İkinci Mertebeden Doğrusal Olmayan Bir Sınıf Sistemin Periyodik Uyarlamalı Dayanıklı Geri Adımlamalı Kontrolü
Periodic Adaptive Robust Backstepping Control of a Class of Second-Order Nonlinear Systems

Fatih Adıgüzel[1], *Kadircan Kurtuluş*[1], *Ammar Urgan*[1], *Onur Akbatı*[2], *Türker Türker*[3]

[1]Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye
{fatih.adiguzel,kadircan,ammar}@yildiz.edu.tr
[2]Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye
{oakbati}@itu.edu.tr
[3]Elektromekanik Mühendislik ve Teknoloji Bölümü,
Abu Dhabi Polytechnic Üniversitesi, Abu Dhabi, UAE
{turker.turker}@actvet.gov.ae

Özetçe

Bu çalışmada, zamanla değişen periyodik belirsiz sinyallere sahip bir sınıf ikinci mertebeden doğrusal olmayan dinamik sistem için periyodik uyarlama tabanlı dayanıklı bir kontrolcüye yer verilmiştir. Doğrusal olmayan sistemin kontrolü geri adımlamalı teknik ve periyodik uyarlama kuralları ile inşa edilmiştir. Ayrıca, geri adımlamalı kontrolcü tasarımında periyodik olmayan sınırlı belirsiz sinyallerin sınırlılığı doğrusal olmayan sönüm tekniği ile sağlanmaktadır. Kapalı çevrim sistemin yakınsama analizleri uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli yardımıyla gösterilmiştir. Son olarak, doğrusal olmayan örnek bir sistem üzerinde benzetim çalışmaları ile önerilen kontrol yönteminin etkinliği test edilmiştir.

Abstract

In this study, a periodic adaptation-based robust controller for a class of second order nonlinear dynamical systems having time-varying periodic uncertain signals is addressed. The control of the nonlinear system is constructed with the backstepping technique and periodic adaptation rules. In addition, the boundedness of non-periodic bounded uncertain signals in the backstepping controller design is provided by the nonlinear damping technique. Convergence analyses of the closed-loop system are shown with the help of a suitable Lyapunov-Krasovskii functional. Finally, the effectiveness of the proposed control method is tested with simulation studies on an example nonlinear dynamic system.

1. Giriş

Sabit belirsizliklere sahip kesin geri beslemeli yüksek mertebeli doğrusal olmayan sistemlerin uyarlamalı kontrolüne literatürde birçok çalışmada yer verilmektedir [1,2]. Ancak gerçek zamanlı birçok sistemde belirsizlikler zamanla değişen durumdadır. Bu tip belirsizlikler için literatürde farklı çokça çalışma sunulmuştur [3–6]. Diğer taraftan, zamanla değişen belirsiz sinyallerin periyodik olması üzerine de birçok çalışma mevcuttur (sürekli zamanlı tasarım [7], ayrık zamanlı tasarım [8]). Bu çalışmalardan en önde geleni periyodik uyarlamanın her periyot boyunca gerçekleştirildiği bir mekanizmaya sahip periyodik uyarlamalı kontrol yapısıdır [7]. Ancak bu çalışma sadece birinci mertebeden doğrusal olmayan dinamik sistemleri ele almaktadır ve bu çalışmadan esinlenen birçok çalışma literatürde mevcuttur. Örneğin, sabit mıknatıslı motorlarda akım kontrolü bahsedilen uyarlama tabanlı olarak değişken frekans problemini de ele alacak şekilde düzenlenmiştir [9–11]. Bunların yanında, periyodik belirsiz sinyaller Fourier serisine açılarak da kestirilmeye çalışılmaktadır [12–16]. Ancak sınırlı sayıda katsayı ele alınıp, işlenebildiği için bu yöntem uygulamada yetersiz kalabilmektedir. Bu açıdan bakıldığında periyodik uyarlamalı kontrol yöntemi sınırlı sayıda Fourier serisi kazançlarını kestiren yönteme göre daha etkilidir. Ancak, yüksek mertebeli sistemlerde Fourier serisi açılımı kullanılabiliyorken periyodik uyarlamalı kontrol için literatürde böyle bir çalışma mevcut değildir.

Doğrusal parametreli belirsizlikler içeren yüksek mertebeli sistemlerin sistematik kontrolü için en önde gelen doğrusal olmayan yöntemlerden biri geri adımlamalı kontrolcüdür. Bu yöntem, doğrusal olmayan istemeyen fonksiyonların sistemden uzaklaştırılması ve güçlü yaklaşımlarla birleştirilebilmesi gibi karakteristik özelliklere sahiptir [1, 17]. Örneğin, bu yöntem

uyarlamalı yaklaşımlarla birleştirilebilmektedir [5, 6, 18]. Diğer taraftan literatürdeki dayanıklı geri adımlamalı kontrol yöntemlerinden biri doğrusal olmayan sönüm terimleriyle dayanıklılığın sağlandığı dayanıklı geri adımlamalı kontrolcüdür. Bu yöntem, dinamik sistemdeki belirsiz parametrelerin/sinyallerin sınırlı bir bantta tutulmasına dayanmaktadır. Ancak belirsizliklerin kendi doğasıyla sönümlenmesiyle sistem asimptotik kararlılığı elde edilebilmektedir. Belirsizliklerin zamanla sönümlenmemesi durumunda sistemde belirsizliklerin özelliğine göre sabit veya zamanla değişen kararlı hal hatası sistem çıkışında görülmektedir [19].

Bu çalışmada, literatürde ilk kez, bir sınıf doğrusal olmayan ikinci mertebeden dinamik sistem için periyodik uyarlamalı dayanıklı geri adımlamalı kontrolcü tasarımı sunulmaktadır. Geri adımlamalı kontrolcü tasarım adımlarında, sistemdeki zamanla değişen tüm belirsiz sinyaller dikkate alınmaktadır. Bu bağlamda, periyodik belirsizlikler için periyodik uyarlama kuralları önerilmiştir ve periyodik olmayan belirsiz sinyaller için doğrusal olmayan sönüm tekniği kullanılmıştır. Böylece periyodik uyarlamalı dayanıklı geri adımlamalı kontrol tekniği geliştirilmektedir. Sınırlı kılınan periyodik olmayan belirsiz sinyallerin kararlı halde ürettiği zamanla değişen hatalar periyodik uyarlamalar ile hafifletilmektedir. Diğer taraftan önerilen kontrol yapısı zamanla değişen periyodik belirisiz sinyal kadar uyarlama kuralı önermektedir. Bu da aşırı parametreli uyarlama yapısının önüne geçmektedir. Ayrıca, kapalı çevrim sistemin yakınsama analizleri bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli ile ispatlanmıştır. Son olarak, doğrusal olmayan bir sistem üzerinde başarılı benzetim çalışmaları önerilen doğrusal olmayan uyarlamalı dayanıklı kontrolcünün uygulanabilirliğini göstermektedir.

