Tekil Nokta Etrafında Çözüm: Frobenius Yöntemi

Önceki kısımda verilen diferansiyel denklemlerin çözümleri, bu diferansiyel denklemin adi noktaları civarında seri çözümleri bulunmuştur. Bu kısımda diferansiyel denklemin tekil noktası civarında çözümler ele alınacaktır. Buna göre

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_n(x)y=0$$

şeklinde verilen diferansiyel denklemin $x = x_0$ noktası tekil nokta olsun. Genellikle x_0 civarında kuvvet serisi biçiminde çözümü yoktur. Belirli koşullar çerçevesinde çözüm

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$$

şeklinde aranacaktır. Burada C_n ve r sabitlerdir (reel veya kompleks sayı olabilir).

Tekil Noktaların Sınıflandırılması

$(x-x_0)P_1(x)$ ve $(x-x_0)^2P_2(x)$ fonksiyonları analitik ise x_0 noktasına regüler tekil nokta denir. Aksi halde irregüler tekil nokta denir.

Örnek 1.

$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+\left(x-5\right)y=0$ diferansiyel denklemi için x=0 noktasının özelliğini belirleyiniz.

$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}+\frac{\left(x-5\right)}{2x^2}y=0$ için $P_1(x)=\frac{-1}{2x}$ ve $P_2(x)=\frac{\left(x-5\right)}{2x^2}$ olur.

$xP_1(x)=\frac{-1}{2}$ ve $x^2P_2(x)=\frac{x-5}{2}$ fonksiyonları x=0 noktasında analitiktir. Dolayısıyla x=0 noktası diferansiyel denklemin regüler tekil noktasıdır.

Örnek 2.

$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x^2(x-2)}\frac{dy}{dx}+\frac{x+1}{x^2(x-2)^2}y=0$ diferansiyel denklemi için x=0; 2 noktalarının özelliklerini belirleyiniz

$P_1(x)=\dfrac{2}{x^2(x-2)}$ ve $P_2(x)=\dfrac{x+1}{x^2(x-2)^2}$ olur. Buradan,

$(x-2)P_1(x)=\dfrac{2}{x^2}$ ve $(x-2)^2 P_2(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ için bu fonksiyonlar x=2 noktasında süreklidir,

dolayısıyla x=2 noktası diferansiyel denklemin regüler tekil noktasıdır.

$xP_1(x)=\dfrac{2}{x(x-2)}$ ve $x^2P_2(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ için x=0 noktasında $xP_1(x)$ tanımsızdır, dolayısıyla x=0

noktası diferansiyel denklemin irregüler tekil noktasıdır.

Teorem.

$x=x_0$ diferansiyel denklemin regüler tekil noktası olsun. Bu durumda,

$$(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n \ , \ 0<|x-x_0|<R$$

serisi şeklinde x_0 civarında sıfır olmayan yakınsak en az bir çözümü vardır.

Örnek 3.

$2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+(x-5)y=0$, $0<|x|<R$ için denklemini $x=x_0=0$ noktası civarında seri

çözümünü bulunuz.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{1}{2x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{(x-5)}{2x^2}y=0$; $P_1(x)=\dfrac{-1}{2x}$ ve $P_2(x)=\dfrac{x-5}{2x^2}$ için x=0 regülar tekil noktadır.

Dolayısıyla çözüm için

$$y(x)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$ şeklinde aranır.

Frobenius Yöntemi:

Farzedelim ki, x_0 regüler tekil noktası olsun.

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^{n+r} \ ,C_0\neq 0 \qquad (5)$$

$$\frac{dy(x)}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n(x-x_0)^{n+r-1},$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_nx^{n+r-2}$$

Diferansiyel denklemde yerine yazılır ve $(x-x_0)$ nin derecesine göre gruplandırılır.

$$K_0(x-x_0)^{r+k}+K_1(x-x_0)^{r+k+1}+K_2(x-x_0)^{r+k+2}+\ldots=0$$

bulunur. Burada k belirli bir tam sayıdır.

Sağ taraf sıfır olduğu için bu durumda $K_0=K_1=K_2=\ldots=0$ olmalıdır.

Bu eşitliklerden $K_0=0$ den r için ikinci dereceden denklem elde edilir, buna ***indeks denklemi*** denir. Bu denklemin kökleri r_1 ve r_2 ($r_1>r_2$ olsun) bulunur ve bu köklere diferansiyel denklemin ***üstelleri (ekponentleri)*** denir.

1) $K_1, K_2, \ldots$ ler sıfıra eşitlenerek, bunların ifadelerinde yer alan C_n ler için denklemler elde edilir.
2) $r=r_1$, (5) de elde edilen denklemlerde yerine yazılarak C_n ler bulunur.
3) Eğer $r_2\neq r_1$ ise, (6) deki işlemler $r=r_2$ için tekrarlanarak, diğer seri çözüm bulunur. Ancak bu çözüm $r=r_1$ için belirlenen çözümden lineer bağımsız olmayabilir. Bu durum daha sonra araştırılacaktır.

Örnek 4.

