i \in U$ için C_1 kümesindeki blokların etiketlerinden $g^+((a,i)) = mf^+(a) - ri$ olur. Dahası, $m|v$ ve $(\lambda, m) = 1$ olduğundan; $r = \frac{\lambda(v-1)}{2}$ ile m aralarında asaldır. Buradan, $\forall a \in V$ için $f^+(a)$ nokta ağırlıklarının tümü mod v de birbirlerinden farklı olduğundan; $g^+((a,i)) = mf^+(a) - ri$ nokta ağırlıklarının tümü mod mv de birbirlerinden farklı olur. Şimdi C_2 kümesindeki blokların etiketlerinin nokta ağırlıklarına katkısının sadece $g^+((a,i)) = mf^+(a) - ri$ değerlerini kendi aralarında yer değiştirmek olduğunu ve dolayısıyla nokta ağırlıklarının hepsinin mod mv birbirlerinden farklı olacağını göstereceğiz. Burada, $1 \leq s \leq b'$ için $C_2 = \cup_{s=1}^{b'} C_{2,s}$ olacak şekilde $C_{2,s} = \{\{(c, x_s), (d, y_s), (c + d \pmod v, z_s)\} : c, d \in V\}$ olsun. O halde, $1 \leq s \leq b'$ aralığındaki tüm s değerleri için, $C_{2,s}$ kümesindeki blok etiketlerinin nokta ağırlıklarına katkısının $g^+((a,i)) = mf^+(a) - ri$ değerlerini kendi aralarında yer değiştirmek olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $a \in V$ için $C_{2,s}$ kümesindeki blokların etiketlerinden, $m|v$ ve dolayısıyla $v^2 \equiv 0 \pmod{mv}$ olduğundan;

$$g^+((a,x_s)) = \sum_{d=0}^{v-1} (\frac{\lambda mv(v-1)}{6} + (s-1)v^2 + 1 + va + d) =$$

$$\frac{\lambda mv^2(v-1)}{6} + (s-1)v^3 + v + v^2a + \frac{(v-1)v}{2} =$$

$$mvb + v^2((s-1)v + a) + \frac{v(v+1)}{2} \equiv \frac{v(v+1)}{2} \pmod{mv} \qquad (3.9)$$

bulunur. C_1 kümesindeki blokların etiketlerinden $g^+((a,x_s))$ nokta ağırlıklarının $mf^+(a) - rx_s$ olduğunu hatırlayın. Burada, teoremdeki (i) ve (ii) koşullarından; $\frac{v(v+1)}{2}$ sayısı m sayısının bir katı olacağından; $g^+((a,x_s))$ nokta ağırlıklarına eklendiğinde bu nokta ağırlıkları kendi aralarında yer değiştirir.
Herhangi bir $a \in V$ için $C_{2,s}$ kümesindeki blokların etiketlerinden

$$g^+((a,y_s)) = \sum_{c=0}^{v-1} (\frac{\lambda mv(v-1)}{6} + (s-1)v^2 + 1 + vc + a) =$$

$$\frac{\lambda mv^2(v-1)}{6} + (s-1)v^3 + v + \frac{(v-1)v^2}{2} + va =$$

$$mvb + (s-1)v^3 + v + \frac{(v-1)v^2}{2} + va \equiv va + \frac{v(v^2-v+2)}{2} \pmod{mv} \quad (3.10)$$

bulunur. Burada, C_1 kümesindeki blokların etiketlerinden $g^+((a,y_s))$ nokta ağırlıkları $mf^+(a) - ry_s$ idi. Böylece, $\{g^+((a,y_s)) : a \in V\} = \{-ry_s, m - ry_s, 2m - ry_s, \ldots, (v-1)m - ry_s\}$ olur. Dahası, (iv) koşulundan; $(j, v) = 1$

ve $(j + \frac{v}{m}, m) = 1$ olacak şekilde bir j tam sayısı vardır. Ayrıca, $(j, v) = 1$ olduğundan, eğer gerekirse V kümesinin noktalarını, her $a \in V$ için (a, y_s) noktasının C_1 kümesindeki tüm bloklar ile C_2 kümesinden şimdiye kadar kullanılan blokların etiketlerinden gelen toplam ağırlığı $jam - ry_s \pmod{mv}$ olacak şekilde yeniden adlandırabiliriz. Burada, (a, y_s) noktalarının ağırlıklarına va eklemek nokta ağırlıklarını $a(jm + v) - ry_s$ yapacaktır. Ayrıca, $(j, v) = 1$ olduğundan; kolayca $(j, \frac{v}{m}) = 1$ olduğu görülür, böylece $(j + \frac{v}{m}, \frac{v}{m}) = 1$ elde edilir. Dahası, $(j + \frac{v}{m}, m) = 1$ olduğunu da biliyoruz. Buradan, $(j + \frac{v}{m}, v) = 1$ olur. Dolayısıyla, $(jm+v, mv) = m$ elde edilir. Bu da nokta ağırlıkları $a(jm+v)-ry_s$ lerin tümünün mod mv de birbirlerinden farklı ve $\{-ry_s, m-ry_s, 2m-ry_s, \ldots, (v-1)m-ry_s\}$ kümesinin birer elemanı, yani, C_1 kümesindeki blokların etiketlerinden elde edilen nokta ağırlıklarının kendi aralarında yer değiştirilmiş hali olduklarını gösterir. Son olarak, bu nokta ağırlıklarına m sayısının bir katı olan $\frac{v(v^2-v+2)}{2}$ sabiti eklendiğinde, bu nokta ağırlıkları tekrar kendi aralarında yer değiştirirler.
Herhangi bir $a \in V$ için $C_{2,s}$ kümesindeki blokların etiketlerinden (a, z_s) noktalarının ağırlıklarını düşünürsek;

$$\sum_{c=0}^{v-1} \sum_{\substack{d=0 \\ c+d \equiv a \pmod v}}^{v-1} (mb + (s-1)v^2 + 1 + vc + d) =$$

$$mvb + (s-1)v^3 + v + \frac{(v-1)v^2}{2} + \frac{(v-1)v}{2} \equiv \frac{v(v^2+1)}{2} \pmod{mv} \quad (3.11)$$

elde edilir. Hatırlayacak olursak, C_1 kümesindeki blokların etiketlerinden (a, z_s) noktalarının ağırlıkları: $mf^+(a) - rz_s$ idi. Bu nokta ağırlıklarına $\frac{v(v^2+1)}{2}$ sabiti eklenirse; (i) ve (ii) deki koşullardan bu sabit m sayısının bir katı olduğu için, nokta ağırlıkları $mf^+(a) - rz_s$ ler yalnızca kendi aralarında yer değiştirirler.
Sonuç olarak, g, (X, A) tasarımı için bir blok-zarif etiketlemedir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.6' da $\lambda = 1$ alırsak, koşul (iii) doğrudan sağlanır ve bir STS(v)'nin varlığı v'nin tek olmasını gerektirdiğinden, koşul (ii) de sağlanır. Dolayısıyla, blok zarif Steiner üçlü sistemleri için aşağıdaki yinelemeli inşayı elde ederiz.

Sonuç 3.1. *Eğer $m \equiv 1, 3 \pmod 6$ ve $m|v$ olmak üzere, blok-zarif bir STS(v) ve $(j, v) = 1$ ve $(j + \frac{v}{m}, m) = 1$ olacak şekilde bir j tam sayısı varsa, o zaman, blok-zarif bir STS(mv) vardır.*

Sonuç 3.1'de m'yi asal olarak alırsak, $\frac{v}{m} \not\equiv -1 \pmod{m}$ ise $j = 1$ ve aksi takdirde $j = -1$ seçilerek verilen koşullar karşılanabilir. Ayrıca, m asal değilse ancak m'in tüm asal çarpanları $1, 3 \pmod 6$ ise, o zaman, blok-zarif bir STS(v)'den blok-zarif bir STS(mv) elde etmek için m'nin her bir asal çarpanı için katlı olarak Sonuç 3.1'i uygulayabiliriz. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2. *Eğer m tüm asal çarpanları $1, 3 \pmod 6$ olacak şekilde bir pozitif tam sayı, $m|v$ ve blok-zarif bir STS(v) varsa, o zaman, blok-zarif bir STS(mv) vardır.*

Eğer $m, 5 \pmod 6$ olacak şekilde bir asal çarpana sahipse, o zaman, genel olarak Sonuç 3.1'deki koşulları sağlayan bir j tamsayısının var olduğunu göstermek kolay değildir. Özel bir durum olarak, eğer $m = 15$ alırsak, o zaman, eğer $\frac{v}{m} \equiv 0, 1, 3, 6, 7, 10, 12, 13 \pmod{15}$ ise $j = 1$, eğer $\frac{v}{m} \equiv 2, 5, 8, 9, 14 \pmod{15}$ ise $j = -1$, eğer $\frac{v}{m} \equiv 4 \pmod{15}$ ise $j = -2$ ve eğer $\frac{v}{m} \equiv 11 \pmod{15}$ ise $j = 2$ olarak seçebiliriz. Buradan, asağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.3. *Eğer $15|v$ ve blok-zarif bir STS(v) varsa, o zaman, blok-zarif bir STS$(15v)$ vardır.*

Ek A' daki Örnek A.11' de tüm $(15, 3, 1)-$BIBD'lerin blok-zarif olduğunu gösterdik. Ayrıca, Örnek A.15' te blok-zarif bir $(21, 3, 1)-$BIBD verdik. Sonuç 3.2 ve 3.3'ün Örnek 3.1, A.11 ve A.15 ile birlikte kullanılmasıyla, $v \equiv 3 \pmod 6$ olmak üzere; mertebesi v olan blok-zarif Steiner üçlü sistemlerinin sonsuz ailelerini elde edebiliriz.

Teorem 3.7. *Aşağıda verilen mertebelere sahip blok-zarif Steiner üçlü sistemleri vardır:*

(i) her $t \geq 2$ tam sayısı için 3^t,

(ii) her t ve $t \geq u$ olacak şekilde u pozitif tam sayıları için $3^t 5^u$, ve

(iii) her t ve u pozitif tam sayıları için $3^t 7^u$.

İspat. (i) Bir blok-zarif STS(9) alınarak (Örnek 3.1) ve $m = 3$ için $t - 2$ kez Sonuç 3.2 uygulanarak istenilen elde edilir.

(ii) Bir blok-zarif STS(15) alınarak (Örnek A.11), $u - 1$ kez Sonuç 3.3 ve $m = 3$ için $t - u$ kez Sonuç 3.2 uygulanarak istenilen elde edilir.

(iii) Bir blok-zarif STS(21) alınarak (Örnek A.15) ve $m = 3$ için $t - 1$ kez, $m = 7$ için $u - 1$ kez Sonuç 3.2 uygulanarak istenilen elde edilir.

■

3.3 Afin ve Projektif Geometriler

Teorem 3.8. *Her $q \geq 2$ asal kuvveti ve $d \geq 2$ tam sayısı için blok-zarif bir $(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \frac{q^d-1}{q-1}, \frac{q^{d-1}-1}{q-1})-$BIBD tasarımı vardır.*

İspat. Teorem 2.10'dan her $q \geq 2$ asal kuvveti ve $d \geq 2$ tam sayısı için devirli bir $(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \frac{q^d-1}{q-1}, \frac{q^{d-1}-1}{q-1})-$BIBD tasarımının var olduğunu biliyoruz, ve ayrıca $(v, r) = (\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \frac{q^d-1}{q-1}) = 1$ bulunur. O halde, Teorem 3.2'den istenilen elde edilir. ■

Teorem 3.9. *Her q tek asal kuvveti için mertebesi q olan blok-zarif bir afin düzlem vardır.*

İspat. Burada, $P = \{(i, j) : 0 \leq i, j \leq q-1\}$ olmak üzere; mertebesi q olan (P, B) afin düzlemimizi $q-1$ MOLS(q) kullanarak Teorem 2.12' deki inşa metotu ile oluşturalım. Ayrıca, Teorem 2.12'de latin karelerdeki semboller vasıtasıyla elde edilen blokların kümesini a sembolleri ve r ile s sırasıyla kaçıncı satır ve sütun olduğunu göstermek üzere; $0 \leq a \leq q-1$ ve $1 \leq b \leq q-1$ için $B_{a,b} = \{(r, s) : L_b(r, s) = a\}$, A matrisinin sütunları vasıtasıyla elde edilen blokların kümesini $0 \leq s \leq q-1$ için $B_{s,q+1} = \{(r, s) : 0 \leq r \leq q-1\}$, ve A matrisinin satırları vasıtasıyla elde edilen blokların kümesini $0 \leq r \leq q-1$ için $B_{r,q} = \{(r, s) : 0 \leq s \leq q-1\}$ ile ifade edelim. Dahası, $1 \leq b \leq q-1$ ve $0 \leq s \leq q-1$ için $L_b(0, s) = s$ alınacaktır. Bu latin karelerin dikliğini etkilemez. Blok etiketlerini: $f : B \to \{1, 2, \ldots, q^2+q\}$,

(i) $0 \leq a \leq q-1$ ve $1 \leq b \leq q-1$ için $f(B_{a,b}) = qa + b$,

(ii) $0 \leq r \leq q-1$ için $f(B_{r,q}) = q(r+1)$, ve

(iii) $0 \leq s \leq q-1$ için, $f(B_{s,q+1}) = q^2 + s + 1$

şeklinde tanımlayalım.
Burada, (i) durumunda blok etiketlerinin $\{1, 2, ..., q^2\} \setminus \{jq : j = 1, 2, ..., q\}$ olacağı görülür. Dahası, $0 \leq a_1, a_2 \leq q-1$ ve $1 \leq b_1, b_2 \leq q-1$ için $f(B_{a_1,b_1}) = f(B_{a_2,b_2})$ ise $qa_1 + b_1 = qa_2 + b_2$ olur. Buradan, $q(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = 0$ olacağı için $q(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$ ve böylece $q | b_2 - b_1$ olacağı görülür.

Dolayısıyla, $b_2 - b_1 \equiv 0 \pmod{q}$ olur. Burada, $1 \leq b_1, b_2 \leq q-1$ olduğundan $b_2 - b_1 = 0$ olup $b_1 = b_2$ elde edilir. Buradan, $a_1 = a_2$ olduğu da kolayca söylenebilir. Dolayısıyla, $B_{a_1,b_1} = B_{a_2,b_2}$ olur. Burada, (ii) durumunda blok etiketlerinin $j = 1, 2, ..., q$ için jq değerleri olacağı görülür. Dahası, her $0 \leq r_1, r_2 \leq q-1$ için $f(B_{r_1,q}) = f(B_{r_2,q})$ ise $q(r_1+1) = q(r_2+1)$ olacağından $q(r_1 - r_2) = 0$ ve böylece $r_1 = r_2$ bulunur. Dolayısıyla, $B_{r_1,q} = B_{r_2,q}$ olur. Burada, (iii) durumunda blok etiketlerinin $q^2+1, q^2+2, ..., q^2+q$ olacağı görülür. Dahası, her $0 \leq s_1, s_2 \leq q-1$ için $f(B_{s_1,q+1}) = f(B_{s_2,q+1})$ ise $s_1 - s_2 = 0$ olacağından $s_1 = s_2$ elde edilir. Dolayısıyla, $B_{s_1,q+1} = B_{s_2,q+1}$ olur. O halde, f fonksiyonu bire-birdir.

Burada, $q^2 + q = |B| = |\{1, 2, ..., q^2+q\}|$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, f bire-bir olduğundan her $0 \leq a_1, a_2 \leq q-1$ ve $1 \leq b_1, b_2 \leq q-1$ için $B_{a_1,b_1} \neq B_{a_2,b_2}$ iken $f(B_{a_1,b_1}) \neq f(B_{a_2,b_2})$, her $0 \leq r_1, r_2 \leq q-1$ için $B_{r_1,q} \neq B_{r_2,q}$ iken $f(B_{r_1,q}) \neq f(B_{r_2,q})$ ve her $0 \leq s_1, s_2 \leq q-1$ için $B_{s_1,q+1} \neq B_{s_2,q+1}$ iken $f(B_{s_1,q+1}) \neq f(B_{s_2,q+1})$ olur. Dolayısıyla, $|f(B)| = |B|$ olmalıdır. Böylece, $|f(B)| = |\{1, 2, ..., q^2+q\}|$ olduğu görülür. Burada, $f(B) \subseteq \{1, 2, ..., q^2+q\}$, $\{1, 2, ..., q^2+q\}$ kümesi sonlu ve $|f(B)| = |\{1, 2, ..., q^2+q\}|$ olduğundan $f(B) = \{1, 2, ..., q^2+q\}$ olur. O halde, f örtendir. Sonuç olarak, f bijektif bir fonksiyondur.

