EKSPONANSİYEL POLİNOM BAZLI WENO ŞEMASI İLE EULER GAZ DİNAMİĞİ DENKLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ[34]

Ekrem YILMAZ[1], Ali PINARBAŞI[2]

[1]Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul / Türkiye

[2]Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul / Türkiye

Öz: Euler denklemleri, yüksek hızlı akışların modellenmesinde önemli bir yere sahiptir. Denklemlerin yapısı sebebiyle bir zaman sonra çözümlerde karmaşık akış yapıları ve şok dalgaları ile sıkça karşılaşılır. Bu akış olaylarını iyi çözümleyebilmek için yüksek çözünürlüklü şemalar kullanılır. Bu tür nümerik şemalar, yüksek mertebe hassasiyete sahip olması ve yapısını lokal olarak değiştirmesiyle, karmaşık akış yapılarını detaylı şekilde çözümler ve süreksizlikleri doğru bir şekilde ifade eder. Bu çalışmada, referans olarak alınan 7. mertebeden WENO7-S şemasının modifiye edilerek daha yüksek mertebeden hassasiyet ve daha düşük hata normlarının elde edilmesi ve böylece akış yapılarının daha iyi çözümlenmesi ve süreksizliklerin daha doğru ifade edilmesi amaçlanmıştır. Bunun için WENO7-S şemasının interpolasyon baz fonksiyonları, eksponansiyel polinomlarla değiştirilmiştir. Eksponansiyel polinomlara, şekil parametresi eklenerek interpolasyona esneklik kazandılırmıştır ve şekil parametresi genel çözüm verisinin bir fonksiyonu olarak ele alınmıştır. WENO7-SE şemasını test etmek amacıyla skaler lineer korunum denklemi ve bir boyutlu Euler denklemi çözülmüş ve elde edilen sonuçlar WENO7-S şemasının sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Skaler lineer korunum denkleminin sonuçları incelendiğinde, WENO7-SE şeması ile WENO7-S şemasına göre daha yüksek hassasiyet mertebesi ve daha düşük hata normları elde edilmiştir. Bir boyutlu Euler denklemlerinin çözümleri incelendiğinde ise WENO7-SE şeması temas süreksizliği veya şok dalgası gibi süreksizlikleri, WENO7-S şemasına göre daha hassas bir biçimde elde etmiştir. Şekil parametresinin, genel çözüm verisinin daha doğru bir fonksiyonuyla ifade edilmesiyle çok daha yüksek hassasiyet mertebesi ve çok daha düşük hata normlarının elde edileceği ve böylece akış problemlerinde ortaya çıkan süreksizlikler veya karmaşık akış yapılarının daha iyi çözümleneceği düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Euler Denklemleri, Yüksek Çözünürlüklü Şema, WENO Şeması

GİRİŞ ve KURAMSAL ÇERÇEVE

Yüksek hızlı akışların modellenmesinde, Euler denklemleriyle sıkça karşılaşılır. Matematiksel açıdan incelendiğinde Euler denklemleri; nonlineer, hiperbolik kısmi diferansiyel denklem sistemlerine bir örnektir. Bu tipteki denklemlerin çözümlerinde başlangıç şartları ne kadar düzgün olursa olsun belli bir zaman sonra çözümlerde süreksizlikler görülmektedir (Lax, 1973). Denklemleri sayısal olarak çözerken, lineer yapıdaki yüksek mertebeden hassasiyete sahip şemaların kullanılması, çözümlerde oluşan süreksizlikler civarında salınımların ortaya çıkmasına sebep olur (Godunov, 1959: 271-306). Bu durumun üstesinden gelmek amacıyla yüksek mertebe şemalar olarak da bilinen nonlineer şemalar geliştirilmiştir (Harten, 1983: 357-393). Daha sonra Harten ve ark. tarafından ENO şemaları geliştirilmiştir (Harten ve ark., 1987: 231-303). ENO şemaları başarılı olmasına rağmen yapılarında bazı dezavantajlar barındırması sebebiyle WENO şemaları geliştirilmiştir (Liu ve ark., 1994: 200-212). Daha sonra Jiang ve Shu tarafından WENO şemasında bulunan düzgünlük kriterinin modifiye edilmesiyle, WENO-JS şeması geliştirilmiştir (Jiang ve Shu, 1996: 202-228). Ha ve ark., eksponansiyel polinomları kullanarak yeni bir ENO şeması geliştirmiştir (Ha ve ark., 2013: 864-