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+(x-5)y=0$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r},\ C_0\neq 0\ ;\ y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_nx^{n+r-1};\ y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_nx^{n+r-2}$$

için diferansiyel denklemde yerlerine yazılırsa,

$$\underbrace{[2r(r-1)-r-5]}_{K_0}C_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)-5]C_n+C_{n-1}\}}_{K_n}x^{n+r}=0 \text{ olur.}$$

$K_0 = 2r(r-1) - r - 5 = 0$, $r_1 = \frac{5}{2}$, $r_2 = -1$

$K_n = 0$ dan,

$r_1 = \frac{5}{2}$ için $C_n = -\dfrac{C_{n-1}}{n(2n+7)}$, $n \geq 1$, $y_1(x) = C_0 x^{5/2}\left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - \frac{1}{7722}x^3 + ...\right)$

$r_2 = -1$ için $C_n = -\dfrac{C_{n-1}}{n(2n-7)}$, $n \geq 1$ $y_2(x) = C_0 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + ...\right)$

Her iki çözümdeki C_0 birbirinden farklı sabitlerdir. Genel çözüm,

$$y(x) = C_{01}\underbrace{x^{5/2}\left(1 - \tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{198}x^2 - \tfrac{1}{7722}x^3 + ...\right)}_{y_1(x)} + C_{02}\underbrace{x^{-1}\left(1 + \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{30}x^2 + \tfrac{1}{90}x^3 + ...\right)}_{y_2(x)} ,$$

yazılabilir. Burada C_{01} ve C_{02} keyfi sabitlerdir.

Burada "her zaman birbirinden bağımsız iki seri çözüm bulunabilir mi?" sorusu ortaya çıkar veya

1. Hangi koşullar çerçevesinde verilen

   $$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = 0$$

   diferansiyel denklemin

   $\left(x - x_0\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(x - x_0\right)^n$, $x = x_0$ civarında lineer bağımsız iki çözümü vardır?

2. Eğer bu diferansiyel denklemin $x = x_0$ civarında yukarıda verilen formda lineer bağımsız iki çözümü yoksa, lineer bağımsız iki çözüm nasıl bulunur?

Teorem.

Farzedelim ki, $r_1 > r_2$ bilinen denklemin kökleridir.

i. $r_1 - r_2 \neq N$ (N=0,1,2,… pozitif tam sayı) bu durumda,

   a. $y_1(x) = \left(x - x_0\right)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(x - x_0\right)^n$

   b. $y_2(x) = \left(x - x_0\right)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* \left(x - x_0\right)^n$

biçiminde iki lineer bağımsız çözümü vardır. Burada, $C_0 \neq 0, C_0^* \neq 0$ dır.

ii. Eğer, $r_1 - r_2 = N$ (N=0,1,2,… pozitif tam sayı) ise, bu durumda

a. $y_1(x) = \left(x - x_0\right)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(x - x_0\right)^n$,

b. $y_2(x) = \left(x - x_0\right)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* \left(x - x_0\right)^n + C\, y_1(x) \ln\left|x - x_0\right|$ biçiminde lineer bağımsız iki

çözümü vardır. Burada, $C_0 \neq 0, C_0^* \neq 0$ ve C sabit/sıfır olabilir.

iii. Eğer, $r_1 - r_2 = 0$ ise bu durumda

a. $y_1(x) = \left(x - x_0\right)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(x - x_0\right)^n$, $C_0 \neq 0$ ve

b. $y_2(x) = \left(x - x_0\right)^{r_2+1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* \left(x - x_0\right)^n + C y_1(x) \ln\left|x - x_0\right|$ biçiminde lineer bağımsız iki

çözümü vardır. Burada, $C_0 \neq 0, C_0^* \neq 0$ ve C sabit/sıfır olabilir.

Örnek 5.

$2x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - 3\right)y = 0$ diferansiyel denkleminin x=0 regüler tekil noktası civarında çözümünü bulunuz.

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$; $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + r\right) C_n x^{n+r-1}$; $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + r\right)\left(n + r - 1\right) C_n x^{n+r-2}$ için

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)C_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+2} - 3\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\underbrace{\left[2r\left(r-1\right) + r - 3\right]}_{=0} C_0 x^r + \underbrace{\left[2r\left(r+1\right) + \left(r+1\right) - 3\right]}_{=0} C_1 x^{r+1} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left\{\left[2\left(n+r\right)\left(n+r-1\right) + \left(n+r\right) - 3\right] C_n + C_{n-2}\right\}}_{=0} x^{n+r} = 0$$

$2r(r-1)+r-3=0$ için $2r^2-r-3=0$ buradan $r_1=\frac{3}{2}$, $r_2=-1$

$r_1-r_2=\frac{5}{2}\neq 0$ ve 5/2 tam sayı ($\neq N(=0,1,2,...)$) değil.

$[2r(r+1)+(r+1)-3]C_1=0$

$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-3]C_n+C_{n-2}=0$, $n\geq 2$

$r=r_1=\frac{3}{2}$ için

$7C_1=0$ ise, $C_1=0$

$n(2n+5)C_n+C_{n-2}=0$, $n\geq 2$

$$C_n=-\frac{C_{n-2}}{n(2n+5)},\ n\geq 2 \text{ için } C_2=-\frac{C_0}{18}\ ;\ C_3=-\frac{C_1}{33}=0\ ;\ C_4=\frac{C_0}{936},\dots$$

$r=r_1=\frac{3}{2}$ için çözüm;

$y_1(x)=C_0x^{3/2}\left(1-\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{936}x^4-...\right)$ bulunur.

