T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARINDA MAKSİMAL MONOTON OPERATÖRLER

Elif CEYLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Erdal GÜL

Şubat, 2022

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARINDA MAKSİMAL MONOTON OPERATÖRLER

Elif CEYLAN tarafından hazırlanan tez çalışması 03.02.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal GÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Erdal Gül, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ömer Gök, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erhan Çalışkan , Üye
İstanbul Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Erdal GÜL sorumluluğunda tarafımca hazırlanan “Banach Uzaylarında Maksimal Monoton Operatörler” başlıklı çalışmada diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Elif CEYLAN

İmza

Canım eşim ve biricik kızıma,

TEŞEKKÜR

Lisans eğitimimden itibaren bana emeği geçen ve yüksek lisans tez çalışmamın yürütülmesinde bana yol gösteren, çalışmam boyunca kıymetli bilgi birikim ve tecrübeleri ile bana ışık olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam sayın Doç.Dr. Erdal Gül'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca, maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili aileme ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen, hayatımın her evresinde bana destek olan kıymetli eşime minnet ve şükranlarımı sunarım.

Elif CEYLAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ viii

ÖZET ix

ABSTRACT x

1 GİRİŞ 1

1.1 Tezin Amacı……1

1.2 Literatür Özeti……1

1.3 Hipotez ……2

2 MAKSİMAL MONOTON OPERATÖRLERDE MINTY-BROWDER TEOREMİ 3

2.1 Tanım 2.1……4

2.2 Tanım 2.2……5

2.3 Önerme 2.1……6

2.4 Teorem 2.1……7

2.5 Lemma 2.1……8

2.6 Lemma 2.2……9

2.7 Teorem 2.2……14

2.8 Teorem 2.3……15

2.9 Teorem 2.4……17

2.10 İki Maksimal Monoton Operatörün Toplamı……19

2.11 Önerme 2.2……20

2.12 Lemma 2.3……20

2.13 Teorem 2.5……26

2.14 Lemma 2.4……26

2.15 Teorem 2.6……28

2.16 Teorem 2.7……30

2.17 Önerme 2.3……31

2.18 Karmaşık Banach Uzaylarında Monoton Operatörler……32

3 MAKSİMAL MONOTON ALT POTANSİYEL OPERATÖRLER 34

3.1 Teorem 3.1……34

3.2 Alt Önerme 3.1……34

3.3 Alt Önerme 3.2……35

3.4 Teorem 3.2……37

3.5 Teorem 3.3……39

3.6 Alt Önerme 3.3……40

3.7 Teorem 3.4……41

3.8 Önerme 3.1……43

3.9 Alt Diferansiyel Haritalama Örnekleri……44

3.10 Kendine Eş Operatörler ……45

3.11 Alt Teorem 3.1……47

3.12 Konveks (Dışbükey) İntegrandlar ……47

3.13 Lemma 3.1……48

3.14 Önerme 3.2……49

3.15 $L^2(\Omega)'$de Yarı Doğrusal Eliptik Operatörler……52

3.16 Önerme 3.3……52

3.17 Doğrusal Olmayan Sınırlı Neumann Koşulları ……55

3.18 Önerme 3.4……56

3.19 Doğrusal Olmayan Difüzyon Operatörü……60

3.20 Önerme 3.5 ……60

3.21 Önerme 3.6……61

3.22 Eliptik Varyasyonel Eşitsizlikler……61

3.23 Iraksaklık Tipi Doğrusal Olmayan Eliptik Problemler……62

4 SONUÇ VE ÖNERİLER **63**

KAYNAKÇA **64**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **67**

SİMGE LİSTESİ

R^-	$(-\infty,0)$
R^+	$(0,+\infty)$
$\overline{R}$	$(-\infty,+\infty)$
R_+^N	$\{(x_1,\dots.,x_N); x_N > 0\}$
convC	C'nin dışbükey gövdesi
intC	C'nin iç noktası
$C_0^k(\Omega)$	$C^k(\Omega)$ cinsinden fonksiyonların alt uzayı
$H_0^1(\Omega)$	$C_0^1(\Omega)$'nın $H^1(\Omega)$ normuyla kapanışı
∇f	$f: X \to R$ haritasının gradyanı
∂f	$f: X \to R$ haritasının alt diferansiyeli
$C^k(\Omega)$	k mertebesine kadar sürekli türevlenebilen Ω üzerindeki reel değerli fonksiyonların uzayı, $0 \le k \le \infty$
R^N	N- boyutlu öklid uzayı
R	Reel Uzay $(-\infty,+\infty)$
Ω	R^N'in açık alt kümesi
$L^p(\Omega)$	$u: \Omega \to R$ $p-$ toplanabilir fonksiyonların uzayı $\|U\|_p = (\int_\Omega \|u(x)\|^p dx)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$
$L_m^p(\Omega)$	$u: \Omega \to R^m$ $p-$ toplanabilir fonksiyonların uzayı
$\|.\|_X$	X lineer norm uzayının normu
X*	X uzayının duali
L(X,Y)	X'ten Y'ye doğrusal sürekli operatörlerin uzayı
$\partial\Omega$	Ω'nın sınırı
Q	$\Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$
$\sum$	$\partial\Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$

ÖZET

Banach Uzaylarında Maksimal Monoton Operatörler

Elif CEYLAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Erdal GÜL

Son yıllarda, fonksiyonel yöntemler kısmi diferansiyel denklemlerin nitel teorisinde artan bir rol oynamıştır. Leray-Schauder derece teorisi, sabit nokta teoremleri ve maksimal monoton doğrusal olmayan operatörler teorisinin yanı sıra, doğrusal operatörlerin yarı gruplarının spektral metotları ve teorisi, artık kısmi diferansiyeller ile birleştirilmiş doğrusal ve doğrusal olmayan sınır değer problemlerinin çözümlerinin analizi için temel fonksiyonel araçlardır. Monoton operatörler ve maksimal operatörler ile ilgili yürütülen birçok çalışma literatürde mevcuttur. Yapılan çalışmaların bir kısmı Orlicz uzaylarında bir kısmı Lorentz uzaylarında uygulanmıştır. Bu çalışmada maksimal operatörler ile monoton operatörleri bir arada Banach uzaylarında uygulamak hedeflenmiştir. Mevcut Banach uzaylarında maksimal monoton operatörlerin temel teorisinin yanı sıra doğrusal olmayan eliptik sınır değer problemleri ile olan ilişkisinden bahsedilecek ve sonuçlar sunulacaktır. Bununla birlikte ikinci kısım kapsamlı bir şekilde ele alınmayacak, sadece Banach uzaylarındaki lineer olmayan dinamiklere etkileri incelenecektir. Bu çalışma üzerinde daha önce literatürde birlikte kullanılmayan ifadeler yer almaktadır. Bu sebeple bu yöndeki çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Monoton operatör, maksimal operatör, lorentz uzayı, orlicz uzayı.

ABSTRACT

Maximal Monotone Operators in Banach Spaces

Elif CEYLAN

Department of Maths

MSc. Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Erdal GÜL

In recent years, functional methods have played an increasing role in the qualitative theory of partial differential equations. The spectral methods and theory of semigroups of linear operators, as well as the Leray-Schauder degree theory, fixed point theorems, and the theory of maximal monotonous nonlinear operators are now essential functional tools for the treatment of linear and nonlinear boundary value problems associated with partial differentials. There are many studies on monotone operators and maximal operators in the literature. Some of the studies have been applied in Orlicz spaces and Lorentz spaces. In this study, it is aimed to apply maximal operators and monotone operators together in Banach spaces. In addition to the basic theory of existing Banach spaces, its relationship with nonlinear, linear elliptic boundary value problems will be mentioned and the results will be presented. However, the second part will not be discussed comprehensively, only its effects on nonlinear dynamics in Banach spaces will be examined. There are statements about the results obtained from this study that have not been used together in the literature before. For this reason, it is thought that it will contribute to studies in this direction.

Keywords: Monotone operator, maximal operator, lorentz space, orlicz space.

1
GİRİŞ

1.1 Tezin Amacı

Bu tezde temel amacımız, yansımalı Banach uzaylarında maksimal monoton operatörlerin temel teorisini, ilişki ve sonuçlarıyla birlikte sunmaktır. Bununla birlikte doğrusal olmayan eliptik sınır değer problemlerin dışbükey analizi ve varlık teorisi de sunulmaktadır. Doğrusal olmayan eliptik sınır değer problemleri kapsamlı bir şekilde ele alınmasa da Banach uzaylarında doğrusal olmayan dinamiklere etkileri incelenmektedir.

1.2 Literatür Özeti

Monoton operatörler teorisinin incelenmesi otuz yılı aşkın bir geçmişe sahiptir ve oldukça yüksek, derin ve eksiksiz bir düzeye ulaşmıştır. [1]

Bugüne kadar monoton operatör teorisi, çeşitli alanlarda birçok önemli uyglamaya ev sahipliği yapmıştır. Bunlardan bazıları, doğrusal olmayan diferansiyel ve integral denklemler, doğrusal olmayan kontrol sistemleri ve akışkanlar dinamiğidir. Banach uzaylarına bakacak olursak, Banach'ta doğrusal olmayan maksimal monoton operatörler teorisinin temel taşları ve ana sonuçları Minty [2] [3] ve Browder [4] [5] ile ortaya atılmıştır. Yine aynı konularda Brezis [6] [7] [8] Lions [9] ve Rockafellar [10] [11] [12] gibi isimlerin önemli çalışmaları bulunmaktadır. Bunların yanı sıra Moreau [13] [14]' da temel olarak alt diferansiyel tip operatör teorisiyle yakından ilgilenmiştir. Ancak maksimal monoton operatörler teorisinin doğrusal olmayan ilk uygulamaları ve Diverjans türündeki eliptik denklemler Browder'a [4] [5] aittir. Eliptik varyasyonel eşitsizlikler teorisi ve onun lineer olmayan analizi Stampacchia [15] ve Lions [16] çalışmalarında ele alınmıştır.

Son olarak da serbest sınır problemleri ve uygulamalarıyla ilgili çok sayıda eser geliştirilmiştir.

1.3 Hipotez

Monoton Operatörler ve Maksimal operatörler ile ilgili yürütülen birçok çalışma literatürde mevcuttur. Yapılan çalışmaların bir kısmı Orlicz uzaylarında, Lorentz uzaylarında ve Hilbert uzaylarında uygulanmıştır. Bu çalışmada Maksimal Operatörler ile Monoton Operatörler bir arada Banach Uzaylarında uygulanmaktadır.

2

MAKSİMAL MONOTON OPERATÖRLERDE MINTY-BROWDER TEOREMİ

X ve Y lineer uzaylar olmak üzere, onların kartezyen çarpımlarını $X \times Y$ ve elemanlarını $[x, y]$ şeklinde gösterebiliriz. Burada $x \in X$ ve $y \in Y$ ' dir.

A: $X \to Y$ çok değerli bir operatör olmak üzere $X \times Y$ grafiğini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\{[x, y] \in X \times Y \, ; y \in Ax\}. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Diğer yandan, eğer $A \subset X \times Y$ ise aşağıdaki tanımları verebiliriz:

$$Ax = \{y \in Y \, ; [x, y] \in A \} \, , \qquad D(A) = \{x \in X; \; Ax \neq \emptyset\}, \qquad \textbf{(2.2)}$$

$$R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax \, , \qquad A^{-1} = \{[y, x]; [x, y] \in A \} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Böylece, burada $X \to Y$ operatörleri ve onların $X \times Y$ 'deki grafiklerini tanımlamış olduk. Bundan dolayı, $X \to Y$ operatörler yerine $X \times Y$ 'nin alt kümelerinden bahsedebiliriz.

Eğer $A, B \subset X \times Y$ ve λ bir reel sayı ise aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\lambda A = \{[x, \lambda y]; [x, y] \in A\}; \qquad \textbf{(2.4)}$$

$$A + B = \{[x, y + z]; [x, y] \in A, \; [x, z] \in B\}; \qquad \textbf{(2.5)}$$

$$AB = \{[x, z]; \; [x, y] \in B, \; [y, z] \in A \; \exists \; y \in Y \}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

X reel bir normlu uzay ve X^* onun duali olsun.

$x \in X$' deki bir $x^* \in X^*$ değeri, (x^*, x) veya $x^*(x)$ ile gösterilir. X' in normu $\|.\|$ şeklinde yazılırken, X^* 'ın normu $\| \, . \, \|_*$ şeklinde yazılır.

Herhangi bir karışıklık söz konusu değil ise yıldız işaretini $\|.\|_*$ göstergesinden çıkarırız ve hem X hem de X^* normlarını $\|.\|$ sembolü ile belirtiriz.

Şimdi, monotonluk ve maksimal monotonluk kavramlarının tanımlarından bahsedelim.

2.1 Tanım 2.1

$A \subset X \times X^*$ (Eşdeğer olarak $A : X \to X^*$ operatörü) kümesinin aşağıdaki durumlarda monoton olduğu söylenebilir.

$$(x_1 - x_2\ , y_1 - y_2) \geq 0\ ,\ \forall [x_i, y_i] \in A,\ i = 1{,}2. \qquad \textbf{(2.7)}$$

A, X ile X^* arasında tek değerli bir operatör olmak üzere

$$(x_1 - x_2\ , Ax_1 - Ax_2) \geq 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in D(A). \qquad \textbf{(2.8)}$$

ise A monotondur.

$A \subset X \times X^*$ kümesi $X \times X^*$ 'ın başka bir monoton alt kümesinde düzgün bir şekilde bulunmadığı zaman $A \subset X \times X^*$ kümesinin maksimal monoton olduğu söylenir.

$X \times X^*$ monoton alt kümesinin basit bir örneğinden bahsedelim. X' in ikilik eşlemesi J olsun.

X üzerinde $J : X \to 2^{X^*}$ eşlemesi aşağıdaki şekildedir.

$$J(x) = \{\, x^* \in X^*\, ; (x^*, x) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \}\ ,\ \forall x \in X. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Hahn- Banach teoremine göre şunu biliyoruz ki $\forall x_0 \in X$ için bazı $x_0{}^* \in X^*$ vardır . Öyle ki $(x_0{}^*, x_0) = \|x_0\|\ ve\ \|x_0{}^*\| \leq 1$.

Gerçekten de, f bir doğrusal fonksiyon olmak üzere $f : Y \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \alpha\|x_0\|$ için $x = \alpha x_0$ yazılır.

Burada $Y = \{\, \alpha x_0\, ; \alpha \in \mathbb{R}\}$, X üzerinde $x_0{}^* \in X^*$ olacak şekilde doğrusal sürekli bir genişlemeye sahiptir. Öyle ki $\forall x \in X$ için $|(x_0{}^*, x)| \leq \|x\|$ olur.

Bundan dolayı, $(x_0{}^*, x_0) = \|x_0\|\ ve\ \|x_0{}^*\| \leq 1$ ($\|x_0{}^*\| = 1$) olur.

Açıkça, $x_0{}^*\|x_0\| \in J(x_0)$ ve $J(x_0) \neq \emptyset$ $\forall x_0 \in X$ ' dir.