Bu çalışmanın geri kalan başlıkları şu şekilde organize edilmiştir. İkinci başlıkta ele alınan dinamik sistem sınıfı tanıtılmaktadır. Bir sonraki bölümde, önerilen kontrol yönteminin tasarım adımları verilmektedir. Dördüncü başlıkta kapalı çevrim sistemin yakınsama analizleri yapıldıktan sonra bir sonraki başlıkta örnek bir sistem üzerinden klasik dayanıklı geri adımlamalı kontrolcü ile karşılaştırmalı olarak önerilen kontrolcünün etkinliği gösterilmektedir. Son olarak, bu çalışmanın sonuçlarından ve planlanan çalışmalardan bahsedilmektedir.

2. Problem Tanımı

Bu çalışmada ele alınan ikinci mertebeden kesin geri beslemeli yapıda olan doğrusal olmayan sistem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \theta_1(t)\xi_1(x_1), \tag{1}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) + \theta_2(t)\xi_2(x_1, x_2) \tag{2}$$

biçiminde ele alınsın. (1)-(2) sisteminde, x_1, x_2 sistem durumlarını, u kontrol sinyalini, ξ_1, ξ_2 türevlenebilir sürekli düzgün doğrusal olmayan fonksiyonları ve θ_1, θ_2 ise zamanla değişen ve T ortak periyot değerine sahip belirsiz periyodik sinyalleri $\big(\theta_1(t) = \theta_1(t-T),\ \theta_2(t) = \theta_2(t-T)\big)$ göstermektedir.

Doğrusal olmayan sistemlerin geri adımlamalı kontrol tasarımında θ_1 ve θ_2 belirsiz parametrelerin sabit belirsiz olduğu durumda uyarlamalı geri adımlamalı kontrolcü inşası gerçekleştirilebilmektedir. Ayrıca, birinci mertebeden doğrusal olmayan sistemler için periyodik uyarlamalı kontrol yapısı literatürde önerilmiştir [7]. Ancak, sistemin yüksek mertebeli olması durumunda ve belirsiz sinyallerin zamanla değişen olması durumunda geri adımlamalı kontrolcü yapısına periodik uyarlama sinyallerinin eklenmesi oldukça zor bir problem halini almaktadır. Bir sonraki bölümde doğrusal olmayan sönüm atama ile dayanıklığın sağlandığı periyodik uyarlamalı geri adımlamalı kontrolcü yapısı verilmektedir. Ayrıca, tüm tasarım boyunca ve kararlılık analizlerinde gerek görülmedikçe bağlı değişkenler gösterimlerden uzaklaştırılmıştır.

3. Kontrolcü Tasarımı

Kontrolcü tasarımına başlarken e hata ifadesi

$$e = x_1 - x_{1d} \tag{3}$$

olarak tanımlansın, burada x_{1d}, x_1 durumu için takip yörüngesini göstersin. ϕ_2 sanal kontrolcü girişi olmak üzere $z_2 = x_2 - \phi_2$ tanımlanırsa ve (1) sistem dinamiği kullanılırsa, (3) denkleminin türevi

$$\dot{e} = z_2 + \phi_2 + \theta_1\xi_1 - \dot{x}_{1d} \tag{4}$$

biçiminde yazılmaktadır. Bu noktada, sanal kontrol sinyali ϕ_2

$$\phi_2 = -\hat{\theta}_1(t-T)\xi_1 + \dot{x}_{1d} - k_1 e - \kappa_1\xi_1^2 e \tag{5}$$

burada k_1, κ_1 pozitif bir kazançlar olmak üzere şeklinde tasarlansın. Denklem (5)'te uyarlama sinyali $\hat{\theta}_1(t)$ yerine $\hat{\theta}_1(t-T)$ sinyali kullanılmıştır. Bu kullanım yararı kontrol tasarımının ilerleyen adımlarında görülecektir. Ancak, bu kullanım $\hat{\theta}_e(t) = \hat{\theta}_1(t-T) - \hat{\theta}_1(t)$ şeklinde sınırlı bir hata üretecektir. Böylece, (4) denklemi k_1 kontrolcü kazançı olmak üzere

$$\dot{e} = z_2 - \tilde{\theta}_1\xi_1 - \hat{\theta}_e\xi_1 - k_1 e - \kappa_1\xi_1^2 e \tag{6}$$

halini almaktadır ki $\tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1$ tanımlanmaktadır. Bir sonraki adımda, $\dot{z}_2$ dinamiği

$$\begin{aligned}
\dot{z}_2 =& u + \theta_2\xi_2 + \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 + \hat{\theta}_1(t-T)\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} \\
&+ \kappa_1\frac{\partial\xi_1^2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}e + \kappa_1\xi_1^2\dot{e} - \ddot{x}_{1d} + k_1\dot{e} \\
=& u + \theta_2\xi_2 + \left(\hat{\theta}_1(t-T)\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \kappa_1\frac{\partial\xi_1^2}{\partial x_1}e + \kappa_1\xi_1^2 + k_1\right)x_2 \\
&+ \left(\hat{\theta}_1(t-T)\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \kappa_1\frac{\partial\xi_1^2}{\partial x_1}e + \kappa_1\xi_1^2 + k_1\right)\theta_1\xi_1 \\
&+ \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 - \ddot{x}_{1d} - k_1\dot{x}_{1d} - \kappa_1\xi_1^2\dot{x}_{1d}
\end{aligned} \tag{7}$$

biçiminde düzenlenebilmektedir. Bu noktada belirtilmelidir ki hem sanal kontrol sinyali ile kararlı kılınmak istenen (4) dinamiğinde hem de (7) dinamiğinde periyodik belirisiz sinayaller (θ_1, θ_2) vardır. Bu sinyallerin uyarlamaları periyodik olarak gerçekleştirilebilmektedir. Yani kontrol sinyali u, k_2 kontrolcü kazançı olmak üzere

$$\begin{aligned}
u =& -\hat{\theta}_2\xi_2 - \left(\hat{\theta}_1(t-T)\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \kappa_1\frac{\partial\xi_1^2}{\partial x_1}e + \kappa_1\xi_1^2 + k_1\right)x_2 \\
&- \left(\hat{\theta}_1(t-T)\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \kappa_1\frac{\partial\xi_1^2}{\partial x_1}e + \kappa_1\xi_1^2 + k_1\right)\hat{\theta}_1\xi_1 \\
&- \kappa_2\xi_1^2 z_2 + \ddot{x}_{1d} + (k_1 + \kappa_1\xi_1^2)\dot{x}_{1d} - e - k_2 z_2
\end{aligned} \tag{8}$$

