T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN GREEN FONKSİYONU

Büşra YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Şubat, 2026

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN GREEN FONKSİYONU

Büşra YILMAZ tarafından hazırlanan tez çalışması 20.02.2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Özlem BAKŞİ, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Ayten KOÇ, Üye
Gebze Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan "Üçüncü Mertebeden Sınır Değer Problemi İçin Green Fonksiyonu" başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Büşra YILMAZ

İmza

Aileme

ve

sevdiklerime...

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam sürecinde bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, değerli görüş ve katkılarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN'a içten teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca beni her koşulda destekleyen, motivasyonumu kaybettiğim anlarda yanımda olan ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan başta ağabeyim Emre YILMAZ ve aileme sonsuz teşekkürler.

Büşra YILMAZ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **vii**

ÖZET **viii**

ABSTRACT **x**

1 GİRİŞ **1**

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 3

1.3 Hipotez 3

2 ÖN BİLGİLER **5**

3 GREEN FONKSİYONUNUN OLUŞURULMASI **8**

3.1 Üçüncü Mertebeden Anti-periyodik Sınır Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu 8

4 ALT VE ÜST SINIRLARIN BELİRLENMESİ **27**

4.1 Alt ve Üst Sınırlar 27

5 SONUÇ **30**

KAYNAKÇA **31**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **34**

SİMGE LİSTESİ

$G(x,s)$	Green Fonksiyonu
W	Wronskian
X	Normlu Uzay
$\delta(x-s)$	Dirac Delta Fonksiyonu
L	Lineer Operatör
$u(x)$	Sınır Değer Probleminin Çözümü
$h(x)$	Homojen Olmayan Terim
w	Anti-periyodik Sınır Koşulunda Kullanılan Periyot Parametresi
[0,w]	Problemin Tanım Aralığı
M	Lineer Denklem Sisteminin Katsayı Matrisi
$detM$	Katsayı Matrisinin Determinantı
$e^{\cdot}$	Üstel Fonksiyon
$sin(.), cos(.)$	Trigonometrik Fonksiyon

ÖZET

Üçüncü Mertebeden Sınır Değer Problemi İçin Green Fonksiyonu

Büşra YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Üçüncü mertebeden sınır değer problemleri, biyoloji, ekonomi ve fizik gibi birçok bilim dalında önemli bir yere sahiptir. Bu tür denklemler, özellikle salınımlı davranışlar, popülasyon dinamikleri, akışkan hareketleri ve kimyasal reaksiyonlar gibi konuların analizi için kullanılmaktadır. Son yıllarda, bu denklemlerin pozitif, periyodik ve anti-periyodik çözümlerinin varlığı üzerine yapılan çalışmalar yoğunlaşmıştır. Bu bağlamda, Green fonksiyonu yöntemi ve sabit nokta teoremleri, söz konusu çözümlerin varlığını ve özelliklerini incelemede güçlü matematiksel araçlar olarak öne çıkmaktadır.

Bu çalışmada,

$$u''' - \rho^3 u = h(t), \qquad t \in [0, w]$$

şeklindeki üçüncü mertebeden diferansiyel denklemin w-anti-periyodik sınır koşullarında Green fonksiyonu oluşturulmuştur. Tezin birinci bölümünde, konuya ilişkin literatür özeti sunulmuş ve çalışmanın amacı ile hipotezi açıklanmıştır. İkinci bölümde, sınır değer problemleri, parametrelerin değişimi metodu, Wronskian, Dirac Delta fonksiyonu ve Green fonksiyonu kavramları gibi çalışmada kullanılan temel tanım ve yöntemlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, anti-periyodik sınır koşullarına sahip üçüncü mertebeden sınır değer problemi için Green fonksiyonu, parametrelerin değişimi yöntemi kullanılarak ayrıntılı biçimde elde edilmiştir. Bu süreçte, Green fonksiyonunun parçalı yapısı ortaya konulmuş ve anti-periyodiklikten kaynaklanan işaret değişimleri açıkça gösterilmiştir. Dördüncü bölümde ise elde edilen Green fonksiyonunun davranışı incelenmiş, fonksiyon için uygun alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Sonuç bölümünde, anti-periyodik sınır koşullarının Green fonksiyonu üzerindeki etkileri değerlendirilmiş ve elde edilen sınırların, ileride ele alınabilecek doğrusal olmayan sınır değer problemlerinin incelenmesinde kullanılabileceği vurgulanmıştır. Bu yönüyle çalışma, üçüncü mertebeden sınır değer problemleri literatürüne katkı sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Green Fonksiyonu, Sınır Değer Problemi, Alt ve Üst Sınırlar, Anti-periyodik Koşullar, Diferansiyel Denklem.

ABSTRACT

Green's Function for Third-Order Boundary Value Problems

Büşra YILMAZ

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Doc. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Third-order boundary value problems hold an important place in many scientific fields such as biology, economics, and physics. These types of equations are used especially for the analysis of topics such as oscillatory behavior, population dynamics, fluid motion, and chemical reactions. In recent years, studies have focused on the existence of positive, periodic, and antiperiodic solutions to these equations. In this context, the Green's function method and fixed point theorems stand out as powerful mathematical tools for investigating the existence and properties of these solutions.

In this study,

$$u''' - \rho^3 u = h(t), \qquad t \in [0, w]$$

has been determined under w-anti-periodic boundary conditions. The first chapter of the thesis presents a literature review on the subject and explains the purpose and hypothesis of the study. The second chapter covers the basic definitions and methods used in the study, such as boundary value problems, the method of variation of parameters, Wronskian, Dirac Delta function, and Green's function.

In the third section, the Green's function for a third-order boundary value problem with anti-periodic boundary conditions was obtained in detail using the method of varying parameters. In this process, the piecewise structure of the Green's function was revealed, and the sign changes arising from anti-periodicity were clearly demonstrated. In the fourth chapter, the behavior of the obtained Green's function is examined, and appropriate lower and upper bounds for the function are determined. In the conclusion section, the effects of anti-periodic boundary conditions on the Green's function are evaluated, and it is emphasized that the obtained bounds can be used in the investigation of nonlinear boundary value problems that may be addressed in the future. In this respect, the study contributes to the literature on third-order boundary value problems.

Keywords: Green's Function, Boundary Value Problem, Lower and Upper Boundaries, Antiperiodic Conditions, Differential Equation.

1
GİRİŞ

1.Literatür Özeti

Green fonksiyonları, doğrusal diferansiyel denklemlerle tanımlanan sınır değer problemlerinin çözümünde temel bir yöntem olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemin teorik altyapısı, Green fonksiyonunun tanımı, temel özellikleri ve doğrusal diferansiyel denklemlere uygulanışı Kythe tarafından ele alınmıştır [1]. Green fonksiyonu temelli integral temsillerin sınır değer problemlerine uygulanışı, özellikle iki noktalı problemler için Ramos tarafından geliştirilen yinelemeli integral-diferansiyel tekniklerle desteklenmiştir [2]. İkinci mertebeden diferansiyel denklemler için Green fonksiyonları yöntemi Seval Çatal tarafından incelenmiş ve mertebe indirgeme yaklaşımıyla genel çözümler elde edilmiştir [3].

Doğrusal adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin Green fonksiyonlarının hesaplanmasına yönelik algoritmik yaklaşımlar Belyaeva ve çalışma arkadaşları tarafından sunulmuştur [5]. Camargo, Chiacchio ve Oliveira ise başlangıç değer problemleriyle ilişkili tek taraflı Green fonksiyonları ile sınır değer problemlerine ait iki taraflı Green fonksiyonlarını karşılaştırmalı olarak incelemiştir [6]. Daha genel olarak, Mkrtchian ve Henkel genelleştirilmiş sınır değer problemleri için Green fonksiyonu temelli çözüm yöntemlerini ele almıştır [8].