Şimdi nokta ağırlıklarının tümünün mod q^2 de birbirinden farklı olacağını gösterelim. Herhangi bir $(r, s) \in P$ için, eğer $r = 0$ ise varsayımımızdan $1 \leq b \leq q-1$ ve $0 \leq s \leq q-1$ için $L_b(0, s) = s$ olur. Dolayısıyla, $(0, s)$ noktasını içeren bloklar $1 \leq b \leq q-1$ için $B_{s,b}$, $B_{0,q}$ ve $B_{s,q+1}$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} f^+((0,s)) &= \left(\sum_{b=1}^{q-1}(qs+b)\right) + q + q^2 + s + 1 \\ &= (q-1)qs + \frac{(q-1)q}{2} + q + q^2 + s + 1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, eğer $r \neq 0$ ise, o zaman, $L_b(0, s) = s$ ve L_b bir Latin kare olduğundan; $1 \leq b \leq q-1$ için $L_b(r, s) \neq s$ olur. Kabul edelim ki bazı $0 \leq x \leq q-1$ ve $1 \leq b < c \leq q-1$ için $L_b(r, s) = L_c(r, s) = x$ olsun. Ayrıca $L_b(0, x) = L_c(0, x) = x$ olduğundan; bu durum L_b ve L_c Latin karelerinin dik olması ile çelişir. Dolayısıyla, $1 \leq b < c \leq q-1$ için $L_b(r, s) \neq L_c(r, s)$ olur.

Bu, $1 \leq b \leq q-1$ için $L_b(r,s)$ sembolünün s dışındaki tüm değerleri tam olarak bir kez aldığı anlamına gelir. Öyleyse,

$$\begin{aligned} f^+((r,s)) &= \left(\sum_{b=1}^{q-1} \sum_{\substack{a=0 \\ L_b(r,s)=a}}^{q-1} (qa+b) \right) + q(r+1) + q^2 + s + 1 \\ &= q\left(\frac{(q-1)q}{2} - s \right) + \frac{(q-1)q}{2} + q(r+1) + q^2 + s + 1 \end{aligned} \tag{3.13}$$

olarak hesaplanır.

Burada, q bir tek tam sayı olduğundan $\forall (r,s) \in P$ için (3.12) ve (3.13) eşitlikleri birlikte ele alındığında:

$$f^+((r,s)) \equiv -qs + \frac{(q-1)q}{2} + q(r+1) + s + 1 \equiv \frac{(q-1)q}{2} + q + 1 + q(r-s) + s \pmod{q^2} \tag{3.14}$$

elde ederiz.

Varsayalım ki $(r_1,s_1),(r_2,s_2) \in P$ için $f^+((r_1,s_1)) \equiv f^+((r_2,s_2)) \pmod{q^2}$ olsun. O zaman, $q(r_1-s_1)+s_1 \equiv q(r_2-s_2)+s_2 \pmod{q^2}$ olur. Bu durumda, $q(r_1-r_2)-(q-1)(s_1-s_2) \equiv 0 \pmod{q^2}$ olacağından $q^2 | q(r_1-r_2)-(q-1)(s_1-s_2)$ olduğu görülür. O halde, $q(r_1-r_2)-(q-1)(s_1-s_2) = q^2 l$ olacak şekilde bir $l \in \mathbb{Z}$ vardır. Burada, $q|q^2 l$ olduğundan; $q|q(r_1-r_2)-(q-1)(s_1-s_2)$ olur. Dolayısıyla, $q|s_2-s_1$ olur. O halde, $s_1 \equiv s_2 \pmod{q}$ elde edilir. Bu durumda, $0 \leq s_1, s_2 \leq q-1$ olduğundan, $s_1 = s_2$ elde ederiz. Buradan, $r_1 - r_2 = ql$ olur. O halde, $q|r_1-r_2$, yani, $r_1 \equiv r_2 \pmod{q}$ olması gerektiği görülebilir. Böylece, benzer mantıkla $r_1 = r_2$ bulunur. Dolayısıyla, $(r_1,s_1) = (r_2,s_2)$ olup f^+ fonksiyonu bire-birdir. Burada, f^+ fonksiyonunun bire-bir olması kullanılarak, bu fonksiyonun örten olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak, f^+ fonksiyonu bijektif bir fonksiyondur. Bu da nokta ağırlıklarının tümünün mod q^2 de birbirinden farklı olacağını gösterir. Dolayısıyla, ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.10. *Eğer bir asal sayının kuvveti q ve $d \geq 2$ tam sayısı için blok-zarif bir $(q^d, q, 1)-$BIBD tasarımı varsa, o zaman, blok-zarif bir $(q^{d+1}, q, 1)-$BIBD tasarımı vardır.*

İspat. $V = \mathbb{F}_{q^d}$, q^d elemanlı sonlu bir cisim olmak üzere; (V,B) bir $(q^d,q,1)-$BIBD tasarımı ve $f : B \to \{1,2,\ldots,\frac{q^{d-1}(q^d-1)}{q-1}\}$, $f^+ : V \to \mathbb{Z}_{q^d}$ ile birlikte (V,B) tasarımı için bir blok-zarif etiketleme olsun. Burada, $r = \frac{q^d-1}{q-1}$ olur. Ayrıca, W, V nin q elemanlı bir alt cismi ve $X = V \times W$ olsun.

Her $A \in B$ ve $y \in W$ için, $C_{A,y} = A \times \{y\}$ olsun ve $D_1 = \{C_{A,y} : A \in B \text{ ve } y \in W\}$ kümesini tanımlayalım. Her $a,b \in V$ için $C_{a,b} = \{(ya+b, y) : y \in W\}$ olsun ve $D_2 = \{C_{a,b} : a,b \in V\}$ ile $D = D_1 \cup D_2$

kümelerini tanımlayalım.

Öncelikle, (X, D) ikilisinin bir $(q^{d+1}, q, 1)-$BIBD olduğunu gösterelim. Burada, $|X| = q^{d+1}$ olduğu ve D kümesinde her blokta tam olarak q tane nokta bulunduğu açıktır. Kabul edelim ki (x_1, y_1) ve (x_2, y_2), X kümesinin iki farklı noktası olsun. Eğer $y_1 = y_2$ ise, x_1 ve x_2 noktalarını içeren tek bir $A \in B$ bloğu bulunduğundan; C_{A,y_1}, (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarını içeren tek bloktur. Diğer yandan, eğer $y_1 \neq y_2$ ise, $x_1 = y_1 a + b$ ve $x_2 = y_2 a + b$ olacağından; $a = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^{-1}$ ve $b = x_1 - y_1 a$ tek çözümü bulunur. Böylece, $C_{a,b}$, (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarını içeren tek bloktur. Bu da (X, D) ikilisinin bir $(q^{d+1}, q, 1)-$BIBD tasarımı olduğunu gösterir.

Burada, $h_1 : V \to \{0, 1, 2, \ldots, q^d - 1\}$ ve $h_2 : W \to \{0, 1, 2, \ldots, q - 1\}$ bijektif fonksiyonlarını alalım ve herhangi bir $A \in B$ ve $y \in W$ için $g(C_{A,y}) = qf(A) - h_2(y)$, herhangi bir $a, b \in V$ için $g(C_{a,b}) = \frac{q^d(q^d-1)}{q-1} + 1 + q^d h_1(b) + h_1(a)$ olacak şekilde bir $g : D \to \{1, 2, \ldots, \frac{q^d(q^{d+1}-1)}{q-1}\}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada, f, h_1 ve h_2 fonksiyonları bijektif olduğundan; g fonksiyonunun da bir bijektif fonksiyon olduğu görülebilir. Dolayısıyla, eğer mod q^{d+1} de nokta ağırlıklarının tümünün birbirlerinden farklı olduğunu gösterirsek; g fonksiyonunun (X, D) tasarımı için bir blok-zarif etiketleme olduğunu ispatlamış oluruz.

Herhangi bir $(x, y) \in X$ noktası alalım. D_1 kümesinde (x, y) noktasını içeren bloklar $x \in A$ olacak şekildeki $C_{A,y}$ bloklarıdır. Dolayısıyla, D_1 kümesindeki blokların etiketlerinden, (x, y) noktasının ağırlığı,

$$\sum_{x \in A} g(C_{A,y}) = \sum_{x \in A} (qf(A) - h_2(y)) = qf^+(x) - rh_2(y) \tag{3.15}$$

olur.

Dahası, $f^+(x)$ nokta ağırlıklarının tümü mod q da birbirlerinden farklı ve $(q, r) = 1$ olduğundan; $qf^+(x) - rh_2(y)$ değerlerinin tümü mod q^{d+1} de birbirlerinden farklı olur. Şimdi, D_2 kümesindeki blokların etiketlerinin nokta ağırlıklarına katkısının, sadece bu değerlerin yerlerini değiştirmek olduğunu ve dolayısıyla nokta ağırlıklarının hepsinin mod q^{d+1} de farklı olacağını göstereceğiz. Burada, $y = 0$ ve $y \neq 0$ durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

Eğer $y = 0$ ise, D_2 kümesinde $(x, 0)$ noktasını içeren bloklar, $\forall a \in V$ için $C_{a,x}$ bloklarıdır. Dolayısıyla, D_2 kümesindeki blokların etiketlerinden, $(x, 0)$ noktasının

ağırlığı, $q|q^d$ ve dolayısıyla $q^{d+1}|q^{2d}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{a\in V} g(C_{a,x}) &= \sum_{a\in V}(\frac{q^d(q^d-1)}{q-1}+1+q^d h_1(x)+h_1(a)) \\ &= \frac{q^{2d}(q^d-1)}{q-1}+q^d+q^{2d}h_1(x)+\frac{(q^d-1)q^d}{2} \\ &\equiv \frac{(q^d+1)q^d}{2} \pmod{q^{d+1}}\end{aligned} \tag{3.16}$$

olarak elde edilir.

Eğer $y \neq 0$ ise, D_2 kümesinde (x,y) noktasını içeren bloklar, $a,b \in V$ için, $x = ya+b$ olacak şekilde $C_{a,b}$ bloklarıdır. Burada, $y \neq 0$ olduğundan a, V'nin tüm elemanlarını taradığında, $b = x - ya$ noktaları da V kümesinin tüm elemanlarını tarar. Dolayısıyla, D_2 kümesindeki blokların etiketlerinden, (x,y) noktasının ağırlığı,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a,b\in V\\ x=ya+b}} g(C_{a,b}) &= \sum_{\substack{a,b\in V\\ x=ya+b}}(\frac{q^d(q^d-1)}{q-1}+1+q^d h_1(b)+h_1(a)) \\ &= \frac{q^{2d}(q^d-1)}{q-1}+q^d+\frac{(q^d-1)q^{2d}}{2}+\frac{(q^d-1)q^d}{2} \\ &\equiv \frac{(q^d+1)q^d}{2} \pmod{q^{d+1}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak hesaplanır.

Dolayısıyla, D_2 kümesindeki blokların etiketlerinden herhangi bir (x,y) noktasının ağırlığı $\frac{(q^d+1)q^d}{2}$ olur. Elde edilen bu sabit değer q sayısının bir katı olduğu için, D_1 kümesindeki blokların etiketlerinden elde edilen nokta ağırlıklarına eklendiğinde, mod q^{d+1} de birbirlerinden farklı olan bu $qf^+(x)-rh_2(y)$ nokta ağırlıkları yalnızca kendi aralarında yer değiştirir.

Sonuç olarak, g fonksiyonu (X,D) tasarımı için bir blok-zarif etiketlemedir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.11. *Eğer $d \geq 2$ bir tam sayı ve q bir tek asal sayının kuvveti veya $q = 4$ ise, o zaman, blok-zarif bir $(q^d, q, 1)-$BIBD vardır.*

İspat. Burada, 3.9 ve 3.10 Teoremleri ile Örnek A.13 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

3.4 Küçük Parametreli Tasarımlar

Üçüncü bölümün bu başlığı altında, $2k \leq v \leq 21$, $r \leq 15$, $b \leq 35$ ve izomorf olmayan $(v,b,r,k,\lambda)-$BIBD tasarımlarının sayısı olan Nd değeri $1 \leq Nd \leq 80$

koşullarını sağlayan küçük parametreli $(v, b, r, k, \lambda)-$BIBD tasarımlarını ele alacağız. Bu parametreler için elde edilen sonuçlar Tablo 3.1'de özetlenmiştir. Burada Nbg, izomorf olmayan blok-zarif $(v, b, r, k, \lambda)-$BIBD tasarımlarının sayısını belirtir.

Tablo 3.1'de verilen parametrelerden üçü, Teorem 3.1'de verilen blok-zarif bir BIBD'nin varlığı için gerekli koşulu sağlamamaktadır. Gerekli koşulu karşılayan parametrelerin bazıları için, Teorem 3.2, 3.8 ve 3.9 blok-zarif etiketleme sağlar. Kalan parametreler için, bilgisayar araması yoluyla blok-zarif etiketlemeler elde edilmiş olup, bu etiketlemeler Ek A'da sunulmaktadır.

v	b	r	k	λ	Nd	Nbg	Referans
6	10	5	3	2	1	1	Örnek A.1
6	20	10	3	4	4	0	Teorem 3.1
6	30	15	3	6	6	6	Örnek A.2
7	7	3	3	1	1	1	Teorem 3.8
7	14	6	3	2	4	4	Örnek A.3
7	21	9	3	3	10	10	Örnek A.4
7	28	12	3	4	35	35	Örnek A.5
8	14	7	4	3	4	4	Örnek A.6
9	12	4	3	1	1	1	Teorem 3.9
9	24	8	3	2	36	36	Örnek A.7
9	18	8	4	3	11	11	Örnek A.8
10	7	3	4	2	3	0	Teorem 3.1
10	18	9	5	4	21	21	Örnek A.9
11	11	5	5	2	1	1	Teorem 3.2
13	26	6	3	1	2	2	Örnek A.10
13	13	4	4	1	1	1	Teorem 3.8
15	35	7	3	1	80	80	Örnek A.11
15	15	7	7	3	5	5	Örnek A.12
16	20	5	4	1	1	1	Örnek A.13
16	16	6	6	2	3	0	Teorem 3.1
19	19	9	9	4	6	6	Örnek A.14
21	21	5	5	1	1	1	Teorem 3.8

Tablo 3.1 Küçük Parametreler

4
ÇİZGİ ZARİF TASARIM

Bu bölümde, çizgi-tasarım tanımı verilerek, blok tasarımlarda blok-zarif etiketleme açısından eksik kalan durumlar, çizgi-zarif etiketleme açısından tamamlanacaktır ve her $v \equiv 1,3 \pmod 6$ *için mertebesi* v *olan bir çizgi-zarif Steiner üçlü sistemi ile her* $q \geq 2$ *asal kuvveti ve* $d \geq 2$ *tam sayısı için bir çizgi-zarif* $(q^d, q, 1)-$*BIBD tasarımının var olduğu ispatlanacaktır. Dahası, bir yinelemeli inşa metotu vasıtasıyla her* $n \geq 3$ *için mertebesi* 2^n *olan çizgi-zarif bir Steiner dörtlü sisteminin var olduğunun ispatı verilecektir.*

4.1 Çizgi Zarif Tasarım Kavramı ve Çizgi Zarif Tasarımlara Dair Temel Sonuçlar

Tanım 4.1. (V, B) bir blok tasarım, $|V| = v$ olsun. Eğer bir $f : B \to \{0, 1, ..., v-1\}$ fonksiyonu varsa öyle ki $f^+(x) = \sum_{\substack{x \in A \\ A \in B}} f(A) \pmod v$ şeklinde tanımlı $f^+ : V \to \mathbb{Z}_v$ fonksiyonu bir eşlemedir, o zaman, bu tasarıma çizgi-zarif tasarım denir. Ayrıca, f fonksiyonuna bir çizgi-zarif etiketleme denir.