[34] Bu çalışma birinci sıradaki yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

893). Wu ve ark., WENO şemasındaki düzgünlük kriterini modifiye ederek, düzgün çözüme sahip bölgelerde nonlineer ağırlıklardaki varyasyonu azaltmıştır (Wu ve ark., 2020).

AMAÇ

Bu çalışmada eksponansiyel polinomlar kullanılarak 7. mertebeden hassasiyete sahip bir WENO şeması (WENO7-SE) tasarlanmıştır. Çözümlerde ortaya çıkan süreksizlikleri daha doğru çözümleyebilmek adına şemanın yapısına şekil parametresi eklenmiştir. Böylece çözümün düzgün olduğu yerlerde daha yüksek mertebeden hassasiyet elde edilmesi ve çözümün düzgün olmadığı süreksizlik civarlarında daha doğru sonuçlar alınması amaçlanmıştır. Karşılaştırma için WENO7-S şeması kullanılmıştır (Wu ve ark., 2020).

KAPSAM

Bu çalışmada yeni bir nümerik şema tasarlanarak, bu şemanın yüksek hızlı akış problemlerinde uygulanabilirliğini ele almaktadır.

YÖNTEM

Bir boyutta Euler denklemlerinin korunumlu formu

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{bmatrix}_x = 0 \tag{1}$$

Burada $E = \rho\left(\frac{1}{2}u^2 + e\right)$ ve e, iç enerji olarak ifade edilir. Denklem (1), bir hal denklemi ile birbirine bağlanır. Bu çalışmada hal denklemi denklem (2)'deki hali ile kullanılmıştır.

$$e = e(p,\rho) = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \tag{2}$$

Denklem (1) daha kompakt bir formda yazılabilir

$$u_t + f_x = 0 \tag{3}$$

Denklem (3)'teki f terimi akı fonksiyonudur. Denklem (3)'ün yarı ayrık hali

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

olarak yazılır. Bu çalışmada ayrıklaştırma, sonlu hacimler metodu üzerinden gerçekleştirilmiştir. Kolaylık amacıyla hesaplama bölgesi eş büyüklükteki hücrelere bölünsün. i, hücre sırasını; $S_i = \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right)$, i. hücrenin tanımlı olduğu bölgeyi ve sınırlarını; $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, hücrenin genişliğini ve $\bar{u}_i$, hücrenin hacimsel ortalamasını ifade etsin.

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{S_i} u(x,t)dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t)dx \tag{5}$$

Denklem (4)'teki akı terimi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{F\left(u^-_{i+1/2}, u^+_{i+1/2}\right) - F\left(u^-_{i-1/2}, u^+_{i-1/2}\right)}{\Delta x} \tag{6}$$

olarak ayrıklaştırılır. Denklem (6)'daki F terimi nümerik akı fonksiyonudur ve bu çalışmada nümerik akı fonksiyonu olarak Lax-Friedrichs akı fonksiyonu seçilmiştir.

$$F^{LF}(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\big(f(u_1)+f(u_2)+a_{maks}(u_1-u_2)\big)$$
$$a_{maks}=max|f'(u)| \tag{7}$$

$u_{i+1/2}^{-}$ ve $u_{i+1/2}^{+}$ değerleri sırasıyla $x_{i+1/2}$ arayüzünün sol ve sağ limit değerleridir ve interpolasyonla elde edilir.

$$u_{i+1/2}=\sum_{k=0}^{3} w_k u_{i+1/2}^{k} \tag{8}$$

Denklem (8)'deki $u_{i+1/2}^{k}$, terimi k. alt kümenin $x_{i+1/2}$ arayüzündeki interpolasyonu ifade eder. İnterpolasyon işlemi yalnızca $u_{i+1/2}^{-}$ değeri için elde edilmiştir. $u_{i+1/2}^{+}$ değeri için hesaplama, $x_{i+1/2}$ arayüzüne göre simetri alınarak gerçekleştirilir. S ve S_k sırasıyla ana küme ve k. alt kümenin tanımlı olduğu nokta kümesini temsil etsin.

