Soru:

Aşağıdaki limitleri tanımdan bulunuz.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

Çözüm:

a)

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3.(2n-1) - 2.(3n+1)}{3.(3n+1)}\right| = \left|\frac{-5}{3.(3n+1)}\right|$$

$$= \frac{5}{3(3n+1)} \leq \frac{5}{9n}.$$

Böylece,

$\varepsilon > 0$ için $N_\varepsilon = [\![\frac{5}{9\varepsilon}]\!] + 1$ seçersek $\forall n \geq N_\varepsilon$ olduğunda

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{5}{9n} \leq \frac{5}{9N_\varepsilon} < 5/9 \cdot \frac{5}{9\varepsilon} = \varepsilon,$$ yani $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$

b)

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Böylece,

$\varepsilon > 0$ için $N_\varepsilon = [\![\frac{1}{\varepsilon^2}]\!] + 1$ seçersek $\forall n \geq N_\varepsilon$ olduğunda

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}} < \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}} = \varepsilon,$$ yani $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

Soru: $x_n \to x \Rightarrow |x_n| \to x$ (Tersi doğru değil örn $(-1)^n$ dizisi)

Çözüm: $x_n \to x$ old.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyleki: $\forall n \geq N_\varepsilon$ için $|x_n - x| < \varepsilon$ olur.

Ters üçgen eşitsizliğinden,

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| \text{ dir.}$$

O halde

$\varepsilon > 0$ için yukarıda belli olan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ele alalım,

$\forall n \geq N_\varepsilon$ için $\big||x_n| - |x|\big| < \varepsilon$ olur, yani $|x_n| \to |x|$.

Not: $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0$

Soru: $x_n \to 0$, y_n sınırlı ise $x_n y_n \to 0$ old. gösteriniz.

Çözüm:

1. Yol (tanımdan): y_n sınırlı old $\exists M > 0$ öyleki $|y_n| \leq M$.

$x_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_\varepsilon \ |x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon / M$.

Böylece,

$\varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (aynı N_ε alıyoruz) $\forall n \geq N_\varepsilon$ için

$$|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \text{, yani } x_n y_n \to 0.$$

2. Yol: y_n sınırlı old. $\exists M > 0$ öyleki $|y_n| \leq M$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq |x_n y_n| \leq M . |x_n| \text{ olup}$$

ve sıkıştırma Teo'den $|x_n y_n| \to 0$

$x_n \to 0 \Rightarrow |x_n| \to 0$

böylece $x_n y_n \to 0$ olur.

- x_n yakınsak y_n sınırlı olmak üzere $x_n y_n$ yakınsak olmak zorunda değildir. örneğin;

$$x_n = 1 \text{ (sabit dizi)}, \quad y_n = (-1)^n.$$

Soru: $\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n\geq 0$ o.ü. $x_n\to x \Rightarrow \sqrt{x_n}\to\sqrt{x}$.

Çözüm:

- $x<0$ olamaz (Neden)!
- $x=0$ ise $x_n\to 0$ old.

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_\varepsilon\ |x_n-0|=|x_n|<\varepsilon^2$.

Böylece

$\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ (aynı N_ε aldık) $\forall n\geq N_\varepsilon$ için

$$|\sqrt{x_n}-\sqrt{0}|=\sqrt{x_n}<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon.$$

- $x>0$ ise $x_n\to x$ old

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_\varepsilon\ |x_n-x|<\sqrt{x}\cdot\varepsilon$ dır.

Böylece

$\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ (aynı N_ε aldık) $\forall n\geq N_\varepsilon$ için

$$|\sqrt{x_n}-\sqrt{x}|=\left|\frac{x_n-x}{\sqrt{x_n}+\sqrt{x}}\right|\leq\frac{|x_n-x|}{\sqrt{x}}<\varepsilon.$$

Tüm durumlar göz önüne alındığında $\sqrt{x_n}\to\sqrt{x}$ olduğu görülür.