Örnek 4.1. Aşağıda bir 3-$(8, 4, 1)$ tasarımının çizgi-zarif etiketlemesi verilmiştir.

$\{0,1,3,7\} \to 1 \quad f^+(0) \equiv 2 \pmod 8$
$\{1,2,4,7\} \to 6 \quad f^+(1) \equiv 3 \pmod 8$
$\{2,3,5,7\} \to 1 \quad f^+(2) \equiv 7 \pmod 8$
$\{3,4,6,7\} \to 2 \quad f^+(3) \equiv 1 \pmod 8$
$\{0,4,5,7\} \to 0 \quad f^+(4) \equiv 6 \pmod 8$
$\{1,5,6,7\} \to 4 \quad f^+(5) \equiv 0 \pmod 8$
$\{0,2,6,7\} \to 6 \quad f^+(6) \equiv 5 \pmod 8$
$\{2,4,5,6\} \to 5 \quad f^+(7) \equiv 4 \pmod 8$
$\{0,3,5,6\} \to 5$
$\{0,1,4,6\} \to 4$
$\{0,1,2,5\} \to 7$
$\{1,2,3,6\} \to 3$
$\{0,2,3,4\} \to 3$
$\{1,3,4,5\} \to 2$

Dikkat edilirse, tanım 3.1'den her blok-zarif tasarım aynı zamanda bir çizgi-zarif tasarımdır.

Önerme 4.1. Eğer (V, B) tasarımı α negatif olmayan ve s de bir tek tam sayısı olmak üzere; $k = 2^{\alpha}s$ için çizgi-zarif bir t-(v, k, λ) tasarım ise, o zaman, v bir tek tam sayıdır veya $v \equiv 0 \pmod{2^{\alpha+1}}$.

İspat. (V, B) tasarımı, blok etiketleri $a_1, a_2, ..., a_b$ olan çizgi-zarif bir t-tasarım olsun. O zaman,

$$\sum_{x \in V} f^{+}(x) = k(a_1 + a_2 + ... + a_b) \equiv \frac{(v-1)v}{2} \pmod{v} \tag{4.1}$$

olur.
Eğer v tek tam sayı ise $\frac{(v-1)v}{2} \equiv 0 \pmod{v}$ olacağından; bu durum, (4.1) eşitliğinde blok etiketleri, toplamları v'nin katı olacak şekilde seçilerek sağlanabilir. Diğer taraftan, eğer v çift tam sayı ise $\frac{(v-1)v}{2} \equiv \frac{v}{2} \pmod{v}$ olur. Dolayısıyla, $2^{\alpha}s(a_1 + a_2 + ... + a_b)$, $\frac{v}{2}$ sayısının tek tam sayı katı olmalıdır. Bu da, $v \equiv 0 \pmod{2^{\alpha+1}}$ olması ile sağlanabilir. ■

4.2 Steiner Üçlü Sistemler

Teorem 4.1. *Eğer $v \equiv 3 \pmod{6}$ için çizgi-zarif bir STS(v) var ise, o zaman, çizgi-zarif bir STS$(3v)$ vardır.*

İspat. (V, B), $v \equiv 3 \pmod{6}$ ve $V = \{0, 1, \ldots, v-1\}$ olmak üzere $f^{+} : V \to \mathbb{Z}_v$ ile $f : B \to \{0, 1, 2, \ldots, v-1\}$ etiketlemesine sahip çizgi-zarif bir $STS(v)$ olsun. $X = V \times \{0, 1, 2\}$, $C_1 = \{\{(c, i), (d, i), (e, i)\} : \{c, d, e\} \in B,\ i \in \{0, 1, 2\}\}$, $C_2 = \{\{(c, 0), (d, 1), (c + d \pmod{v}, 2)\} : c, d \in V\}$ ve $C = C_1 \cup C_2$ kümelerini tanımlayalım.
Burada, $|X| = 3v$ olduğu ve C kümesinde her blokta tam olarak üç nokta bulunduğu açıktır. Herhangi bir $(x, i), (y, j) \in X$ alalım. Eğer $i = j$ ise $(x, i), (y, i)$ nokta çiftini içeren blok C_1 kümesindedir. Dahası $x, y \in A$ olacak şekilde tek bir $A \in B$ bloğu bulunduğundan; $(x, i), (y, i)$ nokta çifti C_1 kümesinin tanımı gereği bu kümede tek bir blokta bulunur. Eğer $i \neq j$ ise $(x, i), (y, j)$ nokta çiftini içeren blok C_2 kümesindedir. Burada, öncelikle $i = 0$ veya $j = 0$ durumunu düşünelim. Kabul edelim ki $j = 0$ olsun. Bu durumda, $c = y$ ve dolayısıyla, $x = (i-1)c + d = (i-1)y + d$ yazılabilir. Böylece, $c = y$, $d = x - (i-1)y$ tek çözümü bulunur. O halde, $(x, i), (y, j)$ nokta çifti C_2 kümesinde tek bir blokta bulunur. Diğer taraftan, $i, j \neq 0$ ise, $x = (i-1)c + d$ ve $y = (j-1)c + d$

yazılabilir. Buradan, $x - y = (i - j)c$ ve $c = (i - j)^{-1}(x - y)$ ve böylece $d = (i-j)^{-1}(i-1)y - (i-j)^{-1}(j-1)x$ tek çözümü bulunur. Burada, $i - j = \pm 1$ olduğundan; $(i - j)^{-1} = \pm 1$ olacağına dikkat ediniz. Sonuç olarak, elde edilen bu tek çözüm $(x, i), (y, j)$ nokta çiftinin C_2 kümesinde tek bir blokta bulunduğunu gösterir. Ayrıca, $|C| = |C_1| + |C_2| = 3b + v^2 = 3\frac{v(v-1)}{6} + v^2 = \frac{v(v-1)}{2} + v^2 = \frac{v(3v-1)}{2}$ bulunur. Dolayısıyla, (X, C) bir STS$(3v)$ olur.
Her $\{c, d, e\} \in B$ ve $i \in \{0, 1, 2\}$ için $g(\{(c, i), (d, i), (e, i)\}) = 3f(\{c, d, e\}) + i$, her $c, d \in V$ için $g(\{(c, 0), (d, 1), (c + d \pmod v, 2)\}) = 0$ olacak şekilde bir $g : C \to \{0, 1, 2, \ldots, 3v - 1\}$ fonksiyonu tanımlayalım.
Herhangi bir $a \in V$ ve $i \in \{0, 1, 2\}$ için $STS(v)$ de $r = \frac{v-1}{2}$ olmak üzere; $g^+(a, i) = 3f^+(a) + ri$ olur. Burada, $v \equiv 3 \pmod 6$ olduğundan; $r \equiv 1 \pmod 3$ ve $(r, 3) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla, $f^+(a)$ nokta ağırlıklarının tümü mod v de birbirlerinden farklı olduğu için $g^+(a, i) = 3f^+(a) + ri$ nokta ağırlıklarının tümü de mod $3v$ de birbirlerinden farklı olurlar. ■

Teorem 4.2. *Her $v \equiv 1, 3 \pmod 6$ için çizgi-zarif bir Steiner üçlü sistemi vardır.*

İspat. Her blok-zarif tasarım, aynı zamanda bir çizgi-zarif tasarım olduğundan; her $v \equiv 1 \pmod 6$ için Teorem 3.5'den mertebesi v olan çizgi-zarif bir Steiner üçlü sistemi vardır. Dahası, $v \equiv 3 \pmod 6$ durumu için, Teorem 3.7'deki blok-zarif Steiner üçlü sistemler de aynı zamanda yine mertebesi v olan çizgi-zarif birer Steiner üçlü sistemdir. Burada, (V, B) tasarımı $v \equiv 3 \pmod 6$ olmak üzere mertebesi v olan devirli bir Steiner üçlü sistemi olsun ve $f : B \to \{0, 1, \ldots, v - 1\}$ etiketlemesini tanımlayalım.
Steiner üçlü sistemde tam yörüngelerden birine gruplandırılmış yörünge diyeceğiz. Gruplandırılmış yörüngenin seçimi, Tablo 2.1'deki temel blokların arasından aşağıdaki şekilde yapılacaktır:

(i) eğer $s \geq 1$ ve $v = 18s + 3$ ise $\{0, 3, 6s + 2\}$,

(ii) eğer $v = 33$ ise $\{0, 4, 10\}$,

(iii) eğer $s \geq 2$ ve $v = 18s + 15$ ise $\{0, 6, 6s + 7\}$.

Geriye kalan tam yörüngelerden birine de sıralı yörünge diyeceğiz.
A_1 ve A_2 , sırasıyla sıralı ve gruplandırılmış yörüngenin temel blokları olsunlar. Bu iki yörüngenin bloklarını herhangi bir $x \in \mathbb{Z}_v$ için, $f(A_1 + x) = x$, eğer $x \equiv 0 \pmod 3$ ise $f(A_2 + x) = 1$ ve eğer $x \not\equiv 0 \pmod 3$ ise $f(A_2 + x) = 0$ şeklinde etiketleyeceğiz. Geriye kalan tüm blokları ise 0 ile etiketleyeceğiz.

Sıralı yörüngenin bloklarının etiketlerinden her $x \in \mathbb{Z}_v$ için, $f^+(x) \equiv f^+(0) + 3x \pmod{v}$ elde edilir.

Eğer $s \geq 1$ ve $v = 18s+3$ ise gruplandırılmış yörüngenin bloklarının etiketlerinden nokta ağırlıkları, $x \equiv 0 \pmod 3$ için $1+1+0 = 2$, $x \equiv 1 \pmod 3$ için $0+0+0 = 0$ ve $x \equiv 2 \pmod 3$ için $0 + 0 + 1 = 1$ olur.

Noktalar kümesi $V = \{0, 1, 2, ..., 32\}$ olmak üzere, STS(33) tasarımını ele alalım. Tam yörüngeler ve kısa yörünge için temel bloklar sırasıyla, $\{0, 1, 8\}, \{0, 2, 16\}, \{0, 3, 12\}, \{0, 4, 10\}, \{0, 5, 18\}$ ve $\{0, 11, 22\}$ olur. Sıralı ve gruplandırılmış yörüngenin temel blokları, sırasıyla, $\{0, 1, 8\}$ ve $\{0, 4, 10\}$ olarak seçilirse Tablo 4.1' de verildiği üzere çizgi-zarif bir STS(33) elde edilir. Burada gruplandırılmış yörüngenin bloklarının etiketlerinden nokta ağırlıkları, $x \equiv 0 \pmod 3$ için $1 + 0 + 0 = 1$, $x \equiv 1 \pmod 3$ için $0 + 1 + 1 = 2$ ve $x \equiv 2 \pmod 3$ için $0 + 0 + 0 = 0$ elde edilir.

Blok (Sıralı Yörünge)	Blok Etiketi	Blok (Gruplandırılmış Yörünge)	Blok Etiketi	Nokta Ağırlığı
$\{0, 1, 8\}$	0	$\{0, 4, 10\}$	1	$f^+(0) = \overline{25}$
$\{1, 2, 9\}$	1	$\{1, 5, 11\}$	0	$f^+(1) = \overline{29}$
$\{2, 3, 10\}$	2	$\{2, 6, 12\}$	0	$f^+(2) = \overline{30}$
$\{3, 4, 11\}$	3	$\{3, 7, 13\}$	1	$f^+(3) = \overline{1}$
$\{4, 5, 12\}$	4	$\{4, 8, 14\}$	0	$f^+(4) = \overline{5}$
$\{5, 6, 13\}$	5	$\{5, 9, 15\}$	0	$f^+(5) = \overline{6}$
$\{6, 7, 14\}$	6	$\{6, 10, 16\}$	1	$f^+(6) = \overline{10}$
$\{7, 8, 15\}$	7	$\{7, 11, 17\}$	0	$f^+(7) = \overline{14}$
$\{8, 9, 16\}$	8	$\{8, 12, 18\}$	0	$f^+(8) = \overline{15}$
$\{9, 10, 17\}$	9	$\{9, 13, 19\}$	1	$f^+(9) = \overline{19}$
$\{10, 11, 18\}$	10	$\{10, 14, 20\}$	0	$f^+(10) = \overline{23}$
$\{11, 12, 19\}$	11	$\{11, 15, 21\}$	0	$f^+(11) = \overline{24}$
$\{12, 13, 20\}$	12	$\{12, 16, 22\}$	1	$f^+(12) = \overline{28}$
$\{13, 14, 21\}$	13	$\{13, 17, 23\}$	0	$f^+(13) = \overline{32}$
$\{14, 15, 22\}$	14	$\{14, 18, 24\}$	0	$f^+(14) = \overline{0}$
$\{15, 16, 23\}$	15	$\{15, 19, 25\}$	1	$f^+(15) = \overline{4}$
$\{16, 17, 24\}$	16	$\{16, 20, 26\}$	0	$f^+(16) = \overline{8}$
$\{17, 18, 25\}$	17	$\{17, 21, 27\}$	0	$f^+(17) = \overline{9}$
$\{18, 19, 26\}$	18	$\{18, 22, 28\}$	1	$f^+(18) = \overline{13}$
$\{19, 20, 27\}$	19	$\{19, 23, 29\}$	0	$f^+(19) = \overline{17}$
$\{20, 21, 28\}$	20	$\{20, 24, 30\}$	0	$f^+(20) = \overline{18}$
$\{21, 22, 29\}$	21	$\{21, 25, 31\}$	1	$f^+(21) = \overline{22}$
$\{22, 23, 30\}$	22	$\{22, 26, 32\}$	0	$f^+(22) = \overline{26}$
$\{23, 24, 31\}$	23	$\{23, 27, 0\}$	0	$f^+(23) = \overline{27}$
$\{24, 25, 32\}$	24	$\{24, 28, 1\}$	1	$f^+(24) = \overline{31}$
$\{25, 26, 0\}$	25	$\{25, 29, 2\}$	0	$f^+(25) = \overline{2}$
$\{26, 27, 1\}$	26	$\{26, 30, 3\}$	0	$f^+(26) = \overline{3}$
$\{27, 28, 2\}$	27	$\{27, 31, 4\}$	1	$f^+(27) = \overline{7}$
$\{28, 29, 3\}$	28	$\{28, 32, 5\}$	0	$f^+(28) = \overline{11}$
$\{29, 30, 4\}$	29	$\{29, 0, 6\}$	0	$f^+(29) = \overline{12}$
$\{30, 31, 5\}$	30	$\{30, 1, 7\}$	1	$f^+(30) = \overline{16}$
$\{31, 32, 6\}$	31	$\{31, 2, 8\}$	0	$f^+(31) = \overline{20}$
$\{32, 0, 7\}$	32	$\{32, 3, 9\}$	0	$f^+(32) = \overline{21}$

Tablo 4.1 Mertebesi 33 Olan Bir Steiner Üçlü Sisteminin Çizgi-Zarif Etiketlemesi

Eğer $s \geq 2$ ve $v = 18s + 15$ ise gruplandırılmış yörüngenin bloklarının etiketlerinden nokta ağırlıkları, $x \equiv 0 \pmod 3$ için $1 + 1 + 0 = 2$, $x \equiv 1 \pmod 3$ için $0 + 0 + 1 = 1$ ve $x \equiv 2 \pmod 3$ için $0 + 0 + 0 = 0$ elde edilir.
Elde edilen bu nokta ağırlıkları, sıralı yörüngeden elde edilen nokta ağırlıklarına eklenirse; $\frac{v}{3} = \frac{18s+3}{3} = 6s + 1$ veya $\frac{v}{3} = \frac{18s+15}{3} = 6s + 5$ ile 3 aralarında asal olduğundan tüm nokta ağırlıkları mod v de birbirlerinden farklı olur. Dolayısıyla, $s \geq 1$, $v = 18s + 3$ ve $s \geq 1$, $v = 18s + 15$ için mertebesi v olan çizgi-zarif bir Steiner üçlü sistemi vardır.
Eğer $s \geq 0$ için $v = 18s + 9$ ise Sonuç 3.3, Teorem 4.1 ve yukarıda $s \geq 1$, $v = 18s + 3$ ile $s \geq 1$, $v = 18s + 15$ durumları için ispatlamış olduğumuz bilgiler kullanılırsa, istenilen elde edilir. ■