$$S=\{x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}\}$$
$$S_k=\{x_{i-3+k},x_{i-2+k},x_{i-1+k},x_{i+k}\}$$

Ayrıklaştırma sonlu hacimler yöntemi üzerinden yapılacağı için interpolasyon işlemi primitif fonksiyonlar üzerinden tanımlanmıştır. U, $u(x,t)$'nin primitif fonksiyonu denklem (9)'daki gibi tanımlanır. Denklem (9)'daki integralin alt sınırı başka bir değer ile de değiştirilebilir.

$$U(x)=\int_{-\infty}^{x} u(\zeta)\,d\zeta \tag{9}$$

S kümesinin interpolasyon baz fonksiyonları polinom fonksiyonlardan oluşturulur.

$$\phi_a=\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^7\},\qquad a=0,\dots,7$$

Alt kümelerin interpolasyon baz fonksiyonları ise eksponansiyel polinomlardan oluşturulur.

$$\phi_{b,alt}=\{1,x,x^2,e^{\lambda x},e^{-\lambda x}\},\qquad b=0,\dots,4$$

Burada λ, şekil parametresidir ve değeri global, lokal veya sabit olarak belirlenebilir. Primitif fonksiyon için hücresel ortalamaları kullanarak bir Q interpolasyonu tanımlanırsa:

$$Q(x)=\sum_{n=0}^{7}\psi_n(x)U\big(x_{i-3+n-1/2}\big) \tag{10}$$

Denklem (10)'da ψ_n fonksiyonları, ϕ uzayına ait Lagrange fonksiyonlarıdır ve denklem (11) kullanılarak ana küme için elde edilebilir.

$$\phi_k(x)=\sum_{n=0}^{7}\psi_n(x\ \ S_3\ \ x_{i-3+n-1/2}-x_{i+1/2}\big) \tag{11}$$

Ana küme ele alındığında interpolasyon fonksiyonu şu şekilde tanımlanır

$$u(x)=Q'(x)=\sum_{n=1}^{7}\psi_n'(x)\big[U\big(x_{i-3+n-1/2}-x_{i-3-1/2}\big)\big]=\sum_{n=1}^{7}\left(\psi_n'(x)\Delta x\sum_{l=0}^{n-1}\bar{u}_{i-3+l}\right) \tag{12}$$

Denklem (12)'de u fonksiyonu, $x_{i+1/2}$ için hesaplanırsa

$$u(x_{i+1/2}) = \sum_{l=0}^{6}\left(\Delta x \sum_{n=l+1}^{7} \psi_n'(x_{i+1/2})\right)\overline{u}_{i-3+l} = \sum_{l=0}^{6} C_l \overline{u}_{i-3+l} \tag{13}$$

olarak elde edilir. Alt kümelerin interpolasyon işlemi de ana kümedeki interpolasyon işlemine benzer şekilde gerçekleştirilir.

$$\phi_{k,alt}(x) = \sum_{n=0}^{4} \psi_{n,alt}(x)\phi_{k,alt}(x_{i-3+n-1/2} - x_{i+1/2}) \tag{14}$$

Denklem (14) ile alt kümeler için Lagrange fonksiyonları hesaplanır ve interpolasyon için kullanılır.

$$\begin{aligned} u^k(x) = Q_k'(x) &= \sum_{n=1}^{4} \psi_{n,alt}'(x)\left[U(x_{i-3+k+n-1/2} - x_{i-3+k-1/2})\right] \\ &= \sum_{n=1}^{4}\left(\psi_{n,alt}'(x)\Delta x \sum_{l=0}^{n-1} \overline{u}_{i-3+k+l}\right), \qquad k = 0,\dots,3 \end{aligned} \tag{15}$$