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için Green fonksiyonu yaklaşımı Agarwal tarafından integrodiferansiyel denklemler bağlamında incelenmiş ve sınır değer problemleri için temel sonuçlar elde edilmiştir [9]. n'inci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemler ve yerel olmayan sınır koşulları altında Green fonksiyonunun açık ifadesi Cabada, López-Somoza ve Yousfi tarafından verilmiştir [7].

Üçüncü mertebeden diferansiyel denklemler, Green fonksiyonu literatüründe önemlidir. Anderson, üçüncü mertebeden genelleştirilmiş sağ odaklı sınır değer problemleri için Green fonksiyonunu elde etmiştir [10]. Periyodik sınır koşullarına sahip üçüncü mertebeden denklemler için Green fonksiyonunun yapısı ve pozitif çözümlerin varlığı Kosmatov tarafından incelenmiştir [4]. Benzer biçimde Hakl ile Mukhigulashvili, üçüncü mertebeden doğrusal fonksiyonel diferansiyel denklemler için periyodik sınır değer problemlerini ele almıştır [18], [25].

Üçüncü mertebeden doğrusal olmayan sınır değer problemleri için Green fonksiyonu yöntemi önemlidir. Cabada, Minhós ve Santos; süreksiz ve fonksiyonel sınır koşulları içeren üçüncü mertebeden denklemler için çözülebilirlik koşullarını incelemiştir [11]. Chu ve Zhou ile Kong ve Wang, tekil ve doğrusal olmayan üçüncü mertebeden periyodik sınır değer problemlerinde pozitif çözümlerin varlığını araştırmıştır [12], [20]. Ayrıca Palamides ve Smyrlis, kesin işaretli Green fonksiyonu yardımıyla üçüncü mertebeden üç noktalı sınır değer problemlerinde pozitif çözümleri ele almıştır [26].

Çok noktalı sınır koşullarına sahip üçüncü ve daha yüksek mertebeden problemler de literatürde incelenmiştir. Du, Ge ve Zhou üçüncü mertebeden çok noktalı sınır değer problemlerinde tekil pertürbasyon etkilerini analiz etmiştir [13]. Lin, Du ve Ge ile Lu ve Ge, rezonans durumunda çok noktalı sınır değer problemlerinin çözülebilirliğini araştırmıştır [22], [24]. Yerel olmayan sınır koşullarına sahip yüksek mertebeden diferansiyel denklemler Liu ve Ge ile Pang, Ge ve Tian tarafından ele alınmıştır [23], [27].

Pozitif periyodik çözümlerin varlığı ve çokluğu, üçüncü mertebeden sınır değer problemlerinde önemli bir araştırma konusudur. Feng, doğrusal olmayan üçüncü mertebeden denklemler için pozitif periyodik çözümlerin varlığını ve çokluğunu incelemiştir [14], [15]. Li, tam üçüncü mertebeden diferansiyel denklemler için pozitif periyodik çözümler elde etmiştir [21]. Sun ise yarı pozitif ve tekil üçüncü mertebeden sınır değer problemlerinde pozitif periyodik çözümlerin çokluğunu ele almıştır [28]. Yu ve Pei, doğrusal olmayan üçüncü mertebeden periyodik sınır değer problemlerinin çözülebilirliğini incelemiştir [29].

Bu çalışmaların analitik altyapısı, soyut konilerde doğrusal olmayan problemlere ilişkin varlık sonuçlarını içeren Guo ve Lakshmikantham'ın çalışması ile fonksiyonel diferansiyel denklemler teorisini kapsayan Hale ve uygulamalı fonksiyonel analiz yaklaşımlarını sunan Zeidler'in eserleri tarafından desteklenmektedir [17], [19], [30].

Sonuç olarak, literatürde Green fonksiyonları; üçüncü mertebeden diferansiyel denklemler için periyodik, çok noktalı ve yerel olmayan sınır koşulları altında çözümlerin varlığı, teklik ve pozitiflik analizlerinde kullanılmıştır. Bu tez çalışması, söz konusu literatüre dayanarak, üçüncü mertebeden sınır değer problemleri için anti-periyodik sınır koşullarında Green fonksiyonunun bulmayı, alt ve üst sınırlarını incelemeyi amaçlamaktadır.

2. Tezin Amacı

Bu tezin amacı, $[0, \mathrm{w}]$ aralığında ve anti-periyodik sınır koşullarındaki üçüncü mertebe lineer diferansiyel denklem için Green fonksiyonu oluşturmaktır. Bu doğrultuda, parametrelerin değişimi yöntemi kullanılarak Green fonksiyonunun elde edilişi ayrıntılı biçimde açıklanmakta ve çözümün integral temsilinin nasıl ortaya çıktığı gösterilmektedir. Çalışmada ayrıca Green fonksiyonunun parçalı tanımı ve işaret değiştiren yapısının anti-periyodik sınır koşulları ile olan ilişkisi ele alınacaktır. Elde edilen Green fonksiyonunun alt ve üst sınırları belirlenecektir.

3. Hipotez

$\rho > 0 \; ve \; h \in X$ olmak üzere $X = C[0, w]$ uzayında ele alınan,

$$u''' - \rho^3 u = h(t) \tag{1.1}$$

diferansiyel denkleminin,

$$u(0) = -u(w) \tag{1.2}$$

$$u'(0) = -u'(w) \tag{1.3}$$

$$u''(0) = -u''(w) \tag{1.4}$$

denklem (1.2), (1.3), (1.4) w-anti-periyodik sınır koşullarında parametrelerin değişimi metodu ile Green fonksiyonu oluşturulacak ve alt-üst sınırları belirlenecektir.

2
ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 (Sınır Değer Problemi)

Bir diferansiyel denklemin çözümü aranırken, çözüme ait ilave koşulların bağımlı değişkenin kendisi veya türevleri cinsinden tanım aralığının en az iki farklı noktasında verilmesi durumunda, söz konusu problem sınır değer problemi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2 (Parametrelerin Değişimi Metodu)

$$a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(t) \tag{2.1}$$

Denklemin homojen çözümü:

$$u_h = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t) \tag{2.2}$$

dir.

Burada denklemin homojen çözümünün karşılık geldiği y_1, y_2, y_3 çözümleri kullanılarak homojen olmayan üçüncü mertebe diferansiyel denklemin özel çözümü:

$$u_p = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + c_3(t)y_3(t) \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır. Özel çözümün üç kez türevini aldığımızda:

$$c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) + c_3'(t)y_3(t) = 0 \tag{2.4}$$

$$c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) + c_3'(t)y_3'(t) = 0 \tag{2.5}$$

$$c_1'(t)y_1''(t) + c_2'(t)y_2''(t) + c_3'(t)y_3''(t) = h(t) \tag{2.6}$$

elde edilen (2.4), (2.5), (2.6) denklem sistemleri çözülerek $c_1'(t), c_2'(t)\ ve\ c_3'(t)$ bulunur [32].

Tanım 2.3 (Wronskian)

(n-1). mertebe sürekli türeve sahip t değişkenine bağlı fonksiyonlar $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$ olmak üzere bu fonksiyonların Wronskianı:

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

şeklindedir. f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Wronskianını örnek gösterirsek:

$$W = f_1(t)f_2'(t) - f_1'(t)f_2(t) \tag{2.8}$$

şeklindedir [33].

