Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler

Çözüm metodu verilen diferansiyel denklemin tipine göre seçilir.

1. Tam Diferansiyel Denklem
2. İntegrasyon Çarpanı
3. Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklem
4. Homojen Diferansiyel Denklem
5. Lineer Diferansiyel Denklem
6. Bernoulli Denklemi
7. Riccati Denklemi

Tam Diferansiyel Denklem

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \text{ veya } M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Denkleminde özel olarak

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Özelliği sağlanıyorsa verilen diferansiyel denkleme tam diferansiyel denklem denir ve çözüm

$$U\left(x,y\right) = C_0 = sb.$$

olarak elde edilir. Burada U(x,y) fonksiyonu için,

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda;

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \;\; ; \;\; \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$$

olur. Dolayısıyla,

$$dU(x,y) = M(x,y)dx \text{ veya } dU(x,y) = N(x,y)dy$$

Için,

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

olur. $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$ koşulu son bulunan ifade için sağlatılmalıdır. Yani,

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]+\frac{d\varphi(y)}{dy}=N(x,y)$$

olur. Son iki eşitlikten

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]$$

$$\varphi(y)=\int\left\{N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right\}dy+c$$

bulunur. Buradan

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\left(\int\left\{N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right\}dy+c\right)$$

olur. Buradan çözüm $U(x,y)=C_0=sb.$ için,

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\left(\int\left\{N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right\}dy+c\right)=C_0$$

veya

$$U(x,y)=\int M(x,y)dx+\left(\int\left\{N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right\}dy\right)=C_1 \quad (C_1=C_0-c)$$

olarak elde edilir.

<u>Örnekler</u>

Aşağıda verilen diferansiyel denklemler tam diferansiyel denklem midir? Eğer tam diferansiyel denklem ise çözümü belirleyiniz.

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$
2. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin x+y}{x+3y}$
3. $y^2dx+2xydy=0$

İntegrasyon Çarpanı

Verilen bazı diferansiyel denklemler

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \text{ için } \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

gerçekleşir. Bununla beraber bir $\mu(x,y)$ fonksiyonu için diferansiyel denklemin bu fonksiyon ile çarpımı sonucunda yani,

$$\left(\mu(x,y)M(x,y)\right)dx+\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)dy=0 \text{ için } \frac{\partial\left(\mu(x,y)M(x,y)\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)}{\partial x}$$

sağlanabilir. İntegrasyon çarpanı adı verilen böyle bir $\mu(x,y)$ fonksiyonu bulunabilirse, verilen diferansiyel denklem tam diferansiyel denklem haline getirilmiş olunur ve bu durumda çözüm

$$U\left(x,y\right)=C_0=sb.$$

olacak şekilde, bir önceki kısımda verildiği gibi belirlenir.

Örnek

$$\left(3y+4xy^2\right)dx+\left(2x+3x^2y\right)dy=0$$

Diferansiyel denklemi için $\mu(x,y)=x^2y$ fonksiyonunun bir integrasyon çarpanı olduğunu gösteriniz.

$$M(x,y)=3y+4xy^2, \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=3+8xy$$

$$N(x,y)=2x+3x^2y, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2+6xy$$

Dolayısıyla, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ dir.

$$\mu(x,y)M(x,y)=x^2y\left(3y+4xy^2\right), \quad \frac{\partial\left(\mu(x,y)M(x,y)\right)}{\partial y}=6x^2y+12x^3y^2$$

$$\mu(x,y)N(x,y)=x^2y\left(2x+3x^2y\right), \quad \frac{\partial\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)}{\partial x}=6x^2y+12x^3y^2$$

$\dfrac{\partial\left(\mu(x,y)M(x,y)\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)}{\partial x}$ bulunur ve tam diferansiyel denklem olur.

Verilen diferansiyel denklemler için integrasyon çarpanı:

1) $$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\alpha(x) \Rightarrow \boxed{\frac{d\mu}{\mu}=\alpha(x)dx}$$

2) $$-\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x,y)}=\beta(y)\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{d\mu}{\mu}=\beta(y)dy}$$

3) $$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)\dfrac{\partial\theta(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\dfrac{\partial\theta(x,y)}{\partial y}}=\gamma(\theta)\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{d\mu}{\mu}=\gamma(\theta)d\theta}$$

formülleri yardımıyla belirlenir.