4.3 Afin ve Projektif Geometriler

Teorem 4.3. *Her $q \geq 2$ asal kuvveti için çizgi-zarif bir afin düzlem vardır.*

İspat. $V = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ olmak üzere, (V, B) tasarımı mertebesi q olan bir afin düzlem olsun ve (V, B) tasarımının bloklarını Teorem 2.8'de verilen şekilde q elemanlı bir $\mathbb{F}_q$ cismini kullanarak oluşturalım. Bir $h : \mathbb{F}_q \to \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ bijektif fonksiyonunu alalım ve her $t \in \mathbb{F}_q$ için $f(C_{0,t}) = h(t)$, $f(C_t) = qh(t)$ olacak şekilde bir $f : B \to \{0, 1, 2, \ldots, q^2 - 1\}$ etiketlemesi tanımlayalım. Geriye kalan blokların tümünü 0 ile etiketleyelim.
O zaman, her $(r, s) \in V$ için $f^+(r, s) = qh(r) + h(s)$ olarak elde edilir. Burada, h bijektif olduğundan tüm nokta ağırlıkları mod q^2 de birbirlerinden farklı olurlar. Böylece, istenilen elde edilir. ■

Teorem 4.4. *Eğer q bir asal sayının kuvveti ve $d \geq 2$ tam sayısı için çizgi-zarif bir $(q^d, q, 1)$-BIBD varsa, o zaman, çizgi-zarif bir $(q^{d+1}, q, 1)$-BIBD vardır.*

İspat. $V = \mathbb{F}_{q^d}$ olmak üzere, (V, B) tasarımı $f^+ : V \to \mathbb{Z}_{q^d}$ ile $f : B \to \{0, 1, 2, \ldots, q^d - 1\}$ çizgi-zarif etiketlemesine sahip bir $(q^d, q, 1)-$BIBD olsun. Burada, (V, B) için $r = (q^d - 1)/(q - 1)$ olur. W, V cisminin q elemanlı bir alt cismi ve $X = V \times W$ olsun.
Her $A \in B$ ve $y \in W$ için $C_{A,y} = A \times \{y\}$ olsun. $D_1 = \{C_{A,y} : A \in B \text{ ve } y \in W\}$ kümesini tanımlayalım. Her $a, b \in V$ için $C_{a,b} = \{(ya + b, y) : y \in W\}$ olsun. $D_2 = \{C_{a,b} : a, b \in V\}$ kümesini tanımlayalım ve $D = D_1 \cup D_2$ olsun. Burada, $|X| = q^{d+1}$ olduğu ve D kümesindeki her blokta tam olarak q tane nokta bulunduğu açıktır. Her $(x_1, y), (x_2, y) \in X$ için x_1, x_2 nokta çifti B kümesinde tek bir blokta bulunduğundan, D_1 kümesinin tanımı gereği $(x_1, y), (x_2, y)$ nokta çifti

D_1 kümesinde tek bir blokta bulunur. Ayrıca, $x_1 = y_1a + b$ ve $x_2 = y_2a + b$ olmak üzere; her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ nokta çifti için $a = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^{-1}$ ve $b = x_1 - y_1a$ tek çözümü bulunur. Böylece, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ nokta çifti D_2 kümesinde tek bir blokta bulunur.
Dahası, $|D| = |D_1| + |D_2| = bq + q^{2d} = \frac{q^d(q^d-1)}{q(q-1)}q + q^{2d} = \frac{q^d(q^d-1)}{q-1} + q^{2d} = \frac{q^d(q^{d+1}-1)}{q-1}$ olur. Dolayısıyla, (X, D) ikilisi bir $(q^{d+1}, q, 1)-$BIBD tasarımıdır.
Bir $h : W \to \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$ bijektif fonksiyonunu alalım ve her $A \in B$ ve $y \in W$ için $g(C_{A,y}) = qf(A) + h(y)$, herhangi bir $a, b \in V$ için $g(C_{a,b}) = 0$ olacak şekilde $g : D \to \{0, 1, 2, \ldots, q^{d+1} - 1\}$ etiketlemesini tanımlayalım. Bu durumda, herhangi bir $(x, y) \in X$ noktasının ağırlığı:

$$\sum_{x \in A} g(C_{A,y}) = \sum_{x \in A} (qf(A) + h(y)) \equiv qf^+(x) + rh(y) \pmod{q^{d+1}} \tag{4.2}$$

bulunur.
Burada, $f^+(x)$ nokta ağırlıklarının tümü mod q^d de birbirlerinden farklı ve $(q, r) = 1$ olduğundan; $qf^+(x) + rh(y)$ nokta ağırlıklarının tümü mod q^{d+1} de birbirlerinden farklı olur. Dolayısıyla, g, (X, D) tasarımı için bir çizgi-zarif etiketlemedir. ■

Teorem 4.5. *Her $q \geq 2$ asal kuvveti ve $d \geq 2$ tam sayısı için çizgi-zarif bir $(q^d, q, 1)-$BIBD vardır.*

İspat. Teorem 4.3 ve 4.4 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

4.4 Steiner Dörtlü Sistemler

Önerme 4.2. Eğer bir SQS(v) çizgi-zarif tasarım ise, o zaman, $v \equiv 8, 16 \pmod{24}$ olur.

İspat. Teorem 2.15'den $v \equiv 2, 4 \pmod 6$, yani, v'nin çift tam sayı olacağını biliyoruz. Burada, Önerme 4.1'i kullanırsak; $v \equiv 0 \pmod 8$ olmalıdır.
Eğer $v \equiv 2 \pmod 6$ ise bir $k \in \mathbb{Z}$ için $v = 6k + 2$ yazılabilir. Bu durumda, $6k + 2 \equiv 0 \pmod 8$ olması için $k \equiv 1 \pmod 4$ ve böylece $v \equiv 8 \pmod{24}$ olmalıdır.
Benzer şekilde, eğer $v \equiv 4 \pmod 6$ ise bir $l \in \mathbb{Z}$ için $v = 6l + 4$ yazılabilir. Bu durumda, $6l + 4 \equiv 0 \pmod 8$ olması için $l \equiv 2 \pmod 4$ ve böylece $v \equiv 16 \pmod{24}$ olmalıdır. ■

Şimdi Teorem 2.17'deki yinelemeli inşayı kullanarak sonsuz bir çizgi-zarif Steiner dörtlü sistem ailesi inşa edeceğiz ve mertebe 40'ı çizgi-zarif Steiner dörtlü sisteminin varlığının bilinmediği en küçük tasarım olarak bırakacağız.

Teorem 4.6. *Eğer çizgi-zarif bir SQS*(v) *varsa, o zaman, çizgi-zarif bir SQS*$(2v)$ *vardır.*

İspat. (V, B) bir SQS(v) ve $f^+ : V \to \mathbb{Z}_v$ ile $f : B \to \{0, 1, \ldots, v-1\}$, (V, B) için bir çizgi-zarif etiketleme olsun. Burada, $X = \{0, 1\} \times V$, $C_1 = \{\{(i, x), (j, y), (k, z), (l, t)\} : \{x, y, z, t\} \in B,\ i, j, k, l \in \{0, 1\}, i + j + k + l \equiv 0 \pmod 2\}$, $C_2 = \{\{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\} : a, b \in V,\ a \neq b\}$ ve $C = C_1 \cup C_2$ kümelerini tanımlayalım. Teorem 2.17'den (X, C) bir SQS$(2v)$ olur. Burada, her $\{x, y, z, t\} \in B$ ve $i \in \{0, 1\}$ için $g(\{(i, x), (i, y), (i, z), (i, t)\}) = 2f(\{x, y, z, t\}) + i$ olacak şekilde bir $g : C \to \{0, 1, \ldots, 2v-1\}$ etiketlemesi tanımlayalım ve geriye kalan tüm blokları 0 ile etiketleyelim.
O halde, her $x \in V$ için $(0, x)$ noktasının ağırlığı $2f^+(x)$ ve $(1, x)$ noktasının ağırlığı ise (V, B) tasarımında $r = \frac{(v-1)(v-2)}{6}$ olmak üzere, $2f^+(x) + r$ olur.
Önerme 4.2'den $v \equiv 8, 16 \pmod{24}$ olduğundan, r tek tam sayıdır. Dolayısıyla, $(2f^+(x), r) = 1$ olur. Dahası, $f^+(x)$ nokta ağırlıklarının tümü mod v de birbirlerinden farklı olduğundan, $2f^+(x)$ lerin ve $2f^+(x) + r$ lerin tümü mod $2v$ de birbirlerinden farklı olur. ■

Teorem 4.7. *Her* $n \geq 3$ *tam sayısı için çizgi-zarif bir SQS*(2^n) *vardır.*

İspat. Örnek 4.1 ve Teorem 4.6 kullanılarak, istenilen elde edilir. ■

Sonuç 4.1. *Her* $n \geq 3$ *tam sayısı için çizgi-zarif bir* $(2^n, 4, 2^{n-1} - 1)$*-BIBD vardır.*

İspat. Teorem 2.14 ve 4.7 vasıtası ile kolayca görülür. ■

5
SONUÇ

Bu çalışmada, blok tasarımlar için blok-zarif ve çizgi-zarif etiketlemelerini tanımladık. Bazı BIBD sınıfları için blok-zarif etiketlerini inceledik. Bölüm 3'te, tüm $v \equiv 1 \pmod 6$ *için mertebesi* v *olan blok-zarif Steiner üçlü sistemlerinin kolayca elde edilebileceğini gözlemledikten sonra,* $v \equiv 3 \pmod 6$ *için mertebesi* v *olan blok-zarif Steiner üçlü sistemlerinin bazı sonsuz ailelerini oluşturduk. Steiner üçlü sistemlerinin blok-zarif olmasına dair* $v \equiv 3 \pmod 6$ *durumu tamamlanmaktan oldukça uzaktır. Bu nedenle açık bir problem olarak kalmıştır.*
Yine bölüm 3'te afin ve projektif geometrileri inceledik ve her $q \geq 2$ *asal kuvveti ve* $d \geq 2$ *tam sayısı için blok-zarif bir* $(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, \frac{q^d-1}{q-1}, \frac{q^{d-1}-1}{q-1})-$*BIBD tasarımının var olduğunu kolay bir şekilde gördükten sonra, her* $d \geq 2$ *tam sayısı ve* q *tek asal sayısının kuvveti veya* $q = 4$ *için blok-zarif bir* $(q^d, q, 1)-$*BIBD tasarımının var olduğunu ispatladık. Burada,* $q = 2^s$ *iken* $s \geq 3$ *için* $(q^d, q, 1)-$*BIBD tasarımların blok-zarif etiketlemesine dair olan durum açık bir problem olarak kalmıştır.*
Yapılan bu çalışmaya ek olarak, aşağıdaki açık problemlerin çözümleri incelenebilir.

Açık Problem 5.1. Her $v \equiv 3 \pmod 6$ için mertebesi v olan blok-zarif bir Steiner üçlü sistemi var mıdır?

Açık Problem 5.2. Her $q = 2^s$, $d, s \geq 2$ için blok-zarif bir $(q^d, q, 1)-$BIBD var mıdır? Özel olarak, her $s \geq 2$ için mertebesi 2^s olan blok-zarif bir afin düzlem var mıdır?

Bölüm 4'te, blok-zarif etiketleme için yukarıda verilen açık problemleri çizgi-zarif etiketleme açısından tamamladık. Ayrıca, Steiner dörtlü sistemler için çizgi-zarif etiketlemesini inceledik ve bir yinelemeli inşa metotu vasıtasıyla her $n \geq 3$ *için mertebesi* 2^n *olan çizgi-zarif bir Steiner dörtlü sisteminin var olduğunu ispatladık.*

Bölüm 3'ün son kısmında ise, blok zarif etiketlemelerin varlığı sorununun, tüm izomorf olmayan BIBD'ler için tamamen çözüldüğü küçük parametrelerin bir listesini yaptık. Teorem 3.1'deki gerekli koşulu sağlayıp blok-zarif olmayan herhangi

bir BIBD bulamadık. Bu sonuca dayanarak aşağıdaki varsayımları yapıyoruz. Daha sonraki çalışmalar için, bu varsayımların çözümleri irdelenebilir.

Varsayım 5.1 (**Zayıf).** Bir (v, k, λ)-BIBD tasarımının varlığı için gerek koşulları ve Teorem 3.1'deki koşulu sağlayan her v, k ve λ değerleri için blok-zarif bir (v, k, λ)-BIBD vardır.

Varsayım 5.2 (**Güçlü).** Teorem 3.1'deki gerek koşulu sağlayan tüm BIBD'ler (aynı parametrelere sahip izomorf olmayan) blok-zariftir.

KAYNAKÇA

[1] A. Rosa, "On certain valuations of the vertices of a graph," in *Theory of Graphs*, Internat. Symposium, Rome, 1967, pp. 349–355.

[2] S. W. Golomb, "How to number a graph," in *Graph Theory and Computing*. Academic Press, 1972, pp. 23–37.

[3] M. Buratti, G. Rinaldi, T. Traetta, "Some results on 1-rotational hamiltonian cycle systems," *Journal of Combinatorial Designs*, vol. 22 , Issue: 6, pp. 231–251, 2014.

[4] R. L. Graham, N. J. A. Sloane, "On additive bases and harmonious graphs," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 1, pp. 382–404, 1980.

[5] J. Gallian, "A dynamic survey of graph labeling," *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 26, DS6, Twenty-second edition, 2019.

[6] G. S. Bloom, S. W. Golomb, "Applications of numbered undirected graphs," *Proceedıngs of the IEEE*, vol. 65, No.4, pp. 562–570, 1977.

[7] S. Akbari, G. Khosrovshahi, A. Mofidi, "Zero-sum flows in designs," *Journal of Combinatorial Designs*, vol. 19, pp. 355–364, 2011.

[8] S. Akbari, A. Burgess, P. Danziger, E. Mendelsohn, "Zero-sum flows for triple systems," *Discrete Mathematics*, vol. 340, pp. 416–425, 2017.

[9] C. Colbourn, "Egalitarian steiner triple systems for data popularity," *Designs Codes and Cryptography*, vol. 89, pp. 2373–2395, 2021.

[10] C. Colbourn, "Egalitarian steiner quadruple systems of doubly even order," *Discrete Mathematics*, vol. 345, Issue: 7, 2022.

[11] F. Çallıalp, *Örneklerle Soyut Cebir*. Birsen Yayınevi, 2011, ısbn: 975-511-350-9.

[12] R. Abel, M. Buratti, "Difference families," in *Handbook of Combinatorial Designs*. 2nd edn., C.J. Colbourn and J.H. Dinitz (Editors), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, pp. 392–410.

[13] S. Ball, Z. Weiner. "An introduction to finite geometry." (2011), [Online]. Available: `https://web.mat.upc.edu/simeon.michael.ball/IFG.pdf`.

[14] A. K. Aydın, "Affine and projective planes," Bachelor Degree Thesis, Department of Mathematics, Yildiz Techical University, 2019.

[15] R. Abel, C. Colbourn, J. Dinitz, "Mutually orthogonal latin squares (mols)," in *Handbook of Combinatorial Designs*. 2nd edn., C.J. Colbourn and J.H. Dinitz (Editors), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, pp. 160–193.

[16] G. Ge, "Group divisible designs," in *Handbook of Combinatorial Designs*. 2nd edn., C.J. Colbourn and J.H. Dinitz (Editors), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, pp. 255–260.

[17] D. Jungnickel, A. Pott, K. Smith, "Difference sets," in *Handbook of Combinatorial Designs*. 2nd edn., C.J. Colbourn and J.H. Dinitz (Editors), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, pp. 419–435.

[18] C. Lindner, C. Rodger, *Design Theory*. 2nd edn., CRC Press, New York, 2008.

[19] R. Mathon, A. Rosa, "$2-(v,k,\lambda)-$Designs of small order," in *Handbook of Combinatorial Designs*. 2nd edn., C.J. Colbourn and J.H. Dinitz (Editors), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, pp. 25–58.