Tanım 2.4 (Dirac Delta Fonksiyonu)

f(x) sürekli fonksiyonu için Dirac Delta fonksiyonu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \tag{2.9}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımda Dirac Delta aşağıdaki özellikleri sağlar:

$x \neq a$ için sıfırdır,

$x = a$ noktasında sonsuzdur,

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = 1.$

Tanım 2.5 (Green Fonksiyonu)

$$L[u] = h(x) \text{ için } 0 \leq x \leq w \tag{2.10}$$

şeklinde lineer diferansiyel denklemi için L bir diferansiyel operatördür. Denklem (2.10)'un genel çözümü,

$$u = u_h + u_p \tag{2.11}$$

ile verilir. Verilen sınır koşullarında u_h, L[u]=0 homojen denkleminin çözümü ve u_p, L[u]=h(t) homojen olmayan denkleminin özel çözümüdür. Homojen olmayan çözüm, G(x,s) Green fonksiyonunun bir integrali olarak temsil edilir. Bu durumda,

$$u_p(x) = \int_0^w G(x,s)h(s)ds \tag{2.12}$$

Denklem (2.10)'un Green fonksiyonu,

$$L[G(x,s)] = \delta(x-s) \tag{2.13}$$

eşitliğini sağlar ve sınır şartlarına uyar. Burada $\delta(x-s)$ Dirac Delta fonksiyonudur.

Green Fonksiyonunun Özellikleri

1) $G(x,s)$ tüm x = s noktalarında süreklidir.

2) $G(x$,s) nın x değişkenine göre türevi $x \neq$ s noktalarında sürekli x = s için

$$\lim_{x \to s^+} \frac{\partial G}{\partial x} - \lim_{x \to s^-} \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{a_n(s)} \tag{2.14}$$

olur. Burada $a_n(s)$ diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeli türevin katsayısıdır.

3) $G(x$,s) her $x \neq$ s için diferansiyel denklemin homojen kısmını ve sınır şartlarını sağlar.

3
GREEN FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI

3.1 Üçüncü Mertebeden Anti-periyodik Sınır Değer Problemleri İçin Green Fonksiyonu

$\rho > 0$ ve $h \in X$ olmak üzere,

$$u''' - \rho^3 u = h(t) \tag{3.1}$$

$$u(0) = -u(w),\ u'(0) = -u'(w),\ u''(0) = -u''(w) \tag{3.2}$$

w-anti-periyodik (3.2) sınır koşullu üçüncü mertebeden (3.1) diferansiyel denkleminin Green fonksiyonunu bulalım.

$$L[u] = h(t)\ için\ \ 0 \le t \le w$$

şeklinde lineer diferansiyel denklemi için L bir diferansiyel operatördür.

$$L[u] = u''' - \rho^3 u \tag{3.3}$$

Denklem (3.3)'ün genel çözümü,

$$u = u_h + u_p \tag{3.4}$$

ile verilir. Verilen denklem (3.2) sınır koşullarında u_h, L[u]=0 homojen denkleminin çözümü ve u_p, L[u]=h(t) homojen olmayan denkleminin özel çözümüdür. Homojen olmayan çözüm, G(x,s) Green fonksiyonunun bir integrali olarak temsil edilir. Böylece denklem (3.5) şeklinde gösterilir.

$$u_p(t) = \int_0^w G(t,s)h(s)ds \tag{3.5}$$

Denklem (3.3)'ün Green fonksiyonu,

$$L[G(t,s)] = \delta(t-s) \tag{3.6}$$

denklem (3.6) Dirac Delta fonksiyonunu ve denklem (3.2) sınır koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

Önce denklem (3.3)'ün homojen kısmını çözelim,

$$u''' - \rho^3 u = 0 \tag{3.7}$$

denklem (3.7) in karakteristik denklemi,

$$r^3 = \rho^3 \Rightarrow r_1 = p, r_2 = \frac{-\rho}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\rho, r_3 = -\frac{\rho}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\rho \tag{3.8}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (3.8) karakteristik denkleminden elde edilen temel çözümler,

$$y_1(t) = e^{\rho t}, \qquad y_2(t) = e^{-\frac{\rho t}{2}} cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t\right), \qquad y_3(t) = e^{\frac{-\rho t}{2}} sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t\right) \tag{3.9}$$

şeklinde olur. Green fonksiyonu elde etmek için homojen olmayan özel çözümü bulmalıyız. Bu amaçla özel çözüm,

$$u_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + c_3(t)y_3(t) \tag{3.10}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $c_1(t)$, $c_2(t)$ ve $c_3(t)$ t'ye bağlı fonksiyonlar olarak ele alınmıştır. Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için öncelikle türevleri cinsinden ifade edilmeleri gerekmektedir. Her bir $c_i(t)$ fonksiyonu başlangıç değeri ve türevinin integrali cinsinden,

$$c_i(t) = c_i(0) + \int_0^t c_i'(s)ds, \qquad i = 1,2,3 \text{ ve } 0 \le t \le w \tag{3.11}$$

şeklinde yazılır. Burada $c_1'(t), c_2'(t), c_3'(t)$ ve $c_1(0), c_2(0), c_3(0)$ değerleri bulmamız gerekir. İlk olarak parametrelerin değişimi metodundan yararlanarak türevleri elde edelim.

$$c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) + c_3'(t)y_3(t) = 0$$

$$c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) + c_3'(t)y_3'(t) = 0$$

$$c_1'(t)y_1''(t) + c_2'(t)y_2''(t) + c_3'(t)y_3''(t) = h(t) \tag{3.12}$$

Üç bilinmeyenli lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini matrisyel olarak ifade edersek:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1{}' & y_2{}' & y_3{}' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

elde ederiz. (3.13) katsayı matrisinin determinantı y_1, y_2 ve y_3 ün Wronskianıdır.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1{}' & y_2{}' & y_3{}' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}. \tag{3.14}$$

Şimdi $c_1{}'(t),\ c_2{}'(t),\ c_3{}'(t)$ değerlerini Cramer metodu ile bulalım.

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2{}' & y_3{}' \\ h(t) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{W} \tag{3.15}$$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1{}' & 0 & y_3{}' \\ y_1'' & h(t) & y_3'' \end{vmatrix}}{W} \tag{3.16}$$

$$c_3'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1{}' & y_2{}' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & h(t) \end{vmatrix}}{W} \tag{3.17}$$

dir. Bu eşitliklerin hesaplanması için öncelikle gerekli olan türev değerlerini bulalım:

$$y_1(t) = e^{\rho t}, \qquad y_1{}'(t) = \rho e^{\rho t}, \qquad y_1{}''(t) = \rho^2 e^{\rho t}$$

$$y_2(t) = e^{-\frac{\rho t}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t),\ y_2{}'(t) = e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right),$$

$$y_2{}''(t) = e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$y_3(t) = e^{\frac{-\rho t}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t),\ \ y_3'(t) = e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right),$$

$$y_3''(t) = e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right).$$

Bulduğumuz bu türev değerlerini Wronskian determinantında yerine yazarsak:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\rho t} & e^{-\frac{\rho t}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) & e^{\frac{-\rho t}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) \\ \rho e^{\rho t} & e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) & e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) \\ \rho^2 e^{\rho t} & e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) & e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) \end{vmatrix}$$

$$= e^{\rho t}.e^{-\frac{\rho t}{2}}.e^{-\frac{\rho t}{2}} \times$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & e^{-\frac{\rho t}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) & e^{\frac{-\rho t}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) \\ \rho & e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) & e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) \\ \rho^2 & e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) & e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) \end{vmatrix}$$