$r=r_2=-1$ için

$-3C_1^*=0$ ise, $C_1^*=0$

$n(2n-5)C_n+C_{n-2}=0$, $n\geq 2$

$$C_n=-\frac{C_{n-2}}{n(2n-5)},\ n\geq 2 \text{ için } C_2^*=\frac{C_0^*}{2}\ ;\ C_3^*=-\frac{C_1^*}{3}=0\ ;\ C_4^*=-\frac{C_2^*}{12}=-\frac{C_0^*}{24},\dots$$

$r=r_2=-1$ için çözüm;

$y_2(x)=C_0^*x^{-1}\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+...\right)$ bulunur. Dolayısıyla genel çözüm,

$y(x)=K_1y_1(x)+K_2y_2(x)$ olur. $K_1=C_0$ ve $K_2=C_0^*$ alınmıştır.

Örnek 6.

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-\left(x^2+\frac{5}{4}\right)y=0$ diferansiyel denkleminin x=0 regüler tekil noktası civarında çözümünü bulunuz.

$y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}$; $y'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1}$; $y''(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-2}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r+2}-\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)-(n+r)-\frac{5}{4}\right]C_n x^{n+r}-\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^{n+r}=0$$

$$\underbrace{\left[r(r-1)-r-\tfrac{5}{4}\right]}_{=0}C_0x^r+\underbrace{\left[r(r+1)-(r+1)-\tfrac{5}{4}\right]}_{\neq 0}C_1x^{r+1}+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\left\{\left[(n+r)(n+r-1)-(n+r)-\tfrac{5}{4}\right]C_n+C_{n-2}\right\}}_{=0}x^{n+r}=0$$

$r^2-2r-\frac{5}{4}=0$ için $r_1=\frac{5}{2}$, $r_2=\frac{-1}{2}$

$r_1-r_2=3$ tam pozitif sayıdır. Dolayısıyla yukarıda verildiği üzere:

ii. Eğer, $r_1-r_2=N$ (N=0,1,2,… pozitif tam sayı) ise, bu durumda

a. $y_1(x)=(x-x_0)^{r_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$,

b. $y_2(x)=(x-x_0)^{r_2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n^*(x-x_0)^n+C\,y_1(x)\ln|x-x_0|$ biçiminde lineer bağımsız iki çözümü vardır. (Burada C sıfır/sıfırdan farklı olabilir)

$r=r_1=\frac{5}{2}$ için $C_1=0$

$$n(n+3)C_n-C_{n-2}=0,\ n\geq 2$$

$C_n=\dfrac{C_{n-2}}{n(n+3)}$, $n\geq 2$ için $C_2=\dfrac{C_0}{2\times 5}$; $C_3=\dfrac{C_1}{3\times 6}=0$; $C_4=\dfrac{C_2}{4\times 7}=\dfrac{C_0}{2\times 4\times 5\times 7}$,

$$C_{2n} = \frac{C_0}{(2\times4\times6\times\ldots\times2n)(5\times7\times9\times\ldots\times(2n+3))},\ n\geq1$$

$r = r_1 = \frac{5}{2}$ için çözüm;

$$y_1(x) = C_0 x^{5/2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2\times4\times6\times\ldots\times2n)(5\times7\times9\times\ldots\times(2n+3))}\right)$$ bulunur.

$r = r_2 = \frac{-1}{2}$ için (Bu kısımdaki C katsayıları üst indis * lı olup, yazım kolaylığı açısından yazımda ihmal edilmiştir.) $y_2(x)$ çözümünü ilk kökte olduğu gibi arayalım. Sonuçta lineer bağımsız çözüm bulunursa, çözüm tamamlanmış olur, aksi halde (ii) de belirtildiği gibi bir ek terim gelmelidir.

$$C_1 = 0$$

$$n(n-3)C_n - C_{n-2} = 0,\ n\geq2$$

$$C_n = \frac{C_{n-2}}{n(n-3)},\ n\geq2 \text{ ve } n\neq3$$ (C_3 başka yerden bulunacak)

n=2 için $C_2 = -\frac{C_0}{2}$; $C_4 = \frac{C_2}{4} = -\frac{C_0}{2\times4}$; $C_5 = \frac{C_3}{2\times5},\ldots$

$$C_{2n} = -\frac{C_0}{(2\times4\times6\times\ldots\times2n)(3\times5\times7\times\ldots\times(2n-3))},\ n\geq3$$

$$C_{2n+1} = \frac{C_3}{(2\times4\times6\times\ldots\times(2n-2))(5\times7\times9\times\ldots\times(2n+1))},\ n\geq2$$

$r = r_2 = -1/2$ için çözüm;

$$y_2(x) = C_0 x^{-1/2}\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2\times4}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2\times4\times6\times\ldots\times2n)(3\times5\times7\times\ldots\times(2n-3))}\right)+$$
$$C_3 x^{-1/2}\left(x^3+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2\times4\times6\times\ldots\times(2n-2))(5\times7\times9\times\ldots\times(2n+1))}\right)$$

bulunur. Burada $C_0\,(=C_0^*)$ ve $C_3\,(=C_3^*)$ keyfi sabitlerdir. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ aralarında lineer bağımlıdır fakat iki tane sabit içermektedir. Bu nedenle çözümlerden biri (örneğin $y_2(x)$ tek başına) genel çözüm olabilir. Dolayısıyla, yukarıda (ii) maddesinde yer alan $y_2(x)$ çözümünde doğal logaritmanın katsayısı C=0 olur.