Örnekler

Aşağıda verilen diferansiyel denklemler için bir integrasyon çarpanı bulunuz.

1. $(3y-2x)dx+xdy=0$

$$M(x,y)=3y-2x,\ \ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=3$$

$$N(x,y)=x,\ \ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=1$$

Dolayısıyla, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ dir.

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\frac{3-1}{x}=\frac{2}{x}=\alpha(x)$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\alpha(x)dx=\frac{2}{x}dx\ \ ,\ \ \Rightarrow\mu(x,y)=x^2$$

2. $y^2dx+xydy=0$

$$M(x,y)=y^2,\ \ \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y$$

$$N(x,y)=xy,\ \ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=y$$

Dolayısıyla, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ dir.

$$-\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{M(x,y)}=-\frac{2y-y}{y^2}=\frac{-1}{y}=\beta(y)$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\beta(y)dy=\frac{-1}{y}dy \ , \ \Rightarrow \mu(x,y)=\frac{1}{y}$$

3. $(2y-xy^2)dx+(2x+x^2y)dy=0$

$$M(x,y)=2y-xy^2\,, \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2-2xy$$

$$N(x,y)=2x+x^2y\,, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2+2xy$$

Dolayısıyla, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ dir. $\theta(x,y)=xy$ alalım.

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)\dfrac{\partial\theta(x,y)}{\partial x}-M(x,y)\dfrac{\partial\theta(x,y)}{\partial y}}=\frac{(2-2xy)-(2+2xy)}{\left(2x+x^2y\right)y-\left(2y-xy^2\right)x}=\frac{-2}{xy}=\frac{-2}{\theta}=\gamma(\theta)$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\gamma(\theta)d\theta=\frac{-2}{\theta}d\theta \Rightarrow \mu(\theta)=\frac{1}{\theta^2}\ veya\ \mu(x,y)=\frac{1}{x^2y^2}$$

bulunur.

Değişkenlerine Ayrılabilen Diferansiyel Denklem

$$\frac{dy}{dx}=\phi(x,y) \text{ veya } M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

şeklinde verilen bir diferansiyel denklem için

$M(x,y)=F(x)G(y) \ \ ve \ \ N(x,y)=f(x)g(y)$ şeklinde yazılabiliyor ise bu durumda

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ için

$$F(x)G(y)dx+f(x)g(y)dy=0$$

olur. Burdan,

$\dfrac{F(x)}{f(x)}dx+\dfrac{g(y)}{G(y)}dy=0$ ve her terimin integrali alınırsa çözüm,

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx + \int \frac{g(y)}{G(y)}dy = C_0$$

bulunur.

Örnek 1.

Aşağıda verilen diferansiyel denklemi çözünüz.

$$(x^3 + x^2)ydx + (y^3 + 2y)x^2dy = 0$$

Tum terimleri yx^2 ile bölersek,

$\frac{(x^3 + x^2)y}{yx^2}dx + \frac{(y^3 + 2y)x^2}{yx^2}dy = 0$ için çözüm,

$$\int (x+1)dx + \int (y^2 + 2)dy = C_0 \quad \Rightarrow (\frac{x^2}{2} + x) + (\frac{y^3}{3} + 2y) = C_0$$

bulunur.

Örnek 2.

Aşağıda verilen başlangıç değer problemine ait çözümü bulunuz.

$$\begin{cases} x\sin ydx + (x^2 + 1)\cos ydy = 0 \\ y(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Tüm terimleri $\sin y\left(x^2 + 1\right)$ ile bölersek,

$\frac{x}{x^2 + 1}dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0$ için çözüm,

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \ln\left|\sin y\right| = C_0 \quad \Rightarrow (x^2 + 1)\sin^2 y = C_1 \quad (C_1 = e^{2C_0} = sb.)$$

bulunur. $y(1) = \frac{\pi}{2}$ başlangıç koşulu kullanılarak $C_1 = 2$ bulunur. Dolayısıyla başlangıç değer probleminin çözümü,

$(x^2 + 1)\sin^2 y = 2$ dir.