$J: X \to X^*$ eşlemesine X uzayının ikilik eşlemesi denir. Genel olarak bu ikili eşlemede J çok değerlidir.

Aslında, J' yi böyle de tanımlayabiliriz, $\forall\, [x_i, y_i] \in J$ için,

$$(x_1 - x_2\ , y_1 - y_2) =$$

$$\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - (x_1, y_2) - (x_2, y_1) \geq (\|x_1\| - \|x_2\|)^2. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Böylece J'nin $X \times X^*$ üzerinde maksimal monoton olduğunu söyleyebiliriz.

Eğer $[u, v] \in X \times X^*$ ise $\forall [x, y] \in J$ için $(u - x, v - y) \geq 0$ olur. Öyleyse,

$J: X \times X^*$ örten ve $[x, y] \in J$ olduğundan $2y = v + w \quad , w \in J(u)$ yazılır.

Buradan,

$$(u - x, w - y) \leq 0 \text{ ve } [u, w], [x, y] \in J$$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 = \|u\|^2 = \|w\|^2, \qquad (u, y) + (x, w) \geq 2\|x\|^2 \qquad \textbf{(2.11)}$$

elde edilir.

Bundan dolayı,

$$(u, y) + (x, w) = 2\|x\|^2 = 2\|u\|^2, \qquad \textbf{(2.12)}$$

olur ve bu açıkça şunu gösterir;

$$(u, y) = (x, w) = (x, v) = \|u\|^2 = \|x\|^2. \qquad \textbf{(2.13)}$$

Böylelikle,

$$(u, v) \geq (x, v) + (u, y) - (x, y) = \|u\|^2 = \|v\|^2. \qquad \textbf{(2.14)}$$

olur ve iddia ettiğimiz gibi $[u, v] \in J$ olduğunu görürüz.

2.2 Tanım 2.2

$D(A) = X$ olmak üzere $A: X \to X^*$ 'a tek değerli bir operatör olsun. $\forall\, x, y \in X$ için, A'nın yarı sürekli bir operatör olduğu söylenir ve

$$w - \lim_{\lambda \to 0} A(x + \lambda y) = Ax, \qquad \textbf{(2.15)}$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer A, $X \to X_w^{*}{}'a$ kadar sürekli ise A' ya yarı sürekli denir. Yani;

$$w - \lim_{x_n \to x} Ax_n = Ax, \qquad \textbf{(2.16)}$$

olarak yazılır.

A'nın zorlayıcı olduğu söylenirse, $\exists\, x^0 \in X\ ve\ \forall\, [x_n, y_n] \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x^0, y_n)\|x_n\|^{-1} = \infty \qquad \textbf{(2.17)}$$

yazılır. Öyle ki, $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \infty$.

Böylece A 'nın her sınırlı alt kümeye bağlı olması durumunda sınırlandırıldığı söylenebilir.

2.3 Önerme 2.1

$A \subset X \times X^*$ maksimal monoton olsun.

- **i.** $A, X \times X^*$ içinde zayıf-kuvvetli kapalıdır, yani eğer $y_n = Ax_n,\ ve\ X'de\ x_n \rightharpoonup x,\ X^{*\prime}$da $y_n \to y$ oluyorsa $[x, y] \in A$ olur.
- **ii.** A^{-1}, $X^* \times X$ içinde maksimal monotondur.
- **iii.** $\forall x \in D(A)$ için $Ax,\ X^{*\prime}$ ın kapalı bir dışbükey alt kümesidir.

İspat:

i. Aşağıdaki eşitsizlikten

$$(x_n - u, y_n - v\ ) \geq 0\ , \quad \forall [u, v] \in A, \qquad \textbf{(2.18)}$$

açıkça görüyoruz ki;

$$(x - u, y - v) \geq 0, \quad \forall [u, v] \in A. \qquad \textbf{(2.19)}$$

Çünkü A maksimal ve bu da iddia ettiğimiz gibi $[x, y] \in A'$ yı ifade eder.

ii. **(2.3)'** te tanımladığımız gibi $A^{-1} = \{\, [y, x];\ [x, y] \in A\,\}$ 'dir.

A'nın X'ten 2^{X^*} ' a her bir eşlemesi için, $A^{-1}{}'$in $X^{*\prime}$dan 2^X'e ters eşlemesini

$$A^{-1}(y) = \{x | x \in X, y \in A(x)\}, \quad (y \in X^*) \qquad \textbf{(2.20)}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Açıkça, $[x,y]$ A 'nın grafiği içindedir, ancak ve ancak $[y,x]$ A^{-1}'in içindedir.

Monotonluk koşulunun tanım ve görüntü uzayları altında değişmez olması gerçeğinde; $A: X \to X^*$ monotondur ancak ve ancak

$A^{-1}: X^* \to X$ mononotondur sonucu elde edilir.

iii. (i) önermesinde belirttiğimiz üzere, Ax' in her bir $x \in D(A)$ için kapalı bir X^* alt kümesi olduğu açıktır. Şimdi,

$y_0, y_1 \in Ax$ ve $y_\lambda = \lambda y_0 + (1-\lambda)y_1$ olsun $(0 < \lambda < 1)$

Eşitsizliklerden ;

$(x-u, y_0 - v) \geq 0$, $(x-u, y_1 - v) \geq 0$, $\forall [u,v] \in A$,

Görüyoruz ki $(x-u, y_\lambda - v) \geq 0$, $\forall [u,v] \in A$ olur.

Bu da şunu gösterir ki $[x, y_\lambda] \in A' dır$. Çünkü A maksimaldir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

$A + J'$ nin örtenliği açısından , maksimal monoton bir operatör olan A' nın hassasiyetine göre karakterizasyonunu ima eden bu önemli sonuç, aşağıdaki varoluş teoreminin bir sonucudur.

2.4 Teorem 2.1

X, yansımalı bir Banach uzayı ve A ile B de $X \times X^{*\prime}$ da iki monoton küme olsun.

Öyle ki $0 \in D(A)$, B tek değerli , yarı sürekli ve zorlayıcıdır yani;

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(x, Bx)}{\|x\|} = +\infty . \qquad \textbf{(2.21)}$$

Öyleyse $x \in K = \overline{convD(A)}$ vardır. Öyle ki;

$$(u - x, Bx + v) \geq 0 \quad \forall [u,v] \in A. \qquad \textbf{(2.22)}$$

Burada, $\overline{convD(A)}$, $\overline{D(A)}$ kümesinin bir dışbükey gövdesidir. Yani küme;

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \, , \; x_i \in \overline{D(A)}, \qquad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \quad m \in \mathrm{N} \right\} \qquad (\mathbf{2.23})$$

şeklindedir.

Özellikle A, maksimal monoton ise **(2.22)** 'den $0 \in Ax + Bx$ olur.

Şimdi teoremimizin ispatı için, öncelikle aşağıdaki önermeyi inceleyelim, teoremin ispatını bir sonraki adımda gerçekleştireceğiz.

2.5 Lemma 2.1

X, sonsuz boyutlu bir Banach uzayı ve B, $X \to X^*$ ' a yarı sürekli monoton bir operatör olsun. Öyleyse B sürekli olmalıdır.

İspat:

Öncelikle B' nin sınırlı alt kümelere bağlı olduğunu gösterelim.

Burada $\{x_n\}$ dizisinden bahsedebiliriz,

$$\{x_n\} \subset X, \text{ öyle ki } \|Bx_n\| \to \infty \text{ ve } x_n \to x_0\ ,\ (n \to \infty)$$

Mevcut eşitsizliğimiz, $\forall x \in X$ için

$$(x_n - x, Bx_n - Bx) \geq 0\ , \qquad \textbf{(2.24)}$$

şeklindedir ve bundan dolayı,

$$\left(x_n - x,\ \frac{Bx_n}{\|Bx_n\|} - \frac{Bx}{\|Bx_n\|} \right) \geq 0, \qquad \textbf{(2.25)}$$

yazabiliriz. Genellemeyi kaybetmeden, şunu varsayabiliriz:

$$Bx_n \|Bx_n\|^{-1} \to y_0 \qquad (n \to \infty),$$

buradan,

$$(x_0 - x, y_0 - Bx) \geq 0, \qquad \forall x \in X. \qquad \textbf{(2.26)}$$

olur.

Bundan dolayı $y_0 = 0$ olmalıdır. Ortaya bir çelişki durumu çıkmaktadır ve bu çelişki ancak B sınırlı ise ortadan kaldırılabilir.

Öyleyse şimdi, $\{x_n\}$ x_0 ' a yakınsasın ve y_0' da $\{Bx_n\}$' in bir noktası olsun.

Yine B'nin monotonluk koşulu ile şunu ifade edebiliriz,

$$(x_0 - x, y_0 - Bx) \geq 0, \quad \forall x \in X. \qquad \textbf{(2.27)}$$

Bu eşitsizlikte, $0 \leq t \leq 1$ aralığında $x = tu + (1-t)x_0$, alınırsa, $(u, X$ üzerinde keyfi bir değer) $\forall t \in [0,1]$, $u \in X$ için

$$\big(x_0 - u, y_0 - B(tu + (1-t)x_0)\big) \geq 0, \qquad \textbf{(2.28)}$$

yazabiliriz. Ardından , t' yi sıfırlayarak ve B'nin yarı sürekliliğini kullanarak $\forall u \in X$ için,

$$(x_0 - u, y_0 - Bx_0) \geq 0, \qquad \textbf{(2.29)}$$

olduğunu elde ederiz. Bu da iddia edildiği gibi açıkça $y_0 = Bx_0$ olduğunu gösterir. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

2.6 Lemma 2.2

X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı, A ve B de $X \times X^*$ üzerinde monoton iki alt küme olsun. Öyle ki , $0 \in D(A)$, B tek değerli , sürekli ve **(2.21)**'deki denklemimizi sağlamaktadır. Öyleyse $x \in \overline{convD(A)}$ vardır, öyle ki

$$(u - x, Bx + v) \geq 0, \quad \forall [u, v] \in A. \qquad \textbf{(2.30)}$$

İspat:

Gerekirse A'yı yeniden tanımlayarak

$K = \overline{convD(A)}$ kümesinin sınırlı olduğunu varsayabiliriz. Nitekim bu durumda Lemma 2.1 ' e göre A' yı

$A_n = \{[x, y] \in A;\ \|x\| \leq n\}$ ile değiştirebiliriz.

Buradan da şu sonuca ulaşıyoruz ki, her n değeri için

$x_n \in K_n = K \cap \{x; \|x\| \leq n\}$ yazılır.

Öyle ki

$$(u - x_n, Bx_n + v) \geq 0, \quad \forall [u, v] \in A_n. \qquad \textbf{(2.31)}$$

Bu bize şu getiriyi verir;

$$(x_n, Bx_n)\|x_n\|^{-1} \leq \|\xi\|, \ \ \forall\, \xi \ \in A0. \qquad \textbf{(2.32)}$$

Burada **(2.21)'** deki koşula göre, $M > 0$ öyle ki, her n değeri için

$\|x_n\| \leq M$ olduğunu görürüz.

Şimdi bir alt dizide basitlik açısından tekrar n olarak gösterelim.

$$x_n \to x.$$

(2.31)' te B 'nin sürekliliğinden iddia ettiğimiz gibi x 'in **(2.30)**'e bir çözüm olduğu aşikardır.

$T: K \to K$' ya şu şekilde tanımlanan çok değerli bir operatör olsun.

$$Tx = \{y \in K; (u - y, Bx + v) \geq 0, \ \ \forall [u, v] \in A\}. \qquad \textbf{(2.33)}$$

Önce şunu gösterelim,

$Tx \neq \emptyset$, $\forall x \in K$.

Bu amaçla şu kümeleri tanımlayalım

$$K_{uv} = \{y \in K; (u - y, Bx + v) \geq 0, \qquad \textbf{(2.34)}$$

ve

$$Tx = \bigcap_{[u,v] \in A} K_{uv}. \qquad (\mathbf{2.35})$$

Eğer, K_{uv} 'ler boş küme değillerse, kompakt K kümesinin kapalı alt kümeleri olduğundan, $\bigcap_{[u,v] \in A} K_{uv} \neq \emptyset$ olduğunu göstermek için her sonlu

$\{K_{ui,vi}; i = 1, \dots, m\}$ topluluğunun boş olmayan bir kesişime sahip olduğunu ispatlamak yeterlidir. Aynı şekilde sistemi şöyle de gösterebiliriz:

$$(u_i - y, Bx + \ v_i) \geq 0, \quad \ i = 1, \dots, m, \qquad \textbf{(2.36)}$$

Herhangi bir $[u_i, v_i] \in A, \quad i = 1, \dots, m$ çifti için $y \in K$ çözümü vardır. .

$$H: U \times U \to \mathbb{R},$$

$$H(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j - u_i, Bx + v_i \right), \quad \forall \lambda, \mu \in U, \qquad \textbf{(2.37)}$$

$$U = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m ; \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}. \qquad (\mathbf{2.38})$$

H fonksiyonu sürekli, λ ' da dışbükey ve μ' de içbükeydir. Oyun teorisinden klasik Von Neumann min-maks teoremine göre bir eyer noktasına

$(\lambda_0, \mu_0) \in U \times U$ sahiptir.

$$H(\lambda_0, \mu) \leq H(\lambda_0, \mu_0) \leq H(\lambda, \mu_0), \quad \forall \lambda, \mu \in U. \qquad \textbf{(2.39)}$$

Öte yandan,

$$H(\lambda, \lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j - u_i, B_x + v_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j (v_i, u_j - u_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j \left(u_j - u_i, Bx \right) \leq 0, \quad \forall \lambda \in U, \qquad (\mathbf{2.40})$$

B'nin monotonluğundan $\left(v_i - v_j, u_i - u_j \right) \geq 0$ yazılır. ($\forall i, j$ için.)

(2.39)'dan şunu görüyoruz ki

$$H(\lambda_0, \mu) \leq 0\,, \quad \forall \mu \in U\,;$$

yani,

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \left(\sum_{j=1}^{m} (\lambda_0)_j u_j - u_i, Bx + v_i \right) \leq 0, \quad \forall \mu \in U. \qquad (\mathbf{2.41})$$

Özellikle,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} (\lambda_0)_j u_j - u_i, B_x + v_i \right) \leq 0, \quad \forall i = 1, \ldots., m \qquad (\mathbf{2.42})$$

Dolayısıyla, $y = \sum_{j=1}^{m} (\lambda_0)_j u_j \in K$ **(2.36)**' ya bir çözümdür. Bu nedenle, T'nin K üzerinde iyi tanımlandığını ve $T(K) \subset K$ olduğunu söylebiliriz. Ayrıca $\forall x \in K$ olduğu açıktır ve Tx, X'in kapalı bir dışbükey alt kümesidir. Bununla birlikte T, K üzerinde üst yarı süreklidir.

Aslında, T' nin aralığı kompakt bir kümeye ait olduğundan, T'nin üst yarı sürekli olduğunu doğrulamak için T'nin $K \times K'$da kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

Yani, eğer $[x_n, y_n] \in T$, $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $y \in Tx$ diyebiliriz.