Örnek 7.

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(x^2-3x\right)\dfrac{dy}{dx}+3y=0$ diferansiyel denkleminin x=0 civarında Frobenius yöntemi ile çözünüz .

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}\ ;\ y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)C_n x^{n+r-1}\ ;\ y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)C_n x^{n+r-2}\ \text{ için}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)-3\left(n+r\right)+3\right]C_n x^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+r-1\right)C_{n-1}x^{n+r}=0$$

$$\underbrace{\left[r\left(r-1\right)-3r+3\right]}_{=0}C_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left\{\left[\left(n+r\right)\left(n+r-1\right)-3\left(n+r\right)+3\right]C_n+\left(n+r-1\right)C_{n-1}\right\}}_{=0}x^{n+r}=0$$

$r^2-4r+3=0$ için $r_1=3,\ r_2=1$

$r_1-r_2=2$ tam pozitif sayı ($2\in N^+$)

$r=r_1=3$ için

$$n\left(n+2\right)C_n+\left(n+2\right)C_{n-1}=0,\ n\geq 1$$

$$C_n=-\frac{C_{n-1}}{n},\ n\geq 1 \text{ için } C_1=-C_0\ ;\ C_2=-\frac{C_1}{2}=\frac{C_0}{2!};\ C_3=-\frac{C_2}{3}=-\frac{C_0}{3!},...$$

$$C_{2n}=\frac{(-1)^nC_0}{n!},\ n\geq 1$$

$r=r_1=3$ için çözüm;

$$y_1(x)=C_0x^3\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+\frac{(-1)^nx^n}{n!}+...\right)=C_0x^3e^{-x} \text{ bulunur.}$$

$r=r_2=1$ için (not edelim ki sabitler üst indis * içermektedir, yazım kolaylığı açısından yazımda ihmal edilmiştir)

$$n\left(n-2\right)C_n-nC_{n-1}=0,\ n\geq 1$$

$$C_n = -\frac{C_{n-1}}{(n-2)}, \; n \geq 1 \text{ve } n \neq 2$$

n=1 için $C_1 = C_0$;

n=2 için $0 \times C_2 + 2C_1 = 0$ için $C_1 = 0$ dolayısıyla, $C_0 = 0$ bulunur. Ancak çözüm gereği $C_0 \neq 0$ olmalıdır. Buradan, $r = r_2 = 1$ için bir özel çözüm yoktur. Böylece C_2 keyfi kabul edilerek,

$$C_3 = -C_2;\; C_4 = -\frac{C_3}{3};\; C_5 = -\frac{C_4}{3} = -\frac{C_2}{3!}, \ldots\; C_{n+2} = \frac{(-1)^n C_2}{n!},\; n \geq 1$$

$r = r_2 = 1$ için çözüm;

$$y_2(x) = C_2 x\left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!} + \ldots\right) = C_2 x^3\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots\right)$$

$y_2(x) = C_2 x^3 e^{-x} = y_1(x)$ bulunur. Teoremden görüldüğü gibi ikinci çözüm $y_2(x)$ $\sum_{n=0}^{\infty} C_n^* x^{n+1} + C y_1(x) \ln|x|$, $C_0^* \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmalıdır. Bu çözümü belirlemek içi pek çok yöntem vardır, bunlardan biri de türev mertebesini düşürmedir.

MERTEBE DÜŞÜRME METODU

Bu metoda göre diferansiyel denklemin bir çözümü $y_1(x)$ yardımıyla çözüm, $y(x) = x^3 e^{-x} u(x)$, ($y_1(x) = x^3 e^{-x}$) şeklinde aranır. Burada u(x)=?

$$\frac{dy}{dx} = x^3 e^{-x} \frac{du}{dx} + \left(3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}\right) u(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^3 e^{-x} \frac{d^2 u}{dx^2} + 2\left(3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}\right)\frac{du}{dx} + \left(x^3 e^{-x} - 6x^2 e^{-x} + 6x e^{-x}\right) u(x)$$

Bu ifadeler $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(x^2 - 3x\right)\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ denkleminde yerine yazılır düzenlenirse,

$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (3 - x)\frac{du}{dx} = 0$; $v(x) = \frac{du}{dx}$ değişken dönüştürmesi kullanılarak,

$x\dfrac{dv}{dx}+(3-x)v(x)=0$ için $v(x)=x^{-3}e^{x}$ ve $u(x)=\int v(x)dx=\int x^{-3}e^{x}dx$

$y(x)=y_2(x)=x^3e^{-x}\int x^{-3}e^{x}dx$ olur. Bu fonksiyon $y_1(x)$ ile lineer bağımsızdır.

$$y_2(x)=x^3e^{-x}\int x^{-3}\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots\right]dx$$

İntegral alınırsa,

$$y_2(x)=x^3e^{-x}\left[-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{6}x+\frac{1}{48}x^2+\ldots\right]$$

$$y_2(x)=x^3e^{-x}\left[-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{48}x^2+\ldots\right]+\frac{1}{2}x^3e^{-x}\ln|x|$$

bulunur. Dolayısıyla genel çözüm,

$$y(x)=K_1y_1(x)+K_2y_2(x)$$

olur.

Yukarıdaki örneklerde teoremde verilen $r_1-r_2=0$ veya $r_1=r_2$ hariç tüm haller ele alınmıştır.