burada k_2, κ_2 pozitif bir kazançlar olmak üzere, tasarlanılabilmektedir. Burada $\kappa_1\xi_1^2 e$ ve $\kappa_2\xi_1^2 z_2$ ifadeleri sanal kontrol sinyali ϕ_2'ye ve kontrol sinyaline sırasıyla eklenmesinin sebebi $\hat{\theta}_e\xi_1$ ve $\dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1$ ifadelerinin doğrusal olmayan sönüm atama ile sınırlandırılmasıdır. Kontrol sinyalinin tasarımı sonrasında, $\dot{z}_2$ dinamiği

$$\dot{z}_2 = -\tilde{\theta}_2\xi_2 + \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 - \kappa_2\xi_1^2 z_2 - e - k_2 z_2 - \psi\tilde{\theta}_1\xi_1 \tag{9}$$

burada $\psi = \left(\hat{\theta}_1(t-T)\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + \kappa_1\frac{\partial\xi_1^2}{\partial x_1}e + \kappa_1\xi_1^2 + k_1\right)$ olmak üzere şeklinde elde edilmektedir. Burada $\tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2$ tanımı ile uyarlama kuralları $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$

$$\hat{\theta}_1(t) = \begin{cases} \hat{\theta}_1(t-T) - q_1\xi_1\left(e+\psi z_2\right), & t\in[T,\infty) \\ -q_{1_0}(t)\xi_1\left(e+\psi z_2\right), & t\in[0,T) \end{cases} \tag{10}$$

$$\hat{\theta}_2(t) = \begin{cases} \hat{\theta}_2(t-T) - q_2\xi_2 z_2, & t\in[T,\infty) \\ -q_{2_0}(t)\xi_2 z_2, & t\in[0,T) \end{cases} \tag{11}$$

biçiminde verilebilmektedir. Burada $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$, sırasıyla θ_1 ve θ_2 için uyarlama sinyallerini, $q_1 > 0$ ve $q_2 > 0$ sabit kazançları, q_{1_0}, q_{2_0} ise $q_{1_0}(0) = 0$, $q_{2_0}(0) = 0$ ve $q_{1_0}(t) = q_1, q_{2_0}(t) = q_2$, $\forall t \geqslant T$ olmak üzere pozitif, zamanla değişen kazanç fonksiyonlarını göstermektedir. Kontrol sinyalleri (5) ve (8) ve uyarlama kuralları (10)-(11), hata dinamikleri (4) ve (7)'de yerine konularak, kapalı çevrim sistem dinamiği

$$\dot{e} = z_2 - \tilde{\theta}_1\xi_1 - \hat{\theta}_e\xi_1 - k_1 e - \kappa_1\xi_1^2 e \tag{12}$$

$$\dot{z}_2 = -\tilde{\theta}_2\xi_2 + \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 - \kappa_2\xi_1^2 z_2 - e - k_2 z_2 - \psi\tilde{\theta}_1\xi_1 \tag{13}$$

elde edilir. Burada belirtilmelidir ki uyarlama sinyali $\hat{\theta}_1(t-T)$ sınırlı sinyallerle tasarlandığı için bu sinyalin türevi de sınırlıdır.

4. Yakınsama Analizi

Kapalı çevrim sistemin yakınsama analizini göstermek için uygun bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$V(e, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \frac{1}{2}e^2(t) + \frac{1}{2}z_2^2(t) + \frac{1}{2q_1}\int_{t-T}^{t}\tilde{\theta}_1^2(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2q_2}\int_{t-T}^{t}\tilde{\theta}_2^2(\tau)\,d\tau \tag{14}$$

olarak seçilsin. $t\in[T,\infty)$ aralığında periyodik bir yakınsama gösterebilmek için ΔV

$$\Delta V(t) = V(t) - V(t-T) \tag{15}$$

işlemine (14)'de tanımlanan fonksiyonelin uygulanması gerekmektedir. (12)-(13) denklemleri kullanılarak, (15) denkleminin açılımında ilk iki terim

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= \int_{t-T}^{t} e\frac{de}{dt}\,d\tau + \int_{t-T}^{t} z_2\frac{dz_2}{dt}\,d\tau \\ &= \int_{t-T}^{t}(-\tilde{\theta}_1\xi_1 e - \hat{\theta}_e\xi_1 e - k_1 e^2 - \kappa_1\xi_1^2 e)\,d\tau \\ &+ \int_{t-T}^{t}\Big(-\tilde{\theta}_2\xi_2 z_2 + \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 z_2 - \kappa_2\xi_1^2 z_2^2 \\ &- k_2 z_2^2 - \psi\tilde{\theta}_1\xi_1 z_2\Big)\,d\tau\end{aligned} \tag{16}$$

şeklinde düzenlenmektedir. (15) denkleminin son iki teriminin bir periyot boyunca farkı, belirsiz sinyallerin periyodiklik özelliği ve $(x-y)^2 - (z-y)^2 = (z-x)[2(y-x)+(x-z)]$ matematiksel eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= \frac{1}{2q_1}\int_{t-T}^{t}\left(\tilde{\theta}_1^2(\tau) - \tilde{\theta}_1^2(\tau-T)\right)\,d\tau \\ &+ \frac{1}{2q_2}\int_{t-T}^{t}\left(\tilde{\theta}_2^2(\tau) - \tilde{\theta}_2^2(\tau-T)\right)\,d\tau \\ &= \int_{t-T}^{t}\left[\tilde{\theta}_1\Big(\xi_1 e + \xi_1\psi z_2\Big) - \frac{q_1}{2}\Big(\xi_1 e + \xi_1\psi z_2\Big)^2\right]d\tau \\ &+ \int_{t-T}^{t}\left(\tilde{\theta}_2\xi_2 z_2 - \frac{q_1}{2}\xi_2^2 z_2^2\right)d\tau\end{aligned} \tag{17}$$