Soru:
Binom açılımını kullanarak aşağıdaki limitleri gösteriniz.

a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

Çözüm:

Tümevarımdan $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$b_n=:\sqrt[n]{n}-1\geq 0 \text{ dir.}$$

Binom açılımından

$$n=(1+b_n)^n=1+nb_n+\dots+b_n^n$$
$$n\geq\binom{n}{2}b_n^2=\frac{n.(n-1)}{2}b_n^2$$

Böylece

$$0\leq b_n^2\leq\frac{2}{n-1}$$

$$\Rightarrow 0\leq b_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$$\underset{\text{Sıkıştırma Teo}}{\Rightarrow}\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

b) $x>0$ o.ü. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$

Çözüm:

i) $x>1$ ise $\sqrt[n]{x}>1$ old.

$$b_n=:\sqrt[n]{x}-1>0 \text{ dır.}$$

Binom açılımından

$$x=(1+b_n)^n=1+nb_n+\dots+b_n^n\geq nb_n$$

Böylece $0<b_n\leq\frac{x}{n}\ \underset{\text{Sıkıştırma Teo}}{\Rightarrow}\ \lim_{n\to\infty}b_n=0$

yani, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$.

ii) $x=1$ ise açıktır.

iii) $x<1$ ise $y:=\frac{1}{x}>1$ olup

i)'den

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y}=1 \text{ olur.}$$

Böylece $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1}=1$.

Sonuç olarak,

$$\sqrt[n]{x}\to 1 \text{ dir.}$$

Soru: Binom açılımını kullanarak aşağıdaki limitleri gösteriniz.

a) $x > 1$ o.ü. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{x^n} = 0$

b) $|x| < 1$ o.ü. $\lim\limits_{n\to\infty} n.x^n = 0$

Çözüm:

a) $x > 1$ old. $b =: x-1 > 0$ dır.

Binom açılımından

$$\frac{n^2}{x^n} = \frac{n^2}{(1+b)^n} = \frac{n^2}{1+nb+\binom{n}{2}b^2+\binom{n}{3}b^3+\dots+b^n} < \frac{n^2}{\frac{n.(n-1).(n-2).b^3}{3!}}$$

$$0 \leq \frac{n^2}{x^n} < \frac{6n^2}{n.(n-1).(n-2).b^3}$$

Sıkıştırma Teo'den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{x^n} = 0.$$

b) $|x| < 1$ old. $b > 0$ o.ü. $|x| = 1/1+b$ yazılabilir.

Buradan $n|x|^n = \dfrac{n}{(1+b)^n}$ olup

Binom açılımından

$$n|x|^n = \frac{n}{(1+b)^n} = \frac{n}{1+nb+\binom{n}{2}b^2+\dots+b^n} < \frac{n}{\frac{n.(n-1)}{2}.b^2}$$

$$0 \leq n|x|^n < \frac{2}{(n-1)b^2}$$

Sıkıştırma teo'den

$$\lim_{n\to\infty} n|x|^n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} n x^n = 0.$$

Soru: $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ dizisinin yakınsaklığını araştır.

Çözüm:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

old. x_n üstten sınırlı

Ayrıca

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

böylece $x_{n+1} > x_n$ olup x_n artandır. Monoton Yak. Teo'den x_n dizisi yakınsaktır.

Soru: $|r| < 1$ ise $r^n \to 0$ old. gösteriniz.

Çözüm: $x_n = |r|^n$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan Monoton Yak. Teo göre limiti vardır ve $x_n \to L$ olsun.

$$x_{n+1} = |r|^{n+1} = |r| . |r|^n = |r| . x_n$$

limit alınırsa

$$L = |r| . L \Rightarrow L = 0 \text{ olur.}$$

$$|r|^n \to 0 \Rightarrow r^n \to 0 \text{ dır.}$$

Soru: $|r| < 1$ ise $x_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \\ - \quad r x_n &= r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} \\ \hline (1-r) x_n &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

böylece $x_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{1-r}$ olur.