Homojen Diferansiyel Denklem

Verilen $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denklemi $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ şeklinde düzenlenebiliyor ise homojen diferansiyel denklem adı verilir. Diğer bir değişle,

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ için,

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x, y)$$
$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x, y)$$

Şeklinde oluyor ise, M ve N fonksiyonarı n. dereceden homojendir denir.

Örneğin, $F(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu için,

$$F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 \left(x^2 + y^2 \right) = \lambda^2 F(x, y)$$

olur yani, F(x,y) fonksiyonu 2. dereceden homojen denklemdir.

$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - x dy = 0$ diferansiyel denklemi için

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} = g\left(\frac{y}{x} \right)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Yani homojen diferansiyel denklemdir. Homojen diferansiyel denklemler $\frac{y}{x} = v \;\; veya \;\; y = vx$ değişken dönüşümü ile çözülür. Burada $v = v(x)$ dir. Bu değişken dönüşümü ile verilen homojen diferansiyel denklem, değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denkleme dönüşür ve bir önceki kısımda anlatıldığı gibi çözülür.

Örnek

Verilen başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$$\begin{cases} (2x - 5y)dx + (4x - y)dy = 0 \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2x - 5y)}{(4x - y)} = -\frac{\left(2 - 5\frac{y}{x}\right)}{\left(4 - \frac{y}{x}\right)}$$

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v = -\frac{(2 - 5v)}{(4 - v)}$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{(2 - 5v)}{(4 - v)} - v = \frac{-2 + 5v - 4v + v^2}{4 - v}$$

$$\frac{4-\nu}{-2+\nu+\nu^2}d\nu=\frac{1}{x}dx \quad \left(\frac{4-\nu}{-2+\nu+\nu^2}=\frac{4-\nu}{(\nu+2)(\nu-1)}=\frac{A}{\nu+2}+\frac{B}{\nu-1}; \quad A=-2, B=1\right)$$

$$\int\left[\frac{-2}{\nu+2}+\frac{1}{\nu-1}\right]d\nu=\int\frac{1}{x}dx \;\Rightarrow -2\ln(\nu+2)+\ln(\nu-1)=\ln x+\ln C_0$$

$$\left.\frac{\nu-1}{(\nu+2)^2}\right|_{\nu=\frac{y}{x}}=\frac{y-x}{(y+2x)^2}=C_0 x$$

$y(1)=4$ için $C_0=\frac{1}{12}$ bulunur.

Lineer Diferansiyel Denklem

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ biçiminde gösterilebilen diferansiyel denklemlere lineer diferansiyel denklem denir. Örneğin,

$$x\frac{dy}{dx}+(x+1)y=x^3$$

denklemi düzenlenerek,

$$\frac{dy}{dx}+\frac{(x+1)}{x}y=\frac{x^3}{x} \text{ için } P(x)=\frac{x+1}{x},\; Q(x)=x^2$$

olur. Bu tür diferansiyel denklemler,

$$\left[P(x)y-Q(x)\right]dx+dy=0$$

şeklinde düzenlenebilir, burada $M(x,y)=P(x)y-Q(x)$ ve $N(x,y)=1$ olur. $\mu=\mu(x)$ integral çarpanı yardımıyla verilen diferansiyel denklemin çözümü, tam diferansiyel denkleme dönüştürülerek bulunur. Yani,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)\left(P(x)y-Q(x)\right)\right]=\frac{d\mu}{dx}$$

$$\mu(x)P(x)=\frac{d\mu}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{d\mu}{\mu}=P(x)dx$$

$\mu=e^{\int P(x)dx}$ elde edilir. Bu integral çarpanı yardımıyla verilen $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ lineer diferansiyel denklemi, tam diferansiyel denkleme dönüşür ve genel çözüm,

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[e^{-\int P(x)dx}Q(x)+C_0\right]$$

şeklinde bulunur.