şeklinde elde edilmektedir. Doğrusal olmayan sönüm işlemini gerçekleştirmek için $\hat{\theta}_e^2/4\kappa_1$ ve $\dot{\hat{\theta}}_1^2(t-T)/4\kappa_2$ terimleri eklenlip /çıkarılarak ve uygun sadeleştirmelerle $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ ifadesi

$$\begin{aligned}\Delta V &\leq -\int_{t-T}^{t}(k_1 e^2 + k_2 z_2^2 - \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 z_2 \\ &\quad + \kappa_2\xi_1^2 z_2^2 + \hat{\theta}_e\xi e + \kappa_1\xi^2 e^2)\,d\tau \\ &\leq -\int_{t-T}^{t}\left(k_1 e^2 + k_2 z_2^2 + \frac{\hat{\theta}_e^2}{4\kappa_1} - \kappa_1\left(\xi_1 e + \frac{\dot{\hat{\theta}}_e}{2\kappa_1}\right)^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{\hat{\theta}}_1^2(t-T)}{4\kappa_2} - \kappa_2\left(\xi_1 z_2 - \frac{\dot{\hat{\theta}}_1(t-T)}{2\kappa_2}\right)^2\right)d\tau \\ &\leq -\int_{t-T}^{t}\left(k_1 e^2 + k_2 z_2^2 - \frac{\hat{\theta}_e^2}{4\kappa_1} - \frac{\dot{\hat{\theta}}_1^2(t-T)}{4\kappa_2}\right)d\tau.\end{aligned} \tag{18}$$

olarak yazılmaktadır. $\hat{\theta}_{e_b}$ ve $\dot{\hat{\theta}}_{1_b}(t-T)$ ifadeleri $|\hat{\theta}_e| < \hat{\theta}_{e_b}$ ve $|\dot{\hat{\theta}}_1(t-T)| < \dot{\hat{\theta}}_{1_b}$ şeklinde sınır bir değerlerini göstermek üzere tanımlanabilmektedir. Farklı bir ifadeyle, $\hat{\theta}_{e_b}$ ve $\dot{\hat{\theta}}_{1_b}^2(t-T)$ ifadeleri sınırlı olduğu için, $|k_1 e^2 + k_2 z_2^2|$ ifadesi $\frac{\hat{\theta}_{e_b}^2}{4\kappa_1} + \frac{\dot{\hat{\theta}}_{1_b}^2(t-T)}{4\kappa_2}$ ifadesinden büyük olduğunda $\Delta V < 0$ sağlanmaktadır. Bahsedilen durumu sağlacak şekilde uygun k_1, k_2 ve κ_1, κ_2 seçimlerinin sağlanması ile

$$\Delta V \leq -\int_{t-T}^{t}\left(k_1 e^2 + k_2 z_2^2\right)\,d\tau < 0 \tag{19}$$

elde edilmektedir. Bir periyot için uygulanan yakınsama analizi, $t \in [jT, (j+1)T]$ tüm periyotlar için ardı sıra uygulanabilmektedir. Yani, (19) ile elde edilen eşitsizlik herhangi $t\in[iT,(i+1)T]$ tanımlı ve $t_0 = t - iT$ tanımlanırsa,

$$V(e, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = V(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1}\Delta V(t-jT) \tag{20}$$

ile verilen seri toplamında bir pozitif tanımlı fonksiyonel yazılabilmektedir ve burada, $t_0\in[0,T)$ ve (19) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} V(e, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) &< \max_{t_0\in[0,T)} V(t_0) \\ &- \lim_{t\to\infty}\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t-(j+1)T}^{i-jT}\left(k_1 e^2 + k_2 z_2^2\right)d\tau\end{aligned} \tag{21}$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilmektedir. Bunun yanında V'nin pozitif tanımlı olduğu ve $V(t_0)$ ifadesinin $[0,T)$ aralığında sınırlı bir değere sahip olduğu bilinmektedir. Böylece, seri toplamlarının yakınsama teoremine göre e, z_2 izleme hataları asimptotik olarak sıfıra yakınsamaktadır. Ayrıca, pozitif tanımlı fonksiyonel $V(e, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, $t \in [0,T)$ aralığında sınırlılığının gösterilmesi ile yakınsama analizi tamamlanacaktır. $t \in [0,T)$ aralığında uyarlama kuralları

$$\hat{\theta}_1(t) = -q_{1_0}(t)\left(\xi_1 e + \xi_1 \psi z_2\right) \tag{22}$$

$$\hat{\theta}_2(t) = -q_{2_0}(t)\xi_2 z_2 \tag{23}$$

biçimindedir ve burada $q_1 > q_{1_0}(t) > 0$ ve $q_2 > q_{2_0}(t) > 0$ geçerlidir. Burada fark işlemi yerine, V'in türevi, (12)-(13) yerine konularak ve $\alpha_1 = ((1/q_{1_0}) - (1/2q_1)) > 0$ ve $\alpha_2 = ((1/q_{2_0}) - (1/2q_2)) > 0$ atamaları ile

$$\begin{aligned}
\dot{V} =& e\dot{e} + z_2\dot{z}_2 + \frac{1}{2q_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2q_2}\tilde{\theta}_2^2 \\
=& -k_1 e^2 - k_1 z_2^2 + \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 - \kappa_2\xi_1^2 z_2 - \tilde{\theta}_2\xi_2 z_2 \\
& - \tilde{\theta}_1\left(\xi_1 e + \xi_1\psi z_2\right) - \hat{\theta}_e\xi - \kappa_1\xi^2 e + \frac{1}{2q_2}\tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{2q_1}\tilde{\theta}_1^2 \\
=& -k_1 e^2 - k_1 z_2^2 + \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 - \kappa_2\xi_1^2 z_2 - \hat{\theta}_e\xi - \kappa_1\xi^2 e \\
& + \tilde{\theta}_1\frac{\hat{\theta}_1 + \theta_1 - \theta_1}{q_{1_0}} + \frac{1}{2q_1}\tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_2\frac{\hat{\theta}_2 + \theta_2 - \theta_2}{q_{2_0}} + \frac{1}{2q_2}\tilde{\theta}_2^2 \\
=& -k_1 e^2 - k_1 z_2^2 + \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 - \kappa_2\xi_1^2 z_2 - \hat{\theta}_e\xi - \kappa_1\xi^2 e \\
& + \alpha_1\tilde{\theta}_1^2 + \alpha_2\tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{q_{1_0}}\tilde{\theta}_1^2\theta_1 + \frac{1}{q_{2_0}}\tilde{\theta}_2\theta_2
\end{aligned} \tag{24}$$

elde edilmektedir. Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{\tilde{\theta}_1\theta_1}{q_{1_0}} \le \frac{\epsilon_1}{q_{1_0}}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{4\epsilon_1 q_{1_0}}\theta_1^2, \quad \frac{\tilde{\theta}_2\theta_2}{q_{2_0}} \le \frac{\epsilon_2}{q_{2_0}}\tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{4\epsilon_2 q_{2_0}}\theta_2^2$$

yazılmaktadır ki burada $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$. ϵ_1, ϵ_2 terimleri sırasıyla $0 < \epsilon_1/q_{1_0} < \alpha_1$ ve $0 < \epsilon_2/q_{2_0} < \alpha_2$ sağlayacak şekilde seçilirse ve doğrusal olmayan sönüm yakınsama analizinin ilk kısmına benzer şekilde eklendiğinde, (24) eşitliği