[20] D. Stinson, *Combinatorial Designs: Constructions and Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[21] V. Horan, G. Hurlbert, "Overlap cycles for steiner quadruple systems," *Journal of Combinatorial Designs*, vol. 22, Issue:2, pp. 53–70, 2013.

[22] E. Ş. Yazıcı, "Latin ve grekoromen kareler," in *Matematik Dünyası*. Türkiye: Türk Matematik Derneği, 2004, pp. 9–12.

A
BİLGİSAYAR ARAMASI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN BLOK ZARİF TASARIM ÖRNEKLERİ

Aşağıdaki örneklerin her birinde, bir $(v, k, \lambda)-$BIBD'nin blok zarif etiketlemesi verilmiştir; burada blok etiketleri tabloların ilk satırlarında ve bloklar tabloların ikinci satırlarında verilmiştir.

Örnek A .1. Bir $(6, 3, 2)-$BIBD'nin blok zarif-etiketlemesi

9	2	1	6	10	8	3	7	4	5
012	013	024	035	045	125	134	145	234	235

Örnek A .2. 6 tane izomorf olmayan $(6, 3, 6)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

4	21	1	25	29	14	9	26	2	27	19	18	10	7	15	13	12	8	16	17	28	30	6	24	3	22	23	5	11	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	2	2	2	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	3	3
2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5	4	4	4	4	5	5

2	10	25	14	11	23	17	19	21	24	7	15	4	29	5	3	9	13	28	26	16	30	27	12	18	22	6	8	1	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	2	2	2	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	3	3
2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	4	5	5	5	5	4	5	5	4	4	5	5	5	5	4	4	4	5	5	5

10	22	8	9	20	19	7	13	27	11	12	26	30	5	23	24	3	1	15	2	28	21	4	29	14	16	25	17	18	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	2	2	2	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	3	4
2	2	2	3	3	4	4	4	5	4	5	5	5	5	5	3	5	5	4	4	4	5	5	5	5	4	4	4	5	5

22	6	3	16	11	30	7	28	17	14	8	5	29	21	25	27	26	19	15	1	23	2	4	18	24	13	9	20	10	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	2	2	2	3	3	3	3	4	4	3	3	3	3	4	4
2	2	2	3	3	4	3	4	5	4	5	5	5	5	5	5	4	5	5	4	4	5	5	5	4	4	4	5	5	5

28	25	14	13	2	20	9	15	7	26	23	6	27	30	21	12	11	1	18	19	29	8	22	3	5	16	17	10	4	24
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	2	2	2	3	3	3	3	4	4	3	3	3	4	4	4
2	2	2	3	4	5	3	4	5	4	4	5	5	5	5	3	4	5	4	4	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5

22	13	12	24	29	3	26	30	14	27	4	19	25	2	16	10	18	20	6	15	28	5	21	7	23	17	1	9	11	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	2	2	2	2	3	3	3	4	4	3	3	3	3	4	4
2	2	3	3	4	5	3	4	5	4	5	5	5	5	5	3	4	5	5	4	4	5	5	5	4	4	5	5	5	4

Örnek A .3. 4 tane izomorf olmayan $(7, 3, 2)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

6	11	2	9	10	8	3	1	4	5	7	14	13	12
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	3	3	5	5	3	3	4	4	3	3	4	4
2	2	4	4	6	6	5	5	6	6	6	6	5	5

6	5	11	12	8	13	3	4	9	1	2	14	10	7
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	3	3	5	5	3	3	4	4	3	3	4	4
2	2	4	4	6	6	5	6	5	6	5	6	5	6

7	11	1	6	13	3	10	5	12	4	14	9	8	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	3	3	4	5	3	3	4	5	3	3	4	4
2	2	4	5	6	6	4	6	5	6	5	6	5	6

12	3	11	10	2	8	9	7	13	6	14	1	4	5
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	2	3	4	5	2	3	4	5	3	3	4	4
2	3	4	5	6	6	6	4	5	6	5	6	5	6

Örnek A .4. 10 tane izomorf olmayan $(7, 3, 3)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

7	13	4	5	3	19	11	17	2	15	6	8	9	10	18	14	21	1	16	20	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
1	1	1	3	3	3	5	5	5	3	3	3	4	4	4	3	3	3	4	4	4
2	2	2	4	4	4	6	6	6	5	5	5	6	6	6	6	6	6	5	5	5

10	3	14	20	7	9	2	8	21	13	19	11	18	6	4	17	16	12	15	5	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	3	3	3	5	5	5	3	3	3	4	4	4	3	3	3	4	4	4
2	2	2	4	4	4	6	6	6	5	5	6	5	6	6	5	6	6	5	5	6

17	14	7	19	10	3	9	8	1	6	21	20	11	13	2	15	12	18	5	4	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	3	3	3	4	5	5	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	4
2	2	2	4	4	5	6	6	6	4	5	6	5	6	6	5	6	6	5	5	6

10	11	8	12	3	21	20	2	15	4	14	19	13	17	18	5	9	16	6	7	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	3	3	3	4	5	5	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	4
2	2	2	4	4	5	6	6	6	4	6	6	5	5	6	5	5	6	5	6	6

5	3	12	4	11	7	13	14	10	2	21	9	15	19	1	8	17	6	16	18	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	5
2	2	2	4	5	6	5	6	6	4	5	6	5	6	6	4	5	6	5	6	6

2	19	12	20	15	14	16	9	6	8	11	18	1	4	5	7	21	13	17	3	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	2	3	3	4	5	5	2	3	3	4	4	5	3	3	4	4	5	5
2	2	3	4	4	5	6	6	6	5	6	6	5	6	6	5	6	6	5	6	6

17	14	3	6	15	20	11	10	18	5	21	1	8	7	2	9	12	16	19	4	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	5	5	2	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	4
2	2	3	4	4	5	6	6	6	6	4	5	5	6	6	5	6	6	5	5	6

18	12	13	1	14	15	10	6	5	9	2	7	17	16	8	20	21	3	4	19	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	4	5	2	3	3	4	5	5	3	3	3	4	4	4
2	2	3	4	5	5	6	6	6	6	4	4	5	6	6	5	6	6	5	5	6

18	8	14	6	1	7	9	4	19	2	11	20	13	10	17	3	21	5	15	12	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	4	5	2	3	3	4	4	5	3	3	3	4	5	4
2	2	3	4	5	6	5	6	6	5	4	6	5	6	6	4	5	6	6	6	5

11	9	4	5	16	12	2	15	7	13	18	6	20	10	17	8	19	14	1	21	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	4	4	5	2	2	3	3	4	5	3	3	4	5	4	4
2	3	4	3	5	6	5	6	6	4	6	5	6	5	6	4	5	6	6	5	6

Örnek A .5. 35 tane izomorf olmayan $(7, 3, 4)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

15	6	13	23	12	27	28	25	24	8	10	19	5	21	18	22	1	2	16	17	7	3	11	9	4	14	26	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4
2	2	2	2	4	4	4	4	6	6	6	6	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5

18	23	27	9	24	16	8	21	17	6	12	13	19	20	28	4	2	5	15	7	11	14	22	10	1	3	25	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4
2	2	2	2	4	4	4	4	6	6	6	6	5	5	5	6	5	5	6	5	6	5	6	6	6	5	5	6

13	19	27	8	5	11	14	16	18	28	9	6	26	15	10	7	4	3	17	12	21	22	23	24	25	1	20	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	4	5	5	5	5	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	4	4	4	4
2	2	2	2	4	4	4	4	6	6	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6

8	2	20	13	23	24	5	4	22	3	21	14	26	16	6	9	1	10	25	15	11	7	27	18	17	19	12	28
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	4	5	5	5	3	3	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	4	4	4
2	2	2	2	4	4	4	5	6	6	6	6	4	5	5	6	5	6	6	6	5	6	6	6	5	5	5	6

19	5	20	24	27	13	9	10	6	2	25	18	15	22	16	8	26	4	7	21	12	17	14	11	3	1	28	23
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	4	5	5	5	3	3	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	4	4	4
2	2	2	2	4	4	4	5	6	6	6	6	4	5	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	5	6	5	6

19	9	17	4	12	25	16	15	5	23	20	3	7	10	2	11	13	6	26	18	24	1	22	27	14	28	8	21
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	4	5	5	5	3	3	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	4	4	4
2	2	2	2	4	4	4	5	6	6	6	6	4	6	6	6	5	5	5	6	5	5	5	6	6	5	6	6

23	18	7	14	27	12	3	10	4	5	17	25	2	22	20	16	13	11	8	26	1	6	28	21	19	9	24	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	4	4	5	5	3	3	3	4	4	5	5	3	3	3	4	4	4	4	4	5
2	2	2	2	4	4	5	5	6	6	6	6	4	4	6	6	5	5	6	6	5	5	6	5	5	6	5	6

11	1	2	24	26	19	9	6	15	3	13	18	17	27	4	23	5	25	10	14	12	16	20	8	21	7	28	22
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	4	5	5	5	3	3	3	4	5	6	6	4	5	6	6	5	5	6	6	5
2	2	2	2	4	4	5	5	6	6	6	6	4	5	6	6	5	5	6	6	4	5	6	6	5	5	6	6

18	21	9	10	15	25	2	17	27	23	1	20	8	28	24	7	3	13	26	16	11	6	4	19	14	22	12	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	4	4	5	5	3	3	3	4	5	6	5	5	4	5	6	5	5	6	6	5
2	2	2	2	4	4	5	6	5	6	6	6	4	5	5	6	5	6	6	6	6	6	5	4	5	6	6	6

28	24	17	21	9	11	27	10	12	3	20	16	7	26	2	8	4	14	6	18	1	15	5	19	25	13	23	22
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	
1	1	1	1	2	3	3	3	4	5	5	5	2	3	3	3	4	4	5	3	3	3	3	3	4	4	4	
2	2	2	3	4	4	4	5	6	6	6	6	5	4	5	6	5	6	5	6	6	6	5	6	6	5	5	

22	7	26	25	16	10	23	13	12	1	3	28	8	6	17	9	20	14	15	27	18	21	5	24	2	4	11	19
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	3	4	5	5	5	2	3	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	4	4	4
2	2	2	3	4	4	4	5	6	6	6	6	5	4	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	6	5	6	5

28	4	24	10	1	11	9	16	13	14	26	23	22	7	17	5	15	20	8	21	18	6	3	12	19	25	2	27
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	2	3	3	3	4	5	5	5	2	3	3	3	4	4	5	5	5	2	3	3	3	4	4	4	4
2	2	3	4	4	5	6	6	6	5	6	6	6	6	5	6	6	6	5	5	5	6	4	5	5	6	6	5

15	1	19	28	20	25	8	24	7	14	23	27	2	3	22	4	16	12	13	18	10	17	21	5	11	26	9	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	3	4	5	5	5	2	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	4	4	5	4
2	2	2	3	4	4	4	5	6	6	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	4	5	6	6	5	6	6	5

25	3	21	20	26	19	11	15	12	13	10	24	5	27	14	23	6	22	17	4	18	28	8	1	16	2	9	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	2	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	3	4	5	5	4
2	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	5	6	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	4	4	6	6	5

21	9	13	14	25	4	15	23	20	11	10	19	27	8	12	26	1	18	6	5	2	16	28	3	17	22	7	24
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	2	3	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	4	5	4
2	2	2	3	4	4	5	6	5	6	6	6	5	4	5	6	5	6	6	4	5	6	6	6	5	6	6	5

22	13	10	17	2	6	20	28	26	14	18	12	27	5	11	21	4	9	3	23	25	16	19	15	24	1	8	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	5	5	4	4
2	2	2	3	4	4	5	6	5	6	6	6	5	5	6	6	5	5	6	5	6	6	6	6	6	6	5	5

10	23	22	27	14	1	24	28	19	21	16	13	11	4	15	9	3	7	26	17	2	18	6	8	12	25	20	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	2	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	4	5	5	4
2	2	2	3	4	4	5	5	6	6	6	6	5	6	6	6	5	5	5	6	4	4	5	6	6	6	5	5

24	18	9	21	20	1	27	22	28	10	4	3	6	23	26	16	7	12	8	19	15	5	17	25	13	14	11	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	5	5	2	3	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	4	5	4
2	2	2	3	4	4	5	6	5	6	6	6	5	4	6	6	5	5	6	6	4	5	5	6	6	6	5	5

9	20	12	11	8	15	26	14	27	2	21	16	25	3	5	19	13	18	28	1	23	24	4	10	6	22	17	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	3	4	4	4	5	2	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	5	5	5	4	4
2	2	3	4	5	5	5	6	6	6	6	5	6	6	6	5	5	5	6	4	4	4	6	6	6	6	5	5

13	9	17	23	27	12	8	18	10	3	25	2	11	28	5	26	7	14	4	6	24	16	20	1	19	21	15	22
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	3	4	4	4	5	2	3	3	3	4	4	4	5	3	3	3	4	4	4	5	4
2	2	2	3	4	5	5	6	5	6	6	6	5	4	6	6	5	5	6	6	4	4	5	6	6	6	6	5

28	9	23	15	2	18	24	27	8	4	22	10	20	16	17	5	21	14	1	25	3	7	26	6	19	11	12	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	4	4	4	4	3	3	3	3	5	5	4	4
2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6	4	4	6	6	6	6	5	5

23	3	10	13	5	1	26	25	18	2	8	21	24	20	12	22	27	16	15	28	14	17	6	9	4	11	7	19
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	5	4	4
2	2	3	3	4	4	5	6	5	6	6	6	5	5	6	6	5	6	6	6	4	5	6	6	6	6	5	5

27	20	5	9	26	1	24	23	3	6	18	22	11	8	16	10	19	15	25	14	4	21	12	28	7	17	2	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	5	4	4
2	2	3	3	4	5	4	5	6	6	6	6	4	5	6	6	5	5	6	6	4	5	6	6	6	6	5	5

27	3	9	1	25	8	17	16	14	23	18	11	2	10	28	7	20	15	13	19	24	6	4	26	21	22	12	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	4	4	4	5	3	3	3	4	4	5	4	4
2	2	3	3	4	5	4	6	5	6	6	6	4	5	6	6	5	6	6	6	4	5	6	6	5	5	5	5

24	5	20	8	10	14	15	6	17	28	4	2	1	7	9	23	12	19	22	13	11	27	3	25	21	18	16	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	5	4	4
2	2	3	4	3	5	4	5	6	6	6	6	4	5	4	6	6	5	6	6	5	6	6	5	6	6	5	5

22	2	28	21	25	3	11	18	7	17	15	19	12	23	14	8	20	1	10	26	9	27	4	24	6	5	13	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	5	4	4
2	2	3	4	3	5	4	5	6	6	6	6	4	5	5	6	6	5	6	6	4	6	6	5	5	6	6	5

3	18	8	1	2	15	23	27	9	11	13	21	10	6	19	14	20	25	5	28	26	12	16	4	22	7	17	24
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	3	4	4	5	3	3	4	4	5	5	4	4
2	2	3	4	3	5	4	6	5	6	6	6	4	5	5	6	6	5	6	6	4	5	6	6	6	5	5	5

28	4	24	22	12	23	18	15	21	25	27	20	7	3	2	5	1	6	11	19	14	9	17	8	10	16	13	26
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	5	6	4	6	5	5	5	3	3	4	4	5	5	4	4
2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	6	5	6	4	6	5	5	6	6	4	5	6	6	5	6	5	6

25	1	24	5	16	15	23	21	6	10	7	11	18	22	28	20	27	12	17	4	26	2	13	14	8	19	3	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	5	4	4
2	2	3	3	4	4	5	6	5	6	6	6	5	6	4	5	5	6	6	6	4	5	6	6	5	6	5	6

21	4	23	25	9	11	12	1	18	28	2	15	6	27	17	3	5	26	7	14	20	8	24	10	22	19	13	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	4	4	5	5	3	3	3	3	4	4	4	4
2	2	3	3	4	5	4	6	5	6	6	6	4	6	4	5	5	6	6	6	5	5	6	6	5	5	6	6

28	25	3	2	10	18	26	23	12	17	8	20	24	14	22	15	4	27	11	9	16	5	7	21	6	19	1	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3
1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	4	4	4	5	3	3	3	3	4	5	4	4	4
2	2	3	4	5	4	6	5	6	6	6	4	6	5	6	5	5	6	6	4	5	5	6	6	5	6	6	5