Hatırlatalım ki, bu durumda çözümler

$$y_1(x)=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n \text{ ve}$$

$$y_2(x)=(x-x_0)^{r+1}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^*(x-x_0)^n+y_1(x)\ln|x-x_0|,$$

($C_0\neq 0$ ve $C_0^*\neq 0$) şeklinde olur.

ÖRNEKLER

Aşağıdaki denklemlerin tekil noktalarını sınıflandırınız.

i. $\left(x^2-3x\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+2)\dfrac{dy}{dx}+y=0$

ii. $\left(x^4-2x^3+x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2(x-1)\dfrac{dy}{dx}+x^2y=0$

iii. $\left(x^5+x^4-6x^3\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x^2\dfrac{dy}{dx}+(x-2)\,y=0$

Aşağıdaki denklemleri, regüler tekil noktaları civarında Frobenius yöntemi ile çözünüz.

iv. $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+\left(x^2-1\right)y=0$

v. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$

vi. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$

vii. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x^2\dfrac{dy}{dx}-2y=0$

viii. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(x^3-x\right)\dfrac{dy}{dx}-3y=0$

ix. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+2y=0$

BESSEL DENKLEMİ VE BESSEL FONKSİYONLARI

A. Sıfırıncı Dereceden Bessel Denklemi

p bir parametre olmak üzere,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-p^2\right)y=0 \qquad (1)$$

bu denkleme p. dereceden Bessel denklemi denir. Denklemin çözümüne ise p. dereceden Bessel fonksiyonu denir.

Eğer, p=0 olursa (1) den,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0 \qquad (2)$$

denklemi elde edilir. (2) denklemi sıfırıncı dereceden Bessel denklemi adlanır. Bu denklem için x=0 regüler tekil noktadır ve çözüm,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r}\ ,\ C_0\neq 0 \qquad (3)$$

şeklinde aranır. (2) ve (3) den

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^{n+r+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 C_n x^{n+r-1}+\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^{n+r-1}=0$$

$$\underbrace{r^2 C_0}_{=0} x^{r-1}+\underbrace{(1+r)^2 C_1}_{=0} x^r+\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\left[(n+r)^2 C_n+C_{n-2}\right]}_{=0}x^{n+r-1}=0$$

$r^2=0$ için $r_1=r_2=0$ bulunur.

$$(1+r)^2 C_1=0$$

$$n^2 C_n+C_{n-2}=0,\ n\geq 2$$

$$C_n=-\frac{C_{n-2}}{n^2},\ n\geq 2;\ C_2=-\frac{C_0}{2^2},\ C_3=-\frac{C_1}{3^2}=0,\ C_4=-\frac{C_2}{4^2}=\frac{C_0}{2^2\times 4^2},\ \ldots$$

$$C_{2n}=\frac{(-1)^n C_0}{(n!)^2 2^{2n}},\ n\geq 1$$

r=0

$y_1(x)=C_0\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}_{J_0(x)}=C_0 J_0(x)\ ;\ J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ toplamına 0. dereceden 1. tür Bessel fonksiyonu denir. $r_1=r_2=0$ olduğu için yukarıda verilen teoreme göre diğer çözüm,

$y_2(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}C_n^* x^n+J_0(x)\ln|x|$ dır.

Şimdi, mertebe düşürerek bu çözümü bulmaya çalışalım: $y_2(x)=y_1(x)u(x)$

$$y_2'(x)=\frac{dy_1(x)}{dx}u(x)+y_1(x)\frac{du(x)}{dx}$$

$$y_2''(x)=\frac{d^2y_1(x)}{dx^2}u(x)+2\frac{dy_1(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx}+y_1(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}$$

Diferansiyel denklemde yerine yazlırsa: $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0$

$xy_1\frac{d^2u}{dx^2}+\left(y_1+2x\frac{dy_1}{dx}\right)\frac{du}{dx}=0$ içn $\frac{du}{dx}=\nu$ ve $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d\nu}{dx}$ dönüşümü sonunda,

$$xJ_0(x)\frac{d\nu}{dx}+\left(J_0(x)+2x\frac{d}{dx}\big(J_0(x)\big)\right)\nu=0$$

$$\frac{d\nu}{\nu}=-\frac{J_0(x)+2x\frac{d}{dx}\big(J_0(x)\big)}{xJ_0(x)}dx=-\frac{dx}{x}-2\frac{d(J_0(x))}{J_0(x)}$$

$$\ln\nu=-\ln x-\ln\big(J_0(x)\big)^2$$

$\nu=\frac{1}{x\big(J_0(x)\big)^2}=\frac{du}{dx}$ için $u(x)=\int\frac{1}{x\big(J_0(x)\big)^2}dx=\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{x}}}{\big(J_0(x)\big)^2}dx$ için,

$$y_2(x)=J_0(x)\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{x}}}{\big(J_0(x)\big)^2}=J_0(x)\int\frac{dx}{x\big(J_0(x)\big)^2}$$

$$\left[J_0(x)\right]^2=1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{32}-\frac{5x^6}{576}+\dots$$

$$\frac{1}{\left[J_0(x)\right]^2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{32}+\frac{23x^6}{576}+\dots$$

$$y_2(x)=J_0(x)\int\left[\frac{1}{x}+\frac{x}{2}+\frac{5x^3}{32}+\frac{23x^5}{576}+\dots\right]dx=$$

$$=J_0(x)\ln|x|+\left[1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304}+\dots\right]\left[\frac{x^2}{4}+\frac{5x^4}{128}+\frac{23x^6}{3456}+\dots\right]$$

$$=J_0(x)\ln|x|+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{128}+\frac{11x^6}{13824}+\dots$$