$$\begin{aligned}
\dot{V} \le& -k_1 e^2 - k_1 z_2^2 + \dot{\hat{\theta}}_1(t-T)\xi_1 - \kappa_2\xi_1^2 z_2 - \hat{\theta}_e\xi - \kappa_1\xi^2 e \\
& + \frac{\theta_1^2}{4\epsilon_1 q_{1_0}} + \frac{\theta_2^2}{4\epsilon_2 q_{2_0}} - \left(\alpha_1 - \frac{\epsilon_1}{q_{1_0}}\right)\tilde{\theta}_1^2 - \left(\alpha_2 - \frac{\epsilon_2}{q_{2_0}}\right)\tilde{\theta}_2^2 \\
\le& -k_1 e^2 - k_1 z_2^2 + \frac{\dot{\hat{\theta}}_1^2(t-T)}{4\kappa_2} - \kappa_2\left(\xi_1 z_2 - \frac{\dot{\hat{\theta}}_1(t-T)}{2\kappa_2}\right)^2 \\
& + \frac{\hat{\theta}_e^2}{4\kappa_1} - \kappa_1\left(\xi_1 e + \frac{\dot{\hat{\theta}}_e}{2\kappa_1}\right)^2 + \frac{\theta_1^2}{4\epsilon_1 q_{1_0}} + \frac{\theta_2^2}{4\epsilon_2 q_{2_0}} \\
& - \left(\alpha_1 - \frac{\epsilon_1}{q_{1_0}}\right)\tilde{\theta}_1^2 - \left(\alpha_2 - \frac{\epsilon_2}{q_{2_0}}\right)\tilde{\theta}_2^2
\end{aligned} \tag{25}$$

şeklinde düzenlenmektedir. Bilinmektedir ki periyodik sinyaller sınırlı sinyallerdir. Periyodik sinyallerin en büyük değerleri $\theta_{1_b}, \theta_{2_b}$ ile göstermek üzere $\dot{V}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
&\frac{\hat{\theta}_{e_b}^2}{4\kappa_1} + \frac{\dot{\hat{\theta}}_{1_b}^2(t-T)}{4\kappa_2} + \frac{\theta_{1_b}^2}{4\epsilon_1 q_{1_0}} + \frac{\theta_{2_b}^2}{4\epsilon_2 q_{2_0}} < \Bigg(k_1 e^2 + k_2 z_2^2 + \\
&\left(\alpha_1 - \frac{\epsilon_1}{q_{1_0}}\right)\tilde{\theta}_1^2 + \left(\alpha_2 - \frac{\epsilon_2}{q_{2_0}}\right)\tilde{\theta}_2^2\Bigg), \left(e, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\right) \in \mathcal{R}^4
\end{aligned}$$

bölgesi içerisinde negatif değerli olmaktadır ve bu sonuç V pozitif tanımlı fonksiyonelinin $t \in [0,T)$ aralığında sonlu bir sınırlı değere sahip olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, elde edilen şartların sağlanması durumunda e ve z_2 sinyallerinin sıfıra yakınsadığı gösterilmektedir.

5. Örnek Sistem

Bu başlıkta, ikinci mertebeden bir sınıf doğrusal olmayan dinamik sistem için önerilen periyodik uyarlamalı dayanıklı kontrolcünün uygulanılabilirliği MATLAB ortamında gerçekleştirilen benzetim çalışmaları ile test edilmektedir. (1)-(2) ile verilen sistem tekrar yazılırsa,

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \theta_1(t)x_1(t), \tag{26}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) + \theta_2(t)x_1^2(t)x_2(t) \tag{27}$$

burada $\theta_1(t) = \theta_2(t) = 2sin(4\pi t/3)$ olacak biçimde bir dinamik sistem düşünülmektedir. Benzetim çalışmalarında çözücü adım süresi 100 μs, kontrolcü örnekleme süresi 1 ms ve kontrol sinyali 20 ile doyuma ayarlanmıştır. Buna bağlı olarak bir periyodik uyarlama sinyalleri $T = 1500$ örnek verisi ile uyarlanmaktadır. Ayrıca, sistem durumlarının başlangıç değerleri $x_1(0) = 0.05$ ve $x_2(0) = 0$ olarak atanmıştır. Ayrıca, x_1 durumu iki farklı yörünge için test edilmektedir. Sırasıyla yörüngeler $x_{1d} = 0.1$ ve $x_{1_d} = 0.1 + 0.01sin(4\pi t/9)$ olarak düşünülmüştür. Kontrolcü kazançları $k_1 = 100$, $k_2 = 20$, doğrusal olmayan sönüm kazançları $\kappa_1 = \kappa_2 = 20$, uyarlama kazançları $q_1 = 0.5$, $q_2 = 2000$ ve $q_{1_0}(t) = \frac{2tq_1}{3}$, $q_{2_0}(t) = \frac{2tq_1}{3}$ olarak ayarlanmıştır. Bu koşullar ele alındığında, sırasıyla (5) ve (8) ile genelleştirilmiş olarak verilen sanal kontrol sinyali $(\phi_2(t))$ ve kontrol sinyali $(u(t))$

$$\begin{aligned}
\phi_2(t) =& -k_1 e + \dot{x}_{1d} - \hat{\theta}_1(t-T)x_1 - \kappa_1 x_1^2 e \\
u(t) =& -\hat{\theta}_2 x_1^2 x_2 - \psi\hat{\theta}_1 x_1 - \kappa_2 x_1^2 z_2 + \ddot{x}_{1d} \\
& - (\hat{\theta}_1(t-T) + 2\kappa_1 x_1 e + \kappa_1 x_1^2 + k_1)x_2 \\
& + (k_1 + \kappa_1 x_1^2)\dot{x}_{1d} - e - k_2 z_2
\end{aligned}$$

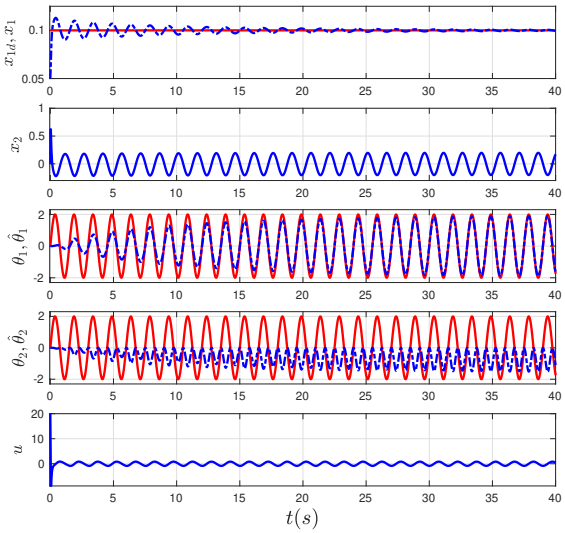
ve uyarlama kuralları

$$\hat{\theta}_1(t) = \begin{cases} \hat{\theta}_1(t-T) - q_1 x_1(e + \psi z_2), & t \in [T, \infty) \\ -q_{1_0}(t)x_1(e + \psi z_2), & t \in [0, T) \end{cases}$$

