MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ VE SİMÜLASYONU

Mustafa Kemal SEVİNDİR, Ph.D

sevindir@yildiz.edu.tr

8.12.2018

Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü, sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemleri çözmek ve aynı anda birkaçını işlemek için güçlü bir araçtır.

Bu son özellik, diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşüm yönteminin önce bunları cebirsel denklemlere dönüştürdüğü gerçeğinden gelişir ve sonuçta elde edilen denklemler, nihai sonucu elde etmeden önce cebirsel olarak manipüle edilir; cebirsel manipülasyonlar, doğrudan diferansiyel denklemlerle uğraşmaktan çok daha kolay ve daha sıklıkla mümkündür.

Laplace dönüşüm yöntemi, logaritma yöntemiyle benzerdir, şöyle ki öncelikle diferansiyel denklemleri “farklı bir alana” (Laplace alanı) dönüştürür; daha sonra ortaya çıkan denklem(ler) ile cebirsel işlemler yapılır; ve son olarak, son denklem(ler) "tersine çevirme" veya "ters Laplace" ile orijinal alana dönüştürür.

Laplace Dönüşümü

Laplace Dönüşümünün Tanımı

x'in bağımsız değişken olduğu f(x) fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx$$

burada F(s) = f(x)’in Laplace dönüşümü ve s Laplace dönüşüm değişkenidir.

Üstel fonksiyonun üssünün biriminin boyutsuz olması için, s’in birimi, bağımsız değişkenin biriminin tersi olmalıdır.

İntegrasyon sınırları, Laplace dönüşümünün sadece bağımsız değişken x’in pozitif değerleri için f(x) fonksiyonu hakkında bilgi içerdiğini göstermektedir.

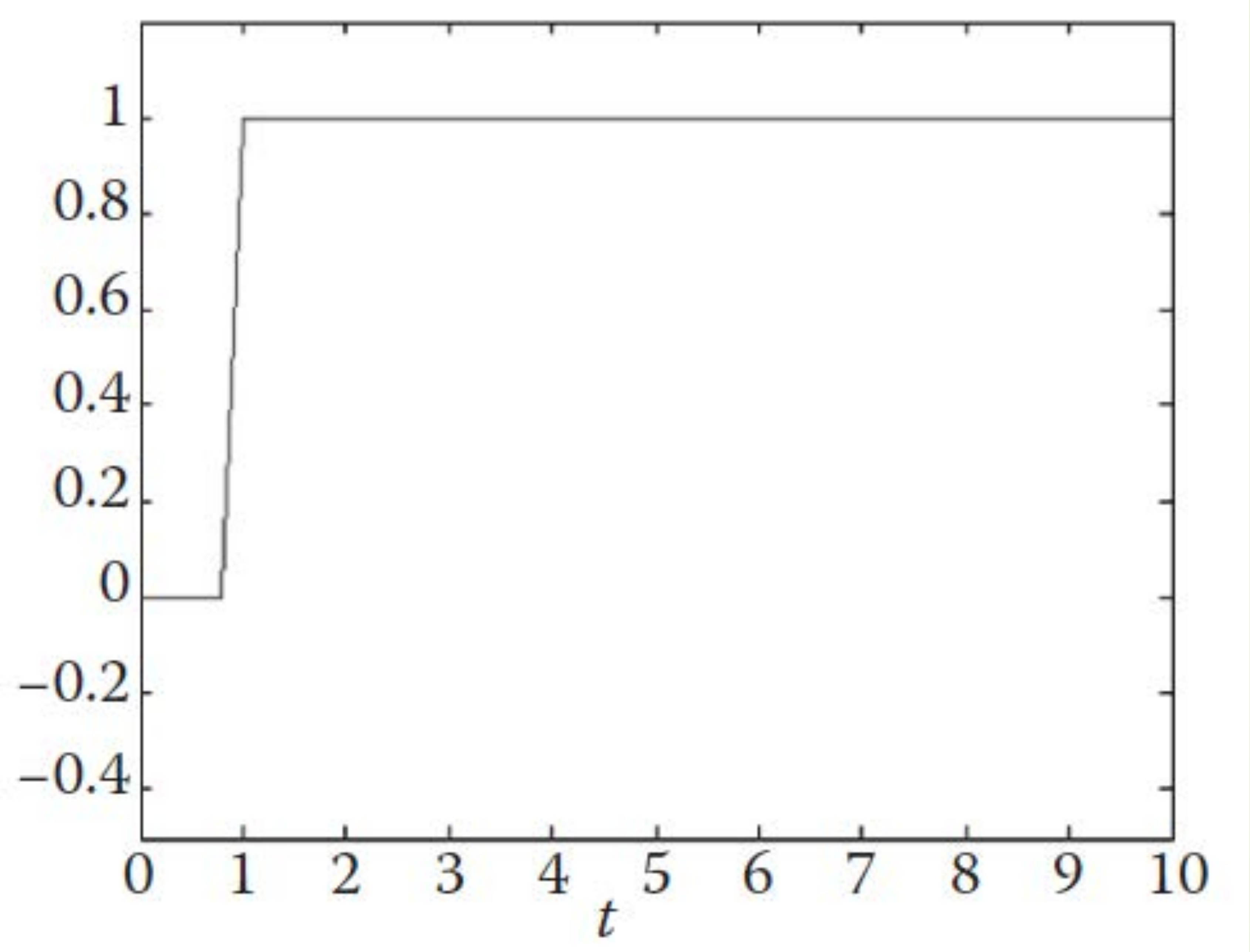
Sistem dinamiği analizlerinde, bağımsız değişken t'dir. Zamanın bir fonksiyonu olan f(t)’nin Laplace dönüşümü, o zaman