Denklem (15)'te u fonksiyonu, $x_{i+1/2}$ için hesaplanırsa

$$u^k(x_{i+1/2}) = \sum_{l=0}^{3} C_l^k \overline{u}_{i-3+k+l}\,, \qquad k = 0,\dots,3 \tag{16}$$

olarak elde edilir. Denklem (8)'deki w_k terimi nonlineer ağırlık olarak adlandırılır ve şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{\alpha_k}{\sum \alpha_k} \\ \alpha_k &= d_k\left[1 + \left(\frac{\tau}{\varepsilon + \beta_k}\right)^p\right] \end{aligned} \tag{17}$$

Denklem (17)'deki, d_k terimi lineer ağırlığı; τ terimi ana kümenin düzgünlük kriterini; β_k k. alt kümenin düzgünlük kriterini ifade etmektedir. ε, paydanın sıfır olmasını engellemek için kullanılmıştır. Bu çalışmada $\varepsilon = 10^{-40}$ ve $p = 1$ olarak ele alınmıştır. d_k değerleri denklem (18)'de ifade edilmiştir. τ ve β_k değerleri, sırasıyla denklem (19) ve (20)'de ifade edilmiştir (Wu ve ark., 2020).

$$\begin{aligned} d_0 &= C_0/C_0^0 \\ d_1 &= (C_1 - d_0 C_1^0)/C_0^1 \\ d_2 &= (C_2 - d_0 C_2^0 - d_1 C_1^1)/C_0^2 \\ d_3 &= 1 - d_0 - d_1 - d_2 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \tau = (&-u_{i-3} + 4u_{i-2} - 5u_{i-1} + 5u_{i+1} - 4u_{i+2} + u_{i+3})^2 \\ &+ \left|(u_{i-3} - 2u_{i-2} - u_{i-1} + 4u_i - u_{i+1} - 2u_{i+2} + u_{i+3})(u_{i-3} - 6u_{i-2}\right. \\ &\left. + 15u_{i-1} - 20u_i + 15u_{i+1} - 6u_{i+2} + u_{i+3})\right| \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \beta_k = (&u_{i-3+k} - u_{i-2+k} - u_{i-1+k} + u_{i+k})^2 \\ &+ \left|(-u_{i-3+k} - u_{i-2+k} + u_{i-1+k} + u_{i+k})(-u_{i-3+k} + 3u_{i-2+k}\right. \\ &\left. - 3u_{i-1+k} + u_{i+k})\right| \end{aligned} \tag{20}$$

Alt kümelerin interpolasyon baz fonksiyonlarında bulunan şekil parametresi değeri sabit veya çözümün global veya lokal bir fonksiyonu olarak ele alınabilir. Hesaplama yükünü arttırmamak adına bu çalışmada

şekil parametresi, nümerik deneyler ışığında çözüm verisinin global bir fonksiyonu olarak belirlenmiştir. Şekil parametresinin değeri denklem (21)'de belirtilmiştir.

$$\lambda\Delta x = min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}dq\right)$$
$$dq = max(|u_{i+1} - u_{i-1}|) \tag{21}$$

Böylece denklem (3)'ün uzaysal ayrıklaştırması tamamlanmış olur. $\mathcal{L}$, uzaysal ayrıklaştırma operatörü olmak üzere denklem (3) aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{L}(u) \tag{22}$$

Denklem (22)'deki adi diferansiyel denklem, lineer skaler problemlerde RK-4 metodu ve nonlineer sistemlerde SSP-RK3 metodu kullanılarak çözülmüştür. RK-4 metodu denklem (23)'te ifade edilmiştir (Jiang ve Shu, 1996: 202-228).

$$u^{(1)} = u^n + \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{L}(u^n)$$
$$u^{(2)} = u^n + \frac{1}{2}\Delta t\mathcal{L}\left(u^{(1)}\right)$$
$$u^{(3)} = u^n + \Delta t\mathcal{L}\left(u^{(2)}\right) \tag{23}$$
$$u^{n+1} = \frac{1}{3}\left(-u^n + u^{(1)} + 2u^{(2)} + u^{(3)}\right) + \frac{1}{6}\Delta t\mathcal{L}\left(u^{(3)}\right)$$

SSP-RK3 metodu denklem (24)'te ifade edilmiştir (Jiang ve Shu, 1996: 202-228).