4	28	15	12	19	14	3	6	9	8	23	10	26	20	1	5	2	17	21	22	13	18	24	16	7	27	11	25
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	2	2	3	3	4	4	4	4	5	3	3	3	3	5	5	4	4
2	2	3	3	4	5	5	6	5	6	6	6	4	6	5	6	5	5	6	6	4	4	5	6	6	6	5	6

10	14	16	20	8	26	13	18	24	27	15	1	3	2	22	19	5	12	25	4	28	6	17	9	21	23	7	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	5	4	4
2	2	3	4	3	5	4	6	5	6	6	6	4	6	5	6	5	6	6	5	4	5	6	6	5	6	5	6

23	3	10	25	21	27	18	19	2	16	12	8	28	24	6	1	7	26	4	15	14	13	20	22	11	17	5	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	2	2	3	3	3	4	4	5	3	3	3	4	4	5	4	4
2	2	3	4	3	5	4	6	5	6	6	4	6	5	6	6	5	5	6	6	4	5	6	6	5	6	5	6

18	7	21	3	13	6	25	28	2	20	26	8	19	24	11	10	27	15	12	23	14	9	17	22	16	4	5	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	2	2	2	3	3	4	4	5	3	3	4	4	5	4	4	5
2	3	4	5	3	4	6	5	6	5	6	6	3	5	6	4	6	5	6	6	4	5	5	6	6	5	6	6

Örnek A .6. 4 tane izomorf olmayan $(8, 4, 3)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

12	9	7	14	5	8	13	1	3	2	6	10	11	4
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	3	3	4	2	3	3	4	3	3	4
2	2	5	5	4	6	6	6	4	5	5	4	5	5
3	4	6	7	5	7	7	7	6	7	7	7	6	6

1	3	5	8	12	2	14	4	11	10	7	6	13	9
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	3	3	4	2	3	3	4	3	3	4
2	2	5	5	4	6	6	6	4	5	5	4	5	5
3	4	6	7	5	7	7	7	7	6	7	6	7	6

1	10	8	6	2	9	11	13	14	5	3	7	12	4
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	2	3	3	4	2	3	3	4	3	3	4
2	2	5	5	4	5	6	6	4	6	5	4	5	5
3	4	6	7	7	6	7	7	5	7	7	6	7	6

7	5	8	4	10	3	12	11	9	13	2	1	6	14
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	4
1	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	3	3	5
2	4	6	4	5	4	5	4	5	4	5	4	6	6
3	5	7	6	7	7	6	7	6	6	7	5	7	7

Örnek A .7. 36 tane izomorf olmayan $(9, 3, 2)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

23	14	17	22	5	19	10	9	1	8	4	2	12	11	21	7	20	16	3	13	24	15	6	18
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	7	7	3	3	4	6	6	3	3	4	4	5	5	6	6	5	5	
2	2	4	4	6	6	8	8	5	5	7	7	8	8	8	8	6	6	7	7	7	7	8	8

2	21	12	5	24	16	13	11	17	9	14	3	19	23	7	10	4	8	22	15	18	6	1	20
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	7	7	3	3	4	4	6	6	3	3	4	4	5	5	6	6	5	5
2	2	4	4	6	6	8	8	5	5	7	7	8	8	8	8	6	6	7	7	8	7	8	8

7	18	17	2	14	21	13	12	3	22	16	9	6	1	24	20	4	5	10	15	19	8	23	11
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	6	7	3	3	4	4	5	5	6	6	5	5
2	2	4	4	6	7	8	8	5	5	6	8	7	8	7	8	6	7	6	8	7	8	7	8

1	19	4	2	14	13	21	24	23	17	6	8	22	15	11	5	12	7	3	18	20	10	16	9
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	7	7	3	3	4	4	6	6	3	3	4	4	5	5	6	5	6	
2	2	4	4	6	6	8	8	5	7	5	8	7	8	6	7	6	8	7	8	8	7	7	7

8	9	19	15	24	7	2	20	12	5	16	17	21	4	13	23	1	14	10	3	6	22	18	11
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	7	7	3	3	4	4	6	6	3	3	4	4	5	5	5	6	5	6
2	2	4	4	6	6	8	8	5	7	5	8	7	8	6	8	6	7	7	8	7	8	8	7

5	16	18	12	7	11	13	4	15	21	20	3	2	8	9	14	22	23	17	24	6	19	10	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	6	7	3	3	4	4	5	5	5	6	5	6
2	2	4	4	6	7	8	8	5	6	5	7	8	8	7	8	6	8	6	7	8	7	8	7

15	18	23	13	20	22	6	21	24	16	14	10	2	7	9	3	12	1	4	5	11	8	17	19
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	6	7	3	3	4	4	5	5	5	6	5	6
2	2	4	4	6	7	8	8	5	6	5	8	7	8	7	8	6	7	6	8	7	8	8	7

23	12	7	19	21	8	13	17	22	10	2	4	6	24	14	9	16	15	20	18	11	3	5	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	6	7	3	3	4	4	5	5	6	5	6	
2	2	4	4	6	7	8	8	5	6	5	8	7	8	7	8	6	7	6	8	8	7	7	8

9	15	23	5	24	17	7	19	22	20	1	14	12	2	21	6	4	10	13	18	3	8	11	16
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	6	6	3	3	4	4	5	5	5	7	5	6
2	2	4	4	6	7	8	8	5	8	5	8	7	7	6	7	6	7	8	8	6	8	7	8

19	5	22	2	14	23	18	10	7	24	15	17	1	6	20	16	4	21	13	3	11	12	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	7	7	3	3	4	4	5	6	3	3	4	4	5	6	5	6	5	6
2	2	4	4	6	6	8	8	5	7	6	8	7	8	6	8	5	7	8	7	7	8	8	7

14	9	6	12	1	3	20	17	10	23	7	16	4	5	22	18	2	24	11	21	15	8	13	19
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	5	7	3	3	4	4	5	6	5	6	5	6
2	2	4	4	6	7	8	8	5	6	7	8	6	8	7	8	5	6	7	8	8	7	8	7

14	21	16	18	3	5	19	6	8	11	10	20	7	1	23	15	4	24	22	12	13	2	9	17
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	5	7	3	3	4	4	5	6	5	6	5	6
2	2	4	4	6	7	8	8	5	5	6	7	8	8	7	8	5	6	8	7	7	8	8	7

19	20	24	18	1	13	11	17	2	10	8	22	12	14	15	4	16	5	7	9	3	6	21	23
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	5	7	3	3	4	4	5	6	5	6	5	6
2	2	4	4	6	7	8	8	5	8	6	7	6	8	6	7	5	8	7	8	8	7	7	8

13	21	5	9	20	18	24	3	17	8	2	7	4	16	11	14	10	23	19	12	22	15	1	6
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	5	5	6	7	3	3	4	4	5	7	3	3	4	4	5	6	5	6	5	6
2	2	4	4	6	7	8	8	5	8	6	7	6	8	6	7	5	8	8	7	7	8	8	7

10	7	6	20	3	8	11	15	4	1	14	23	22	24	5	12	9	13	18	16	17	21	2	19
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	4	6	6	7	3	3	4	5	5	7	3	3	4	4	5	5	5	6	5	6
2	2	4	5	5	7	8	8	4	6	7	6	8	8	7	8	6	8	6	7	7	8	8	7

11	12	20	3	16	19	7	22	17	24	2	18	15	21	1	5	14	4	8	9	23	6	10	13
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	4	5	6	7	3	3	4	5	6	7	3	3	4	4	5	5	6	6	5	5
2	2	4	5	6	7	8	8	4	5	8	6	7	8	7	8	6	7	6	8	7	8	7	8

3	11	4	15	9	2	10	17	1	19	13	20	18	6	16	21	8	5	22	7	23	14	12	24
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	4	5	6	7	3	3	4	5	6	7	3	3	4	4	5	5	5	6	5	6
2	2	4	5	6	7	8	8	4	8	5	6	7	8	6	7	7	8	6	8	7	8	8	7

14	1	11	6	16	8	9	21	5	23	17	3	4	18	2	12	15	22	10	20	13	19	24	7
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	4	5	6	7	3	3	4	5	6	6	3	3	4	4	5	6	7	5	5	6
2	2	4	5	6	7	8	8	4	8	5	7	7	8	6	7	7	8	6	8	6	8	8	7

5	8	10	18	23	19	16	3	9	22	24	14	7	20	4	13	2	12	15	1	11	21	17	6
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	4	5	6	7	3	3	4	5	6	6	3	3	4	4	5	5	5	6	5	7
2	2	4	5	6	7	8	8	4	8	5	7	7	8	7	8	6	7	6	8	6	7	8	8

1	5	16	15	12	14	19	21	10	4	18	2	7	13	24	6	22	8	23	17	9	11	20	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4
1	1	3	3	4	5	6	7	3	3	4	5	5	6	3	3	4	4	5	6	6	7	5	5
2	2	4	5	6	7	8	8	4	8	7	6	7	8	5	6	7	8	8	7	7	8	6	8

23	12	8	21	14	15	6	4	22	3	7	19	13	18	10	11	20	5	2	24	17	1	9	16
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	4	5	6	7	3	3	4	5	5	6	3	3	4	4	5	7	6	6	5	5
2	2	4	5	6	7	8	8	4	8	7	6	7	8	5	8	6	7	6	8	7	7	8	8

24	3	19	12	11	8	20	7	14	23	2	10	22	5	17	15	18	6	4	1	16	13	9	21
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	4	5	6	7	3	3	4	5	5	6	3	3	4	4	5	6	6	5	6	6
2	2	4	5	6	7	8	8	4	7	8	6	8	7	6	8	5	7	6	8	7	8	8	7

10	15	9	24	8	13	12	6	17	1	19	11	21	18	3	14	7	23	22	16	2	5	4	20
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4
1	1	3	3	4	5	6	7	3	3	4	5	5	6	3	3	4	4	5	6	7	5	6	8
2	2	4	5	6	7	8	8	4	8	7	6	7	8	6	7	5	8	8	7	6	8	8	7

1	10	7	18	19	21	3	5	9	2	23	6	14	8	22	15	13	11	20	16	24	4	12	17
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
1	1	2	4	4	5	6	7	2	4	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	4	4	5	6
2	3	3	5	6	7	8	8	3	5	6	8	7	8	6	7	8	8	7	8	6	8	7	7

4	13	14	8	12	2	20	18	3	11	23	7	15	16	24	21	22	1	10	19	5	6	9	17
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
1	1	2	4	4	5	6	7	2	4	4	5	6	7	4	4	5	5	6	4	4	5	5	6
2	3	3	5	6	7	8	8	3	5	6	8	7	8	7	8	6	7	8	7	8	6	8	7

23	8	10	5	3	19	17	20	11	15	16	14	2	1	12	22	18	21	7	24	4	9	13	6
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
1	1	2	4	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	4	5	5	6	4	4	5	6	5
2	3	3	5	6	7	8	8	4	5	6	7	8	8	8	7	6	8	7	7	8	6	7	8

10	8	23	22	21	24	18	9	6	4	2	5	15	17	14	20	16	7	13	19	11	12	1	3
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
1	1	2	4	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	4	5	5	6	4	4	5	6	5
2	3	3	5	6	7	8	8	4	5	6	8	7	8	7	8	6	8	7	7	8	6	8	7

24	19	2	8	17	5	11	14	23	21	7	9	16	13	18	10	12	3	1	6	20	4	22	15
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
1	1	2	4	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	4	5	5	6	4	4	5	6	5
2	3	3	5	6	7	8	8	4	5	6	8	7	8	8	7	6	7	8	7	7	8	6	7

17	15	8	7	23	20	11	19	14	6	18	13	22	9	1	21	10	2	24	5	16	4	3	12
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
1	1	2	4	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	4	5	5	6	4	4	5	6	5
2	3	3	5	6	7	8	8	4	5	7	6	8	8	6	8	7	8	7	7	8	8	7	6

19	1	18	7	20	9	22	13	23	8	2	24	15	12	4	11	3	14	16	10	17	21	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
1	1	2	4	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	4	5	5	6	4	4	5	6	5
2	3	3	5	6	7	8	8	4	5	7	6	8	8	8	6	7	8	7	7	8	6	7	8

11	4	7	2	12	10	16	13	19	15	17	5	24	22	20	23	21	6	3	9	1	18	14	8
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
1	1	2	4	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	4	5	5	6	4	4	5	6	5
2	3	3	5	6	7	8	8	4	5	8	6	7	8	7	7	6	8	8	6	8	8	7	7

11	8	1	21	20	2	10	24	6	14	5	15	16	23	9	4	18	22	12	13	7	3	17	19
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
1	1	2	4	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	4	5	5	6	4	4	5	6	5
2	3	3	5	6	7	8	8	4	5	8	6	7	8	8	7	6	8	7	7	8	6	7	8

9	1	17	16	7	24	13	2	8	10	4	6	23	5	3	14	21	15	12	20	22	19	11	18
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4
1	1	2	3	5	5	6	7	2	3	4	4	6	7	3	3	4	5	6	4	5	6	5	5
2	3	4	4	6	7	8	8	5	5	6	8	7	8	7	8	6	8	7	7	6	8	7	8

15	21	17	4	12	9	3	10	20	24	7	18	16	22	1	19	8	13	2	14	5	11	6	23
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4
1	1	2	3	5	5	6	7	2	3	4	4	6	7	3	3	4	5	6	4	5	5	6	6
2	3	4	4	6	7	8	8	5	6	5	8	7	8	6	7	7	8	8	8	7	8	6	7

8	2	1	3	6	23	22	9	19	15	10	5	21	24	17	4	13	11	16	12	20	18	14	7
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4
1	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	3	4	5	6	4	5	6	5	5
2	3	4	5	6	7	8	8	5	4	6	8	7	8	7	8	7	6	8	8	6	7	7	8

4	20	15	17	8	22	6	10	11	1	7	24	21	12	5	14	23	9	2	13	3	16	18	19
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	
1	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	3	3	4	5	6	4	5	6	5	5
2	3	4	5	6	7	8	8	5	4	6	8	7	8	7	8	8	6	7	7	6	8	7	8

Örnek A .8. 11 tane izomorf olmayan $(9, 4, 3)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

16	18	12	14	3	5	13	10	6	8	4	2	17	7	15	11	1	9
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	5	6	2	3	3	4	4	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	4	7	7	7	5	5	6	6	6	6	5	5	5
3	4	6	6	7	8	8	8	8	7	8	7	8	7	8	7	8	6

6	2	17	10	15	13	4	14	7	5	9	1	18	8	12	3	11	16
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	5	6	2	3	3	4	4	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	4	7	7	7	5	6	5	6	5	6	5	6	5
3	4	6	6	7	8	8	8	8	7	8	8	7	8	7	7	8	6

18	17	5	9	8	11	16	12	7	10	15	13	3	4	1	2	14	6
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	6	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	5	7	7	7	4	5	6	6	6	6	5	5	5
3	4	6	7	6	8	8	8	8	7	8	8	7	7	8	6	8	7

5	12	2	10	18	11	17	6	16	8	3	13	7	1	15	14	9	4
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	6	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	5	7	7	7	4	5	6	6	6	6	5	5	5
3	4	6	7	6	8	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	6

1	10	15	12	4	8	13	6	7	2	16	14	17	9	3	5	18	11
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	6	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	5	6	7	7	4	5	7	6	6	6	5	5	5
3	4	6	7	7	8	8	8	8	6	8	8	7	7	8	6	8	7

13	6	10	9	14	18	4	2	8	11	7	1	15	12	3	16	5	17
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	6	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	5	6	7	7	4	5	7	6	6	6	5	5	5
3	4	6	7	8	8	7	8	8	6	7	8	8	7	8	6	8	7

14	9	2	12	18	15	17	8	1	4	7	10	5	11	6	13	16	3
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	6	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	5	7	7	7	4	6	5	6	5	6	5	6	5
3	4	6	7	6	8	8	8	8	7	8	8	7	8	7	6	8	7

4	14	16	2	3	10	7	12	13	17	5	15	6	11	8	18	1	9
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	6	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	5	6	7	6	4	6	5	6	5	7	5	6	5
3	4	6	7	7	8	8	8	8	8	7	7	8	6	8	8	7	6