$y_2(x)$ daha basit formda belirlemeye çalışalım.

$$(-1)^2 \frac{1}{2^2(1!)^2}(1) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \ ,$$

$$(-1)^3 \frac{1}{2^4(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2^4 \times 2^2 \times 2} = -\frac{3}{128},$$

$$(-1)^4 \frac{1}{2^6(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2^6 \times 6^2 \times 6} = \frac{11}{13824} \ .,,$$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln|x| + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} + \dots =$$

$$J_0(x)\ln|x| + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^4(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^6(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \dots$$

$$C_{2n}^* = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right), \ n \ge 1$$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

bulunur. Genelde y2(x) yukarıdaki formu değil, aşağıda verilen formu kullanılır.

$\frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)\right]$ burada γ -Euler sabiti adlanır ve

$$\gamma = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n\right) \approx 0.5772 \text{ dir.}$$

$\frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)\right]$ denklemine sıfırıncı dereceden II. tür Bessel fonksiyonu (Weber formu) denir ve genellikle $Y_0(x)$ ile işaret edilir;

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\ln\frac{|x|}{2} + \gamma\right)J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)\right] \text{olur.}$$

Dolayısıyla ikinci çözüm $y_2(x) = Y_0(x)$ için diferansiyel denklemin genel çözümü,

$y(x)=K_1J_0(x)+K_2Y_0(x)$ bulunur.

B- p. Dereceden Bessel Denklemi

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+\left(x^2-p^2\right)y=0$ denkleminin x=0 regüler tekil noktasıdır. Çözüm,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r} \ , \ C_0\neq 0$$

$$\left(r^2-p^2\right)C_0x^r+\left[(r+1)^2-p^2\right]C_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+r)^2-p^2\right]C_n+C_{n-2}\right\}x^{n+r}=0$$

$r^2-p^2=0$ için $r_1=p>0$ ve $r_2=-p$, $r_1-r_2=2p>0$

$$\left[(r+1)^2-p^2\right]C_1=0$$

$$\left[(n+r)^2-p^2\right]C_n+C_{n-2}=0,\ n\geq 2$$

$r=r_1=p>0$ için

$C_1=0$;

$$n(n+2p)C_n+C_{n-2}=0,\ C_n=-\frac{C_{n-2}}{n(n+2p)},\ n\geq 2$$

$$C_{2n}=\frac{(-1)^nC_0}{[2\times 4\times\ldots\times(2n)]\left[(2+2p)\times(4+2p)\times\ldots\times(2n+2p)\right]}= \qquad n\geq 1$$

$$\frac{(-1)^nC_0}{2^{2n}n!(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}$$

$$y_1(x)=C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+p}}{2^{2n}n!(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}$$

Eğer $p\in N^+$ ise,

$$y_1(x) = C_0 2^p p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+p}$$

C- Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(N) = \int_0^\infty e^{-x} x^{N-1} dx$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}$$

$$N! = \Gamma(N+1) = N\Gamma(N) \ , \ N > 0$$

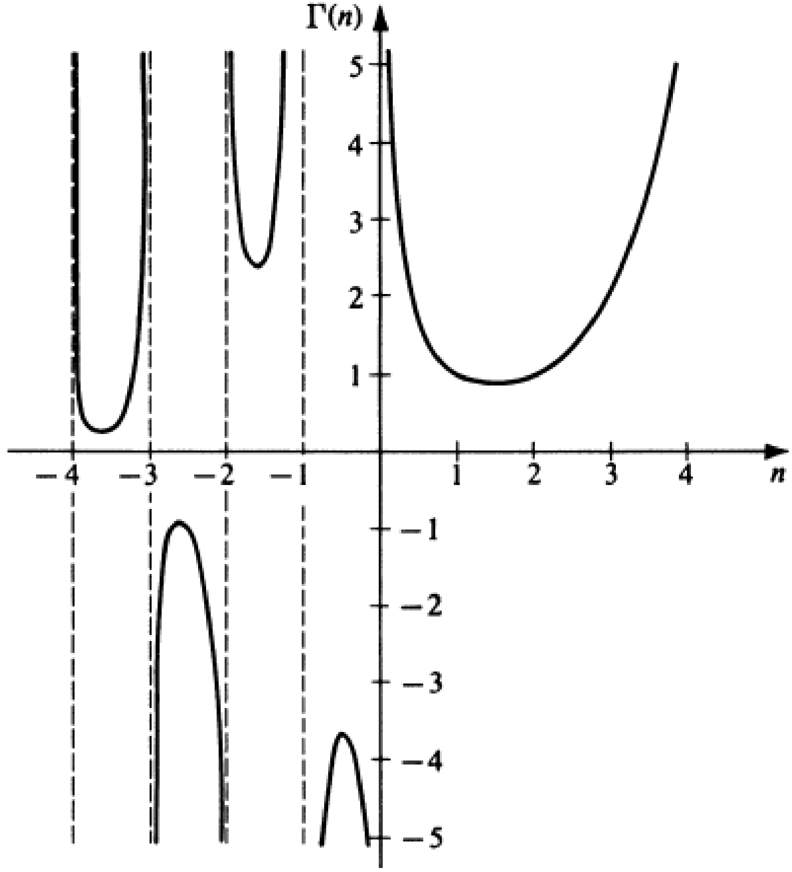
$$1 \le N \le 2 \ , \ \Gamma(N) \ ,$$

Farz edelim ki, $(3/2)!$ bulmak isteyelim.

$$(3/2)! = \Gamma(5/2) = 3/2\Gamma(3/2) = 3/2\underbrace{\Gamma(1.5)}_{0.8862} = 1.3293$$

N<0 integral $\int_0^\infty e^{-x} x^{N-1} dx$ integrali ıraksaktır ve $\Gamma(N)$ integral ile belirlenemez.