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t\mathcal{L}(u^n)$$
$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t\mathcal{L}\left(u^{(1)}\right) \tag{24}$$
$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t\mathcal{L}\left(u^{(2)}\right)$$

WENO7-SE şemasının Euler denklemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılabilirliğini test etmek amacıyla MATLAB adlı programda bazı test problemleri çözülmüştür. Bu test problemleri şöyledir:

Bir boyutlu lineer skaler denklem Denklem (25), iki farklı başlangıç şartı için, $t = 2$ ve $CFL = 0.9$ için çözülmüştür.

$$u_t + u_x = 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} sin(2\pi x) \\ sin(\pi x - \sin(\pi x)/\pi) \end{cases}, \qquad x \in [-1,1] \tag{25}$$

Bir boyutlu Woodward-Collela problemi (Woodward ve Collela, 1984) Euler denklemleri, denklem (26)'da verilen başlangıç şartı, $t = 0.038$ ve $CFL = 0.6$ için çözülmüştür.

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000) & x \in [0, 0.1] \\ (1, 0, 0.01) & x \in [0.1, 0.9] \\ (1, 0, 100) & x \in [0.9, 1] \end{cases} \tag{26}$$

BULGULAR

Tablo 1 ve Tablo 2'de WENO7-SE ve WENO7-S şemalarının denklem (25) için L_1 ve L_∞ normları ve yakınsama hızları açısından karşılaştırılması gösterilmiştir.

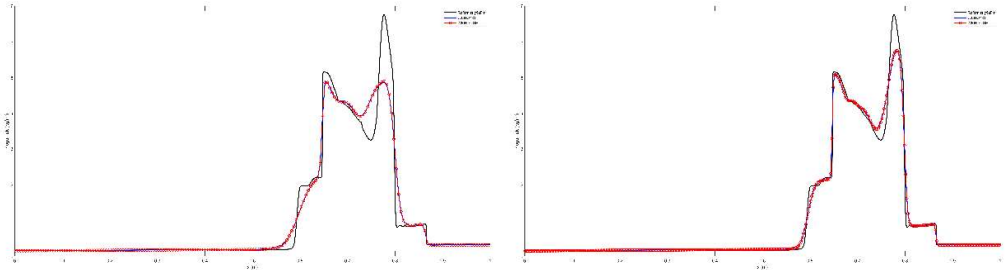
Tablo 1. $u = sin(2\pi x)$ için sonuçlar

	WENO7-SE				WENO7-S			
N	L_1	L_1-mertebe	L_∞	L_∞-mertebe	L_1	L_1-mertebe	L_∞	L_∞-mertebe
10	9.27E-02		1.43E-01		9.17E-02		1.42E-01	
20	1.00E-03	6.475	1.60E-03	6.475	9.84E-04	6.542	1.50E-03	6.542
40	7.29E-06	7.159	1.15E-05	7.125	8.39E-06	6.875	1.33E-05	6.841
80	3.06E-08	7.896	4.82E-08	7.904	6.69E-08	6.969	1.05E-07	6.976
160	1.25E-10	7.941	1.96E-10	7.943	5.26E-10	6.992	8.27E-10	6.994

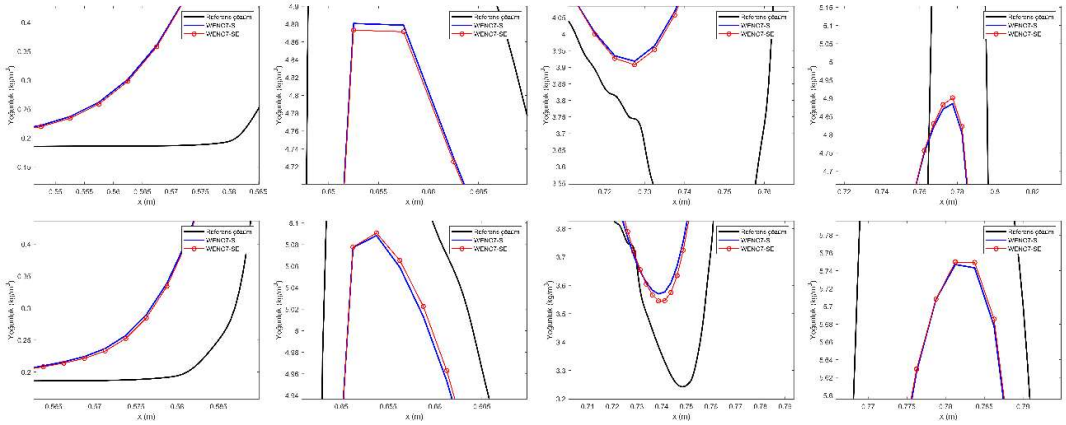
Tablo 2. $u = sin(\pi x - sin(\pi x)/\pi)$ için sonuçlar0