Ancak T' nin tanımı hesaba katılırsa, son özellik açıktır. Ardından klasik Kakutani sabit nokta teoremini uygulayarak $x \in Tx$ olacak şekilde $x \in K$ 'nın var olduğu sonucuna varıyor ve böylece Lemma 2.2 'nin ispatını tamamlamış oluyoruz.

Teorem 2.1'in İspatı:

Bu ispat, Galerkin metoduna göre Banach uzaylarındaki denklemlerin standart sonsuz boyutlu yaklaşımlarına dayanır.

Λ, X'_α dan X'e sıralanan tüm sonlu boyutlu alt uzayların ailesi olsun.

$\forall X_\alpha \in \Lambda$ için

$j_\alpha : X_\alpha \to X$

$j_a^* : X^* \to X_a^*$ 'da duali olsun.

Operatörlerimiz, $X_a \to X_\alpha^*$ 'a

$A_\alpha = j_a^* A j_a$ ve $B_\alpha = j_\alpha^* B j_\alpha$ olsun. Bu operatörler $X_\alpha \times X_a^*$ ' da monotondur.

Çünkü, B

$X \to X^{*\prime} a$ yarı süreklidir ve

j_α^* , $X^* \to X_\alpha^*$ da süreklidir.

Lemma 2.1 ' e göre $B_\alpha : X_a \to X_\alpha^*$ 'a süreklidir.

Öyleyse Lemma 2.2 'yi uygulayabiliriz. Burada,

$X = X_\alpha$, $A = A_\alpha$, $B = B_\alpha$ ve $K = K_\alpha = \overline{convD(A_\alpha)}$ olur.

Bundan dolayı, her bir $X_\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha \in K_\alpha$ vardır. Öyle ki;

$$(u - x_\alpha, B_\alpha x_\alpha + v) \geq 0, \qquad \forall [u, v] \in A,$$

Veya buna eş değer olarak, $\forall [u, v] \in A_\alpha$ için

$$(u - x_\alpha, B x_\alpha + v) \geq 0, \qquad \text{yazılır.} \qquad \textbf{(2.43)}$$

(2.21)' deki zorlayıcılık koşulunu kullanarak, (2.43)'den $\{x_\alpha\}'$ nın X'in sınırlı bir alt kümesinde kaldığını anlamış olduk. X uzayı yansımalıdır, bu nedenle X'in her

sınırlı alt kümesi sıralı olarak zayıf kompakttır ve bundan dolayı da bir $\{x_{\alpha_n}\} \subset \{x_\alpha\}$ vardır. Öyle ki,

$$x_{\alpha_n} \rightharpoonup x \quad (X'de\ n \to \infty). \tag{2.44}$$

Ayrıca, B operatörü sınırlı alt kümelere bağlı olduğundan, şunu varsayabiliriz.

$$Bx_{\alpha_n} \rightharpoonup y \qquad (X^{*\prime}da \quad n \to \infty). \tag{2.45}$$

Kapalı dış bükey alt kümeler zayıf kapalı olduğundan, $x \in K$ sonucunu çıkarırız. Ayrıca (2.43)-(2.45) denklemleri ile şunu görürüz:

$$\lim_{n\to\infty} \sup(x_{\alpha_n}, Bx_{\alpha_n}) \leq (u - x, v) + (u, y), \qquad \forall [u, v] \in A. \tag{2.46}$$

Genellik kaybı olmadan, A'nın tüm monoton alt kümelerinin $\tilde{A} \subset X \times X^*$'ın sınıfında maksimal olduğunu varsayabiliriz, öyle ki $D(\tilde{A}) \subset K = \overline{convD(A)}$.

Şimdi ispatı tamamlamak için, öncelikle şunu göstermeliyiz;

$$\lim_{n\to\infty} sup\ (x_{\alpha_n} - x, Bx_{\alpha_n}) \leq 0. \tag{2.47}$$

Nitekim durum böyle değilse bile (2.46)'dan şu sonucu çıkarabiliriz:

$$(u - x, v + y) \geq 0, \qquad \forall [u, x] \in A, \tag{2.48}$$

buradan , $x \in K\ ve\ A$, K'da etki alanına sahip tüm monoton operatörlerin sınıfında maksimal olduğundan $[x, -y] \in A$ 'dır diyebiliriz. (2.46)' daki denklemde $u = x$ yazılırsa , (2.47)'deki denklemimizi elde etmiş oluruz bu da hipotezimiz ile çelişir.

Şimdi, u keyfi bir değer fakat $D(A)'$da sabitlenmiş olsun. O hâlde ,

$u_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)u$, $0 \leq \lambda \leq 1$, olduğunu düşünelim. Ve şunu fark edelim,

B'nin monotonluğu sayesinde $(x_{\alpha_n} - u_\lambda, Bx_{\alpha_n}) \geq (x_{\alpha_n} - u_\lambda, Bu_\lambda)$ yazabiliriz.

Buradan şunu elde ederiz:

$$(1 - \lambda)(x_{\alpha_n} - u, Bx_{\alpha_n}) + \lambda(x_{\alpha_n} - x, Bx_{\alpha_n}) \geq$$
$$(1 - \lambda)(x_{\alpha_n} - u, Bu_\lambda) + \lambda(x_{\alpha_n} - x, Bu_\lambda), \tag{2.49}$$

Bundan dolayı (2.46) ile (2.47) 'den

$$(x-u, Bu_\lambda) \leq \lim_{n\to\infty} \sup\left(x_{\alpha_n} - u, Bx_{\alpha_n}\right) \leq (u-x, v), \qquad \forall [u,v] \in A. \qquad (\mathbf{2.50})$$

yazılır.

B yarı sürekli olduğu sürece, ikinci eşitsizlikte $\lambda \to 1$ yazabiliriz. O hâlde

$$(u-x, v+Bx) \geq 0, \quad \forall [u,v] \in A \qquad (\mathbf{2.51})$$

olur. Böylece teoremimizin ispatı tamamlanmış olur.

2.7 Teorem 2.2

X ve X^* yansımalı ve dışbükey,

$A \subset X \times X^*$, $X \times X^*$'ın monoton alt kümesi olsun.

$J: X \times X^*$, X'in dual (ikilik) tasviri (eşlemesi) olsun.

O hâlde A, maksimal monotondur ancak ve ancak herhangi bir $\lambda > 0$ için $R(A + \lambda J) = X^*$.

İspat:

(⇒):

Öncelikle $\exists \ \lambda > 0$ için $R(A + \lambda J) = X^*$ olduğunu varsayalım. A'nın maksimal monoton olmadığını kabul edelim ve buradan bir çelişki elde etmeye çalışalım. Şayet A maksimal monoton değilse $[x_0, y_0] \in X \times X^*$ vardır, öyle ki $[x_0, y_0] \notin A$ ve

$$(x - x_0, y - y_0) \geq 0, \qquad \forall [x,y] \in A. \qquad \mathbf{(2.52)}$$

Diğer yandan, hipoteze göre $[x_1, y_1] \in A$ vardır, öyle ki

$$\lambda J(x_1) + y_1 = \lambda J(x_0) + y_0. \qquad \mathbf{(2.53)}$$

Denklem (2.23)'teki $[x, y]$ yerine $[x_1, y_1]$ yazarsak,

$$\left(x_1 - x_0, J(x_1) - J(x_0)\right) \leq 0 \qquad \mathbf{(2.54)}$$

olur. Burada, J' nin tanımını da hesaba katarsak,

$$\|x_1\|^2 + \|x_0\|^2 \leq \left(x_1, J(x_0)\right) + \left(x_0, J(x_1)\right), \qquad \mathbf{(2.55)}$$

yazılır ve bu nedenle,

$$\left(x_1, J(x_0)\right) = \left(x_0, J(x_1)\right) = \|x_1\|^2 = \|x_0\|^2 \qquad \mathbf{(2.56)}$$

olur.

Dolayısıyla $J(x_0) = J(x_1)$ ve $X^{*\prime}$ın J dual eşlemesi tek değerli olduğu için

$x_0 = x_1$ olduğu sonucuna varabiliriz. (Çünkü X kesinlikle dışbükeydir.)

Buradan, $[x_0, y_0] = [x_1, y_1] \in A$ çelişkili olan hipotezdir.

($\Leftarrow$):

X uzayı dışbükeydir, J tek değerlidir ve X üzerinde yarı süreklidir.

$y_0, X^{*\prime}$da keyfi bir değer ve $\lambda > 0$ olsun.

Teorem 2.1' den

$$Bu = \lambda J(u) - y_0, \quad \forall u \in X, \tag{2.57}$$

yazabiliriz ve böylece öyle bir $x \in X$ olduğu sonucuna varırırz öyle ki;

$$(u - x, \lambda J(x) - y_0 + v) \geq 0, \qquad \forall [u, v] \in A. \tag{2.58}$$

A maksimal monotondur, ve bu $[x, -\lambda J(x) + y_0] \in A$; olduğu anlamına gelir,

yani,

$$y_0 \in \lambda J(x) + Ax. \tag{2.59}$$

Teorem 2.1'i kullanarak, dolaylı yoldan $0 \in D(A)$ olduğunu varsayalım.

Şayet öyle değilse, şu sonucu uygularız.

$$Bu = \lambda J(u + u_0) - y_0 \text{ ve } Au \stackrel{\text{def}}{=} A(u + u_0), \qquad u_0 \in D(A). \tag{2.60}$$

Daha sonra, $X^{*\prime}$ın tamamen dışbükey olduğu varsayımının Teorem 2.2' ye bırakılabileceğini gösterelim.

$$\phi_p(x) = J(x)\|x\|^{p-1} \text{ ve } p > 0 \text{ olsun.}$$

Teorem 2.3, J'nin ϕ_p ile değiştirildiği durumu kapsar.

2.8 Teorem 2.3

X ve X^* yansımalı ve dışbükey, $A \subset X \times X^*$ monoton bir küme olsun.

A maksimal monotondur ancak ve ancak $\forall \lambda > 0$ ve $p > 0$ iken $R(A + \lambda\phi_p) = X^*$.

İspat :

Burada yapacağımız kanıt, Teorem 2.2 ile tamamen aynıdır. Bu sebeple ispatı yalnızca anahatlarıyla belirteceğiz.

Eğer $R(A+\lambda\phi_p)=X^*$ ve $[x_0,y_0]\in X\times X^*$ ise

$$(x-x_0,y-y_0)\geq 0, \qquad \forall[x,y]\in A \tag{2.61}$$

yazılır. Burada $[x_1,y_1]\in A$ seçilirse

$$\lambda\phi_p(x_1)+y_1=\lambda\phi_p(x_0)+y_0, \tag{2.62}$$

olur ve yukarıdaki eşitsizliği değiştirirsek, şunu elde ederiz:

$$(x_1-x_0,J(x_1)\|x_1\|^{p-1}-J(x_0)\|x_0\|^{p-1})\leq 0. \tag{2.63}$$

Bunun sonucunda,

$$\big(x_1,J(x_0)\big)=\big(x_0,J(x_1)\big)=\|x_0\|^2=\|x_1\|^2; \tag{2.64}$$

elde edilir. Yani, $J(x_0)=J(x_1)$ ve $x_0=x_1$.

Bu nedenle,

$$[x_0,y_0]=[x_1,y_1].$$

olur diyebiliriz.

İspatın diğer koşulu da Teorem 2.2'de olduğu gibi ispatlanır.

Şimdi, Sonuç 2.1'de $A+B$ toplamında bir maksimallik kriteri oluşturmak için Teorem 2.1'i kullanacağız.

Sonuç 2.1

X yansımalı , $B:X\to X^*$ yarı sürekli, monoton, sınırlı bir operatör ve

$A\subset X\times X^*$maksimal monoton olsun. Öyleyse, $A+B$ ' de maksimal monoton olur.

İspat:

İspatımıza başlarken, Asplund's teoreminden kısaca bahsetmek faydalı olacaktır.

Asplund's Teoqrem: X, $\|.\|$ normu ile yansımalı bir Banach uzayı olsun. X üzerinde eşdeğer bir $\|.\|_0$ normu vardır ki X bu normda kesinlikle dışbükeydir ve X^* dual norm $\|.\|_0^*$ 'da kesinlikle dışbükeydir.

İspatımıza başlayacak olursak, Asplund's teoreminden X ve X^* kesinlikle dışbükey olacak şekilde X'e eşdeğer bir norm alabiliriz.

Bu işlemde, $A, B, A+B$'nin monotonluk özelliklerinin yanı sıra maksimalliğinin değişmediği açıktır.

Ayrıca genelliği kaybetmeksizin $0 \in D(A)$ olduğunu varsayabiliriz.

Aksi takdirde A'yı $u \to A(u+u_0)$ ile ve B'yi $u \to B(u+u_0)$ ile değiştiririz, burada $u_0 \in D(A)$'dır.

Sonrasında, keyfi bir y_0 değeri alalım, fakat X^* içinde sabitlenmiş olsun.

Şimdi Teorem 2.1'i uygulayalım. Burada B operatörü bu kez, $u \to Bu + J(u) - y_0$ şeklinde yazılır ve $x \in \overline{convD(A)}$ olduğu sonucuna varabiliriz. Öyle ki;

$$(u-x, J(x) + Bx - y_0 + v) \geq, \qquad \forall [u,v] \in A. \qquad \textbf{(2.65)}$$

$((u, Bu + J(u) - y_0) \geq (u, Bu) + \|u\|^2 - \|y_0\|\|u\| \geq \|u\|^2 - \|B0\|\|u\| - \|y_0\|\|u\|$ olduğundan burada 2.21 açıkça geçerlidir.)

A maksimal monoton olduğundan , buradan

$$y_0 \in Ax + Bx + J(x) \qquad \textbf{(2.66)}$$

elde edilir.

Özellikle, Sonuç 2.1 'e göre, $X'den\ X^*$'a kadar her monoton yarı sürekli ve sınırlı operatör maksimal monotondur. Şimdi, sınırlılık varsayımının gereksiz olduğunu kanıtlayalım.

2.9 Teorem 2.4

X yansımalı bir Banach uzayı ve $B: X \to X^*$ yarı sürekli monoton bir operatör olsun. Öyleyse B, $X \times X^{*\prime}$da maksimal monotondur.

İspat:

Kabul edelim ki B maksimal monoton olsun. O hâlde, $[x_0, y_0] \in X \times X^*$ vardır. Öyle ki $y_0 \neq Bx_0$ ve

$$(x_0 - u, y_0 - Bu) \geq 0, \quad 1 \quad \forall u \in X. \tag{2.67}$$

Herhangi bir $x \in X$ için,

$$u_\lambda = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1, \tag{2.68}$$

olup (2.67)'de $u = u_\lambda$ yazılırsa,

$$(x_0 - x, y_0 - Bu_\lambda) \geq 0, \qquad \forall \lambda \in [0,1], \quad u \in X, \tag{2.69}$$

bulunur. ($\lambda \to 1$ için)

$$(x_0 - x, y_0 - Bx_0) \geq 0, \qquad \forall x \in X. \tag{2.70}$$

olur. Dolayısıyla, $y_0 = Bx_0$ bulunur ki bu da hipotezle çelişir.