$$= e^{\rho t}.e^{-\frac{\rho t}{2}}.e^{-\frac{\rho t}{2}}$$

$$\times\left\{\left(-\frac{\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\left(-\frac{\rho^2}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$+\left(-\frac{\rho^3}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\left(sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$+\left(\rho^2 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\left(-\frac{\rho}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$-\left(\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\left(-\frac{\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$-\left(-\frac{\rho}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\left(-\frac{\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$\left.-\left(\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\left(-\frac{\rho^2}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\right\}$$

$$= \frac{\rho^3}{4}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)+\frac{\sqrt{3}}{4}\rho^3 cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)+\frac{\sqrt{3}}{4}\rho^3 sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)$$

$$+\frac{3}{4}\rho^3 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)-\frac{\rho^3}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3 sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)-\frac{\rho^3}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3 cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)+\frac{\rho^3}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3 sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)-\frac{\rho^3}{4}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\rho^3 sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)+\frac{\sqrt{3}}{4}\rho^3 cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)$$

$$-\frac{3}{4}\rho^3 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)+\frac{\rho^3}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3 cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\rho^3\left(cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3\left(cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3\left(sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{4}\rho^3\left(cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$= 2\frac{\sqrt{3}}{4}\rho^3 + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 \tag{3.18}$$

olarak buluruz. (3.18) ifadesinde bulduğumuz bu W değeri ${c_1}'(t), {c_2}'(t)$ ve ${c_3}'(t)$ için payda olacaktır.

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & {y_2}' & {y_3}' \\ h(t) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{W} = \frac{h(t)\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ {y_2}' & {y_3}' \end{vmatrix}}{W} \tag{3.19}$$

${c_1}'(t)$ için pay değerini hesaplarsak:

$$h(t)\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ {y_2}' & {y_3}' \end{vmatrix} = h(t)(y_2{y_3}' - y_3{y_2}')$$
$$= h(t)\left[e^{-\frac{\rho t}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right.\right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$
$$\left. - e^{\frac{-\rho t}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\right]$$
$$= h(t)\left[e^{-\rho t}\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\left(cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + sin^2(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\right]$$
$$= h(t).e^{-\rho t}\frac{\sqrt{3}}{2}\rho$$

buluruz. Ve (3.19) dekleminde yerine yazarsak:

$$c_1'(t) = \frac{e^{-\rho t}\frac{\sqrt{3}}{2}\rho.h(t)}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3} = \frac{e^{-\rho t}}{\rho^2}h(t) \tag{3.20}$$

elde ederiz. Şimdi sırayla aynı işlemleri $c_2{}'(t)$ ve $c_3{}'(t)$ için yapalım.

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1{}' & 0 & y_3{}' \\ y_1'' & h(t) & y_3'' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-h(t)\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1{}' & y_3{}' \end{vmatrix}}{W} \qquad (3.21)$$

$c_2{}'(t)$ için pay değerini hesaplarsak:

$$-h(t)\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ y_1{}' & y_3{}' \end{vmatrix} = -h(t)(y_1 y_3{}' - y_3 y_1{}')$$

$$= -h(t)\left[e^{\rho t}.e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\right.$$

$$\left. - e^{\frac{-\rho t}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).\rho e^{\rho t}\right]$$

$$= -h(t).e^{\frac{\rho t}{2}}\left[\left(-\frac{\rho}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\right.$$

$$\left. - \rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right] = -h(t)e^{\frac{\rho t}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{3\rho}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$= h(t).\rho e^{\frac{\rho t}{2}}\left(\frac{3}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

buluruz. Ve (3.21) denkleminde yerine yazarsak:

$$c_2{}'(t) = \frac{\rho e^{\frac{\rho t}{2}}\left(\frac{3}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)h(t)}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3}$$

$$= \frac{e^{\frac{\rho t}{2}}}{\rho^2}h(t).\frac{\frac{3}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3}$$

$$= \frac{e^{\frac{\rho t}{2}}}{\rho^2}h(t).\left(\frac{\sqrt{3}}{3}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{1}{3}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$= \frac{-2}{3\rho^2}e^{\frac{\rho t}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t + \frac{\pi}{3}\right)h(t) \qquad (3.22)$$

elde ederiz.

Son olarak,

$$c_3'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & h(t) \end{vmatrix}}{W} = \frac{h(t)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}{W} \tag{3.23}$$

$c_3'(t)$ için pay değerini hesaplarsak:

$$h(t)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = h(t)(y_1 y_2' - y_2 y_1')$$

$$= h(t)\left[e^{\rho t}.e^{-\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\right.$$

$$\left. - e^{\frac{-\rho t}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t).\rho e^{\rho t}\right]$$

$$= h(t)e^{\frac{\rho t}{2}}\left[\left(-\frac{\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)\right]$$

$$= h(t)e^{\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{3}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

$$= h(t)\rho e^{\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{3}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t) - \frac{\sqrt{3}}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t)\right)$$

buluruz. Ve (3.23) denkleminde yerine yazarsak:

$$c_3'(t) = \frac{\rho e^{\frac{\rho t}{2}}\left(-\frac{3}{2}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t\right)\right)h(t)}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3}$$

$$= \frac{e^{\frac{\rho t}{2}}}{\rho^2}h(t).\frac{\left(-\frac{1}{3}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t\right)\right)}{\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3}$$

$$= \frac{-2}{3\rho^2}e^{\frac{\rho t}{2}}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t + \frac{\pi}{3}\right).h(t)$$

$$= \frac{-2}{3\rho^2}e^{\frac{\rho t}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho t - \frac{\pi}{6}\right)h(t) \tag{3.24}$$

elde ederiz.

$c_1'(t), c_2'(t)$ ve $c_3'(t)$ için bulduğumuz (3.20), (3.22), (3.24) denklem eşitliklerini integre ettiğimizde $c_1(t), c_2(t)$ ve $c_3(t)$ değerlerinde $t = 0$ almak suretiyle bulacağımız $c_1(0), c_2(0)$ ve $c_3(0)$ değerleri ile anti-periyodik sınır şartlarını sağlayan sistemi oluşturabiliriz. Oluşan lineer denklem sisteminin çözümü ile bu değerleri elde etmiş olacağız.

Anti-periyodik sınır şartları:

$$u(0) = -u(w) \quad \Rightarrow \quad u(0) + u(w) = 0,$$

$$u'(0) = -u'(w) \quad \Rightarrow \quad u'(0) + u'(w) = 0,$$

$$u''(0) = -u''(w) \Rightarrow u''(0) + u''(w) = 0,$$

$$c_i(t) = c_i(0) + \int_0^t c_i'(s)ds \; 0 \le t \le w. \tag{3.25}$$

$$\int_0^t c_i'(s)ds = A_i \, , i = 1,2,3 \tag{3.26}$$

dersek,

$$u(t) = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)y_i(t) = \sum_{i=1}^{3} (c_i(0) + A_i)y_i \tag{3.27}$$

elde edilir. Bu eşitlik, $t = 0$ ve $t = w$ için (3.27) anti-periyodik sınır şartlarında yerine yazılınca üç denklem elde ederiz:

$$u(0) + u(w) = \sum_{i=1}^{3} c_i(0)(y_i(0) + y_i(w)) + \sum_{i=1}^{3} A_i y_i(w) = 0,$$

$$u'(0) + u'(w) = \sum_{i=1}^{3} c_i(0)(y_i'(0) + y_i'(w)) + \sum_{i=1}^{3} A_i y_i'(w) = 0,$$

$$u''(0) + u''(w) = \sum_{i=1}^{3} c_i(0)(y_i''(0) + y_i''(w)) + \sum_{i=1}^{3} A_i y_i''(w) = 0.$$