	WENO7-SE				WENO7-S			
N	L_1	L_1-mertebe	L_∞	L_∞-mertebe	L_1	L_1-mertebe	L_∞	L_∞-mertebe
10	1.11E-02		2.66E-02		1.15E-02		2.67E-02	
20	2.79E-04	5.315	7.93E-04	5.068	2.81E-04	5.353	7.94E-04	5.070
40	2.58E-06	6.775	7.96E-06	6.638	2.64E-06	6.734	8.17E-06	6.603
80	2.08E-08	6.952	6.36E-08	6.968	2.14E-08	6.944	6.69E-08	6.933
160	1.64E-10	6.992	4.98E-10	6.997	1.69E-10	6.986	5.29E-10	6.982

Şekil 1'de $N = 200$ ve $N = 400$ hücre sayısı için bir boyutlu Woodward-Collela problemi WENO7-SE ve WENO7-S şemaları ile yoğunluk için elde edilen sonuçlar ve Şekil 2'de bu yoğunluk sonuçlarının detayları gösterilmiştir.



Şekil 1. $N = 200$ (solda) ve $N = 400$ (sağda) için bir boyutlu Woodward-Collela probleminin yoğunluk çözümü



Şekil 2. Bir boyutlu Woodward-Collela probleminin $N = 200$ (üstte) ve $N = 400$ (altta) için yoğunluk çözümünün detayları

SONUÇ

Tablo 1 ve Tablo 2'deki lineer skaler denklem için elde edilen sonuçlardan görüldüğü üzere WENO7-SE şeması teorik hata mertebesi olan yedinin üzerine çıkmış ve bu sebeple hem hata normları hem de yakınsama hızları açısından WENO7-S şemasına göre üstünlük göstermiştir. Şekil 2'dte bir boyutlu Woodward-Collela probleminin yoğunluk çözümlerinin detayları incelendiğinde ise WENO7-SE şeması amaçlandığı gibi şok dalgası ve temas süreksizliği civarlarında WENO7-S şemasına göre daha iyi performans göstermiştir. Şekil parametresinin global çözüm verisinin daha hassas bir fonksiyonu olarak tasarlanmasıyla sonuçların çok daha iyi olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Godunov, S. K. (1959). A Difference Scheme for Numerical Computation of Discontinuous of Hydrodynamics Equations. *Math. Sbornik*, 271-306.

Ha, Y., Lee, Y. J., Yoon, J. (2013). Modified Essentially Nonoscillatory Schemes Based on Exponential Polynomial Interpolation for Hyperbolic Conervation Laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 864-893.

Harten, A. (1983). High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 357-393.

Harten, A., Engquist, B., Osher, S., Chakravarthy, S. (1987). Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes, III. *Journal of Computational Physics*, 231-303.

Jiang, G.-S., Shu, C.-W. (1996). Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes. *Journal of Computational Physics*, 202-228.

Lax, P. D. (1973). *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves.* New York: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Liu, X., Osher, S., Chan, T. (1994). Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes. *Journal of Computational Physics*, 200-212.

Woodward, P., Collela, P. (1984). The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks. *Journal of Computational Physics*, 115-173.

Wu, C., Wu, L., Zhang, S. (2020). A Smoothness Indicator Constant for Sine Functions. *Journal of Computational Physics*.