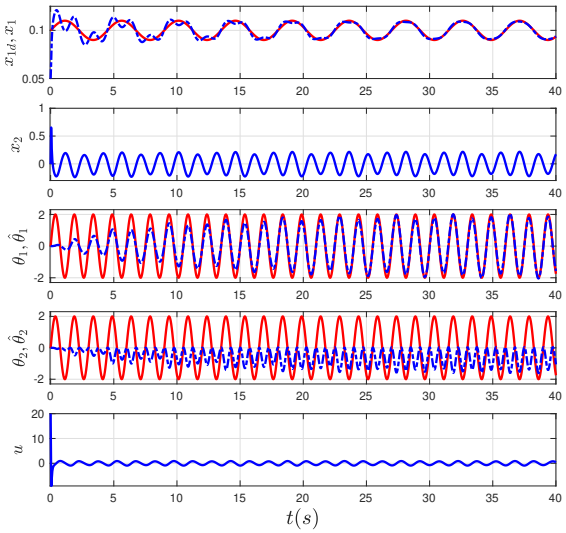
$$\hat{\theta}_2(t) = \begin{cases} \hat{\theta}_2(t-T) - q_2 x_1^2 x_2 z_2, & t \in [T, \infty) \\ -q_{2_0}(t)x_1^2 x_2 z_2, & t \in [0, T) \end{cases}$$

burada $\psi = \hat{\theta}_1(t-T) + 2\kappa_1 x_1 e + \kappa_1 x_1^2 + k_1$ olmak üzere biçiminde elde edilmektedir.

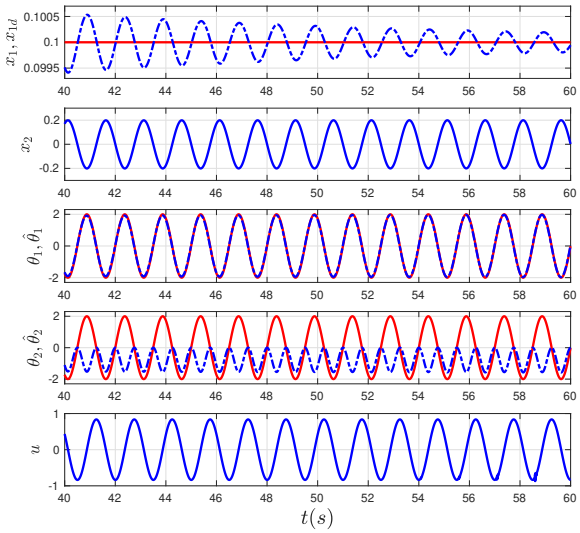
Benzetim sonuçları 0-60 s aralığında sabit referans takibi ($x_{1d} = 0.1$) için Şekil 1'de ve zamanla değişen referans takibi ($x_{1_d} = 0.1 + 0.01sin(4\pi t/9)$) için Şekil 3'te sunulmaktadır. Ayrıca, kararlı hal durumunda önerilen kontrolcü altında sistem cevabını daha iyi görebilmek için Şekil 1'in sonuçları Şekil 2'de ve Şekil 3'ün sonuçları Şekil 4'de 40-60 s aralığı için sunulmaktadır. Verilen her benzetim sonucunda, sırasıyla x_1 (mavi renkli noktalı kesikli sinyal) ve izlemesi istenen yörünge x_{1_d} (kırmızı renkli sürekli sinyal) ilk satırda, x_2 ikinci satırda, θ_1 gerçek sinyal (kırmızı renkli sürekli sinyal) ve $\hat{\theta}_1$ kestirilen sinyal (mavi renkli noktalı kesikli



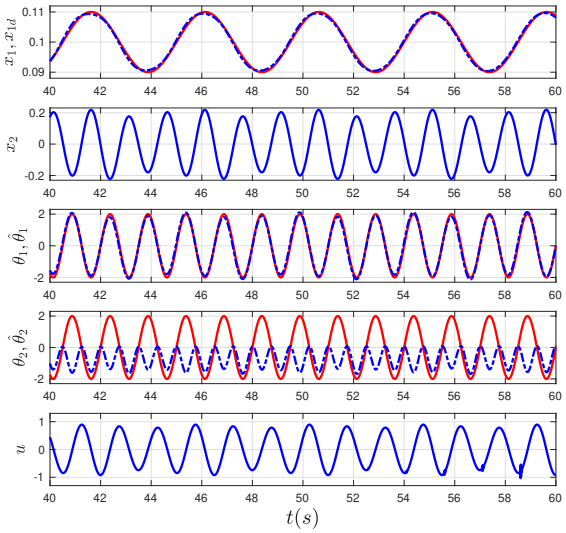
Şekil 1: Periyodik uyarlamalı dayanıklı geri adımlamalı kontrolcünün 0-40 s sabit referans takibi sonuçları.



Şekil 3: Periyodik uyarlamalı dayanıklı geri adımlamalı kontrolcünün 0-40 s sinüzoidal referans takibi sonuçları.



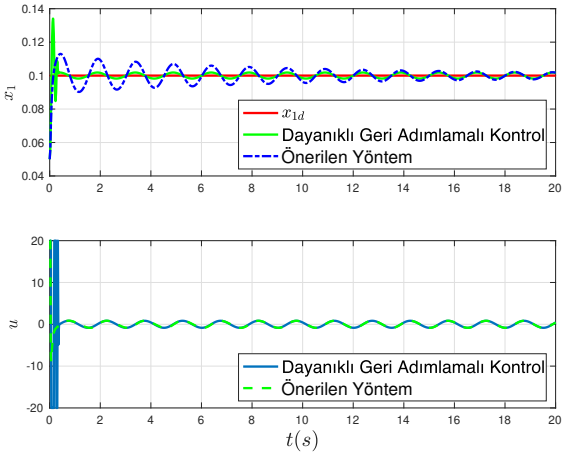
Şekil 2: Periyodik uyarlamalı dayanıklı geri adımlamalı kontrolcünün 40-60 s sabit referans takibi sonuçları.