$\Gamma(N+1) = N\Gamma(N)$ eşitliği N<0 için de geçerlidir. Böylece, $\Gamma(N)$ fonksiyonu $N \neq 0, -1, -2, -3$ den başka tüm N ler için tanımlanır. Bu fonksiyonun grafiği şekilde gösterilmiştir.



Yeniden $y_1(x)$ çözümünü ele alırsak ve $(\bullet)!$ yerine Gamma fonksiyonu yazılırsa,

$$y_1(x)=C_0\Gamma(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+p}}{2^{2n}n!\Gamma(n+p+1)}=C_0 2^p\Gamma(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Bu çözüm p ‘nin tam sayı olmadığı durumlar için de geçerlidir. Eğer $2^p\Gamma(p+1)$ değeri C_0 sabitine dahil edilirse, p. dereceden 1. tür Bessel fonksiyonun $J_p(x)$ aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma_p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Eğer p tamsayı değilse $(n+p)!$ ın değeri $\Gamma(n+p+1)$’le belirlenir.

Eğer p>0 ve $2p\neq N$ tam sayı bu durumda $r_2=-p$ için,

$$n(n-2p)C_n+C_{n-2}=0\ ,\ n\geq 2$$

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{n(n-2p)}\ ,\ n \geq 2,\ n \neq 2p$$

$y_2(x)$ çözümü $r_2 = -p$ ye karşı gelir.

i. Eğer 2p pozitif tam sayı değilse,

$y_2(x) = C_0 x^{-p}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} x^{2n}\right]$ burada C_0 keyfi sabit, α_{2n} belirli sabitlerdir.

ii. Eğer 2p tam pozitif tek sayı ise,

$y_2(x) = C_0 x^{-p}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n} x^{2n}\right] + C_{2p} x^{p}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n} x^{2n}\right]$ burada C_0 ve C_{2p} bilinmeyen, keyfi sabitlerdir. β_{2n} ve γ_{2n} bilinen sabitlerdir.

iii. Eğer 2p tam pozitif çift sayı ise,

$y_2(x) = C_{2p} x^{p}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{2n} x^{2n}\right]$ burada C_{2p} bilinmeyen keyfi sabit, δ_{2n} bilinen sabittir.

(i)'deki $y_2(x)$ ve $J_p(x)$ ile lineer bağımsızdır.

(ii)'deki çözüm $C_{2p} = 0$ için $y_2(x)$ ve $J_p(x)$ ile lineer bağımsızdır.

(iii)'deki $J_p(x)$'nin bir sabite çarpılması ile elde edilir ve $y_2(x)$ ile $J_p(x)$ lineer bağımlıdır.

Böylece eğer "2p tam pozitif tam çift sayı"ya eşit olmadığı durumlarda her iki çözüm lineer bağımsız olurlar.

Eğer 2p pozitif tam sayı olmaz ise ikinci çözüm için,

$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n-p}$ çözümü $J_p(x)$ ile lineer bağımsızdır. Burada C_{2n}'ler öncekinde p yerine –p yazılarak elde edilir.

$\Gamma_{-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$ burada $(n-p)! = \Gamma(n-p+1)$ dir.

Böylece p pozitif ama tam sayı olmadığı haller için genel çözüm,

$$y(x) = K_1 J_p(x) + K_2 J_{-p}(x)$$

dir. Eper, p pozitif tam sayı ise $J_p(x)$ ile lineer bağımsız olan çözüm

$$y_p(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* x^n + CJ_p(x)\ln|x|,\ C \neq 0$$

için,

$$y_p(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\ln\frac{|x|}{2} + \lambda\right) J_p(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k}\right]\left[\frac{1}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\right]\right\}$$

olur. Burada y_p, II. tür p. dereceden Bessel fonksiyonuna (Weber formu) denir.

Dolayısıyla, Bessel diferansiyel denkleminin genel çözüm,

$$y(x) = K_1 J_p(x) + K_2 Y_p(x)$$

şeklinde bulunur.

Uygulamalar.

1. Gösterin ki, $J_0(kx)$, k=sb. Aşağıdaki denklemi sağlar,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + k^2 xy = 0$$

2. Gösterin ki, $y = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$ dönüşümü Bessel denklemini (p. dereceden) aşağıdaki denkleme dönüşür.

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \left[1 + \left(\frac{1}{4} - p^2\right)\frac{1}{x^2}\right]u(x) = 0$$

3. (2) deki sonuçlardan yararlanarak $\frac{1}{2}$. dereceden olan Bessel denkleminin çözümünü bulun.