3	7	13	6	12	16	11	15	17	2	14	4	8	1	5	9	10	18
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	6	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	5	6	7	6	4	6	5	7	5	7	5	6	5
3	4	6	7	8	8	7	8	8	7	7	8	8	6	8	7	8	6

14	13	9	15	4	11	12	8	16	10	18	17	3	2	5	6	1	7
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	4	5	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	5	5	4	6	6	7	7	4	6	5	7	6	5	6	5	5
3	4	6	7	8	7	8	8	8	5	7	8	8	8	8	6	7	7

8	13	17	4	2	1	15	7	6	3	9	18	12	11	16	5	10	14
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3	4
1	1	1	2	2	3	3	5	2	2	3	3	5	3	3	4	4	6
2	4	6	4	5	4	6	7	4	7	4	5	6	5	6	5	5	7
3	5	7	8	6	7	8	8	6	8	8	7	8	8	7	7	6	8

Örnek A .9. 21 tane izomorf olmayan $(10, 5, 4)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

9	18	14	11	16	1	12	2	3	7	10	15	5	13	6	4	17	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	5	7	4	6	4	5	5	4	5	4	6	5	5	6	5	5
3	3	6	8	6	8	8	7	6	7	8	6	7	6	6	7	7	7
4	5	7	9	7	9	9	8	9	9	9	8	9	8	9	8	8	9

9	11	18	2	15	3	13	5	10	16	7	6	8	12	14	4	1	17
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	4	5
1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	6	6
2	3	4	4	3	4	5	4	5	3	4	5	4	5	3	4	7	7
6	6	5	7	7	5	7	6	6	7	6	6	5	8	5	8	8	8
8	9	9	8	9	8	9	7	8	8	9	7	7	9	6	9	9	9

4	18	3	13	10	7	16	1	12	14	6	8	9	11	17	2	5	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	5	7	4	6	4	5	5	4	5	4	6	5	5	6	5	5
3	3	6	8	7	8	6	7	6	6	8	8	7	6	6	7	7	7
4	5	7	9	9	9	8	8	9	7	9	9	9	8	9	8	8	9

10	9	17	11	4	7	18	14	12	15	16	6	3	2	13	1	5	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	4	5
1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	6	6
2	3	4	4	3	4	5	4	5	3	4	5	4	5	4	4	7	7
6	6	5	7	7	5	6	6	8	7	6	7	5	6	5	8	8	8
8	9	9	8	9	8	7	7	9	8	9	9	7	8	6	9	9	9

6	1	14	12	4	3	13	15	7	16	9	10	11	5	17	18	2	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	5	7	4	6	4	5	5	4	5	4	6	5	5	6	5	5
3	3	6	8	7	8	6	7	6	7	6	6	7	8	8	7	6	7
4	5	7	9	9	9	9	8	8	8	9	8	9	9	9	8	7	9

16	4	11	17	13	3	15	6	5	12	9	2	8	18	10	7	1	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	5	7	4	6	4	5	5	4	5	4	6	5	5	6	5	5
3	3	6	8	7	8	6	7	6	7	6	6	7	8	8	7	6	8
4	5	7	9	8	9	9	8	9	9	9	8	9	8	9	8	7	9

16	17	11	12	13	14	8	3	1	9	2	10	7	15	18	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	4	5
1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	6	6
2	3	4	4	3	4	5	4	5	3	4	5	4	5	4	4	7	7
6	8	5	6	7	5	6	6	7	6	7	7	5	6	5	8	8	8
7	9	9	8	9	8	9	7	8	8	9	8	7	9	6	9	9	9

7	5	2	14	17	12	18	10	3	6	16	1	11	4	13	8	15	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	5	7	4	6	4	5	5	4	5	4	6	5	5	6	5	5
3	3	6	8	7	8	6	8	6	6	6	7	7	8	7	7	7	6
4	5	7	9	8	9	9	9	7	9	8	8	9	9	9	8	9	8

1	3	11	15	10	4	2	18	6	13	7	8	5	9	14	17	16	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	4	5	
1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	6	6
2	3	4	4	3	4	5	4	5	3	4	5	4	5	4	4	7	7
7	6	5	6	6	5	6	7	7	8	6	7	5	6	5	8	8	8
9	8	9	8	7	8	9	9	8	9	7	8	7	9	6	9	9	9

6	11	14	10	13	4	12	7	3	2	5	17	18	9	8	1	16	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	5	7	4	6	4	5	5	4	5	4	6	5	5	6	5	5
3	3	7	8	6	8	7	6	6	8	6	6	7	7	7	7	7	8
4	5	8	9	7	9	9	9	8	9	9	8	9	7	8	8	9	9

9	6	18	13	16	5	7	2	15	12	17	14	10	4	11	8	3	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	4	5
1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	6	6
2	3	4	4	3	4	5	4	5	3	4	5	4	5	4	4	7	7
6	6	5	6	8	5	7	7	6	7	7	6	5	8	5	6	8	8
7	8	9	9	9	8	9	8	7	9	8	8	7	9	6	9	9	9

9	17	3	10	15	8	5	18	4	11	14	1	12	6	13	16	2	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	4	4	5	5	6	6	5	6	7	5	5	5	4	4	5	5
3	3	6	7	6	7	7	7	8	8	8	6	7	6	6	7	6	8
4	5	8	9	8	9	8	9	9	9	9	9	8	7	9	8	7	9

9	1	6	2	4	18	12	8	10	14	17	11	5	7	15	13	3	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	4	5
1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	6	6
2	3	5	5	3	4	4	4	4	3	4	4	4	4	5	5	7	7
6	8	6	7	8	6	7	5	5	6	5	5	6	7	6	7	8	8
7	9	9	8	9	9	8	6	7	7	8	9	8	9	8	9	9	9

5	6	14	16	12	13	15	7	9	11	1	4	18	17	3	8	10	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	4	4	5	5	6	6	5	6	7	5	5	5	4	4	5	5
3	3	6	7	6	7	7	7	8	8	8	6	7	6	6	7	6	8
4	5	8	9	9	8	8	9	9	9	9	9	8	7	8	9	7	9

6	5	17	12	9	4	13	15	16	7	2	3	8	14	1	18	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	4	4	5	6	5	7	5	5	6	5	6	5	4	4	5	5
3	3	6	8	6	8	7	8	6	7	7	6	7	8	6	7	7	6
4	5	7	9	9	9	8	9	7	8	8	9	9	9	8	9	9	8

7	12	13	17	1	11	6	5	16	8	9	3	14	2	4	18	10	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	4	4	5	6	5	7	5	5	6	5	6	5	4	4	5	5
3	3	6	7	6	8	7	8	6	7	7	6	7	8	6	8	7	6
4	5	8	9	9	9	8	9	7	8	8	9	9	9	7	9	9	8

13	2	12	14	5	7	8	9	11	16	15	1	3	10	6	17	18	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	4	5
1	1	1	1	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	3	6	6
2	3	5	5	3	4	4	4	4	3	4	4	4	4	5	5	7	7
7	6	6	8	6	5	7	5	6	8	5	6	5	7	6	7	8	8
9	8	7	9	7	8	8	9	9	9	6	9	7	8	8	9	9	9

11	1	9	12	16	18	7	5	3	10	15	2	13	17	6	4	8	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	4	4	5	7	5	6	5	5	6	5	5	6	5	4	5	5
3	3	6	7	6	8	8	7	6	6	8	7	7	8	6	7	7	6
4	5	9	8	8	9	9	9	7	7	9	9	8	9	9	8	9	8

1	7	9	11	4	14	12	6	15	5	8	13	16	3	17	18	10	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	3	3	4	3	3	4	4
2	2	4	4	5	6	5	7	5	5	6	5	4	4	5	5	7	7
3	3	6	7	7	8	6	8	6	6	7	7	7	8	6	8	7	6
4	5	8	9	8	9	9	9	7	9	8	8	9	9	7	9	9	8

14	15	8	12	5	7	16	11	18	3	6	1	17	2	9	4	10	13
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	2	2	3	3	5	2	2	3	4	4	3	3	4	4
2	2	3	6	4	6	4	4	6	3	4	5	5	5	5	5	7	6
3	5	7	7	5	8	5	8	7	6	6	8	6	7	6	7	8	7
4	9	8	9	7	9	6	9	8	7	8	9	9	8	8	9	9	9

18	5	17	15	2	14	10	6	3	12	1	7	11	8	4	13	16	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	1	2	2	2	3	5	2	2	2	3	4	3	4	4	4
2	3	4	5	3	4	5	4	6	3	4	6	6	5	6	7	5	5
3	8	7	6	5	6	7	6	7	5	5	7	7	8	8	8	6	7
4	9	8	9	8	9	9	7	8	7	6	8	9	9	9	9	8	9

Örnek A .10. 2 tane izomorf olmayan $(13, 3, 1)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

5	16	2	15	1	17	18	22	8	9	19	4	24	25	20	12	14	7	21	11	10	13	23	6	3	26
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6
1	3	5	7	9	b	3	4	6	9	a	3	4	6	7	8	6	7	8	6	8	a	7	8	9	7
2	4	6	8	a	c	5	7	8	b	c	9	5	a	c	b	b	a	c	c	9	b	b	a	c	9

15	4	17	21	22	8	9	23	2	1	14	5	19	10	3	13	6	18	11	16	26	7	24	12	25	20
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6
1	3	5	7	9	b	3	4	6	9	a	3	4	6	7	8	6	7	8	6	8	a	7	8	9	7
2	4	6	8	a	c	5	7	8	b	c	9	5	a	b	c	b	c	a	c	9	b	a	b	c	9

Örnek A .11. 80 tane izomorf olmayan $(15, 3, 1)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

24	8	31	17	18	13	15	2	6	33	3	30	9	23	21	35	28	27	29	16	14	34	20	7	10	22	5	1	32	26	25	19	11	4	12
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
1	3	5	7	9	b	d	3	4	7	8	b	c	3	4	7	8	b	c	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a
2	4	6	8	a	c	e	5	6	9	a	d	e	6	5	a	9	e	d	b	c	d	e	c	b	e	d	d	e	b	c	e	e	d	c	b	e	b	c

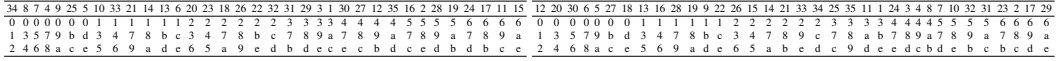
32	4	30	2	14	25	22	12	18	28	17	9	33	11	21	10	29	15	35	20	26	34	3	27	19	7	13	5	23	16	8	6	1	24	31
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
1	3	5	7	9	b	d	3	4	7	8	b	c	3	4	7	8	b	c	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a
2	4	6	8	a	c	e	5	6	9	a	d	e	6	5	a	9	e	d	b	c	d	e	c	b	e	d	e	d	c	b	d	e	b	e	b	c

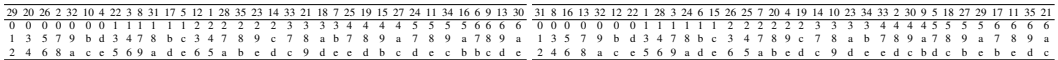
2	13	27	26	10	15	3	30	6	28	31	21	19	11	24	4	25	5	29	23	8	18	22	9	32	12	35	33	20	14	1	34	16	7	17
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
1	3	5	7	9	b	d	3	4	7	8	b	c	3	4	7	8	b	c	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a
2	4	6	8	a	c	e	5	6	9	a	d	e	6	5	a	9	e	d	b	c	d	e	d	e	b	c	e	e	d	c	b	c	b	e	d	e	b	d

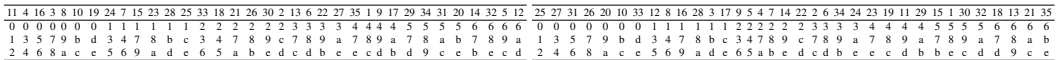
6	17	23	10	18	30	35	32	8	33	24	19	4	7	5	31	12	22	20	3	26	15	16	1	29	2	25	34	21	14	13	11	27	28	9
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
1	3	5	7	9	b	d	3	4	7	8	b	c	3	4	7	8	b	c	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a
2	4	6	8	a	c	e	5	6	9	a	d	e	6	5	a	9	e	d	b	c	d	e	d	e	b	c	e	e	d	c	b	c	b	e	d	e	b	d

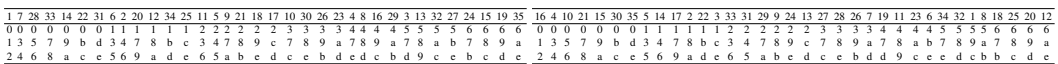
9	24	12	10	5	15	13	3	22	4	2	28	21	20	1	11	6	29	30	18	26	23	32	27	14	34	7	16	8	35	17	25	19	33	31
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6
1	3	5	7	9	b	d	3	4	7	8	b	c	3	4	7	8	b	c	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a
2	4	6	8	a	c	e	5	6	9	a	d	e	6	5	a	9	e	d	b	c	e	d	d	e	c	b	c	b	d	e	e	e	d	c	b	c	e	d

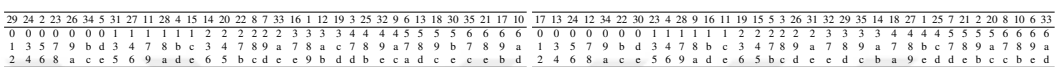
15	21	10	18	8	34	26	33	23	9	31	32	27	20	1	29	17	4	35	5	28	7	16	24	30	12	2	13	6	3	11	22	14	25	19
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6
1	3	5	7	9	b	d	3	4	7	8	b	c	3	4	7	8	b	c	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a	7	8	9	a
2	4	6	8	a	c	e	5	6	9	a	d	e	6	5	a	9	e	d	b	c	e	d	d	e	c	b	c	d	d	e	b	c	e	d	c	b	c	e