Örnek

Verilen diferansiyel denklemi çözünüz.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x+1}{x}y=e^{-2x} \;;\; P(x)=\frac{2x+1}{x} \;,\; Q(x)=e^{-2x} \text{ için}$$

$$\mu=e^{\int P(x)dx}=e^{\int \frac{2x+1}{x}dx}=e^{2x+\ln x}=xe^{2x}$$

integrasyon çarpanı ile çarpılırsa,

$$xe^{2x}\frac{dy}{dx}+(2x+1)e^{2x}y=x \text{ veya } \underbrace{\left(xe^{2x}\right)}_{N(x,y)}dy+\underbrace{\left[(2x+1)e^{2x}y-x\right]}_{M(x,y)}dx=0$$

İçin $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ sağlanır çözüm $U(x,y)=C_0$ olarak elde edilir (bakınız tam diferansiyel denklemin çözümü) yani,

$$U(x,y)=xe^{2x}y-\frac{x^2}{2}=C_0 \text{ dir.}$$

Bernoulli Denklemi

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

biçiminde verilen diferansiyel denklemlere Bernoulli diferansiyel denklemi denir. Bu denklem nonlineer diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin Çözümü $y^{1-n}=v(x)$ değişken dönüşümü ile lineer diferansiyel denkleme dönüştürülerek, bulunan bu lineer diferansiyel denklemin çözümünde ters değişken dönüşümü yerine yazılarak bulunur.

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$ için denklem y^{-n} ile çarpılarak

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

elde edilir. $y^{1-n}=v(x)$ değişken dönüşümü ve $\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ için,

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P(x)v=Q(x) \;\; veya \;\; \frac{dv}{dx}+\underbrace{(1-n)P(x)}_{P_1(x)}v=\underbrace{(1-n)Q(x)}_{Q_1(x)} \quad \text{için,}$$

$$\frac{dv}{dx}+P_1(x)v=Q_1(x)$$

lineer diferansiyel denklem bulunur. Bu denklem integral çarpanı yardımıyla tam diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözülür ve çözümde ters değişken dönüşümü yardımıyla, ilk verilen diferansiyel denklemin çözümü elde edilir.

Örnek

$\frac{dy}{dx} + y = xy^3$ diferansiyel denklemini çözünüz.

n=3 için $y^{1-n} = \nu(x)$ değişken dönüşümü $y^{-2} = \nu(x)$ ve $\frac{d\nu}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ olur.

$$\frac{d\nu}{dx} - 2\nu = -2x\,,\ \mu(x) = e^{-2x} \text{ için}$$

$$\nu(x)\big|_{\nu=y^{-2}} = x + \tfrac{1}{2} + C_0 e^{2x} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = x + \tfrac{1}{2} + C_0 e^{2x}$$

bulunur.

Riccati Denklemi

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

diferansiyel denklemine Riccati diferansiyel denklemi denir. Bu denklem;

i) $A(x) = 0$ için lineer diferansiyel denkleme,

ii) $C(x) = 0$ için Bernoulli diferansiyel denkleme dönüşür.

Riccati diferansiyel denkleminin çözümü, eğer bir özel çözümü f(x) biliniyor ise,

$y = f(x) + \frac{1}{\nu(x)}$ dönüşümü yardımıyla lineer diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözülebilir.

UYGULAMLAR

Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri çözünüz.

1. $dy + e^{x+y}dx = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = 2(x+y)$
3. $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$
4. $\left(y^2 \ln\frac{y}{x} - y^2\right)dx + \left(2xy\ln\frac{y}{x} + xy\right)dy = 0$
5. $\left(\tan y - 3x^2\right)dx + x\left(\sec^2 y\right)dy = 0$
6. $\left(y^2e^{xy} + 1\right)dx + \left(xye^{xy} + e^{xy}\right)dy = 0$
7. $\left(x^5 + 3y\right)dx - xdy = 0$
8. $\left(xy + 1\right)ydx + \left(2y - x\right)dy = 0$

9. $x\frac{dy}{dx} - y = (x-1)e^{x}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \ln x - y}{x}$