Sonuç 2.2

X yansımalı bir Banach uzayı ve A , $X \times X^*$'ın zorlayıcı maksimal monoton alt kümesidir. Öyleyse A örtendir, yani $R(A) = X^*$.

İspat:

$y_0 \in X^*$ keyfi ama sabit olsun. Genelliği kaybetmeden, varsayabiliriz ki X ve X^* kesinlikle dışbükeydir. Böylece Teorem 2.2 'ye göre her $\lambda > 0$ için

$$\lambda J(x_\lambda) + Ax_\lambda \ni y_0 \ , \qquad x_\lambda \in D(A), \tag{2.71}$$

denklemi benzersiz bir çözüme sahiptir. Şimdi (2.71) denklemini, $x_\lambda = x^0$ ile çarpalım. Burada x^0 zorlayıcılık koşulunda ortaya çıkan bir unsurdur.

$$\lambda \|x_\lambda\|^2 + (x_\lambda - x^0, Ax_\lambda) = (x_\lambda - x^0, y_0) + \lambda(x_0, Jx_\lambda). \tag{2.72}$$

(2.17)'dan, $\{x_\lambda\}$'nın X içinde $\lambda \to 0$ olarak sınırlı olduğu sonucuna varıyoruz. Ve bu yüzden (gerekirse bir alt dizi alarak) şunu varsayabiliriz, $\exists x_0 \in X$ öyle ki,

$w - \lim_{\lambda \downarrow 0} x_\lambda = x_0$ olur ve (2.71)'te $\lambda \to 0$ olmasına izin verirsek,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} Ax = y_0 \tag{2.73}$$

olur.

Çünkü, daha önce görüldüğü gibi, maksimal monoton operatörler zayıf kapalıdır. Buradan da $y_0 \in Ax_0$ olduğu sonucuna varabiliriz. Dolayısıyla iddia ettiğimiz gibi $R(A) = X^*$ olduğunu görürüz.

Sonuç 2.3

Bir monoton, yarı-sürekli ve zorlayıcı B operatörü, yansımalı bir Banach uzayı X'ten onun duali X^* 'a kadar genişler ve örtüktür.

2.10 İki Maksimal Monoton Operatörün Toplamı

Kısmi diferansiyel denklemlerde varlık teorisine olan etkileri nedeniyle büyük ilgi gören bir problem, iki maksimal monoton operatörün toplamının yine maksimal monoton olup olmadığı problemidir. Bu soruyu cevaplamadan önce, ilk olarak maksimal monoton operatörlerin Yosida yaklaşımı ile ilgili bazı gerçekleri belirleyelim.

X'in kesinlikle dışbükey, X^*' a sahip, yansımalı, tamamen dışbükey bir Banach uzayı olduğunu varsayalım ve A, $X \times X^*$ da maksimal monoton olsun.

Sonuç 2.1 ve 2.2 'ye göre $\forall\, x \in X$ için denklem

$$0 \in J(x_\lambda - x) + \lambda A x_\lambda \qquad \textbf{(2.74)}$$

olarak yazılır ve x_λ için bir çözüme sahiptir. Çünkü,

$$(x - u, Jx - Ju) \geq (\|x\| - \|u\|)^2, \qquad \forall x, u \in X. \qquad \textbf{(2.75)}$$

yazılır ve J^{-1} tek değerlidir (çünkü X kesinlikle dışbükeydir), x_λ' nın benzersiz olduğu kolayca görülebilir.

$$\left.\begin{aligned} J_\lambda x &= x_\lambda, \\ A_\lambda x &= \lambda^{-1} J(x - x_\lambda), \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.76)}$$

Herhangi bir $x \in X$ ve $\lambda > 0$ için tanımlamayı yukarıdaki şekilde yapabiliriz.

$A_\lambda : X \to X^*$ operatörü, A'nın Yosida yaklaşımı olarak adlandırılır ve A'nın

yaklaşımında önemli bir rol oynar.

Şimdi Önerme 2.2 ile A_λ ve J_λ operatörlerinin birkaç temel özelliğini toplayacağız.

2.11 Önerme 2.2 X ve X^* kesinlikle dışbükey ve yansımalı olsun.

i. A_λ, tek değerli , monoton , sınırlı ve $X \to X^*$ yarı süreklidir.

ii. $\|A_\lambda x\| \leq |Ax| = inf\{\|y\|; y \in Ax\} \quad \forall x \in D(A), \ \lambda > 0.$

iii. $J_\lambda : X \to X$ alt kümelerle sınırlıdır ve

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = x, \qquad \forall x \in \overline{convD(A)}. \tag{2.77}$$

iv. $\lambda_n \to 0, \ x_n \to x, \ A_{\lambda_n} x_n \rightharpoonup y$ ve

$$\lim_{n,m \to \infty} \sup(x_n - x_m, \ A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m) \leq 0, \tag{2.78}$$

$[x, y] \in A$ ve

$$\lim_{m,n \to \infty} (x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m) = 0. \tag{2.79}$$

v. $\lambda \to 0, \ A_\lambda x \rightharpoonup A^0 x, \ \forall x \in D(A),$ için
$A^0 x, \ Ax$ 'deki minimum normun öğesidir, yani $\|A^0 x\| = |Ax|$.
Eğer X^* tekdüze dışbükey ise, $A_\lambda x \to A^0 x, \ \forall x \in D(A)$.
İspatın ana bileşeni, aşağıdaki lemmadır.

2.12 Lemma 2.3

X yansımalı (dönüşlü) bir Banach Uzayı ve A, $X \times X^*$ 'ın maksimal monoton alt kümesi olsun.

$[u_n, v_n] \in A$ olsun öyle ki , $u_n \rightharpoonup u, \ v_n \rightharpoonup v$ olmak üzere

ya

$$\lim_{n,m \to \infty} \sup(u_n - u_m, v_n - v_m) \leq 0 \tag{2.80}$$

ya da

$$\lim_{n \to \infty} \sup(u_n - u, v_n - v) \leq 0. \tag{2.80'}$$

yazılır.

Öyleyse, $[u, v] \in A$ ve $(u_n, v_n) \to (u, v)$ olur. $(n \to \infty)$.

İspat:

Öncelikle, (2.30)'daki koşulumuzun gerçekleştiğini varsayalım. Çünkü A monoton ve aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$\lim_{n,m\to\infty}(u_n - u_m, v_n - v_m) = 0. \quad \textbf{(2.81)}$$

şimdi $n_k \to \infty$ olsun. Öyle ki,$(u_{n_k}, v_{n_k}) \to \mu$.

O hâlde, açıkça $\mu \leq (u, v)$ yazabiliriz.

Bundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \sup(u_n, v_n) \leq (u, v), \quad \textbf{(2.82)}$$

olur ve A' nın monotonluğundan ,

$$(u_n - x, v_n - y) \geq 0, \quad \forall [x, y] \in A, \quad \textbf{(2.83)}$$

yazılabilir.

Bu nedenle,

$$(u - x, v - y) \geq 0, \ \ \forall [x, y] \in A, \quad \textbf{(2.84)}$$

yazılır. Bu da,

$[u, v] \in A$ anlamına gelir, çünkü A maksimal monotondur.

Önerme 2.2'nin İspatı:

i.

$$(x - y, A_\lambda x - A_\lambda y) =$$

$$(J_\lambda x - J_\lambda y, A_\lambda x - A_\lambda y) + ((x - J_\lambda x) - (y - J_\lambda y), A_\lambda x - A_\lambda y), \quad \textbf{(2.85)}$$

denklemi sağlanır.

Burada A ve J monotondur. $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ olduğundan şu eşitsizliği yazabiliriz.

$$(x - y, A_\lambda x - A_\lambda y) \geq 0. \quad \textbf{(2.86)}$$

$[u, v] \in A$ keyfi ama sabit olsun. (2.74)'daki denklemimizi $J_\lambda x - u$ ile çarparsak ve A'nın monotonluğunu kullanırsak,

$$\big(J_\lambda x - u, J(J_\lambda x - x)\big) \leq \lambda(u - J_\lambda x, v), \quad \textbf{(2.87)}$$

elde ederiz.

Burada

$$\|J_\lambda x - x\|^2 \leq \|x - u\|\|J_\lambda x - x\| + \lambda\|x - u\|\|v\| + \lambda\|v\|\|J_\lambda x - x\| \quad \textbf{(2.88)}$$

olup, J_λ *ve* A_λ 'nın sınırlı alt kümelere bağlı olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi,

$x_n \to x_0$ olsun.

$u_n = J_\lambda x_n$ ve $v_n = A_\lambda x_n$ şeklinde ayarlayalım.

$$J(u_n - x_n) + \lambda v_n = 0, \qquad \textbf{(2.89)}$$

denklemine göre

$$\big((u_n - x_n) - (u_m - x_m), J(u_n - x_n) - J(u_m - x_m)\big) + \lambda(u_n - u_m, v_n - v_m) + \lambda(x_m - x_n, v_n - v_m) = 0. \qquad \textbf{(2.90)}$$

yazılabilir.

Daha önce görüldüğü gibi J_λ sınırlı olduğundan,

$$\lim_{n,m\to\infty}(u_n - u_m\,, v_n - v_m) \le 0 \qquad \textbf{(2.91)}$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty}((u_n - x_n) - (u_m - x_m), J(u_n - x_n) - J(u_m - x_m)) = 0 \qquad \textbf{(2.92)}$$

olur.

Şimdi, $n_k \to \infty$ olsun. Öyle ki,

$$u_{n_k} \rightharpoonup u, \qquad v_{n_k} \rightharpoonup v, \qquad J\big(u_{n_k} - x_{n_k}\big) \rightharpoonup w.$$

Lemma 2.3'ten $[u, v] \in A$, $[u - x_0, w] \in J$' dir ve bundan dolayı,

$$J(u - x_0) + \lambda v = 0 \quad \text{'dır.} \qquad \textbf{(2.93)}$$

$u = J_\lambda x_0$, $v = A_\lambda x_0$ olduğunu kanıtlamış olduk ve sınırın benzersizliğinden $J_\lambda x_n \rightharpoonup J_\lambda x_0$ ve $A_\lambda x_n \rightharpoonup A_\lambda x_0$ olduğunu çıkarabiliriz.

ii. $[x, x^*] \in A$ olsun. A'nın monotonluğuna göre,

$$0 \le (x - J_\lambda x, x^* - A_\lambda x) \le \|x^*\|\|x - x_\lambda\| - \lambda^{-1}\|x - x_\lambda\|^2 \qquad \textbf{(2.94)}$$

yazabiliriz ve buradan da,

$$\lambda\|A_\lambda x\| = \|x - x_\lambda\| \le \lambda\|x^*\|, \qquad \forall x^* \in Ax. \qquad \textbf{(2.95)}$$

olduğunu görürüz.

iii. $x \in \overline{convD(A)}$ ve $[u, u^*] \in A$ olsun.

$$(J_\lambda x - u, A_\lambda x - u^*) \geq 0, \tag{2.96}$$

ve bundan dolayı

$$\|J_\lambda x - x\|^2 \leq \lambda(u - J_\lambda x, u^*) + \big(u - x, J(J_\lambda x - x)\big) \tag{2.97}$$

yazılır. $\lambda_n \to 0$ olsun. Öyle ki , $X^{*\prime}$da $J\big(J_{\lambda_n} x - x\big) \rightharpoonup y$ yazılır ve,

$$\overline{\lim_{\lambda_n \to 0}} \big\|J_{\lambda_n} x - x\big\|^2 \leq (u - x, y) \tag{2.98}$$

elde edilir.

Çünkü $u, D(A)'$da keyfidir ve önce

ki eşitsizlik tüm $u \in \overline{convD(A)}$ dönüşümünü kapsar. Özellikle $u = x$ alabilir ve bu tür tüm diziler $\{\lambda_n\}$ için $J_{\lambda_n} x \to x$ sonucunu çıkarabiliriz.

iv.

$$\begin{aligned}
&\big(x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m\big) A_{\lambda_m} \\
&= \big(J_{\lambda_n} x_n - J_{\lambda_m} x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m\big) \\
&+ \Big(\big(x_n - J_{\lambda_n} x_n\big) - \big(x_m - J_{\lambda_m} x_m\big), A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m\Big) \\
&\geq \Big(\big(x_n - J_{\lambda_n} x_n\big) - \big(x_m - J_{\lambda_m} x_m\big), A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m\Big) \\
&= \Big(\big(x_n - J_{\lambda_n} x_n\big) - \big(x_m - J_{\lambda_m} x_m\big), {\lambda_n}^{-1} J\big(x_n - J_{\lambda_n} x_n\big) \\
&- {\lambda_m}^{-1} J\big(x_m - J_{\lambda_m} x_m\big)\Big).
\end{aligned}$$

(Burada A ve $A_\lambda x \in A J_\lambda x$ 'in monotonluğunu kullandık.)

$A_{\lambda_n} x_n = -{\lambda_n}^{-1}\big(J_{\lambda_n} x_n - x_n\big)$ ve x_n sırasıyla X^* ve X 'in sınırlı alt kümelerinde kalır,

Buradan aşağıdaki ifadeleri çıkarırız,

$$\lim_{m,n\to\infty}(x_n - x_m\,, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m) = 0, \tag{2.99}$$

Ve

$$\lim_{m,n\to\infty}(J_{\lambda_n} x_n - J_{\lambda_m} x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m) = 0. \tag{2.100}$$

Sonrasında, Lemma 2.3' e göre $[x, y] \in A$ olduğu sonucuna varabiliriz, çünkü

$$\lim_{n\to\infty}\left(J_{\lambda_n}x_n - x_n\right) = -\lim_{n\to\infty}\lambda_n J^{-1}\left(A_{\lambda_n}x_n\right) = 0.\text{'dır.} \qquad \textbf{(2.101)}$$

v.

Ax, X^*' ın kapalı dışbükey bir alt kümesidir, X^* yansımalı ve kesinlikle dışbükeydir. Ax'e 0'ın A^0x izdüşümü iyi tanımlanmış ve benzersizdir.

Şimdi, $x \in D(A)$ ve $\lambda_n \to 0$ olsun. Öyle ki $X^{*\prime}$da , $A_{\lambda_n}x \rightharpoonup y$.

(iv) ispatında görüldüğü gibi, $y \in Ax$, ve $\left\|A_{\lambda_n}x\right\| \leq \|A^0x\|$ ' dir.

Buradan $y = A^0x$ olduğunu anlıyoruz. Dolayısıyla, $\lambda \longrightarrow 0$ için $A_\lambda x \rightharpoonup A^0x$ olur. Eğer X^* düzgün dışbükey ise, o zaman aşağıdaki lemmaya göre $X^{*\prime}$da $A_\lambda x \to Ax$ olur. ($\lambda \to 0$).

(Alt Lemma)

X , düzgün dışbükey bir Banach uzayı olsun. Eğer $x_n \rightharpoonup x$ ve lim $sup_{n\to\infty}\|x_n\| \leq \|x\|$ ise $x_n \to x$ olur $(n \to \infty)$.