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

dir ve sonuç olarak, bu durumda s’in birimi zamanın tersidir (zaman^{-1}).

Örnek

Aşağıdaki şekil, tepkilerini incelemek için sistemlere girdiler olarak yaygın şekilde uygulanan dört fonksiyonu göstermektedir. Dönüşümlerini elde etmek için Laplace dönüşümünün tanımını kullanacağız.



(a) birim adım (basamak) fonksiyonu

(a)Birim Adım Fonksiyonu

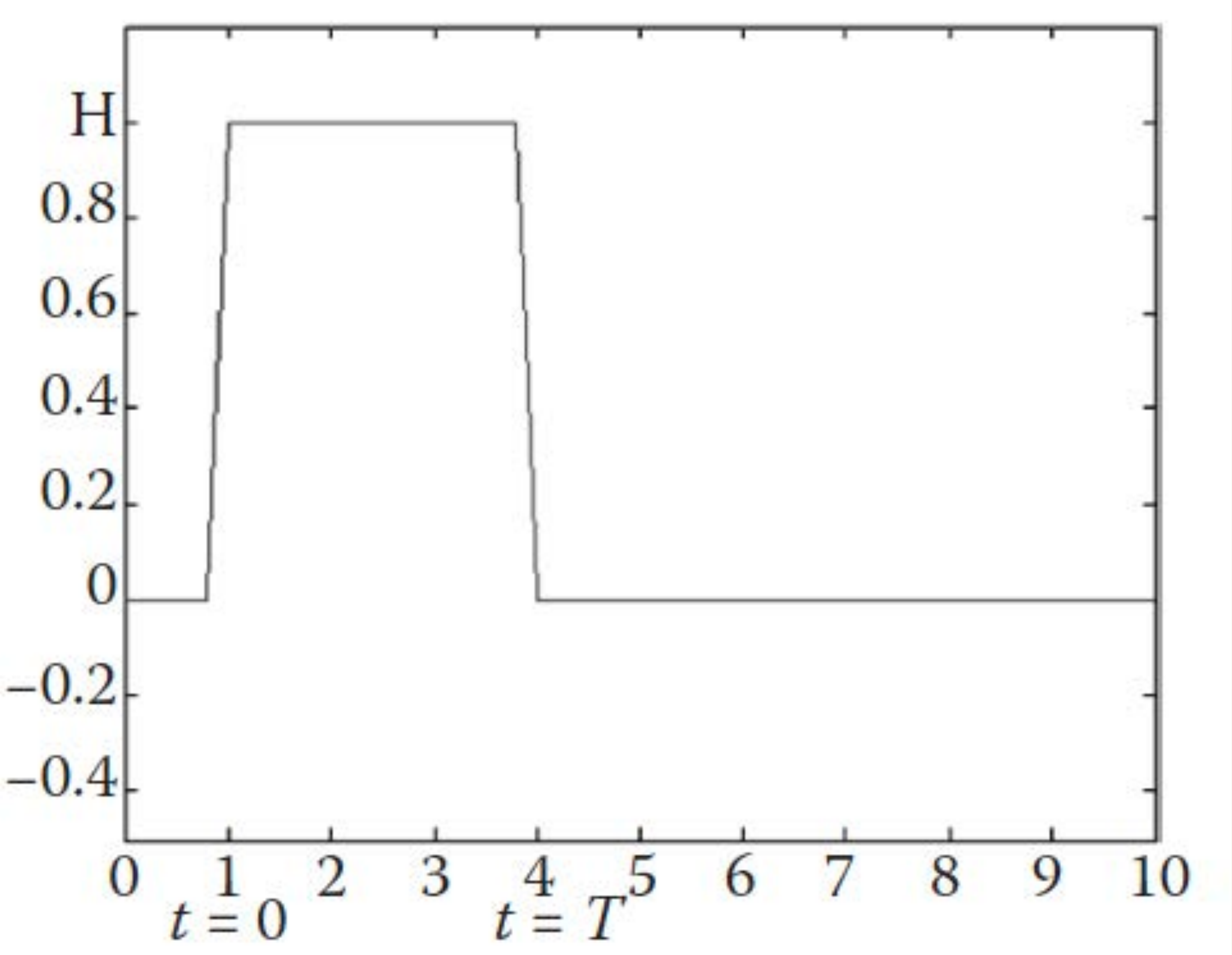
Bu, çizilen şekil birim büyüklüğün ani bir değişmesidir. Birim adım değişiminin matematiksel gösterimi

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$$

Şekilde a = 1'dir. a = 0 alınıp denklemde yerine konursa

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$L[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$



(b) atım (pulse)