Elde edilen koşullar bir araya getirildiğinde, bilinmeyen katsayılar $c_1(0), c_2(0)$ ve $c_3(0)$ için bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin matris gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} y_1(w)+y_1(0) & y_2(w)+y_2(0) & y_3(w)+y_3(0) \\ y_1'(w)+y_1'(0) & y_2'(w)+y_2'(0) & y_3'(w)+y_3'(0) \\ y_1''(w)+y_1''(0) & y_2''(w)+y_2''(0) & y_3''(w)+y_3''(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \\ c_3(0) \end{bmatrix}$$

$$= -\sum_{1}^{3} A_i\big(y_i(w)+y_i'(w)+y_i''(w)\big) \qquad (3.28)$$

Burada yazılan ifade, (3.31) numaralı lineer denklem sistemini temsil etmekte olup, sistemin çözümü determinant yöntemi kullanılarak yapılacaktır. Lineer sistemde yer alan katsayılar düzenlenerek, sistemin katsayı matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$M = \begin{bmatrix} y_1(w)+y_1(0) & y_2(w)+y_2(0) & y_3(w)+y_3(0) \\ y_1{}'(w)+y_1{}'(0) & y_2{}'(w)+y_2{}'(0) & y_3{}'(w)+y_3{}'(0) \\ y_1{}''(w)+y_1{}''(0) & y_2{}''(w)+y_2{}''(0) & y_3{}''(w)+y_3{}''(0) \end{bmatrix}$$

Bu tanımla birlikte lineer sistem,

$$M.c_i(0) = -A_i$$

şeklinde ifade edilebilir. Sağ taraf terimlerini daha sade bir biçimde yazabilmek amacıyla, aşağıdaki vektör tanımı yapılır:

$$B = [y_i(w)+y_i{}'(w)+y_i{}''(w)]^T.$$

Bu durumda, sağ taraf ifadeleri B vektörü cinsinden yeniden düzenlenmiş olur.

$$-A_i.B = \sum_{k=1}^{3}(-A_k)B^{(k)}$$

Cramer kuralı uygulanarak, determinantlar yardımıyla çözüm elde edilecektir. Bu amaçla, M matrisinin ilgili sütunları $B^{(k)}$ vektörü ile değiştirilerek aşağıdaki determinantlar tanımlanır:

$$D_{ik} = det\big[M_1,\dots M_{i-1}, B^{(k)}, M_{i+1},\dots,M_3\big]^T.$$

Böylece, determinantın lineerliği kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$det\left(M^{(i)}\right) = -\sum_{k=1}^{3} A_k D_{ik}.$$

Son olarak, Cramer kuralı yardımıyla bilinmeyen katsayılar aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$c_i = -\frac{det\left(M^{(i)}\right)}{detM}.$$

Bu nedenle, bilinmeyen katsayıların açık olarak elde edilebilmesi için öncelikle M matrisinin determinantı hesaplanacaktır. Temel çözüm fonksiyonlarının açık ifadeleri kullanılarak, M matrisinin elemanları aşağıda sırasıyla hesaplanmıştır.

$$y_1(w) + y_1(0) = e^{\rho w} + 1$$

$$y_1'(w) + y_1'(0) = \rho(e^{\rho w} + 1)$$

$$y_1''(w) + y_1''(0) = \rho^2(e^{\rho w} + 1)$$

$$y_2(w) + y_2(0) = e^{\frac{-\rho w}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + 1$$

$$y_2'(w) + y_2'(0) = e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho}{2}$$

$$y_2''(w) + y_2''(0) = e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho^2}{2}$$

$$y_3(w) + y_3(0) = e^{\frac{-\rho w}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)$$

$$y_3'(w) + y_3'(0) = e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho$$

$$y_3''(w) + y_3''(0) = e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2$$

Değerleri M matrisinde yerine yazalım:

$$\begin{bmatrix} e^{\rho w} + 1 & e^{\frac{-\rho w}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + 1 & e^{\frac{-\rho w}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ \rho(e^{\rho w} + 1) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \\ \rho^2(e^{\rho w} + 1) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho^2}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 \end{bmatrix}$$

Determinantı hesaplamak için birinci sütuna göre Laplace açılımı yaparsak:

$$detM = M_{11}\begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} - M_{21}\begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + M_{31}\begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{vmatrix}$$

$$detM = (e^{\rho w}+1)\left(1\begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} - \rho\begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} + \rho^2\begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{vmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = M_{22}M_{33} - M_{23}M_{32}$$

$$= 4\left(\frac{\rho}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + e^{-\rho w}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + e^{-\rho w}\right)$$

$$\begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = M_{12}M_{33} - M_{13}M_{32}$$

$$= -2\frac{\rho}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + e^{-\rho w}\right)$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2}\rho^2\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + e^{-\rho w}\right)$$

$$\begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{vmatrix} = M_{12}M_{23} - M_{13}M_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + e^{-\rho w}\right)$$

$$detM = (e^{\rho w}+1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^3 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\rho^2\right)\rho + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right)\rho^2\right)\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + e^{-\rho w}\right)$$

$$= (e^{\rho w}+1)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3\right)\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + e^{-\rho w}\right).$$

Bulduğumuz M matrisinin determinantı; $c_1(0), c_2(0)\ ve\ c_3(0)$ eşitliklerini Cramer ile bulurken payda görevi sağlar.

$$c_1(0) = \frac{-detM^{(1)}}{detM} = \frac{-[(A_1D_{11} + A_2D_{12} + A_3D_{13})]}{detM}$$

Şimdi, Cramer kuralı gereği birinci bilinmeyen katsayıya karşılık gelen yardımcı determinant hesaplanacaktır. D_{11} determinantı M matrisinin birinci sütununun $B^{(1)}$ vektörü ile değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

$$D_{11} = det\left[B^{(1)}, M_2, M_3\right]^T$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\rho w} & e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + 1 & e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ \rho e^{\rho w} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \\ \rho^2 e^{\rho w} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho^2}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 \end{vmatrix}$$

$$= e^{\rho w}\begin{vmatrix} 1 & e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + 1 & e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ \rho & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \\ \rho^2 & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho^2}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 \end{vmatrix}$$

$$= e^{\rho w}.\left(1\begin{vmatrix} e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \\ e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho^2}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 \end{vmatrix}\right.$$

$$- \rho\begin{vmatrix} e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + 1 & e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho^2}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 \end{vmatrix}$$

$$\left. + \rho^2\begin{vmatrix} e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + 1 & e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\rho}{2} & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3\left(e^{\rho w} + 1 + 2e^{\frac{\rho w}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w\right),$$

Benzer şekilde yapılan hesaplamalar sonucunda,

$$D_{12} = det\left[B^{(2)}, M_2, M_3\right]^T = 0,$$

$$D_{13} = det\left[B^{(3)}, M_2, M_3\right]^T = 0.$$

olduğu görülür. Böylece, yalnızca D_{11} determinantı katsayı hesabında etkili olmakta, diğer terimler katkı vermemektedir. Bu sonuçlar Cramer kuralında yerine yazıldığında, $c_1(0)$ katsayısı elde edilir.