İspat:

$x \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Hipotezimize göre,

$\forall x \in X$ için $(x^*, x_n) \to (x^*, x)$ olur ve bu sebeple X'deki normun zayıf yarı alt sürekliliğinden, aşağıdaki denklem yazılır.

$$\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} inf\|x_n\| \leq \|x\|. \qquad \textbf{(2.102)}$$

Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\| \qquad \textbf{(2.103)}$$

olur.

Şimdi,

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \qquad y = \frac{x}{\|x\|} \qquad \textbf{(2.104)}$$

yazabiliriz.

Açıkça, $y_n \rightharpoonup y$ olduğunu görürüz. $(n \longrightarrow \infty)$. Sonrasında $y_n \nrightarrow y$ olduğunu varsayalım ve burada bir çelişki olup olmadığını tartışalım. Aslında bu durumda bir alt dizimiz var;

y_{n_k}, $\|y_{n_k} - y\| \geq \varepsilon$, ve $\delta > 0$ öyle ki, $\|y_{n_k} + y\| \leq 2(1-\delta)$. $n_k \to \infty$ olmak üzere, bir kez daha $y \to \|y\|$ normunun zayıf alt yarı sürekli olduğu gerçeğini kullanarak, $\|y\| \leq 1 - \delta$ sonucunu çıkarırız. Buradan ulaştığımız çelişki de ilk varsayımın yanlış olduğunu gösterir.

Genel olarak, maksimal monoton bir operatör $A: X \to X^*$ zayıf kapalı olmaz.

Bu, $x_n \rightharpoonup u$ ve $v_n \rightharpoonup v$' den gelir, burada $[u_n, v_n] \in A$' dır ve Lemma 2.3 ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.4

X yansımalı bir Banach uzayı ve $A \subset X \times X^*$ maksimal monoton bir alt küme olsun.

$[u_n, v_n] \in A$ öyle ki $u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \sup(u_n, v_n) \leq (u, v), \qquad [u, v] \in A. \qquad \textbf{(2.105)}$$

Bu basit özellik, özellikle, maksimal monoton operatörleri içeren doğrusal olmayan denklemlere yaklaşmada oldukça faydalıdır.

Önerme 2.3 $X = H$ kendi duali ile tanımlanan bir Hilbert uzayı ise

- **i.** $J_\lambda = (I + A\lambda)^{-1}$ (H 'da genişlemeyen)
- **ii.** $\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leq \lambda^{-1}\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D(A), \ \lambda > 0,$
- **iii.** $\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda x = A^0 x, \quad \forall x \in D(A).$

İspat:

- **i.** $x_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} x$

  $y_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} y$ $(I, H' daki\ birim\ operatördür.)$

  $$x_\lambda - y_\lambda + \lambda(Ax_\lambda - Ay_\lambda) \ni x - y. \qquad \textbf{(2.106)}$$

$x_\lambda - y_\lambda$ ile çarparak, A'nın monotonluğunu kullanalım.

$$\|x_\lambda - y_\lambda\| \leq \|x - y\|, \qquad \forall \lambda > 0. \qquad \textbf{(2.107)}$$

ii ve iii ispatı açıktır.

Sonuç 2.5

X yansımalı bir Banach uzayı ve A, $X \times X^*$ 'da maksimal monoton olsun. Öyleyse $\overline{D(A)}$ ve $\overline{R(A)}$ dışbükeydir.

İspat :

Genelliği bozmadan X ve X^* dışbükey olsun. Önerme 2.1'den görüyoruz ki, $\forall x \in \overline{convD(A)}$ için $J_\lambda x \to x$ olur. Çünkü, $\forall \lambda > 0$ ve $x \in X$ için $J_\lambda x \in D(A)$. Buradan açıkça şu sonuca varıyoruz ki, $\overline{convD(A)} = \overline{D(A)}$. Çünkü, $R(A) = D(A^{-1})$ ve A^{-1}, $X^* \times X$ ' de maksimal monotondur, bunun sonucunda $\overline{R(A)}$ dışbükeydir. Şimdi, boş olmayan iç etki alanına sahip monoton operatörlerin önemli bir özelliğini oluşturacağız.

2.13 Teorem 2.5 A, $X \times X^*$ ' da monoton alt küme olsun. O hâlde, $A, D(A)$'nın herhangi bir iç noktasında yerel olarak sınırlanır.

2.14 Lemma 2.4

$\{x_n\} \subset X$ ve $\{y_n\} \subset X^*$ olsun. Öyle ki, $x_n \to 0$ ve $y_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

$B(0,r)$ kapalı bir yuvar olsun $\{x;\ \|x\| \le r\}$. Öyleyse $x^0 \in B(0,r)$ ve $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$,

$\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ öyle ki

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x^0, y_{n_k}) = -\infty. \qquad \textbf{(2.108)}$$

İspat:

Öncelikle lemmanın yanlış olduğunu varsayalım.

O hâlde $r > 0$ ve

$\forall u \in B(0,r)$ için $C_u > -\infty$ vardır öyle ki ,

$$(x_n - u, y_n) \ge C_u, \qquad \forall n \in N. \qquad \textbf{(2.109)}$$

Burada

$$B(0,r) = \cup_k \{u \in B(0,r);\ (x_n - u, y_n) \ge -k,\ \forall n\} \qquad \textbf{(2.110)}$$

yazabiliriz. Sonrasında, Hausdorff-Baire teoreminden k_0 olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Öyle ki ,

$$int\{u \in B(0,r); (x_n - u, y_n) > -k_0, \ \ \forall n\} \neq \emptyset. \qquad \textbf{(2.111)}$$

Başka bir deyişle, $\varepsilon > 0, k_0 \in \mathbb{N}$ ve $u_0 \in B(0,r)$ vardır, öyle ki

$$\{u; \|u - u_0\| \leq \varepsilon \} \subset \{u \in B(0,r); (x_n - u, y_n) > -k_0, \quad \forall n\}. \qquad \textbf{(2.112)}$$

Burada,

$$(x_n - u, y_n) > -k_0 \; ve \; (x_n - u_0, y_n) \geq C_{u_0} \qquad \textbf{(2.113)}$$

yazabiliriz.

Özetle anlıyoruz ki,

$$(2x_n + u_0 - u, y_n) \geq -k_0 + C, \quad \forall u \in B(u_0, \varepsilon), \qquad \textbf{(2.114)}$$

$$C = C_{u_0}.$$

olur. Şimdi,

$\|w\| = \frac{\varepsilon}{2}$ iken , $u = u_0 + 2x_n + w$ alalım. Yeterince büyük bir n için;

$$(w, y_n) \leq -C + y_0, \qquad \forall w, \|w\| = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \textbf{(2.115)}$$

yazılır, ki bu da açıkça

$n \to \infty$ iken $\|y_n\| \to \infty$ ile çelişir.

Teorem 2.5'in İspatı:

$x_0 \in intD(A)$ keyfi olsun. Genelliği bozmadan, $x_0 = 0$ olduğunu varsayabiliriz. Bu, A'nın etki alanını kaydırarak elde edilebilir. A'nın yerel olarak 0'da sınırlı olmadığını varsayalım. $\{x_n\} \subset X, \ \{y_n\} \subset X^*$ dizileri vardır, öyle ki

$[x_n, y_n] \in A, \|x_n\| \to 0 \; ve \; \|y_n\| \to \infty$. Lemma 2.4 ' e göre her bir $B(0,r)$ yuvarı için $x^0 \in B(0,r)$ ve $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \; ile \; \{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ yazılır öyle ki,

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x^0, y_{n_k}) = -\infty. \qquad \textbf{(2.116)}$$

$B(0,r) \subset D(A)$ olacak şekilde r yeterince küçük olsun. Öyleyse, $x^0 \in D(A)$ ve A'nın monotonluğuna göre şunu yazabiliriz:

$$(x_{n_k} - x^0, y) \to -\infty \qquad (k \to \infty), \ \ (\exists \, y \in Ax^0 \ \text{için.}) \qquad \textbf{(2.117)}$$

Burada ulaştığımız çelişki kanıtımızı tamamlıyor. Özellikle Teorem 2.5 'te X üzerinde her yerde tanımlanan her monoton operatör A'nın yerel olarak sınırlandığını ima eder.

2.15 Teorem 2.6

X yansımalı bir Banach uzayı, A ve B, $X \times X^{*\prime}$ın maksimal monoton alt kümeleri olsun. Öyle ki ,

$$\big(intD(A)\big) \cap D(B) \neq \emptyset. \qquad \textbf{(2.118)}$$

Öyleyse $A + B, X \times X^{*\prime}$da maksimal monotondur.

İspat :

Önceki durumlarda olduğu gibi, genelliği bozmadan X ve $X^{*\prime}$ın kesinlikle dışbükey olduğunu kabul edelim. Dahası A ve B alanlarını ve aralıklarını değiştirerek, eğer gerekliyse $0 \in (int\big(D(A)\big) \cap D(B),\ 0 \in A0,\ 0 \in B0$ olduğunu kabul edelim.

$R(J + A + B) = X^*$ olduğunu kanıtlayalım.

Bu amaçla, $X^{*\prime}$da keyfi bir y noktasını düşünelim. B_λ operatörü yarı sürekli, sınırlı ve monoton olduğundan, $J: X \to X^*$ operatörüyle ilgili, sonuç 2.1 ve sonuç 2.2' ye göre,

$$Jx_\lambda + Ax_\lambda + B_\lambda x_\lambda \ni y, \quad \forall \lambda > 0 \qquad \textbf{(2.119)}$$

yazılır ve denklemin $x_\lambda \in D(A)'$da bir çözümü vardır.

J ve J^{-1} tek değerlidir. X, X^* kesinlikle dışbükeydir. Dolayısıyla A ve B' nin monotonluğunu içeren standart argümanlardan $x_\lambda{}'$ nın tek olduğu sonucu çıkar.

(2.119)' daki denklemi x_λ ile çarparsak,

$$(x_\lambda, Ax_\lambda) \geq 0, \quad (x_\lambda, B_\lambda x_\lambda) \geq 0, \qquad \textbf{(2.120)}$$

elde ederiz, buradan da

$$\|x_\lambda\| \leq \|y\|, \quad \forall \lambda > 0 \qquad \textbf{(2.121)}$$

yazabiliriz.

Üstelik, $0 \in intD(A)$ olduğu için, Teorem 2.5' e göre, $\rho > 0$ ve $M > 0$ sabitlerinin var olduğunu görürüz. Öyle ki,

$$\|x^*\| \leq M, \quad \forall x^* \in Ax, \qquad \|x\| \leq \rho. \tag{2.122}$$

(2.119)' daki denklemi $x_\lambda - \rho w$ ile çarparak, A'nın monotonluğunu kullanırsak,

$$(x_\lambda - \rho w, Jx_\lambda + B_\lambda x_\lambda - y) + \big(x_\lambda - \rho w, A(\rho w)\big) \leq 0, \qquad \forall \|w\| = 1. \tag{2.123}$$

ve (2.122)'den

$$\|x_\lambda\|^2 - \rho(w, B_\lambda x_\lambda) \leq M(\rho + \|x_\lambda\|) + \|x_\lambda\|(\rho + \|y\|). \tag{2.124}$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$\|x_\lambda\|^2 + \rho\|B_\lambda x_\lambda\| \leq \|x_\lambda\|\,(\rho + M + \|y\|) + M\rho, \qquad \forall \lambda > 0. \tag{2.125}$$

olur.

Bu nedenle, $\{B_\lambda x_\lambda\}$ ve $\{y_\lambda = y - Jx_\lambda - B_\lambda x_\lambda\}$' nın X^* içinde $\lambda \to 0$ olarak sınırlandığı sonucuna varabiliriz. X yansımalı olduğu sürece, bir alt dizide şunu varsayabiliriz:

$$x_\lambda \rightharpoonup x_0, \qquad B_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y_1, \qquad y_\lambda \in Ax_\lambda \rightharpoonup y_2, \qquad Jx_\lambda \rightharpoonup y_0.$$

$A + J$ monoton olduğuna göre,

$$\big(x_\lambda - x_\mu, B_\lambda x_\lambda - B_\mu x_\mu\big) \leq 0, \qquad \forall \lambda, \mu > 0. \tag{2.126}$$

yazılır.

Ardından, Önerme 2.2 (iv) ile,

$$\lim_{\lambda,\mu \to 0}(x_\lambda - x_\mu, B_\lambda x_\lambda - B_\mu x_\mu) = 0 \tag{2.127}$$

yazılır ve $\big[x_0, y_1\big] \in B$ olur. (2.119)'daki denklemden,

$$\lim_{\lambda,\mu \to 0}(x_\lambda - x_\mu, Jx_\lambda + y_\lambda - Jx_\lambda - y_\mu) = 0, \qquad y_\lambda \in Ax_\lambda,\ y_\mu \in Ax_\mu, \tag{2.128}$$

yazabiliriz. Çünkü $A + J$ maksimal monotondur. Lemma 2.3' bakılırsa

$[x_0, y_0 + y_2] \in A + J$ olduğu görülür. Böylece (2.119)' da λ'nın sıfıra gitmesine izin vermiş oluruz, buradan görüyoruz ki

$$y \in J(x_0) + Ax_0 + Bx_0, \tag{2.129}$$

olur ve böylece kanıt tamamlanır. Özellikle Teorem 2.4 ve Teorem 2.6 aşağıdaki sonucu ortaya çıkarır diyebiliriz.

Sonuç 2.6

X yansımalı bir Banach uzayı, $A \subset X \times X^*$ maksimal monoton operatör ve $B: X \times X^*$ yarı sürekli monoton operatör olsun. Öyleyse $A + B$ maksimal monotondur. Daha genel olarak, teorem 2.6 'dan, eğer A ve B , $X \times X^{*\prime}$da iki maksimal monoton küme ve $D(B) = X$ ise $A + B$ maksimal monoton olur.

Bu bölümü, Hilbert uzaylarında aynı türden bir teoremle sonlandırıyoruz.

2.16 Teorem 2.7

$X = H$ kendi duali ile tanımlanmış bir Hilbert uzayı ve A ile B, $H \times H$ içinde maksimal monoton kümeler olsun öyle ki, $D(A) \cap D(B) \neq \emptyset$ ve

$$(v, A_\lambda u) \geq -C(\|u\|^2 + \lambda\|A_\lambda u\|^2 + \|A_\lambda u\| + 1), \qquad \forall [u, v] \in B. \quad \textbf{(2.130)}$$

Öyleyse $A + B$ maksimal monotondur.

İspat:

Öncelikle $A_\lambda = \lambda^{-1}(I - (I + \lambda A)^{-1})$ ile A'nın Yosida yaklaşımını göstereceğiz.

Herhangi bir $y \in H$ ve $\lambda > 0$ için

$$x_\lambda + Bx_\lambda + A_\lambda x_\lambda \ni y, \qquad \textbf{(2.131)}$$

Sonuç 2.5 ve 2.6' ya göre $x_\lambda \in D(B)$ sonucu vardır.