Soru: $0,999.... = 1$ old. gösteriniz.

Çözüm:

$a_n = 0,\underbrace{999....9}_{n \text{ tane}}$ o.ü. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,999....$ anlamına gelir.

Tabi limit varsa!!

a_n sınırlı ve artan bir dizi olduğundan Monoton Yak. Teo'den

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \text{ vardır.}$$

Ayrıca $a_n = 10a_{n+1} - 9$ olup

limit alırsak

$$a = 10a - 9 \Rightarrow a = 1.$$

Soru: $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}} = ?$

Çözüm:

$a_1 = \sqrt{2}$ o.ü. $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ dizisini düşünelim.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}$ old. ilk olarak a_n dizisinin limitinin var olup olmadığını sorgulamalıyız.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < a_n < 2$ (Tümevarımdan)
- $a_{n+1}^2 = 2a_n > a_n^2 > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$, a_n dizisi monoton artandır.

Olelde Mon. Yak. Teo'den $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ vardır.

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

limit alırsak

$$a = \sqrt{2a} \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0, 2$$

$a \neq 0$ (Neden)

a_n dizisinin terimleri 0'ın keyfi yuvarına yığılmıyor Gör!!!

O halde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 2$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}} = 2.$$

Soru: $x_n \to x$ ise $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \to x$.

Çözüm: $x_n \to x$ old.

$\varepsilon>0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_n - x| < \varepsilon/2$ dir.

$n \geq N_\varepsilon$ için

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} - x\right| = \left|\frac{(x_1-x)+(x_2-x)+\cdots+(x_n-x)}{n}\right|$$

Kısalık adına $S:=$ ile gösterelim.

$$\leq \frac{\overbrace{|x_1-x|+|x_2-x|+\cdots+|x_{N_\varepsilon}-x|}^{\text{Sabit}}}{n} + \frac{|x_{N_\varepsilon+1}-x|+\cdots+|x_n-x|}{n}$$

$$\leq \frac{S}{n} + \frac{(n-N_\varepsilon)\varepsilon/2}{n}.$$

Şimdi $\dfrac{S}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ old.

$\varepsilon>0 \quad \exists N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon^1 \quad \left|\dfrac{S}{n} - 0\right| = \dfrac{S}{n} < \varepsilon/2$ olur.

Toparlayacak olursak,

$\varepsilon>0 \quad \exists N_\varepsilon^2 = \max\{N_\varepsilon, N_\varepsilon^1\} \quad \forall n \geq N_\varepsilon^2 \ (\geq N_\varepsilon^1, N_\varepsilon)$ için

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} - x\right| \leq \frac{S}{n} + \frac{(n-N_\varepsilon)\cdot\varepsilon/2}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n\cdot\varepsilon/2}{n} = \varepsilon$$

Yani, $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \to x$ $\boxtimes$

Not: Tersi doğru değil örn/ yine $(-1)^n$ dizisi.

Soru: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 0$ ol. $x_n \to x$ ise $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \longrightarrow x$.

Çözüm:

Bilgi; $y_1, y_2, \dots, y_n$ pozitif reel sayılar ol.

$$A_n = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad \text{(Aritmetik Ortalama)}$$

$$G_n = \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdots y_n} \quad \text{(Geometrik ortalama)}$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_n}} \quad \text{(Harmonik Ortalama)}$$

$H_n \leq G_n \leq A_n$ dır.

- $x > 0$ ise

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}}_{= H_n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}_{= A_n}$$

$A_n \to x$ ve $H_n \to x$ (Neden)! olup Sıkıştırma Teo'den

$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \longrightarrow x$ olur.

- $x = 0$ ise

$$0 < \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Yine Sıkıştırma Teo'den

$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \longrightarrow 0 = x$ olur.

Not: Tersi doğru değil örn;

$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ tek} \\ 2, & n \text{ çift} \end{cases}$ olup $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \sqrt{2}$ ancak ~~[illegible]~~ x_n dizisinin limiti yoktur.