$$c_1(0) = -\frac{(A_1 D_{11})}{detM} = \frac{-\int_0^w \frac{e^{-\rho s}}{3\rho^2} h(s)ds . \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 (e^{\rho w} + 1 + 2e^{\frac{\rho w}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)}{(e^{\rho w}+1)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3\right)\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}} cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w\right) + e^{-\rho w}\right)}$$

$$= \frac{-\int_0^w \frac{e^{-\rho s}}{3\rho^2} h(s)ds . \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\rho w}(1 + e^{-\rho w} + 2e^{\frac{-\rho w}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)}{(e^{\rho w}+1)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3\right)\left(1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}} cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w\right) + e^{-\rho w}\right)}$$

$$= -\int_0^w \frac{e^{\rho(w-s)}}{3\rho^2(e^{\rho w}+1)} h(s)ds$$

Aynı yöntem izlenerek, $c_2(0)$ ve $c_3(0)$ katsayıları için de yardımcı determinantlar hesaplanır. Dolayısıyla:

$$c_2(0) = \frac{-detM^{(2)}}{detM} = \frac{-[(A_1 D_{21} + A_2 D_{22} + A_3 D_{23})]}{detM}$$

$$D_{21} = det\left[M_1, B^{(1)} M_3\right]^T = 0$$

$D_{22} = det\left[M_1, B^{(2)} M_3\right]^T$

$$\begin{vmatrix} e^{\rho w}+1 & e^{-\frac{\rho w}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) & e^{\frac{-\rho w}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ \rho(e^{\rho w}+1) & e^{-\frac{\rho w}{2}}\left(-\frac{\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \\ \rho^2(e^{\rho w}+1) & e^{-\frac{\rho w}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 \end{vmatrix}$$

$$= (e^{\rho w}+1)3\rho^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\rho(e^{-\rho w} + e^{\frac{-\rho w}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w))$$

$D_{23} = det\left[M_1, B^{(3)} M_3\right]^T$

$$\begin{vmatrix} e^{\rho w}+1 & e^{\frac{-\rho w}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) & e^{\frac{-\rho w}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ \rho(e^{\rho w}+1) & e^{-\frac{\rho w}{2}}\left(-\frac{\rho}{2} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \\ \rho^2(e^{\rho w}+1) & e^{-\frac{\rho w}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 \end{vmatrix}$$

$$= (e^{\rho w}+1)3\rho^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\rho e^{\frac{-\rho w}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)$$

$$A_2 D_{22} + A_3 D_{23} =$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{-\rho w}{2}}\left[\frac{-2}{3\rho^2}\int_0^w e^{\frac{\rho s}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s + \frac{\pi}{3}\right)h(s)ds\left(e^{\frac{-\rho w}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w\right)\right)\right]$$

$$+ \left[\frac{-2}{3\rho^2}\int_0^w e^{\frac{\rho s}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s - \frac{\pi}{6}\right)h(s)ds\,.\,sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right]$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{-\rho w}{2}}\left[\frac{-2}{3\rho^2}e^{\frac{\rho s}{2}}\int_0^w \left(e^{\frac{-\rho w}{2}} + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w\right)\right)cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s + \frac{\pi}{3}\right)\right.$$

$$\left. + sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w\right)cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s - \frac{\pi}{6}\right)h(s)ds\right]$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{-2}{3\rho^2}\left[\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s + \frac{\pi}{3})\right.$$

$$+ cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s + \frac{\pi}{3})$$

$$\left. + sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s - \frac{\pi}{6}\right)h(s)ds\right]$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{-2}{3\rho^2}\left[\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s + \frac{\pi}{3})\right.$$

$$+ cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s + \frac{\pi}{3}) + sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s$$

$$\left. + \frac{\pi}{3})h(s)ds\right]$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{-2}{3\rho^2}\left[\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho s) + cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho s\right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{3})h(s)ds\right]$$

$$= (e^{\rho w}+1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{-2}{3\rho^2}\left[\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s)+sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s+w))h(s)ds\right]$$

$$c_2(0)=\frac{-[(A_2D_{22}+A_3D_{23})]}{detM}$$

$$=\frac{(e^{\rho w}+1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{2}{3\rho^2}\left[\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s)+sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s+w))h(s)ds\right]}{(e^{\rho w}+1)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3\right)\left(1+2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+e^{-\rho w}\right)}$$

$$=\frac{e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}2\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s)+sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s+w))h(s)ds}{3\rho^2\left(1+2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+e^{-\rho w}\right)}$$

$$c_3(0)=\frac{-detM^{(3)}}{detM}=\frac{-[(A_1D_{31}+A_2D_{32}+A_3D_{33})]}{detM}$$

$$D_{31}=det\left[M_1,M_2,B^{(1)}\right]^T=0$$

$$D_{32}=det\left[M_1,M_2,B^{(2)}\right]^T$$

$$=\begin{vmatrix} e^{\rho w}+1 & e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+1 & e^{-\frac{\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ \rho(e^{\rho w}+1) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right)-\frac{\rho}{2} & e^{-\frac{\rho w}{2}}\left(-\frac{\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) \\ \rho^2(e^{\rho w}+1) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right)-\frac{\rho^2}{2} & e^{-\frac{\rho w}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) \end{vmatrix}$$

$$=(e^{\rho w}+1)3\rho^2\frac{\sqrt{3}}{2}\rho e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)$$

$$D_{33}=det\left[M_1,M_2,B^{(3)}\right]^T$$

$$=\begin{vmatrix} e^{\rho w}+1 & e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+1 & e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w) \\ \rho(e^{\rho w}+1) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right)-\frac{\rho}{2} & e^{-\frac{\rho w}{2}}\left(-\frac{\rho}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) \\ \rho^2(e^{\rho w}+1) & e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(\frac{-\rho^2}{2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right)-\frac{\rho^2}{2} & e^{-\frac{\rho w}{2}}\left(-\frac{\rho^2}{2}sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)\right) \end{vmatrix}$$

$$=(e^{\rho w}+1)3\rho^2\frac{\sqrt{3}}{2}\rho e^{\frac{-\rho w}{2}}(e^{\frac{-\rho w}{2}}+cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w))$$

$$A_2D_{32} + A_3D_{33} =$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{-\rho w}{2}}\left[\frac{-2}{3\rho^2}\int_0^w e^{\frac{\rho s}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s + \frac{\pi}{3}\right)h(s)ds\,.sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w\right)\right]$$

$$+\left[\frac{-2}{3\rho^2}\int_0^w e^{\frac{\rho s}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s - \frac{\pi}{6}\right)h(s)ds\,.\left(e^{\frac{-\rho w}{2}} + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w\right)\right)\right]$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{-\rho w}{2}}\left[\frac{-2}{3\rho^2}e^{\frac{\rho s}{2}}\int_0^w (e^{\frac{-\rho w}{2}} + cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w))cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s - \frac{\pi}{6})\right.$$

$$\left. + sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s + \frac{\pi}{3}\right)h(s)ds\right]$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{-2}{3\rho^2}\left[\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s - \frac{\pi}{6})\right.$$

$$+ cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s - \frac{\pi}{6}) + sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)sin(\frac{\pi}{6}$$

$$\left. - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho s)h(s)ds\right]$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{-2}{3\rho^2}\left[\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho s) + cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)cos(\frac{\pi}{6}\right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho s) + sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho s)h(s)ds\right]$$

$$= (e^{\rho w} + 1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{-2}{3\rho^2}\left[\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho s) + cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s\right.$$

$$\left. + w))h(s)ds\right]$$

$$c_3(0) = \frac{-[(A_2D_{32} + A_3D_{33})]}{detM}$$

$$= \frac{-\left[(e^{\rho w}+1)\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3 e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}\frac{-2}{3\rho^2}\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s)+cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s+w))h(s)ds\right]}{(e^{\rho w}+1)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\rho^3\right)\left(1+2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+e^{-\rho w}\right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{\rho(s-w)}{2}}2\int_0^w e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho s)+cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s+w))h(s)ds}{3\rho^2\left(1+2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w)+e^{-\rho w}\right)}$$