Şimdi, $x_0 \in D(A) \cap D(B)$ olsun. (2.131)' in skaler çarpımını $x_\lambda - x_0$ ile alıp B ve A_λ' nın monotonluğunu kullanalım,

$$(x_\lambda, x_\lambda - x_0) + (y_0, x_\lambda - x_0) + (A_\lambda x_0, x_\lambda - x_0) \leq (y, x_\lambda - x_0). \qquad \textbf{(2.132)}$$

Burada Önerme 2.2' de görüldüğü gibi,

$$\|A_\lambda x_0\| \leq |Ax_0|, \qquad \forall \lambda > 0, \qquad \textbf{(2.133)}$$

yazılır ve buradan,

$$\|x_\lambda\| \leq M, \qquad \forall \lambda > 0. \qquad \textbf{(2.134)}$$

elde edilir. Sonrasında, denklem (2.131)' i $A_\lambda x_\lambda$ ile çarparak (2.130)' daki eşitsizliği kullanıyoruz.

$$\|A_\lambda x_\lambda\| \leq C, \qquad \forall \lambda > 0. \tag{2.135}$$

Şimdi, $\lambda_n \to 0$ dizisi için,

$$x_{\lambda_n} \rightharpoonup x, \qquad A_{\lambda_n} x_{\lambda_n} \rightharpoonup y_1, \qquad y_{\lambda_n} \rightharpoonup y_2,$$

yazılır. Burada,

$$y_\lambda = y - x_\lambda - A_\lambda x_\lambda \in B x_\lambda \tag{2.136}$$

olur.

Öyleyse, Teorem 2.6 'nın ispatında olduğu gibi, Önerme 2.2'den $[x, y_1] \in A$, $[x, y_2] \in B$ gelir ve bu da iddia edildiği gibi $y \in x + Ax + Bx$ olduğu anlamına gelir.

2.17 Önerme 2.3

X Öklid uzayı ,$(\mathbb{R}^N)$ A: $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ monoton, her yerde tanımlı ve birden çok değerli bir operatör olsun. Öyle ki $\forall x \in \mathbb{R}^N$ için Ax kümesi dışbükeydir. Dolayısıyla A, $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ' de maksimal monotondur.

İspat :

Eğer grafiği $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$'de kapalı ise A'nın üst yarı sürekli olduğunu söylemiştik. $\forall f \in \mathbb{R}^N$ için $\lambda x + Ax \ni f$ denkleminin çözümü olacak şekilde $\lambda > 0$ olduğu kanıtlanmalıdır.

Bu denklemi tekrar şu şekilde yazacak olursak;

$$x \in \frac{1}{\lambda} f - \frac{1}{\lambda} Ax \tag{2.137}$$

olur. Sonrasında, Kakutani sabit nokta teoremini $K_R = \{x \in \mathbb{R}^N; \|x\| \leq R\}$ kapalı yuvarı üzerinde uygularsak

$$x \xrightarrow{T} (1/\lambda) f - (1/\lambda) Ax, \tag{2.138}$$

olur.

Teorem 2.5' e göre, $\forall R > 0$ için $A(K_R)$' nin sınırlandığını biliyoruz. Ardından yeterince büyük bir λ seçildiğinde, $T(K_R) \subset K_R$ olur ve dolayısıyla iddia edildiği gibi T'nin K_R' de sabit bir noktası olduğu açıktır.

Şimdi monoton ölçülebilir bir fonksiyon düşünelim, $\Psi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

Yani,

$$(\Psi(x) - \Psi(y), x - y)_N \geq 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N. \qquad \textbf{(2.139)}$$

Burada, $(.,.)_N$ Öklid skaler çarpımıdır. Aşağıdaki çok değerli grafiği Ψ ile ilişkilendiriyoruz. (Flipov Eşlemesi)

$$\widetilde{\Psi}(x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{m(E)=0} \overline{conv\Psi(B_\delta(x) \setminus E)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \ , \qquad \textbf{(2.140)}$$

Burada, $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^N;\ \|y - x\|_N \leq \delta\}$ ve $m(E)$, $E \subset \mathbb{R}^N$ alt kümesinin Lebesque ölçüsüdür. $N = 1$ olduğu özel durumda, Filipov eşlemesi olan $\widetilde{\Psi}$, süreksizlik noktalarında Ψ'nin sıçramalarının doldurulması ile elde edilir yani,

$$\widetilde{\Psi}(x) = [\,\Psi(x - 0), \Psi(x + 0)], \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(2.141)}$$

yazılır.

Önerme 2.4

$\widetilde{\Psi}$ operatörü $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ' de maksimal monotondur.

İspat :

$\widetilde{\Psi}'$nin monotonluğu Ψ'ninkinden hemen sonra gelir. Ayrıca $\widetilde{\Psi}'$nin üst yarı sürekli olduğu ve dışbükey değerlere sahip olduğu da kolayca görülmektedir. Önerme 2.4' te de gördüğümüz üzere, sonuç açık bir şekilde ortaya çıkar.

2.18 Karmaşık Banach Uzaylarında Monoton Operatörler

$\tilde{X}$ karmaşık bir Banach uzayı ve $\tilde{X}^*$ onun duali olsun.Bir monoton alt küme olan

$A \subset \tilde{X} \times \tilde{X}^*$ aşağıdaki durumda monotondur.

$$Re(x - y, x^* - y^*) \geq 0 \qquad \forall [x, x^*], [y, y^*] \in A \qquad \textbf{(2.142)}$$

$\tilde{X}'$i , $x + ix$ olarak temsil edersek (burada X reel bir Banach uzayı) ve

$A_1, A_2 \subset X \times X^*$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A_1(x,\tilde{x}) + iA_2(x,\tilde{x}) = A(x+i\tilde{x}), \qquad \forall x,\tilde{x} \in X, \qquad \textbf{(2.143)}$$

Sonrasında, monotonluk durumu azalır ve

$$\big(x-y, A_1(x,\tilde{x}) - A_1(y,\tilde{y})\big) + \big(\tilde{x}-\tilde{y}, A_2(x,\tilde{x}) - A_2(y,\tilde{y})\big) \geq 0 \qquad \textbf{(2.144)}$$

yazılır.

$\mathcal{A}: X \times X \to X^* \times X^*$ operatörü $\mathcal{A}(x,\tilde{x}) = \{A_1(x,\tilde{x}), A_2(x,\tilde{x})\}$; şeklinde tanımlanır.

Yani, $A_1 = ReA, A_2 = \mathrm{Im}A$.

Öyleyse A, $\tilde{X} \times \tilde{X}^*$ ' da monotondur ancak ve ancak $\mathcal{A}$, $X \times X \to X^* \times X^{*}$' da monoton ise. Benzer şekilde, A maksimal monotondur ancak ve ancak $\mathcal{A}$ maksimal monoton ise.

Bu şekilde, reel Banach uzaylarındaki maksimal monoton operatörlerin tüm teorisi gerekli değişiklikler yapılarak karmaşık Banach uzaylarında maksimal monoton operatörlere kadar genişler.

3

MAKSİMAL MONOTON ALT POTANSİYEL OPERATÖRLER

Alt yarı sürekli dışbükey bir fonksiyonun alt diferansiyeli, doğrusal olmayan maksimal monoton operatörler teorisi ile dışbükey analiz arasındaki köprüyü kapatan maksimal monoton operatörün önemli bir örneğidir. Böyle bir operatöre alt potansiyel maksimal monoton operatör denir.

3.1 Teorem 3.1

X reel bir Banach uzayı ve $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}}$ alt yarı sürekli, dışbükey bir fonksiyon olsun. Öyleyse $\partial\varphi, X \times X^*$ da maksimal monoton alt kümedir.

İspat:

$\partial\varphi$' nin $X \times X^*$' de monoton olduğunu kolayca görebiliriz. $\partial\varphi$'nin maksimal monoton olduğunu gösterebilmek için, öncelikle X' in yansımalı olduğunu varsayalım. Devamında $y \in X^*$ olarak düzenleyerek denklemi tekrar dikkate alırız.

$$Jx + \partial\varphi(x) \ni y. \qquad \textbf{(3.1)}$$

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ dışbükey bir fonksiyon olsun, alt yarı sürekli fonksiyonu şu şekilde tanımlayalım.

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \varphi(x) - (x, y). \qquad \textbf{(3.2)}$$

Burada ispatın devamı için bazı önermelerden bahsedeceğiz,

3.2 Alt Önerme 3.1

$\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}}$ alt yarı sürekli ve dışbükey bir fonksiyon olsun. Öyleyse φ, bir afin fonksiyonu ile sınırlandırılır yani, ${x_0}^* \in X^*$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ ' dir. Öyle ki ;

$$\varphi(x) \geq ({x_0}^*, x) + \beta, \qquad \forall x \in X. \qquad \textbf{(3.3)}$$

Yukarıdaki önermeye göre,

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \qquad \textbf{(3.4)}$$

yazılır.

3.3 Alt Önerme 3.2

$\varphi: X \to (-\infty, +\infty]$ alt yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Öyle ki, her küme $\{x \in X\ ;\ \varphi(x) \le \lambda\}$ zayıf kompakttır. φ, X üzerindeki infumum değerine ulaşır. Özellikle, X yansımalı ve φ, X üzerinde alt yarı sürekli dışbükey bir fonksiyonsa

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = \infty, \qquad \textbf{(3.5)}$$

yazılır ve burada $x_0 \in X$ varlığından bahsedilir. Öyle ki ,

$$\varphi(x_0) = \inf\{\varphi(x); x \in X\} \qquad \textbf{(3.6)}$$

olur.

Önerme 3.1'den dolayı, $x_0 \in X$ vardır ve $f(x_0) = \inf\{f(x); x \in X\}$ yazılır.

Bu da şunu verir,

$$\tfrac{1}{2}\|x_0\|^2 + \varphi(x_0) - (x_0, y) \le \tfrac{1}{2}\|x\|^2 + \varphi(x) - (x, y), \quad \forall x \in X; \qquad \textbf{(3.7)}$$

yani,

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) \le (x_0 - x, y) + \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|x_0\|^2)$$

$$\le (x_0 - x, y) + (x - x_0, Jx), \quad \forall x \in X. \qquad \textbf{(3.8)}$$

olur.

u, X'in keyfi bir elemanı olmak üzere, ikinci eşitsizlikte

$x = tx_0 + (1-t)u, \quad 0 < t < 1,$ yazılırsa

$$\varphi(x_0) - \varphi(u) \le (x_0 - u\ , y) + (u - x_0, w_t), \qquad \textbf{(3.9)}$$

elde edilir. Burada $w_t \in J(tx_0 + (1-t)u)$ olur.

$t \to 1$ için $w_t \rightharpoonup w \in J(x_0)$ yazılır, çünkü daha önce görüldüğü gibi J , $X \times X^*$' da güçlü-zayıf kapalıdır.

Bundan dolayı,

$$\varphi(x_0) - \varphi(u) \le (x_0 - u, y - w), \quad \forall u \in X, \qquad \textbf{(3.10)}$$

yazarız ve bu eşitsizlikten $y - w \in \partial\varphi(x_0)$ olduğu görülür.

Yani x_0 (3.1)'deki denklemin çözümüdür. Böylece $R(J + \partial\varphi) = X^*$ olduğunu kanıtlamış olduk.

Özellikle, bu sonuç bizi

" Eğer $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}}$

alt yarı sürekli dışbükey bir fonksiyon ise $D(\partial\varphi)$, $D(\varphi)'$nin yoğun bir alt kümesidir. "

önermesinin basit bir ispatına götürür.

İspat:

x, $D(\varphi)'$ nin herhangi bir elemanı ve denklemin bir çözümü $x_\lambda = J_\lambda x$ olsun. (2.74'ten) aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$J(x_\lambda - x) + \lambda\partial\varphi(x_\lambda) \ni 0. \qquad \textbf{(3.11)}$$

Bu denklemi $x_\lambda - x$ ile çarparsak,

$$\|x_\lambda - x\|^2 + \lambda\big(\varphi(x_\lambda) - \varphi(x)\big) \leq 0, \qquad \forall\lambda > 0 \qquad \textbf{(3.12)}$$

yazılır.

Çünkü Alt Önerme 3.1 'den φ, aşağıdan bir afin fonksiyon ile sınırlandırılmış ve $\varphi(x) < \infty$'dur. Bu da şunu verir,

$$\lim_{\lambda\to 0} x_\lambda = x. \qquad \textbf{(3.13)}$$

$x_\lambda \in D(\partial\varphi)$ ve , $D(\varphi)$' de keyfi olduğundan şu sonuca varabiliriz; $\overline{D(\varphi)} = \overline{D(\partial\varphi)}$.

$\forall\lambda > 0$ için $\varphi_\lambda(x)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$\varphi_\lambda(x) = inf\left\{\frac{\|x-u\|^2}{2\lambda} + \varphi(u); u \in X\right\}, \qquad \forall x \in X, \qquad \textbf{(3.14)}$$

burada $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}}$ alt yarı sürekli bir dışbükey fonksiyondur.

Alt Önerme 3.1 ve Alt Önerme 3.2 'den $\varphi_\lambda(x)$, $\forall x \in X$ için iyi tanımlanmıştır ve buradan sonsuz tanımlamaya ulaşılır. Bu da λ'nın dışbükey ve X üzerinde alt yarı sürekli olduğunu basit bir argümanla ifade eder.

3.4 Teorem 3.2

X, dışbükey duali ile birlikte kesinlikle dışbükey, yansımalı bir Banach uzayı olsun.

$\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}}$ alt yarı sürekli dışbükey bir fonksiyon ve

$A = \partial\varphi \subset X \times X^*$ olsun.

Öyleyse φ_λ fonksiyonu dışbükey, sürekli, Gâteaux diferansiyeline sahip ve $\forall\lambda > 0$ için $\nabla\varphi_\lambda = A_\lambda$ olur. Dahası,

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\|x - J_\lambda x\|^2}{2\lambda} + \varphi(J_\lambda x), \qquad \forall\lambda > 0,\ x \in X; \quad \textbf{(3.15)}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \varphi_\lambda(x) = \varphi(x), \qquad \forall x \in X; \quad \textbf{(3.16)}$$

$$\varphi(J_\lambda x) \le \varphi_\lambda(x) \le \varphi(x), \qquad \forall\lambda > 0,\ x \in X; \quad \textbf{(3.17)}$$

yazılır.

X bir Hilbert uzayı, öyleyse φ_λ, X üzerinde Fréchet diferansiyeline sahiptir.

İspat:

$u \to \frac{\|x-u\|^2}{2\lambda} + \varphi(u)$ fonksiyonunun alt diferansiyelinin sadece

$u \to \lambda^{-1}J(u - x) + \partial\varphi(u)$ operatörü olduğunu görüyoruz.

Bu da,

$\lambda^{-1}J(u - x) + \partial\varphi(u) \ni 0$ denkleminin her $x\lambda$ çözümünün,

$$u \to \frac{1}{2\lambda}\|x - u\|^2 + \varphi(u) \quad \textbf{(3.18)}$$

fonksiyonunun minimum noktası olduğu anlamına gelir.

$x_\lambda = J_\lambda x$ olduğunu denklem (3.15)‘ ten hatırlıyoruz. (3.17)’ deki eşitsizlikle alakalı olarak şunu söyleyebiliriz ki, (3.14)’deki denklemin bir sonucudur.