(b) Büyüklüğü H Süresi T olan bir atım

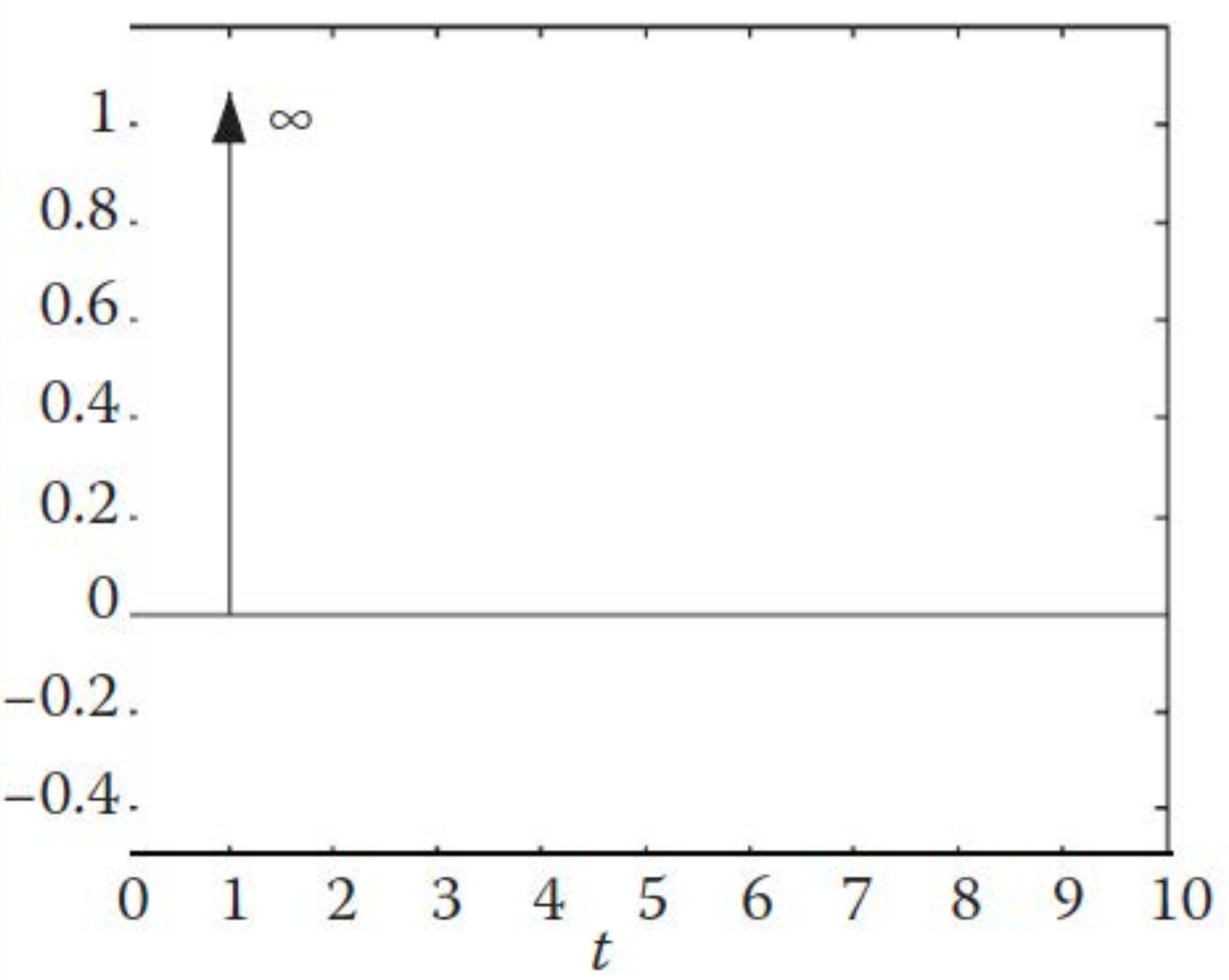
Şekilde çizilen darbe, aşağıdaki gibi gösterilir

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, t \geq T \\ H & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ denkleminde yerine koyarsak

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^T He^{-st}\,dt = -\frac{H}{s}e^{-st}\Big|_0^T = -\frac{H}{s}(e^{-sT} - 1) = H\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\right]$$