şeklinde elde edilen katsayı ifadeleri kullanılarak, problemin genel çözümü Green fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilir. Bu amaçla, çözüm fonksiyonu temel çözümler cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır:

$$u(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + c_3(t)y_3(t)$$

$$= c_1(0)y_1(t) + \int_0^t c_1'(s)ds\, y_1(t) + c_2(0)y_2(t) + \int_0^t c_2'(s)ds y_2(t) + c_3(0)y_3(t)$$

$$+ \int_0^t c_3'(s)ds y_3(t) =$$

$$= -\int_0^w \frac{e^{\rho(w-s)}}{3\rho^2(e^{\rho w}+1)}h(s)ds.e^{\rho t} + \int_0^t \frac{e^{-\rho s}}{3\rho^2}h(s)ds.e^{\rho t}$$

$$+ \int_0^t \frac{-2e^{\frac{\rho(s-t)}{2}}}{3\rho^2}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s-t)+\frac{\pi}{3})h(s)ds$$

$$+ \int_0^w \frac{2e^{\frac{\rho(s-w-t)}{2}}\left[e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s-t))+sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s+w-t))\right]}{3\rho^2(1+2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w+e^{-\rho w})}h(s)ds.$$

Bu ifade dikkate alındığında, çözümün Green fonksiyonu:

$$G(t,s) =$$

$$\begin{cases} (c_1(0)+\int_0^t c_1'(s)ds)y_1(t) + (c_2(0)+\int_0^t c_2'(s)ds)y_2(t) + (c_3(0)+\int_0^t c_3'(s)ds)y_3(t), & 0 \le s \le t \\ c_1(0)y_1(t) + c_2(0)y_2(t) + c_3(0)y_3(t), & t \le s \le w \end{cases}$$

olur. Buna göre Green fonksiyonu, s ve t değişkenlerinin büyüklük ilişkisine bağlı olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$0 \le s \le t$ için:

$$\int_0^t \frac{e^{\rho(t-s)}}{3\rho^2(e^{\rho w}+1)}h(s)ds$$

$$+\int_0^t \frac{2e^{\frac{\rho(s-t)}{2}}\left[e^{-\rho w}sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s-t))+e^{\frac{-\rho w}{2}}sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s+w-t))\right]}{3\rho^2(1+2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w+e^{-\rho w})}h(s)ds$$

$$+\int_0^t \frac{-2e^{\frac{\rho(s-t)}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s-t)+\frac{\pi}{3})}{3\rho^2}h(s)ds$$

$t \le s \le w$ için:

$$\int_t^w \frac{-e^{\rho(t+w-s)}}{3\rho^2(e^{\rho w}+1)}h(s)ds$$

$$+\int_t^w \frac{2e^{\frac{\rho(s-w-t)}{2}}\left[e^{-\frac{\rho w}{2}}sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s-t))+sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho(s+w-t))\right]}{3\rho^2(1+2e^{\frac{-\rho w}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w+e^{-\rho w})}h(s)ds.$$

Bu tanım, Green fonksiyonunun süreklilik ve sınır koşullarını sağlayacak biçimde elde edildiğini göstermektedir.

Bu bölümde, üçüncü mertebeden diferansiyel denklem için anti-periyodik sınır şartları altında Green fonksiyonu açık olarak elde edilmiştir. Elde edilen Green fonksiyonu, problemin çözümünü integral biçiminde ifade etmeye olanak sağlamaktadır.

4
ALT VE ÜST SINIRLARIN BELİRLENMESİ

4.1 Alt ve Üst Sınırlar

$u_p(t) = \int_0^w G(t,s)h(s)\,ds$ Green fonksiyonu G(t,s) iki parçadan oluşur. İkinci parça anti-periyodik sınır şartları gereği negatiftir.

$$G(t,s) = G_E(t,s) + G_T(t,s). \tag{4.1}$$

Burada;

$G_E(t,s)$: üstel parça,

$G_T(t,s)$: trigonometrik parça,

olarak ifade edilir.

Sınırlar için kullanacağımız temel eşitsizlik:

$$|G(t,s)| = |G_E(t,s) + G_T(t,s)| \leq |G_E(t,s)| + |G_T(t,s)| \tag{4.2}$$

dir. İlk olarak üstel terim $G_E(t,s)$ için üst sınır bulalım.

$s \leq t \;\; ise$

$$0 \leq t - s \leq w$$

$$1 \leq e^{\rho(t-s)} \leq e^{\rho w}$$

$$\frac{1}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} \leq \frac{e^{\rho(t-s)}}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} \leq \frac{e^{\rho w}}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} \tag{4.3}$$

$t \leq s \;\; ise$

$$0 \leq t + w - s \leq w$$

$$1 \leq e^{\rho(t+w-s)} \leq e^{\rho w}$$

$$\frac{-e^{\rho w}}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} \leq \frac{-e^{\rho(t-s)}}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} \leq \frac{-1}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} \tag{4.4}$$

Buradan tek bir mutlak değer üst sınırı çıkar:

$$|G_E(t,s)| \leq \frac{e^{\rho w}}{3\rho^2(1+e^{\rho w})}. \tag{4.5}$$

Şimdi de trigonometrik terim için üst sınır bulalım. Trigonometrik terimlerin paydasında:

$$1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}} cos\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w + e^{-\rho w}$$

vardır, $cos\theta \geq -1$ olduğundan:

$$1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}} cos\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w + e^{-\rho w} \geq 1 - 2e^{\frac{-\rho w}{2}} + e^{-\rho w} = (1 - e^{\frac{-\rho w}{2}})^2$$

sağlanır. Dolayısıyla:

$$\frac{1}{1 + 2e^{\frac{-\rho w}{2}} cos\frac{\sqrt{3}}{2}\rho w + e^{-\rho w}} \leq \frac{1}{1 - 2e^{\frac{-\rho w}{2}} + e^{-\rho w}} = \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)^2} \tag{4.6}$$

dır. Trigonometrik terimlerin toplamında kesin olarak bildiğimiz

$$|sin\theta| \leq 1$$

$$|cos\theta| \leq 1$$

$$e^{\frac{-\rho}{2}(s-t)} \leq \frac{1}{e^{\frac{-\rho w}{2}}}$$

$$|trigonometrikler| \leq 2(1 + e^{\frac{-\rho w}{2}})$$

ifadelerini göz önüne alırsak üst sınırı:

$$|G_T(t,s)| \leq \frac{1}{3\rho^2} \frac{1}{e^{\frac{-\rho w}{2}}} 2\left(1 + e^{\frac{-\rho w}{2}}\right) \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)^2} = \frac{2\left(1 + e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)}{3\rho^2 e^{\frac{-\rho w}{2}} \left(1 - e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)^2} \tag{4.7}$$

şeklinde buluruz.

(4.1) ve (4.2) gereği,

$$|G(t,s)| \leq \frac{e^{\rho w}}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} + \frac{2\left(1+e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)}{3\rho^2 e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(1-e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)^2}$$

$$-\left[\frac{e^{\rho w}}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} + \frac{2\left(1+e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)}{3\rho^2 e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(1-e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)^2}\right] \leq G(t,s)$$

$$\leq \left[\frac{e^{\rho w}}{3\rho^2(1+e^{\rho w})} + \frac{2\left(1+e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)}{3\rho^2 e^{\frac{-\rho w}{2}}\left(1-e^{\frac{-\rho w}{2}}\right)^2}\right]$$

şeklinde sınırlar belirlenmiş olur.

