Resumo

Neste trabalho, tratamos da homotopia monotônica, uma variante apropriada de homotopia, de trajetórias de sistemas de controle não-linear assim como de curvas monotônicas em semigrupos de Lie. Introduzimos primeiro um conceito de regularidade para funções de controle que por sua vez pode ser visto, através de uma reparametrização, como generalização de controles normais, e depois consideramos a homotopia monotônica das trajetórias regulares de um sistema de controle Σ numa variedade M. Em seguida, mostramos que o conjunto $\Gamma(\Sigma, x)$ de classes de homotopia monotônica das trajetórias regulares do sistema Σ a partir de um estado fixo tem estrutura de variedade diferenciável com a mesma dimensão que M. Nesta conexão, o teorema 3.1.1 é um dos resultados principais da tese. Como corolário deste teorema temos um difeomorfismo local e levantamos Σ à variedade $\Gamma(\Sigma, x)$ obtendo um sistema em $\Gamma(\Sigma, x)$.

Para considerar as propriedades universais de $\Gamma(\Sigma, x)$, tomamos uma variedade N que recobre o conjunto acessível $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ via um difeomorfismo local sobrejetor. Comparando as trajetórias de sistemas levantados sobre essas duas variedades, construímos uma aplicação de $\Gamma(\Sigma, x)$ a valores em N. Esta construção é nada mais do que imitar a teoria clássica. Feito isso, comparamos a homotopia monotônica com a homotopia usual. Em particular, exibimos um exemplo de um sistema de controle que admite trajetórias que são homotópicas mas não são monotonicamente homotópicas. Pretendemos também relacionar nossas construções e resultados com um dos problemas apresentados em [16] para semigrupos gerais. Também, definimos o semigrupo fundamental para homotopia monotônica como análogo de grupo fundamental de um espaço topológico.

Finalmente, particularizamos os resultados já obtidos para o contexto de conjuntos de controle onde o problema de valor inicial que aparece ao longo do trabalho pode ser melhorado assumindo $x \in \mathrm{int}\mathcal{A}(x)$.

Abstract

In this work, we deal with monotonic homotopy, an appropriate variant of homotopy, of trajectories of non-linear control systems as well as monotonic curves in Lie semigroups. We first introduce a concept of regularity for control functions which may be viewed, through a reparametrization, as generalization of normal controls, and consider monotonic homotopy of regular trajectories of a given control system Σ on a manifold M. Then, we show that the set $\Gamma(\Sigma, x)$ of monotonic homotopy classes of regular trajectories of Σ starting at a given fixed point x has a differentiable manifold structure with the same dimension as M. In this connection, Theorem 3.1.1 is one of the major achievements of the thesis. As a consequence of this theorem we get a local diffeomorphism and lift Σ to the manifold $\Gamma(\Sigma, x)$ obtaining a system in $\Gamma(\Sigma, x)$.

To consider universal properties of $\Gamma(\Sigma, x)$, we take a manifold N that covers the accessible set $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ via a surjective local diffeomorphism. Comparing the trajectories of the lifted systems on these two manifolds, we construct a map from $\Gamma(\Sigma, x)$ into N. This construction is only a mild imitation of the classical theory. We then compare monotonic homotopy with usual homotopy. In particular, we exibit an example of a system admitting trajectories which are homotopic but not monotonically homotopic. We also try to relate our constructions and results to one of the problems presented in [16] for semigroups in general. We define a fundamental semigroup for monotonic homotopy as an analogue of fundamental group of a topological space.

Finally, we particularize the results obtained so far to the context of control sets where the initial value problem that appears throughout the work may be improved assuming $x \in \mathrm{int}\mathcal{A}(x)$.