$$L[f(t)] = H\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\right]$$



(c) birim dürtü fonksiyonu

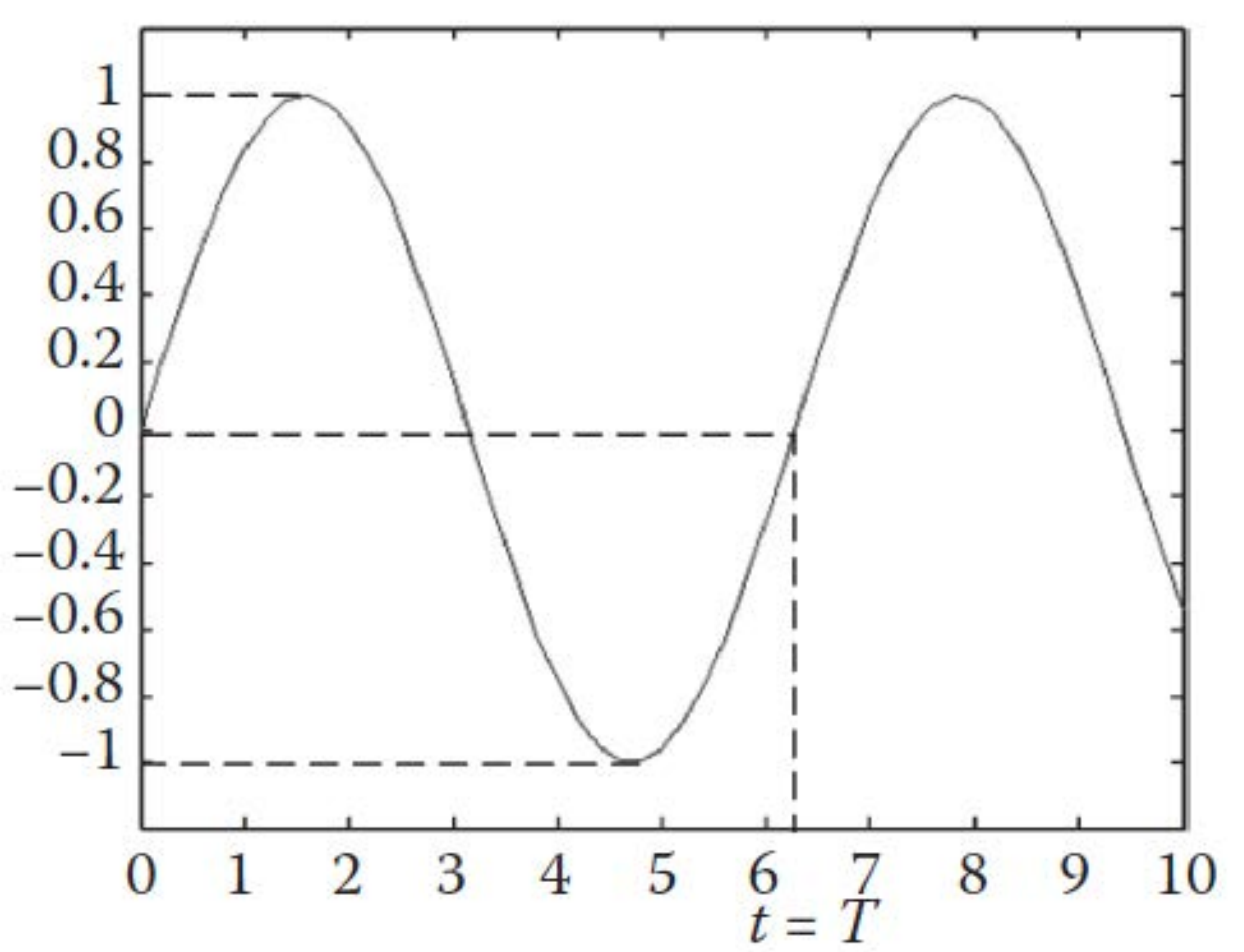
(c) Birim Dürtü Fonksiyonu

Dirac delta fonksiyonu olarak da bilinen ve δ(t) ile gösterilen birim dürtü fonksiyonu şekilde çizilmiştir. Sıfır süre ve birim alanı ile ideal bir dürtüdür. Tüm alan sıfır zamanda yoğunlaşmıştır. Çünkü fonksiyon sıfırın dışında her zaman sıfırdır ve $F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ denkleminde e^{-st}terimi t = 0'da bire eşittir,

Laplace dönüşümü

$L[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$ dir.

İntegrasyonun sonucu, 1, dürtü alanıdır.



(d) sinüs dalgası

(d) Genliği Bir ve Frekansı ω olan Sinüs Dalgası

Sinüs dalgası şekilde çizilmiştir ve üstel bir fonksiyonla aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

burada i= $\sqrt{-1}$ sanal sayıların sembolüdür.

$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ denkleminde yerine koyulursa,

$$L[\sin \omega t] = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left[e^{-(s-i\omega)t} - e^{-(s+i\omega)t} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} + \frac{e^{-(s+i\omega)t}}{s+i\omega} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2i} \left[-\frac{0-1}{s-i\omega} + \frac{0-1}{s+i\omega} \right]$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Laplace Dönüşümü

Laplace Dönüşümü Özellikleri ve Teoremleri

Yaygın Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri tabloda görülmektedir.