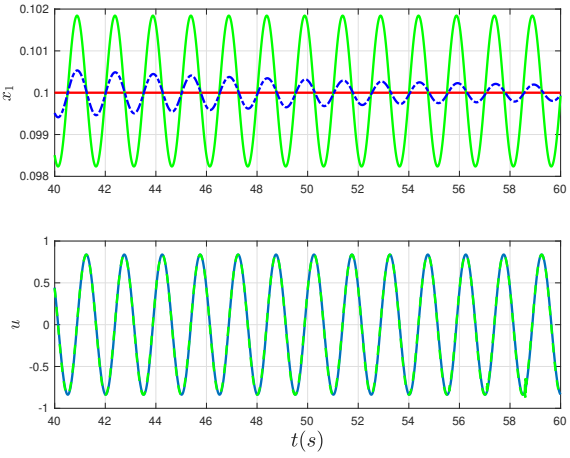
Şekil 4: Periyodik uyarlamalı dayanıklı geri adımlamalı kontrolcünün 40-60 s sinüzoidal referans takibi sonuçları.

sinyal) üçüncü satırda, θ_2 gerçek sinyal (kırmızı renkli sürekli sinyal) ve $\hat{\theta}_2$ kestirilen sinyal (mavi renkli noktalı kesikli sinyal) dördüncü satırda ve son satırda üretilen kontrol sinyali çizdirilmektedir. Benzetim sonuçlarından gözlemlenmektedir ki her iki referans sinyal de önerilen kontrolcü altında başarıyla takip edilmektedir. Ayrıca, $\hat{\theta}_1$ kestirilen sinyal gerçek sinyale yüksek hassasiyetle ulaşmaktadır, ancak $\hat{\theta}_2$ değişimi θ_2 değişimi ile örtüşmemektedir. Diğer taraftan, önerilen periyodik uyarlamalı kontrol yapısı, periyodik belirsiz sinyallerden kaynaklanan ve sınırlı bir bant içerisinde kalan zamanla değişen kararlı hal hatasını zamanla azaltmaktadır (bkz. Şekil 2 ve Şekil 4). Bunların yayında, her periyodik uyarlama sonucunda x_1 sinyali istenen yörüngeye yakınsamaktadır ve bu sonuç periyodik uyarlamaya sahip dayanıklı geri adımlamalı kontrolcünün üstün performansını göstermektedir.

Önerilen kontrol yapısının etkinliğini göstermek için [20] çalışmasındaki klasik dayanıklı geri adımlamalı kontrol ile önerilen kontrol yapısı benzetim sonuçları ile karşılaştırılmıştır.



Şekil 5: Sabit referans takibi için dayanıklı geri adımlamalı ve önerilen kontrolcülerin 0-20 s için sonuçları.



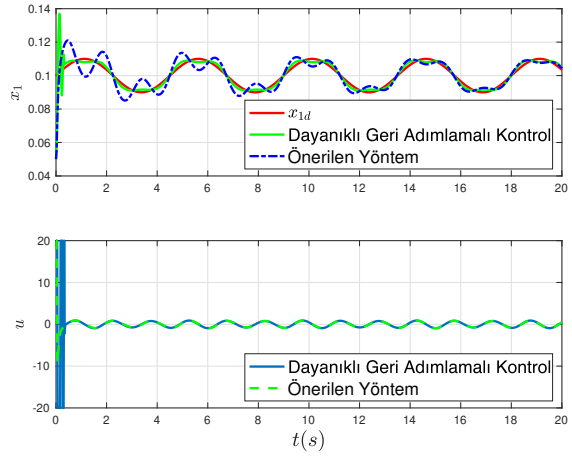
Şekil 6: Sabit referans takibi için dayanıklı geri adımlamalı ve önerilen kontrolcülerin 40-60 s için sonuçları.

(26)-(27)'de verilen sistem modeline dayanıklı geri adımlamalı kontrolcü tasarlanmıştır. Önerilen kontrol yapısındaki hata tanımları aynı kullanılmak üzere ve $\psi = (k_1 + \kappa_1 x_2^2 + 2\kappa_1 x_1 e)$ tanımı ile dayanıklı geri adımlamalı kontrolcü tasarımında sanal ve gerçek kontrol sinyalleri

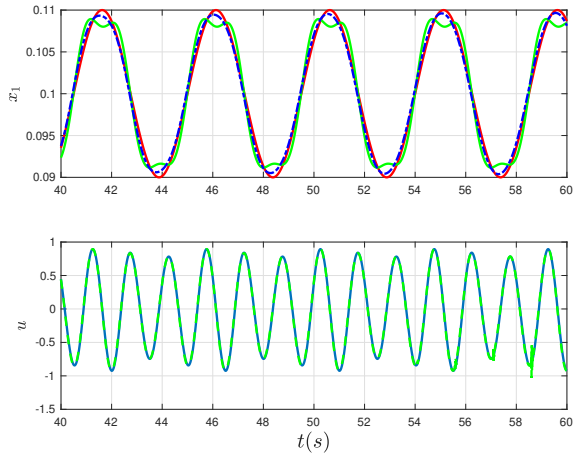
$$\begin{aligned}\phi_2(t) =& -k_1 e + \dot{x}_{1d} - \kappa_1 x_1^2 e \\ u(t) =& -k_2 z_2 - e + \ddot{x}_{1d} + \psi(z_2 - k_1 e - \kappa_1 x_1^2 e) \\ &+ 2\kappa_1 x_1 e \dot{x}_{1d} - \kappa_2 x_1^4 x_2^2 z_2 - \kappa_3 \psi^2 x_1^2 z_2\end{aligned}$$

şeklinde tasarlanmıştır. Burada, $k_1 = 100$, $k_2 = 20$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 10$ kontrolcü kazançları olarak atanmıştır.

Karşılaştırmalı sonuçlar hem sabit referans (Şekil 5) hem de sinüzoidal referans (Şekil 7) takipleri için test edilmiştir. Bu sonuçlarda x_1 takip ve üretilen kontrol sinyallerinin sonuçları Şekil 5 - Şekil 8'de sunulmaktadır. Şekil 5'te



Şekil 7: Sinüzoidal referans takibi için dayanıklı geri adımlamalı ve önerilen kontrolcülerin 0-20 s için sonuçları.



Şekil 8: Sinüzoidal referans takibi için dayanıklı geri adımlamalı ve önerilen kontrolcülerin 40-60 s için sonuçları.