(3.16)’deki denklemi ispatlamak için, önce $x \in D(\varphi)$ olduğunu kabul edelim.

Ardından, Önerme 2.3’ te görüldüğü gibi,

$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = x$, yazılabilir ve (3.17)’ deki denkleme göre φ'nin alt yarı sürekliliğinden,

$$\varphi(x) = \lim_{\lambda\to 0} inf\varphi(J_\lambda x) \le \lim_{\lambda\to 0} inf\,\varphi_\lambda(x) \le \varphi(x). \qquad \textbf{(3.19)}$$

yazılır.

$x \notin D(\varphi)$ ise $\lim_{\lambda\to 0} \varphi_\lambda\, x = +\infty$ olur. Aksi takdirde $\{\lambda_n\} \to 0$ ve $C > 0$ olur öyle ki,

$$\varphi_{\lambda_n}(x) \le C, \qquad \forall n. \qquad \textbf{(3.20)}$$

Sonrasında (3.15)'ten $\lim_{n\to\infty} J_{\lambda_n} x = x$ yazabiliriz ve yine (3.17) ile φ'nin alt yarı sürekliliğinden $\varphi(x) \le C$ olduğu sonucuna varabiliriz.

İspatı sonuçlandırmak için, φ_λ' nın Gâteaux diferansiyellenebilir ve $\nabla\varphi_\lambda = A_\lambda$ olduğunu göstermeye devam edelim.

(3.15)' ten;

$$\varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x) \le (J_\lambda(y) - J_\lambda(x), A_\lambda y) + \frac{1}{2\lambda}(\|y - J_\lambda(y)\|^2 - \|x - J_\lambda(x)\|^2)$$

$$= (y - x, A_\lambda y) + (J_\lambda(y) - y, A_\lambda y) + (x - J_\lambda(x), A_\lambda y)$$

$$+\tfrac{1}{2\lambda}(\|y - J_\lambda(y)\|^2 - \|x - J_\lambda(x)\|^2) \le (y - x, A_\lambda y) \qquad \textbf{(3.21)}$$

yazılır.

Dolayısıyla, $\forall x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için

$$\varphi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(x) - (y - x, A_\lambda x) \le (y - x, A_\lambda y - A_\lambda x) \qquad \textbf{(3.22)}$$

olur.

İkinci eşitsizlik açıkça şunu ifade eder,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\varphi_\lambda(x + tu) - \varphi_\lambda(x)}{t} \le (u, A_\lambda x), \qquad \forall u, x \in X, \qquad (\textbf{3.23})$$

Çünkü daha önce görüldüğü gibi, A_λ yarı süreklidir. Dolayısıyla, φ_λ Gateaux diferansiyellenebilir ve $\nabla\varphi_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda = A_\lambda$ 'dır.

Şimdi, X 'in Hilbert uzayı olduğunu kabul edelim. Öyleyse, daha önce Önerme 2.3 'te bahsettiğimiz üzere, $A_\lambda : X \to X$, Lipschitz sabiti $2/\lambda$ 'dan büyük olmayan Lipschitz sürekliliğine sahiptir. Öyleyse 3.22'deki eşitsizlikten aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$|\varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(y) - (x-y, A_\lambda x)| \leq \frac{2}{\lambda}\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in X, \qquad (\mathbf{3.24})$$

ve bu da φ_λ' nın Frechet türevlenebilir olduğunu gösterir.

Şimdi de, $\varphi = \mathrm{I}_K$ olduğu özel durumu düşünelim. K, X'in kapalı bir dışbükey alt kümesidir ve X Hilbert uzayıdır. Öyleyse,

$$(\mathrm{I}_K)_\lambda(x) = \frac{\|x - P_K x\|^2}{2\lambda}, \qquad \forall x \in X,\ \lambda > 0, \qquad \mathbf{(3.25)}$$

yazılır.

Burada $P_K x$, x'in K üzerindeki izdüşümüdür. (kapalı ve dışbükey olduğundan, $P_K x$ benzersiz şekilde tanımlanmıştır.) Daha önce görüldüğü gibi,

$$P_K = J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \qquad \forall \lambda > 0 \qquad \mathbf{(3.26)}$$

yazabiliriz.

Sonsuz boyutlarda dışbükey alt yarı sürekli fonksiyonları (φ) düzenlemek için (3.14)' ün uygun bir yol olduğu söylenebilir, özellikle Hilbert uzaylarında ana avantaj, φ_λ düzenlileştirmesinin dışbükey kalması ve Lipschitz diferansiyeli $\nabla\varphi_\lambda$ olan C^1 olmasıdır.

X üzerinde iki alt yarı sürekli dışbükey f ve g fonksiyonlarında

$\partial(f+g) = \partial f + \partial g$ olup olmadığını belirlemek, dışbükey optimizasyonun yanı sıra dışbükey fonksiyonlarla hesap için büyük ilgi gören bir problemdir.

3.5 Teorem 3.3

X bir Banach uzayı ve $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ iki alt yarı sürekli, dışbükey uygun fonksiyonlar olsun, öyle ki $D(f) \cap intD(g) \neq \emptyset$.

Öyleyse,

$$\partial(f+g) = \partial f + \partial g \qquad \mathbf{(3.27)}$$

olur.

Burada ispatımızın devamlılığı için bir alt önermeden bahsedeceğiz;

3.6 Alt Önerme 3.3

φ alt yarı sürekli , dışbükey uygun bir fonksiyon olsun. Öyleyse $intD(\varphi) \subset D(\partial\varphi)$ olur.

İspat:

X yansımalı bir uzay ise, (3.27)'deki denklem, Teorem 2.6'nın bir sonucudur.

Aslında, yukarıdaki önermede görüldüğü gibi $intD(\partial g) = intD(g)$ ve bundan dolayı $D(\partial f) \cap intD(\partial g) \neq \emptyset$ olur.

Öyleyse Teorem 2.6'dan $\partial f + \partial g$, $X \times X^{*\prime}$da maksimal monotondur.

Öte yandan, kolayca görülüyor ki, $\partial f + \partial g \subset \partial(f+g)$'dir.

Dolayısıyla, $\partial f + \partial g = \partial(f+g)$ olur.

Genel duruma bakacak olursak, Teorem 3.3 daha sonra sunacağımız bir ayırma argümanı ile devam eder.

Çünkü, $\partial f + \partial g \subset \partial(f+g)$ ilişkisi açıktır. Şimdi , $\partial(f+g) \subset \partial f + \partial g$

olduğunu kanıtlayalım.

Bu amaçla, $x_0 \in D(\partial f) \cap D(\partial g)$ ve $w \in \partial(f+g)(x_0)$' ı keyfi ama sabit olarak düşünelim.

$w = w_1 + w_2$ olduğunu kanıtlayalım, burada $w_1 \in \partial f(x_0)$ ve $w_2 \in \partial g(x_0)$.

f ve g fonksiyonlarının yerine , sırasıyla

$x \to f(x+x_0) - f(x_0) - (x, z_1)$ ve $x \to g(x+x_0) - g(x_0) - (x, z_2)$ yazılır, burada $w = z_1 + z_2$, ve $x_0 = 0, w = 0, f(0) = g(0) = 0$ olduğunu

varsayabiliriz. Dolayısıyla, $0 \in \partial f(0) + \partial g(0)$ olduğunu kanıtlamalıyız.

E_i kümeleri tanımlayalım.($i = 1,2$ ....)

$$E_1 = \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R};\ f(x) \leq \lambda\}, \qquad \textbf{(3.28)}$$

$$E_2 = \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R};\ g(x) \leq -\lambda\}. \qquad \textbf{(3.29)}$$

$0 \in \partial(f+g)(0)$ olduğundan dolayı,

$$0 = (f+g)(0) = \inf\{(f+g)(x);\quad x \in X\}, \qquad \textbf{(3.30)}$$

yazılır ve bu nedenle, $E_1 \cap intE_2 = \emptyset$ olur.

Öyleyse, şunu söyleyebiliriz ki ayırma teoremi ile E_1 ve E_2 kümelerini ayıran kapalı bir hiper düzlem vardır. Başka bir deyişle $w \in X^*$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır, öyle ki

$$(w,x) + \alpha\lambda \leq 0, \qquad \forall (x,\lambda) \in E_1,$$

$$(w,x) + \alpha\lambda \geq 0, \qquad \forall (x,\lambda) \in E_2. \qquad \textbf{(3.31)}$$

Hiper düzlemin dikey olmadığını söylersek; yani $\alpha \neq 0$.

Aslında, eğer $\alpha = 0$ ise bu, hiper düzlem $(w,x) = 0$'ın X uzayında $D(f)$ ve $D(g)$ kümelerini ayırdığı anlamına gelir, bu mümkün değildir çünkü

$D(f) \cap intD(g) \neq \emptyset$'dir. Dolayısıyla $\alpha \neq 0$, ve daha spesifik olması için,

$\alpha > 0$ olduğunu varsayıyoruz. Sonrasında denklem 3.31' den görüyoruz ki,

$$g(x) \leq -\lambda \leq (w,x) \leq -\alpha f(x), \qquad \forall x \in X, \qquad \textbf{(3.32)}$$

olur ve bundan dolayı,

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right) w \in \partial f(0), -\left(\frac{1}{\alpha}\right) w \in \partial g(0) \quad \left(\text{şöyle ki}; 0 \in \partial f(0) + \partial g(0)\right) \qquad (\mathbf{3.33})$$

yazılır.

3.7 Teorem 3.4

$X = H$ reel bir Hilbert uzayı (kendi duali ile tanımlanan) ve A, $H \times H$' da maksimal monoton alt küme olsun.

$\varphi: H \to \mathbb{R}$ alt yarı sürekli, dışbükey uygun bir fonksiyon,

öyle ki $D(A) \cap D(\partial g) \neq \emptyset$.

$\exists h \in H$ için,

$$\varphi\big((I + \lambda A)^{-1}(x + \lambda h)\big) \leq \varphi(x) + C\lambda\big(1 + \varphi(x)\big), \qquad \forall x \in D(\varphi), \quad \lambda > 0. \quad (\mathbf{3.34})$$

Öyleyse, $A + \partial\varphi$ maksimal monoton ve $\overline{D(A + \partial\varphi)} = \overline{D(A)} \cap \overline{D(\varphi)}$.

İspat:

Teorem 2.7' nin ispatındaki gibi ilerliyoruz.

y keyfi ancak H'de sabit olsun. Öyleyse, $\forall\lambda > 0$ için denklem,

$$x_\lambda + A_\lambda x_\lambda + \partial\varphi(x_\lambda) \ni y \qquad \textbf{(3.35)}$$

olur.

Burada $x_\lambda \in D(\partial\varphi)$ şeklinde benzersiz bir çözüm vardır. Önceki denklemi $x - J_\lambda(x_\lambda + \lambda h)$ ile çarparsak ve Teorem 2.7'deki koşulu kullanırsak, buradan

$$\|A_\lambda x_\lambda\|^2 + \big(A_\lambda x_\lambda, J_\lambda(x_\lambda) - J_\lambda(x_\lambda + \lambda h)\big)$$

$$\leq \; C\lambda(\|y\| + \|h\| + \|x_\lambda\| + \varphi(x_\lambda) + 1), \qquad \textbf{(3.36)}$$

yazılır.

Burada $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ ve

$$\|A_\lambda x_\lambda\|^2 \leq C(\|y\| + \|h\| + \|x_\lambda\| + \; \varphi(x_\lambda) + 1) \qquad \textbf{(3.37)}$$

yazabiliriz. Öte yandan ikinci denklemi $x_\lambda - x_0$ ile çarparsak , burada $x_0 \in D(A) \cap D(\partial\varphi)$'dir.

$$\|x_\lambda\|^2 + \; \varphi(x_\lambda) \leq C(\|A_\lambda x_0\|^2 + \varphi(x_0) + 1) \qquad \textbf{(3.38)}$$

olur. Dolayısıyla, $\{A_\lambda x_\lambda\}$ ve $\{x_\lambda\}$ H'da sınırlıdır. Teorem 2.6 ve 2.7' nin ispatında görüldüğü üzere, $x_\lambda \rightharpoonup x$ olduğu anlamına gelir, burada x denklemin çözümüdür.

$$x + \partial\varphi(x) + Ax \ni y. \qquad \textbf{(3.39)}$$

Şimdi şunu kanıtlayalım, $\overline{D(A)} \cap \overline{D(\varphi)} \subset \overline{D(A) \cap D(\varphi)} \subset \overline{D(A) \cap D(\partial\varphi)}$.

$u \in D(A) \cap D(\varphi)$ keyfi ama sabit ve h, (3.34)'deki denklemde olduğu gibi olsun.

Açıkça bir $\{u_\lambda\} \subset D(\varphi)$ dizisi vardır. Öyle ki, $u_\lambda + \; \lambda h \in D(\varphi)$ ve $u_\lambda \to u$ ($\lambda \to 0$)

$v_\lambda = J_\lambda(u_\lambda + \lambda h) \in D(A) \cap D(\varphi)$ olsun. (3.34'den)

$$\|v_\lambda - u\| \leq \|J_\lambda(u_\lambda + \lambda h) - J_\lambda u\| + \|u - J_\lambda u\| \to 0 \;\; (\lambda \to 0) \qquad \textbf{(3.40)}$$

denklemini yazabiliriz. Çünkü Önerme 2.2'de görüldüğü gibi $u \in \overline{D(A)}$

Dolayısıyla, $\overline{D(A)} \cap \overline{D(\varphi)} \subset \overline{D(A) \cap D(\varphi)}$ olur.

Şimdi u, $D(A) \cap D(\varphi)$ ' de keyfi bir değer ve $x_\lambda \in D(A) \cap D(\partial\varphi)$,

$x_\lambda + \lambda\big(Ax_\lambda + \partial\varphi(x_\lambda)\big) \ni u$ denkleminin çözümü olsun.

$\partial\varphi$ tanımına göre, $\forall\ \lambda > 0$ için

$$\lambda\big(\varphi(x_\lambda) - \varphi(u)\big) \le (u - x_\lambda - \lambda A x_\lambda, x_\lambda - u)$$
$$\le -\|u - x_\lambda\|^2 + \lambda\|A^0 u\|\ \|u - x_\lambda\|, \qquad (\mathbf{3.41})$$

yazabiliriz.

Bunun sonucu olarak, $x_\lambda \to u$ ($\lambda > 0$ için) ve bundan dolayı, $D(A) \cap D(\varphi) \subset \overline{D(A)}$ olduğu açıktır.

Özel olarak da (3.27)' deki koşul aşağıdaki durumlarda geçerlidir:

$$(A_\lambda(x + \lambda h), y) \ge -C\big(1 + \varphi(x)\big),$$
$$\forall\lambda > 0, \exists h \in H\ ve\ \forall[x, y] \in \partial\varphi. \qquad \mathbf{(3.42)}$$

Aslında, (3.34) durumu maksimum ilkesinin soyut bir temsilcisi olarak görülebilir, çünkü bazı özel durumlarda (örneğin, A eliptik bir operatör ise) maksimum ilke argümanları aracılığıyla kontrol edilebilir.