$f(t)$	$F(s) = [f(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Doğrusallık ve gerçek diferansiyel ve integrasyon teoremleri diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürmek için gereklidir.

Son değer teoremi, bir zaman fonksiyonunun son kararlı durum değerini Laplace dönüşümünden tahmin etmek için yararlıdır.

Gerçek öteleme teoremi, zamanda gecikme olan fonksiyonlar için kullanışlıdır.

Doğrusallık Özelliği

Laplace dönüşümü doğrusal bir işlemdir. Bu şu demektir, eğer a bir sabit ise,

$L[af(t)] = aL[f(t)] = aF(s)$ dir.

Toplamanın dağılım özelliği de doğrusallık özelliğinden gelir:

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)] = aF(s) + bG(s)$$

burada a ve b sabitlerdir.

Gerçek Diferansiyel Teoremi

Bu teorem, bir fonksiyonun Laplace dönüşümü ve onun türevleri arasında bir ilişki kurar ve diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülmesinde en önemlisidir.

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

Laplace dönüşümü tanımından, denklem

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st}\, dt$$

Kısmi integral kullanılarak,

$$u(t) = e^{-st} \qquad du = -se^{-st} dt$$

$$dv = \frac{df(t)}{dt} dt \qquad v = f(t)$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st}\, dt)$$

$$= [0 - f(0)] + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$$

$$= sF(s) - f(0)$$

Daha yüksek mertebeli türevlere genişletirsek,

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = L\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\right]$$
$$= sL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$$
$$= s[sF(s) - f(0)] - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$$

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$$

Genel olarak,

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} \cdots - \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

Daha önce de belirtildiği gibi, çoğunlukla başlangıç durumunda (başlangıç koşulu), değişken kararlı durumdadır, yani tüm zaman türevlerinin sıfır olması ve değişkenin kendisinin sıfır olarak tanımlandığı bir değerin olmasıdır. Bu genel durum için, önceki ifade,

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$$ şeklini alır.

Gerçek İntegrasyon Teoremi

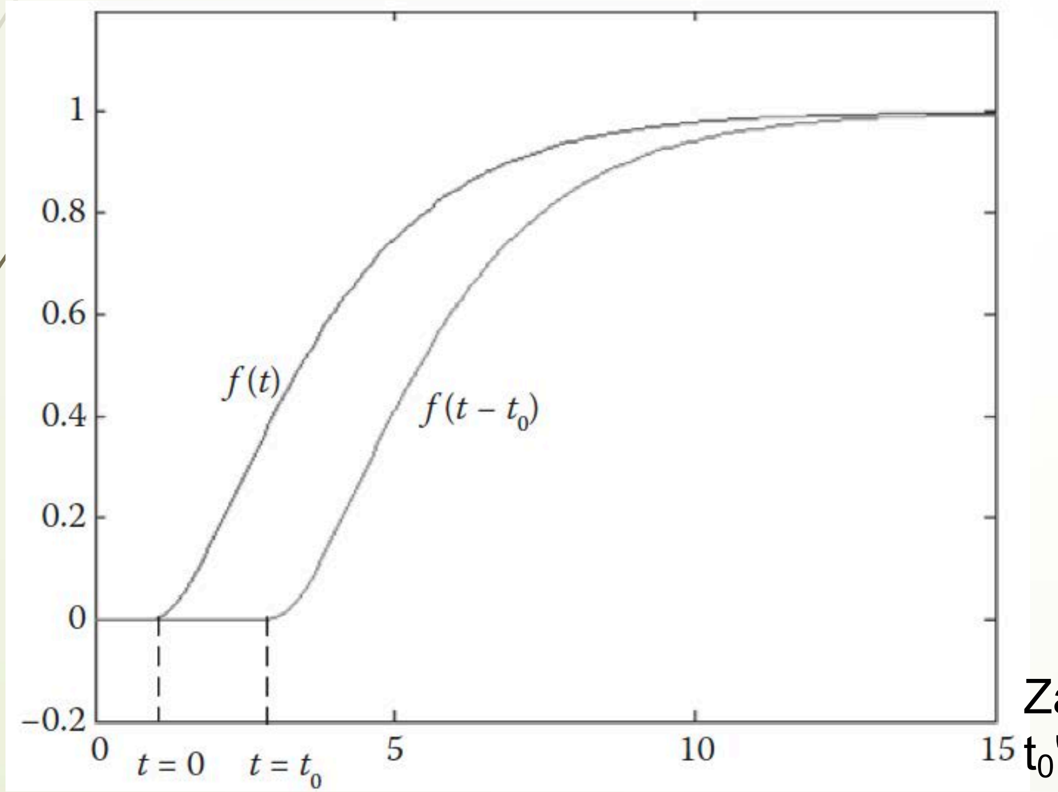
Bu teorem, bir fonksiyonun Laplace dönüşümü ve integrali arasındaki ilişkiyi kurar.