0-20 s arasındaki sonuçlarda önerilen kontrol yönteminde periyodik uyarlamalar olduğu için her periyot sonrası izleme hatası periyodik olarak azalmaktadır. Klasik geri adımlamalı kontrol yönteminde ise yakınsama daha hızlı olmasına rağmen kontrol sinyalinde fazlaca doymalar görülmektedir. Diğer taraftan kontrol yapılarının 40-60 s arasındaki sonuçlarına bakıldığında önerilen kontrol yönteminde hatanın periyodik olarak azaldığı ancak dayanıklı geri adımlamalı kontrolcü cevabında zamanla değişen ve azalmayan bir kararlı hal hatası olduğu görülmektedir. Bu sonuç, önerilen yöntemin zamanla değişen kararlı hal hatası üzerindeki etkinliğini göstermektedir.

Sinüzoidal referans takibi için verilen karşılaştırmalı sonuçlar Şekil 7'de 0-20 s ve Şekil 8'de 40-60 s için verilmektedir. Bu sonuçlara bakıldığında klasik dayanıklı geri adımlamalı kontrolcünün geçici durumda kontrol sinyalindeki

doymalarla birlikte hızlıca iyi bir yanıt verdiği, önerilen yöntemin ise zamanla x_1 üzerindeki harmonikleri bastırdığı görülmektedir. Diğer taraftan, Şekil 8'de 40-60 s için sinüzoidal referans takibi sonuçları incelendiğinde önerilen yöntemin kararlı hal durumunda harmonikleri tamamen bastırdığı görülmektedir.

6. Sonuçlar

Birçok gerçek zamanlı dinamik sistemde periyodik olarak değişen belirsiz sinyaller mevcuttur. Bu tür belirsizlikleri barındıran doğrusal olmayan ikinci mertebeden dinamik sistemlerin kontrolü için bu çalışmada dayanıklı geri adımlamalı kontrolcü periyodik uyarlama ile birleştirilerek literatürde ilk defa sunulmaktadır. Periyodik olan belirsizlikler ve periyodik olmayan belirsizlikler sırasıyla periyodik uyarlama kuralları ve doğrusal olmayan sönüm terimleriyle ele alınmaktadır. Kapalı çevrim sistemin yakınsama analizleri Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli kullanılarak ispatlandıktan sonra, önerilen kontrol yöntemi bir örnek sistem üzerinde test edilmiştir. Örnek sistem üzerinde önerilen yöntem ile klasik dayanıklı geri adımlamalı kontrol yöntemi karşılaştırılmıştır. Önerilen yöntemin çok daha az doyuma uğradığı ve zamanla değişen kararlı hal hatasını periyodik olarak bastırdığı gözlenmiştir. Son olarak, bu çalışmada önerilen kontrol yönteminin daha yüksek mertebeden doğrusal olmayan dinamik sistemlere genişletilmesi ve gerçek zamanlı bir sistem üzerinde test edilmesi ileride hedeflenmektedir.

7. Teşekkür

Bu çalışma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Daire Başkanlığı tarafından Araştırma Üniversiteleri Destek Programı (ADEP) projesi ile desteklenmiştir (proje numarası: FBA-2024-6114).

8. Kaynakça

[1] Y. Li and S. Tong, "Adaptive backstepping control for uncertain nonlinear strict-feedback systems with full state triggering," *Automatica*, vol. 163, p. 111574, 2024.

[2] W. Sun, S. Ma, B. Li, and G. Wen, "Optimised backstepping control for the nonlinear strict-feedback system having unknown control dead-zone," *International Journal of Control*, vol. 98, no. 3, pp. 704–717, 2025.

[3] R. Goel and S. B. Roy, "Composite adaptive control for time-varying systems with dual adaptation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024.

[4] A. Kanchanaharuthai, "Adaptive recursive gain asymptotic tracking of uncertain nonlinear systems with time-varying parameters and disturbances," *International Journal of Control*, pp. 1–18, 2025.

[5] K. Chen and A. Astolfi, "Adaptive control for systems with time-varying parameters," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 66, no. 5, pp. 1986–2001, 2020.

[6] ——, "Adaptive control for systems with time-varying parameters - a survey," *Trends in Nonlinear and Adaptive Control*, pp. 217–247, 2022.

[7] J.-X. Xu, "A new periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 4, pp. 579–583, 2004.

[8] K. Abidi and J.-X. Xu, "A discrete-time periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 53, no. 2, pp. 575–581, 2008.

[9] F. Adıgüzel and T. Türker, "A periodic adaptive current controller for torque ripple reduction in uncertain permanent magnet synchronous motor drives," *J. Vib. Control*, vol. 29, no. 5-6, pp. 1128–1140, 2023.

[10] ——, "A periodic adaptive controller for the torque loop of variable speed brushless dc motor drives with non-ideal back-electromotive force," *Automatika*, vol. 63, no. 4, pp. 732–744, 2022.

[11] R. Kaya and F. Adıgüzel, "Disturbance rejection based current control for permanent magnet synchronous motor drives using a discrete-time adaptive controller with periodic estimation," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2025.

[12] A. Fitzpatrick, M. Folino, and A. Arnold, "Fourier series-based approximation of time-varying parameters in ordinary differential equations," *Inverse Problems*, vol. 40, no. 3, p. 035004, 2024.

[13] L. Torres, J. F. Gómez-Aguilar, J. Jiménez, E. Mendoza, F.-R. López-Estrada, and R. F. Escobar-Jiménez, "Parameter identification of periodical signals: Application to measurement and analysis of ocean wave forces," *Digital Signal Processing*, vol. 69, pp. 59–69, 2017.

[14] S.-J. Tan, H.-J. Peng, W.-Y. Zhou, and Z.-G. Wu, "A novel extended precise integration method based on fourier series expansion for the h2-norm of linear time-varying periodic systems," *International Journal of Control*, vol. 89, no. 10, pp. 2083–2095, 2016.

[15] J. Chauvin and N. Petit, "Asymptotic reconstruction of the fourier expansion of inputs of linear time-varying systems with applications," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 43, no. 11, pp. 69–74, 2010.

[16] W. Chen, W. Li, and Q. Miao, "Backstepping control for periodically time-varying systems using high-order neural network and fourier series expansion," *ISA Trans.*, vol. 49, no. 3, pp. 283–292, 2010.

[17] W. Wang, C. Wen, and J. Zhou, *Adaptive backstepping control of uncertain systems with actuator failures, subsystem interactions, and nonsmooth nonlinearities*. CRC Press, 2017.

[18] O. S. Patil, R. Sun, S. Bhasin, and W. E. Dixon, "Adaptive control of time-varying parameter systems with asymptotic tracking," *IEEE Trans. Autom. Control*, 2022.

[19] M. Krstic, P. V. Kokotovic, and I. Kanellakopoulos, *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[20] F. Adıgüzel and T. Türker, "Robust position control of a levitating ball via a backstepping controller," *Electrica*, vol. 22, no. 1, pp. 61–69, 2022.