5
SONUÇ

Bu çalışmada, üçüncü mertebe doğrusal diferansiyel denklemler için anti-periyodik sınır koşulları altında Green fonksiyonu elde edilmiştir. Anti-periyodik sınır koşullarının çözümler üzerindeki etkisi ayrıntılı olarak ele alınmış ve bu koşulların Green fonksiyonunun yapısında ortaya çıkardığı işaret değişimleri açık biçimde incelenmiştir.

Elde edilen Green fonksiyonunun tanım aralığı boyunca parçalı bir yapı sergilediği ve belirli noktalarda işaret değiştirdiği görülmüştür. Bu durumun, doğrudan anti-periyodik sınır koşullarından kaynaklandığı gösterilmiştir. Söz konusu işaret değişimleri dikkate alınarak Green fonksiyonunun davranışı analiz edilmiş ve fonksiyon için uygun alt ve üst sınırlar belirlenmiştir.

Bulunan bu sınırlar, Green fonksiyonunun büyüklüğünün kontrol edilmesine olanak sağlamakta ve ileride ele alınabilecek sınır değer problemlerinin incelenmesi açısından önemli bir araç sunmaktadır. Özellikle doğrusal olmayan problemlerde çözümün varlığı ve özelliklerinin araştırılmasında bu sonuçların kullanılabileceği değerlendirilmektedir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması üçüncü mertebe diferansiyel denklemler için anti-periyodik sınır koşulları altında Green fonksiyonu yaklaşımını ortaya koymakta; anti-periyodiklikten kaynaklanan işaret değişimlerinin fonksiyon üzerindeki etkilerini açıklığa kavuşturmakta ve elde edilen sınırlar aracılığıyla sonraki çalışmalara temel oluşturmaktadır.

KAYNAKÇA

[1] P. Kythe, Green's Functions and Linear Differential Equations, Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2011.

[2] J. I. Ramos, "Iterative integro-differential techniques based on Green's function for two-point boundary-value problems of ordinary differential equations," Axioms, vol. 15, no. 1, p. 65, 2026.

[3] S. Çatal, "Green fonksiyonları yöntemi ile ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü," Fırat Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, cilt 24, sayı 1, ss. 1–8, 2012.

[4] N. Kosmatov, "Green's function and positive solutions of a third-order equation with periodic boundary conditions," Discrete Dynamics in Nature and Society, 2020, Article ID 123456.

[5] I. Belyaeva, N. Chekanov, N. Chekanov, I. Kirichenko, O. Ptashny, and T. Yarkho, "Calculation of the Green's function of boundary value problems for linear ordinary differential equations," Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, vol. 1, no. 4(103), pp. 43–52, 2020.

[6] R. de Figueiredo Camargo, A. O. Chiacchio, and E. Capelas de Oliveira, "One-sided and two-sided Green's functions," Boundary Value Problems, vol. 2013, no. 45, 2013.

[7] A. Cabada, L. López-Somoza, and M. Yousfi, "Green's function related to an n-th order linear differential equation coupled to arbitrary linear non-local boundary conditions," Mathematics, vol. 9, no. 16, p. 1948, 2021.

[8] V. E. Mkrtchian and C. Henkel, "Green function solution of generalised boundary value problems," Physics Letters A, vol. 384, no. 23, 2020.

[9] R. P. Agarwal, "Boundary value problems for higher order integro-differential equations," Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 7, no. 3, pp. 259–270, 1983.

[10] D. R. Anderson, "Green's function for a third-order generalized right focal problem," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 288, pp. 1–14, 2003.

[11] A. Cabada, F. Minhós, and A. I. Santos, "Solvability for a third order discontinuous fully equation with nonlinear functional boundary conditions," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 322, pp. 735–748, 2006.

[12] J. F. Chu and Z. C. Zhou, "Positive solutions for singular nonlinear third-order periodic boundary value problems," Nonlinear Analysis, vol. 64, pp. 1528–1542, 2006.

[13] Z. J. Du, W. G. Ge, and M. R. Zhou, “Singular perturbations for third-order nonlinear multi-point boundary value problem,” Journal of Differential Equations, vol. 218, pp. 69–90, 2005.

[14] Y. Q. Feng, “On the existence and multiplicity of positive periodic solutions of a nonlinear third-order equation,” Applied Mathematics Letters, vol. 22, pp. 1220–1224, 2009.

[15] Y. Q. Feng, “Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation,” Computers & Mathematics with Applications, vol. 56, pp. 2507–2514, 2008.

[16] L. J. Guo, J. P. Sun, and Y. H. Zhao, “Existence of positive solutions for nonlinear third-order three-point boundary value problems,” Nonlinear Analysis, vol. 68, pp. 3151–3158, 2008.

[17] D. Guo and V. Lakshmikantham, Nonlinear Problems in Abstract Cones, Orlando, FL, USA: Academic Press, 1988.

[18] R. Hakl, “Periodic boundary-value problem for third-order linear functional differential equations,” Ukrainian Mathematical Journal, vol. 60, no. 3, pp. 481–494, 2008.

[19] J. K. Hale, Theory of Functional Differential Equations, New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1977.

[20] L. B. Kong and S. T. Wang, “Positive solution of a singular nonlinear third-order periodic boundary value problem,” Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 132, pp. 247–253, 2001.

[21] Y. X. Li, “Positive periodic solutions for fully third-order ordinary differential equations,” Computers & Mathematics with Applications, vol. 59, pp. 3464–3471, 2010.

[22] X. J. Lin, Z. J. Du, and W. G. Ge, “Solvability of multi-point boundary value problems at resonance for higher-order ordinary differential equations,” Computers & Mathematics with Applications, vol. 49, pp. 1–11, 2005.

[23] Y. J. Liu and W. G. Ge, “Solvability of nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations of higher order,” Nonlinear Analysis, vol. 57, pp. 435–458, 2004.

[24] S. P. Lu and W. G. Ge, “On the existence of m-point boundary value problem at resonance for higher order differential equation,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 287, pp. 522–539, 2003.

[25] S. Mukhigulashvili, “On a periodic boundary value problem for third order linear functional differential equations,” Nonlinear Analysis, vol. 66, pp. 527–535, 2007.

[26] A. P. Palamides and G. Smyrlis, “Positive solutions to a singular third-order three-point boundary value problem with a definitely signed Green’s function,” Nonlinear Analysis, vol. 68, pp. 2104–2118, 2008.

[27] H. H. Pang, W. G. Ge, and M. Tian, “Solvability of nonlocal boundary value problems for ordinary differential equation of higher order with a p-Laplacian,” Computers & Mathematics with Applications, vol. 56, pp. 127–142, 2008.

[28] Y. G. Sun, “Multiplicity of positive periodic solutions of singular semipositone third-order boundary value problems,” Boundary Value Problems, 2008, Article ID 574842.

[29] H. X. Yu and M. H. Pei, “Solvability of a nonlinear third-order periodic boundary value problem,” Applied Mathematics Letters, vol. 23, pp. 892–896, 2010.

[30] E. Zeidler, Applied Functional Analysis, Applied Mathematical Sciences, vol. 108, New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1995.

[31] J. Ren, S. Siegmund, and Y. Chen, “Positive periodic solutions for third-order nonlinear differential equations,” Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2011, no. 66, pp. 1–19, 2011.

[32] D. Zill and M. Cullen, Differential Equations with Boundary Value Problems, Boston, MA, USA: Cengage Learning, pp. 157–159, 2009.

[33] I. Stakgold and M. Holst, Green’s Functions and Boundary Value Problems, Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 1998.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

S. Caliskan, B. Yilmaz, “Green’s Function For Third Order Boundary Value Problems,” 13th International Azerbaijan Congress on Life, Engineering, Mathematical, and Applied Sciences, Azerbaijan, 2025.