4. Aşağıda verilen eşitliklerin sağlandığını gösterin.

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(kx)\right] = kx^p J_{-p}(kx) \text{ ve } \frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(kx)\right] = -kx^{-p} J_{p+1}(kx), \text{ k=sb.}$$

5. (4)deki sonuçları kullanarak aşağıda verilen eşitlikleri doğrulayınız.

$$\frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right]=kJ_{p-1}(kx)-\frac{p}{x}J_p(kx) \text{ ve } \frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right]=-kJ_{p+1}(kx)+\frac{p}{x}J_p(kx)$$

$$\frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right]=\frac{k}{2}\left[J_{p-1}(kx)-J_{p+1}(kx\right] \text{ ve } \frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right]=\frac{kx}{2p}\left[J_{p-1}(kx)+J_{p+1}(kx\right]$$

6. (5) in sonuçlarını kullanarak,

   a) $J_1(x)$ ve $\frac{d}{dx}\left[J_1(x)\right]$in $J_0(x)$ ve $J_2(x)$ ile,

   b) $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ in $J_{n-\frac{1}{2}}(x)$ve $J_{n-\frac{3}{2}}(x)$ ile ifade ediniz.

Örnek 8.

$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$, p>0 diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

i) P tam sayı değil ise genel çözüm $y(x)=C_1J_p(x)+C_2J_{-p}(x)$ dir.

ii) Eğer p=n (n=0,1,2,3,..) pozitif tam sayı ise $J_{-n}=(-1)^nJ_n(x)$ olduğundan $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ lineer bağımsız değildirler. Genel çözümü elde etmek için

$Y_p(x)=\dfrac{(\cos p\pi)J_p(x)-J_{-p}(x)}{\sin p\pi}$; $Y_\pi(x)=\lim\limits_{p\to\pi}Y_p(x)$ için Wronskian W$W\left(J_p,Y_p\right)=\dfrac{2}{\pi x}$ dir.

Dolayısıyla,

$y(x)=C_1J_p(x)+C_2Y_p(x)$ olur.

Modifiye Bessel Fonksiyonları

$x^2y''+xy'+\left(b^2x^2-p^2\right)y=0$ için çözüm $y(x)=C_1J_p(bx)+C_2Y_p(bx)$ olur.

Eğer, $b^2=-1$ ise,

$x^2y''+xy'-\left(b^2x^2+p^2\right)y=0$ için çözüm $y(x)=C_1J_p(ix)+C_2Y_p(ix)$olur.

Burada,

$$J_p(ix)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2n+p}=i^p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\ ,\ (i^{2n}=(-1)^n)$$

$I_p(x)=i^{-p}J_p(ix)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n+p}}{n!\Gamma(n+p+1)}$ fonksiyonuna I. tür modifiye Bessel fonksiyonu denir.

$I_{-p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n-p}}{n!\Gamma(n-p+1)}$, p>0

$y_2(x)=I_{-p}(x)$ ve $y_1(x)=I_p(x)$ için genel çözüm,

$y(x)=C_1I_p(x)+C_2I_{-p}(x)$

Eğer, p tam sayı değil ise ($p\notin N^+$)

$I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x$, $I_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x$ olur.

$I_{-n}(x)=i^nJ_{-n}(ix)=i^n(-1)^nJ_n(ix)=(-1)^{2n}I_n(x)=I_n(x)$ olur.

2.tür Modifiye Bessel Fonksiyonları

$K_p(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-p}(x)-I_p(x)}{\sin p\pi}$ için $K_{-p}(x)=K_p(x)$ dir.

Genel çözüm,

$y(x)=C_1I_p(x)+C_2K_p(x)$

Olarak verilir.

$K_n(x)=\lim_{p\to n}K_p(x)$ dir.

$$K_0(x)=-I_o(x)\left(\gamma+\ln\tfrac{x}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}\right)$$

$$K_n(x)=(-1)^{n-1}I_n(x)\ln\tfrac{|x|}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{(k!)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}+$$
$$\frac{(-1)^n}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2m+n}}{(m!)(m+n)!}\left[\psi(m+n+1)+\psi(m+1)\right]$$

Burada γ -Euler sabiti ve $\psi(x)$ Digama fonksiyonudur ve $\psi(x)=\frac{d}{dx}\left(\ln\Gamma(x)\right)$ dir.

Reküran Bağıntıları

Bazı reküran bağıntıları aşağıda verilmiştir.

$$\frac{d}{dx}\left[x^p I_p(x)\right]=x^p I_{p-1}(x)\ ,$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} I_p(x)\right]=x^{-p} I_{p+1}(x)$$

$$I'_p(x)+\frac{p}{x}I_p=I_{p-1}(x),$$

$$I'_p(x)-\frac{p}{x}I_p=I_{p+1}(x)$$

$$I_{p-1}(x)+I_{p+1}=2I'_p(x),$$

$$I_{p-1}(x)-I_{p+1}=\frac{2p}{x}I_p(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^p K_p(x)\right]=-x^p K_{p-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} K_p(x)\right]=-x^{-p} K_{p+1}(x)$$

$$K'_p(x)+\frac{p}{x}K_p=K_{p-1}(x),$$

$$K'_p(x)-\frac{p}{x}K_p=-K_{p+1}(x),$$

$$K_{p-1}(x)+K_{p+1}=-2K'_p(x),$$

$$K_{p-1}(x)-K_{p+1}=-\frac{2p}{x}K_p(x)$$