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Bir fonksiyonun n'inci integralinin Laplace dönüşümü, fonksiyonun dönüşümünün s^n'e bölümüdür.

Gerçek Öteleme Teoremi

Bu teorem, şekilde gösterildiği gibi zaman eksenindeki bir fonksiyonun ötelenmesi ile ilgilidir. Ötelenen fonksiyon, zaman içinde gecikmiş orijinal fonksiyondur.



Zaman içinde geciktirilen fonksiyon, zaman gecikmesi t_0'dan daha düşük olan tüm zamanlar için sıfırdır.

Teorem şunu ifade eder;

$$L[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$$

Laplace dönüşümü, negatif süre için orijinal fonksiyon hakkında bilgi içermediğinden, gecikmeli fonksiyon zaman gecikmesinden daha düşük olan tüm zamanlar için sıfır olmalıdır.

Bağımlı değişken(ler) in başlangıç koşulu(koşulları) sıfır ise veya değilse bu koşul yerine getirilir. Değişken(ler) başlangıç kararlı durumun(lar)dan sapma(lar) olarak ifade edilir.

Laplace dönüşümü tanımından, denklem

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$L[f(t-t_0)] = \int_0^\infty f(t-t_0)e^{-st}\,dt$$

$\tau = t - t_0$ (veya $t = t_0 - \tau$) olsun ve denklemde yerine koyalım.

$$L[f(t-t_0)] = \int_{\tau=-t_0}^\infty f(\tau)e^{-s(t_0+\tau)}\,d(t_0+\tau)$$

$$= \int_{\tau=0}^\infty f(\tau)e^{-st_0}\,e^{-s\tau}d\tau$$

$$= e^{-st_0}\int_0^\infty f(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau$$

$$= e^{-st_0}F(s)$$

$\tau<0$ ($t<t_0$) için $f(\tau)=0$ dır.

Son Değer Teoremi

Bu teorem, bir fonksiyonun son değerini dönüşümden çıkarmamızı sağlar. t sonsuza yaklaştığında f(t) fonksiyonunun limiti varsa, son değer aşağıdaki gibi Laplace dönüşümden bulunabilir:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[sF(s)]$$

Karmaşık Diferansiyel Teoremi

Bu teorem bağımsız değişken t'nin üslerini içeren fonksiyonların dönüşümlerini değerlendirmek için kullanılır. Şunu ifade eder;

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Karmaşık Öteleme Teoremi

Bu teorem, zamanın üstel fonksiyonlarını içeren fonksiyonların dönüşümlerini değerlendirmek için kullanılır. Şunu ifade eder;

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

Başlangıç Değer Teoremi

Bu teorem, bir fonksiyonun başlangıç değerinin dönüşümden hesaplanmasını sağlar. Bu, değişkenlerin başlangıç koşullarının sıfır olduğu gerçeği için değil, türetilmiş dönüşümlerin geçerliliğinin bir başka kontrolünü sağlayacaktır.

Teorem şunu ifade eder;

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$