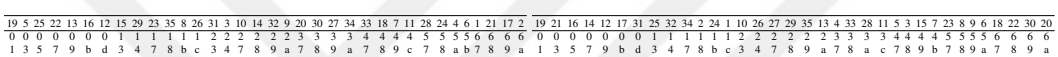


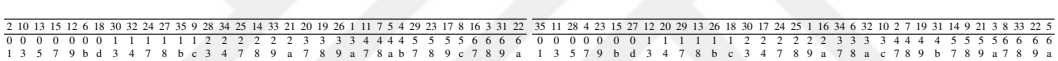


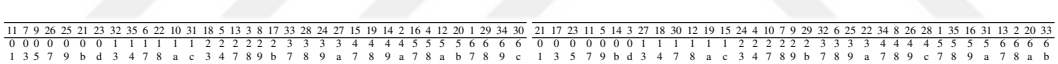


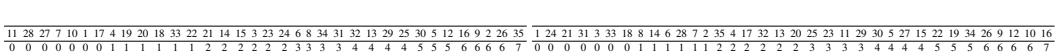


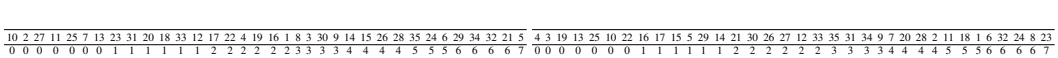


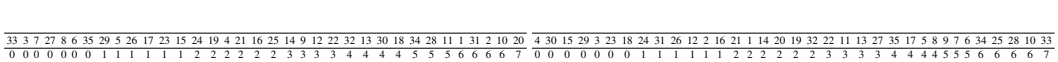


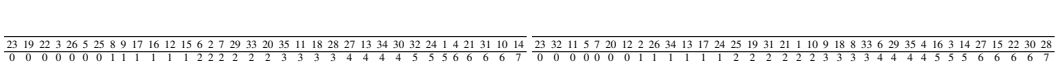


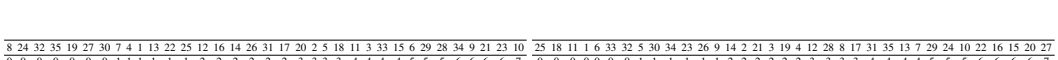


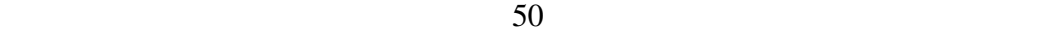


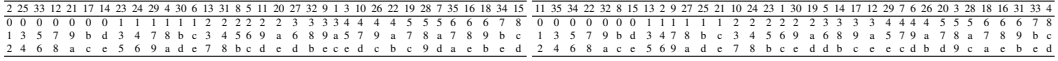


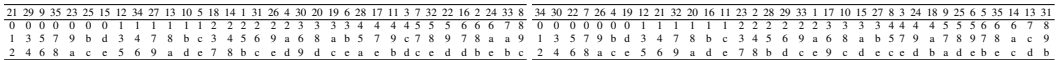


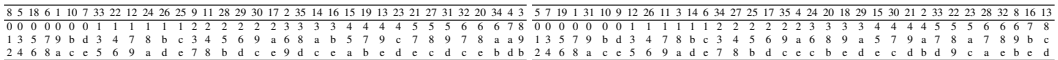


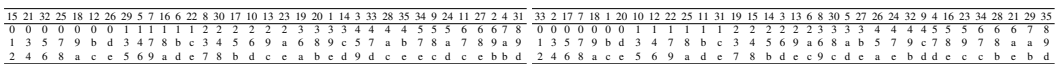


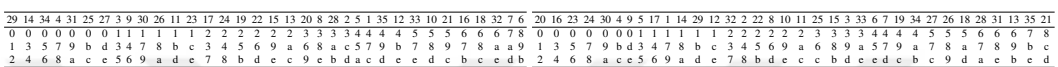


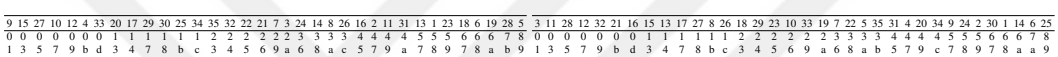


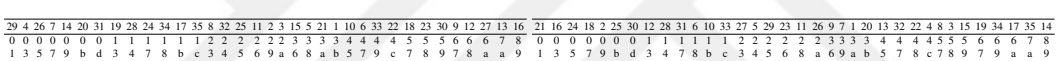


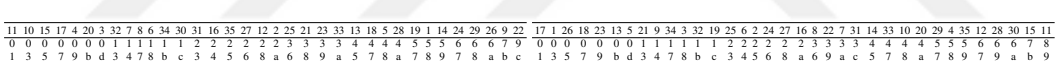


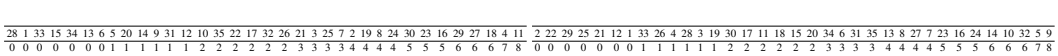


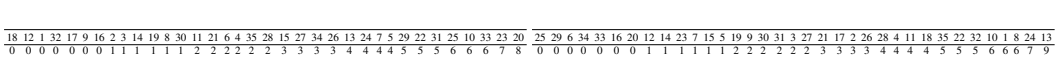


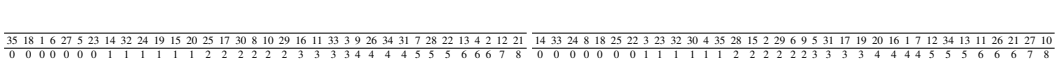


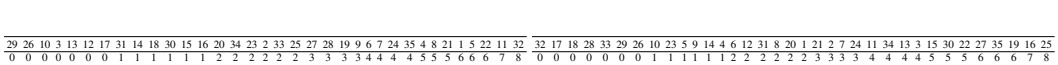


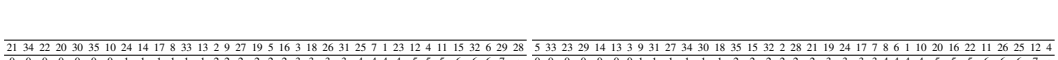


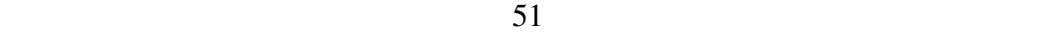


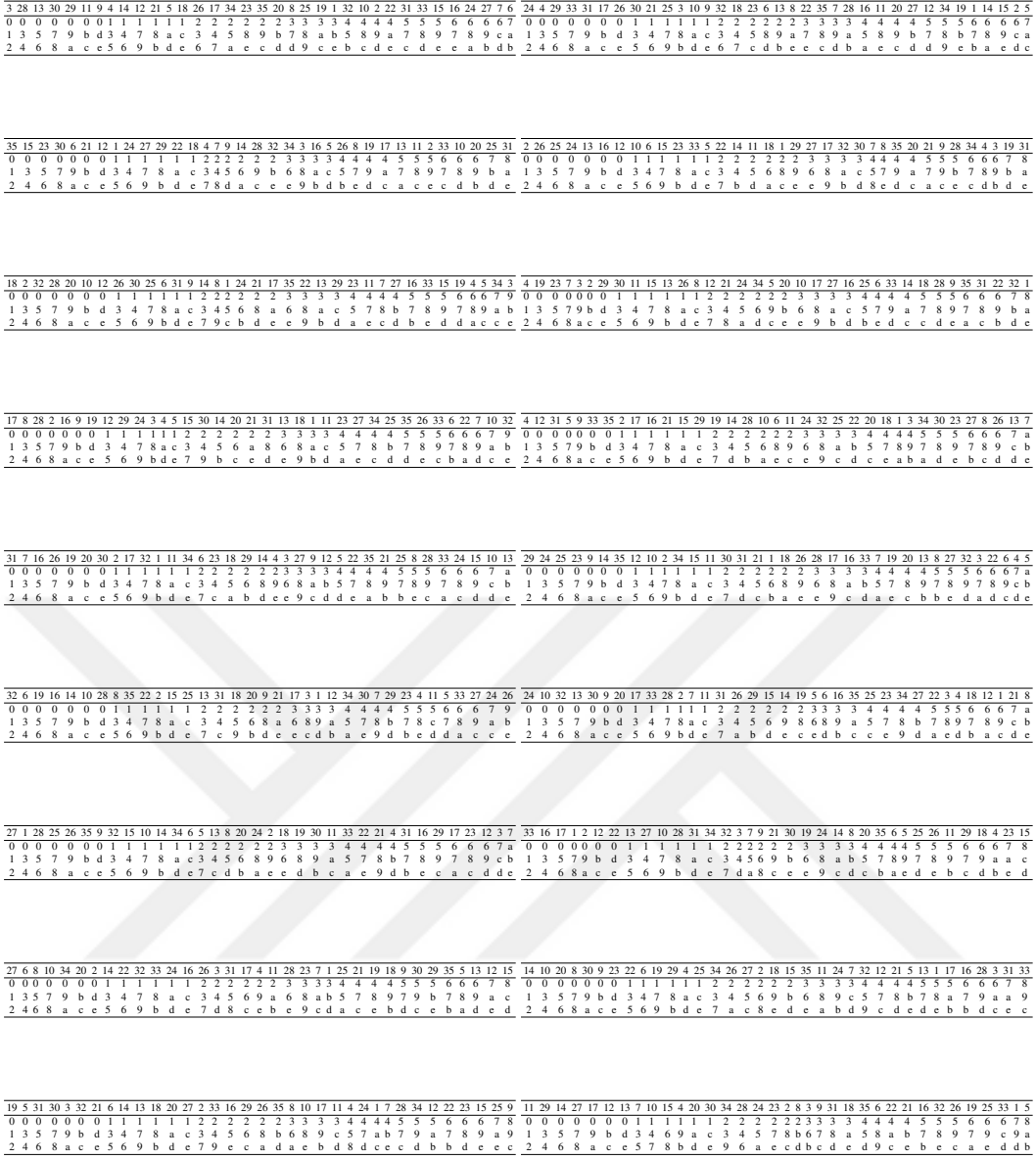












Örnek A .12. 5 tane izomorf olmayan $(15, 7, 3)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

1	15	2	14	3	11	6	8	7	13	10	9	12	5	4
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	3	3	5	5	3	3	4	4	3	3	4	4
2	2	2	4	4	6	6	5	5	6	6	6	6	5	5
3	7	b	7	9	7	9	7	8	7	8	7	8	7	8
4	8	c	8	a	8	a	9	a	9	a	a	9	a	9
5	9	d	b	d	d	b	b	c	c	b	b	c	c	b
6	a	e	c	e	e	c	d	e	e	d	e	d	d	e

2	9	14	8	11	4	6	5	13	7	15	12	1	10	3
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	3	3	5	5	3	3	4	4	3	3	4	4
2	2	2	4	4	6	6	5	5	6	6	6	6	5	5
3	7	b	7	9	7	9	7	8	7	8	7	8	7	8
4	8	c	8	a	8	a	9	a	9	a	a	9	a	9
5	9	d	b	d	d	b	b	c	c	b	b	c	c	b
6	a	e	c	e	e	c	d	e	e	d	e	d	d	e

11	9	7	14	4	1	13	5	8	3	15	10	2	6	12
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	3	3	5	5	3	3	4	4	3	3	4	4
2	2	2	4	4	6	6	5	5	6	6	6	6	5	5
3	7	b	7	9	7	9	7	8	7	8	7	8	7	8
4	8	c	8	a	8	a	9	a	a	9	9	a	a	9
5	9	d	b	d	d	b	b	c	c	b	c	b	b	c
6	a	e	c	e	e	c	d	e	d	e	e	d	e	d

12	3	9	6	2	8	11	10	7	14	4	5	13	15	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	3	3	5	5	3	3	4	4	3	3	4	4
2	2	2	4	4	6	6	5	5	6	6	6	6	5	5
3	7	b	7	9	7	8	7	9	7	8	7	8	7	8
4	8	c	8	a	9	a	8	a	a	9	9	a	a	9
5	9	d	b	d	b	c	d	b	c	b	c	b	b	c
6	a	e	c	e	d	e	e	c	d	e	e	d	e	d

3	6	10	9	1	4	13	7	11	15	5	8	2	12	14
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
1	1	1	3	3	5	5	3	3	4	4	3	3	4	4
2	2	2	4	4	6	6	5	6	5	6	5	6	5	6
3	7	b	7	9	7	9	7	7	8	8	8	8	7	7
4	8	c	8	a	8	a	9	a	a	9	9	a	a	9
5	9	d	b	d	d	b	b	c	c	b	c	b	b	c
6	a	e	c	e	e	c	d	e	d	e	e	d	e	d

Örnek A .13. Bir $(16, 4, 1)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

8	12	5	20	18	10	14	6	15	2	17	3	4	9	13	11	1	16	19	7
0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	5	6
1	4	7	a	d	4	5	6	9	4	5	6	8	4	5	6	7	8	9	7
2	5	8	b	e	7	b	8	c	c	7	9	a	9	8	a	b	b	a	c
3	6	9	c	f	a	d	e	f	e	f	b	d	d	c	f	e	f	e	d

Örnek A .14. 6 tane izomorf olmayan $(19, 9, 4)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

17	7	4	6	19	12	14	2	11	15	18	10	13	1	8	9	5	16	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	5	6	2	3	3	4	4	3	3	4	4	4
2	2	2	5	5	4	4	7	7	7	5	5	6	6	6	6	5	5	5
3	3	4	6	6	7	8	8	8	8	7	8	7	8	7	8	7	8	6
4	9	9	a	c	a	b	9	9	a	9	b	9	a	a	9	b	9	9
5	a	e	b	d	c	d	a	b	d	d	c	b	c	b	c	c	a	a
6	b	f	e	g	e	f	c	d	e	f	e	c	d	f	e	d	b	d
7	c	g	f	h	g	h	f	e	h	g	g	h	f	g	f	e	g	e
8	d	h	i	i	i	i	h	g	i	i	h	i	g	h	i	f	i	h

11	2	18	1	15	16	6	9	5	8	4	10	19	13	7	14	12	17	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	5	6	2	3	3	4	4	3	3	4	4	4
2	2	2	5	5	4	4	7	7	7	5	5	6	6	6	6	5	5	5
3	3	4	6	6	7	8	8	8	8	7	8	7	8	7	8	7	8	6
4	9	9	a	c	a	b	9	9	a	9	b	a	9	9	a	b	9	9
5	a	e	b	d	c	d	a	b	d	d	c	b	c	b	d	c	a	a
6	b	f	e	g	e	f	c	d	e	f	e	d	d	e	e	d	b	c
7	c	g	f	h	g	h	f	e	h	g	g	h	f	g	f	e	g	f
8	d	h	i	i	i	i	h	g	i	i	h	i	g	h	i	f	i	h

2	3	9	12	16	11	13	18	15	7	8	19	17	10	14	5	6	4	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	2	3	3	3	5	6	2	3	3	4	4	3	3	4	4	4
2	2	2	5	5	4	4	7	7	7	5	6	5	6	5	6	5	6	5
3	3	4	6	6	7	8	8	8	8	7	8	8	7	8	7	7	8	6
4	9	9	a	c	a	b	9	9	a	9	9	a	b	b	a	9	9	9
5	a	e	b	d	c	d	a	b	b	c	d	c	c	c	d	b	a	a
6	b	f	e	g	e	f	d	c	g	f	e	d	d	e	e	d	c	b
7	c	g	f	h	g	h	f	e	h	h	g	e	f	f	e	f	g	g
8	d	h	i	i	i	i	g	h	i	i	i	h	g	g	h	i	i	h

13	15	10	4	8	12	7	19	11	1	14	16	2	17	5	9	18	3	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	5	6	2	3	3	4	4	3	3	4	4	4
2	2	2	5	5	4	4	7	7	7	5	6	5	6	5	6	5	6	5
3	3	4	6	6	7	8	8	8	8	7	8	8	7	8	7	7	8	6
4	9	9	a	c	a	b	9	9	a	9	b	a	9	9	a	b	9	9
5	a	e	b	d	c	d	a	b	d	b	c	c	c	c	d	b	a	a
6	b	f	e	g	e	f	d	c	e	g	f	d	d	e	e	c	b	d
7	c	g	f	h	g	h	f	e	h	h	g	e	f	f	f	f	g	e
8	d	h	i	i	i	i	g	h	i	i	h	g	i	i	g	h	i	h

13	11	18	1	4	19	3	8	17	12	16	2	5	10	6	15	9	14	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	4	6	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	2	5	5	4	5	7	7	7	4	5	6	6	6	6	5	5	5
3	3	4	6	7	6	8	8	8	8	7	8	8	7	7	8	6	8	7
4	9	9	a	c	a	9	a	9	a	b	b	9	9	9	a	b	9	9
5	a	e	b	d	c	d	b	b	c	d	c	c	a	b	d	c	a	a
6	b	f	e	e	g	f	d	c	f	f	e	d	d	e	e	d	b	c
7	c	g	f	g	h	h	e	f	h	g	g	e	g	h	f	f	g	e
8	d	h	i	i	i	i	h	g	i	i	h	i	h	i	g	h	i	f

1	5	11	8	18	2	3	4	9	17	12	7	15	13	19	14	16	10	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	1	2	3	3	4	5	2	3	3	4	5	3	3	4	4	4
2	2	2	5	5	4	6	6	7	7	4	6	7	6	5	6	5	6	5
3	3	4	6	7	8	7	8	8	8	5	7	8	8	8	8	6	7	7
4	9	9	a	a	a	b	9	9	b	c	9	a	9	9	a	b	9	9
5	a	e	b	c	d	d	b	c	d	d	c	b	a	b	c	c	a	a
6	b	f	e	g	e	f	c	d	e	f	e	c	d	f	e	d	d	b
7	c	g	f	h	g	g	h	e	h	h	g	f	g	g	f	e	f	e
8	d	h	i	i	i	h	i	f	i	i	i	g	h	i	h	g	i	h

Örnek A .15. Bir $(21, 3, 1)-$BIBD'nin blok-zarif etiketlemesi

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	61	66	67	64	70	68	63	60	69	65	62
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	7	8	9	10	11	12	13
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	14	15	16	17	18	19	20

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. D. Erdemir, E. Kolotoğlu, "Block-Graceful Designs", *Journal of Mathematics,* vol. 2023, Article ID 4959576, 2023.

Konferans Bildirisi

1. D. Erdemir, E. Kolotoğlu, "Adaptation of Some Graceful Graph Labeling Methods to Combinatorial Block Designs", *6th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications,* İstanbul, Türkiye, 10-13 Mayıs 2023, ss.72.