3.8 Önerme 3.1.

X Banach uzayı ve $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}}$, X'de alt yarı sürekli, dışbükey uygun bir fonksiyon olsun. Öyleyse $\forall x_0 \in D(\partial\varphi)$,

$$\partial\varphi(x_0) = \{x_0^* \in X^*;\ \varphi'(x_0, u) \ge (u, x_0^*), \qquad \forall u \in X\}. \qquad \mathbf{(3.43)}$$

İspat:

$x_0^* \in \partial\varphi(x_0)$ olsun. $\partial\varphi'$ nin tanımından,

$$\varphi(x_0) - \varphi(x_0 + tu) \le -t(u, x_0^*), \qquad \forall u \in X,\ \ t > 0, \qquad \mathbf{(3.44)}$$

yazılır, ve

$$\varphi'(x_0, u\ ) \ge (u, x_0^*), \qquad \forall u \in X \qquad \mathbf{(3.45)}$$

elde edilir.

Şimdi, $\forall u \in X$ için $(u, x_0^*) \le \varphi'(x_0, u)$ olduğunu kabul edelim.

φ dışbükey, $t \to \left(\varphi(x_0 + tu) - \frac{\varphi(x_0)}{t}\right)$ fonksiyonu monoton bir şekilde artan olduğundan,

$$(u, x_0^*) \leq t^{-1}\big(\varphi(x_0 + tu) - \varphi(x_0)\big), \qquad \forall u \in X, t > 0. \qquad \textbf{(3.46)}$$

Dolayısıyla, $x_0^* \in \partial\varphi(x_0)$ olur ve ispatımız tamamlanmış olur.

3.43 fonksiyonu, $\partial\varphi'$nin eşdeğer bir tanımı olarak alınabilir ve dışbükey olmayan fonksiyonların genelleştirilmiş gradyanlarını tanımlamak için kullanılabilir.

Eğer φ, x'de sürekliyse

$$\varphi'(x_0, u) = \sup\{(u, x_0^*);\ x_0^* \in \partial\varphi(x_0)\}, \qquad u \in X \qquad \textbf{(3.47)}$$

olur.

- X reel bir Banach uzayı ve $A \subset X \times X^*$ olsun. A kümesi, ancak ve ancak A döngüsel olarak maksimal monoton ise X'den $\mathbb{R}'$ye alt yarı sürekli dışbükey fonksiyonun alt türevidir.

3.9 Alt Diferansiyel Haritalama Örnekleri

Burada bazı önemli alt diferansiyel haritalama örnekleri üzerinde yoğunlaşacağız.

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **′de maksimal monoton grafikler.**

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ′nin her maksimal monoton kümesi (grafik) $\mathbb{R}'$deki alt yarı sürekli, dışbükey , uygun fonksiyonun alt diferansiyelidir.

β, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}'$de maksimal monoton küme ve $\beta^0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ye bir fonksiyon olsun.

β^0 şöyle tanımlansın:

$$\beta^0(r) = \{y \in \beta(r);\ |y| = \inf\{|z|; z \in \beta(r)\}\}, \qquad \forall r \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(3.48)}$$

$\overline{D(\beta)} = [a, b]$ burada $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ olduğunu biliyoruz.

β^0 fonksiyonu monoton olarak artan ve bundan dolayı,

$$j(r) = \int_{r_0}^{r} \beta^0(u)du\,, \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \qquad \textbf{(3.49)}$$

integralini yazabiliriz. Burada $r_0 \in D(\beta)$' dır.

Açıkça, j fonksiyonu (a, b) üzerinde süreklidir ve $\mathbb{R}$ üzerinde dışbükeydir. Dahası,

$$\lim_{r \to b} inf j(r) \geq j(b) \quad ve \qquad \lim_{r \to a} inf j(r) \geq j(a) \qquad \textbf{(3.50)}$$

yazabiliriz.

Sonuç olarak,

$$j(r) - j(t) = \int_t^r \beta^0(u)du \leq v(r-t), \qquad \forall [r,v] \in \beta, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (\mathbf{3.51})$$

olur.

Dolayısıyla $\beta = \partial j$. (Burada j, 3.14'te tanımladığımız gibi alt yarı sürekli dışbükey bir fonksiyon)

Kolayca görülüyor ki $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve monoton olarak artan bir fonksiyon ise, β $\mathbb{R} \times \mathbb{R}'$de maksimal monoton bir fonksiyondur. Yani $u \to u + \beta(u)$ aralığının tamamı $\mathbb{R}'$dir.

Eğer β , $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$' de süreksiz monoton artan bir fonksiyonsa ($j = 1$), öyleyse daha önce görüldüğü gibi $\beta' nın$ r_j' deki sıçramalarından β'dan bir maksimal monoton grafik $\tilde{\beta} \subset R \times R$ elde edilir ve Önerme 2.3'ten

$$\tilde{\beta}(r) = \begin{cases} \beta(r), & r \neq r_j, \\ [\beta(r_j - 0), \beta(r_j + 0)], & r = r_j. \end{cases} \qquad \mathbf{(3.52)}$$

yazılır.

3.10 Kendine Eş Operatörler

H kendi duali ile tanımlanan, skaler çarpımı $(.,.)$ ve norm $|.|$ ile reel bir Hilbert uzayı ve A, H üzerinde doğrusal kendine eş pozitif bir operatör olsun.

Öyleyse $A = \partial\varphi$, ve

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left|A^{1/2}x\right|^2, & x \in D(A^{1/2}), \\ +\infty, & aksi\ hâlde\ . \end{cases} \qquad \mathbf{(3.53)}$$

şeklinde yazılır.

(Burada $A^{1/2}$, A operatörünün kareköküdür.)

Tersine, H' deki alt yarı sürekli dışbükey fonksiyonun alt diferansiyeli olan herhangi bir doğrusal, yoğun tanımlanmış operatör kendiliğinden eşleniktir.

Şimdi, bu iddiaları kanıtlamak için ilk olarak, Hilbert uzayında herhangi bir kendine eş pozitif A operatörünün maksimal monoton olduğuna dikkat edelim.

Gerçekten de, $I + A$ operatör aralığının H'de eş zamanlı olarak kapalı ve yoğun olduğu kolayca görülmektedir. Öte yandan, $\varphi: H \to \overline{\mathbb{R}}$ (3.53)' ile tanımlanan bir fonksiyon ise, açık bir şekilde dışbükey, alt yarı sürekli ve

$$\varphi(x) - \varphi(u) = \frac{1}{2}\left(\left|A^{1/2}x\right|^2 - \left|A^{1/2}\,u\right|^2\right) \leq (Ax, x-u),$$

$$\forall x \in D(A),\ u \in D\left(A^{1/2}\right) \qquad \textbf{(3.54)}$$

olduğu görülür.

Bundan dolayı $A \subset \partial\varphi$ olur, çünkü A maksimal monotondur.

Buradan şu sonuca varıyoruz ki $A = \partial\varphi$.

Şimdi, A, $A = \partial\psi$ biçiminde H üzerinde doğrusal, yoğun olarak tanımlanmış bir operatör olsun, burada $\psi: H \to \overline{\mathbb{R}}$ alt yarı sürekli dışbükey bir fonksiyondur. Teorem 3.2'den biliyoruz ki $A_\lambda = \nabla\psi_\lambda$, burada $A_\lambda = \lambda^{-1}(I - \lambda A)^{-1}{}'$dir.

Böylelikle,

$$\frac{d}{dt}\psi_\lambda(tu) = t(A_\lambda u, u), \qquad \forall u \in H, t \in [0,1], \qquad (\mathbf{3.55})$$

elde edilir ve buradan,

$\forall u \in H\ ve\ \lambda > 0$ için $\psi_\lambda(u) = (A_\lambda u, u)/2$ olur.

$\psi_\lambda{}'$nın Frechet türevinin hesaplanması,

$$\nabla\psi_\lambda = A_\lambda = \frac{1}{2}(A_\lambda + A_\lambda^*). \qquad \textbf{(3.56)}$$

şeklinde olur.

Dolayısıyla $\lambda \to 0$ için $A_\lambda = A_\lambda^*$ olur ve, bu da şunu ima eder ki $A = A^*$.

Daha genel olarak, V bir Hilbert uzayı olmak üzere eğer $A: V \to V^{*\prime}$a doğrusal, sürekli, simetrik bir operatör ise $A = \partial\varphi$ olur. Burada $\varphi: V \to \mathbb{R}$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(Au, u), \qquad \forall u \in V. \qquad \textbf{(3.57)}$$

şeklinde tanımlanmış bir fonksiyondur.

Tersine , $\partial\varphi$ formunun her doğrusal sürekli operatörü $A: V \to V'$ simetriktir.

Burada bir alt teoremden yararlanarak devam edeceğiz.

3.11 Alt Teorem 3.1

Ω, C^2 sınıfında R^N'in sınırlı açık bir alt kümesi, $f \in L^2(\Omega)$ ve $u \in H_0^1(\Omega)$ olsun. Öyleyse $u \in H^2(\Omega)$ ve

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.58}$$

olur. Burada C, f'den bağımsızdır.

İspatın devamında, yukarıda özellikle belirttiğimiz teoreme göre, eğer Ω yeterince düzgün bir sınıra sahip sınırlı ve açık bir $\mathbb{R}^N$ bölgesi ise, (örneğin C^2 sınıfından)

$A: D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ operatörü

$Ay = -\Delta y, \quad \forall y \in D(A), \quad D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, şeklinde tanımlanır ve $A = \partial\varphi$ olur. Burada $\varphi: L^2(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 dx & y \in H_0^1(\Omega), \\ +\infty & aksi\ halde. \end{cases} \tag{3.59}$$

şeklinde verilir.

Bu sonuç, eğer dışbükey ise, düz olmayan sınırlı açık alan için doğru olur.

3.12 Konveks(Dışbükey) İntegrandlar

Ω, Öklid uzayı $\mathbb{R}^{N'}$in ölçülebilir bir alt kümesi ve $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, Ω üzerindeki tüm p toplanabilir fonksiyonların uzayı olsun.

Burada,

$$L_m^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^m \tag{3.60}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$g: \Omega \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun, aşağıdaki koşullar geçerliyse normal bir dışbükey integral olduğu söylenir:

- **i.** Hemen hemen tüm $x \in \Omega$ için $g(x, .): \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu dışbükey alt yarı sürekli ve $+\infty$ şeklinde değildir.
- **ii.** g fonksiyonu $\Omega \times \mathbb{R}^{m'}$de $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ ölçülebilirdir. Yani, Lebesgue'nin ölçülebilir Ω alt kümelerinin ürünleri ve $\mathbb{R}^{m'}$nin Borel alt kümeleri

tarafından üretilen $\Omega \times \mathbb{R}^{m'}$ in alt kümelerinin $\sigma-$cebirine göre ölçülebilirdir.

g, y 'de dışbükeyse ve $\forall x \in \Omega$ için $intD(g(x,.)) \neq \emptyset$ ise o zaman (ii) koşulu ancak ve ancak $\forall y \in \mathbb{R}^m$ için $g = g(x,y)$, x'de ölçülebilirse geçerlidir.

3.13 Lemma 3.1

$g = g(x,y): \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ her $x \in \Omega$ için y'de sürekli ve $\forall\, y$ için x cinsinden ölçülebilir olsun. O hâlde g, $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ ölçülebilirdir.

İspat:

$\{z_i^n\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}^{m'}$ in yoğun bir alt kümesi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ keyfi fakat sabit olsun. g , y 'de sürekli olduğuna göre, $g(x,y) \leq \lambda$ olduğu açıktır ancak ve ancak $\forall\, n$ için z_i^n vardır.

Öyle ki $\|z_i^n - y\| \leq (1/n)$ ve $g(x, z_i^n) \leq \lambda + (1/n)$.

$\{x \in \Omega\, ; g(x, z_i^n) \leq \lambda + (1/n)$ kümesini Ω_{in} ile gösterelim ve

$Y_{in} = \{y \in \mathbb{R}^m\, ;\, \|y - z_i^n\| \leq 1/n\}$ yazalım.

$$\{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m\, ; g(x,y) \leq \lambda\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_{in} \times Y_{in}, \qquad (\mathbf{3.61})$$

olduğuna göre istenildiği gibi g'nin $L \times B$ ölçülebilir olduğu sonucuna varıyoruz.

(i) ve (ii) koşullarına ek olarak aşağıdakileri varsayalım.

(iii)

$\alpha \in L_m^q(\Omega), 1/p + 1/q = 1$ ve $\beta \in L^1(\Omega)$ öyle ki

$$g(x,y) \geq (\alpha(x), y) + \beta(x), \quad bir\ tek\ x \in \Omega, y \in \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{(3.62)}$$

burada, $(.\ ,\ .)$ $\mathbb{R}^{m'}$ de olağan skaler çarpımdır .

(iv)

$y_0 \in L_m^p$ öyle ki $g(x, y_0) \in L^1(\Omega)$.

G, x'ten bağımsızsa (iii) ve (iv) koşullarının Alt Önerme 3.1 sayesinde otomatik olarak geçerli olduğunu belirtelim.

$X = L_m^p(\Omega)$ uzayı tanımlayalım.

$I_g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun.

$$I_g(y) = \begin{cases} \int_\Omega g\big(x, y(x)\big)dx & g(x,y) \in L^1(\Omega), \\ +\infty & aksi\ halde. \end{cases} \qquad \textbf{(3.63)}$$

3.14 Önerme 3.2

g, (i)- (iv) varsayımlarını karşılıyor olsun. Bu durumda I_g fonksiyonu dışbükey , alt yarı sürekli ve uygun bir fonksiyondur. Dahası,

$$\partial I_g(y) = \big\{w \in L_m^q(\Omega); w(x) \in \partial g\big(x, y(x)\big),\ bir\ tek\ x \in \Omega\big\}. \qquad \textbf{(3.64)}$$

Burada, $\partial g, y \to g(x,y)$ fonksiyonunun alt diferansiyelidir.

İspat :

$I_g{}'$nin $\forall\, y \in L_m^q(\Omega)$ için iyi tanımlandığını gösterelim. Öncelikle her Lebesgue $y: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ölçülebilir fonksiyonu için $x \to g(x, y(x))$ fonksiyonu Ω üzerinde ölçülebilirdir. Sabit bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$E = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m; g(x,y) \le \lambda\} \qquad \textbf{(3.65)}$$

yazılır. $\{x \in \Omega\,;\ (x, y(x)) \in S\}$ kümesinin Lebesgue ölçülebilir olması özelliğine sahip tüm $S \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$ kümelerinin sınıfını $\mathscr{S}$ ile gösterelim. Açıkçası, S, $T \times D$ formunun her kümesini içerir, burada T, Ω ve D'nin ölçülebilir bir alt kümesi, $\mathbb{R}^m{}'$nin açık bir alt kümesidir. $\mathscr{S}$ bir σ- cebiri olduğundan, Lebesque'in ölçülebilir Ω alt kümelerinin ürünleri ve $\mathbb{R}^m{}'$nin Borel alt kümelerinin çarpımları tarafından üretilen σ-cebirini içerir. Dolayısıyla, $E \in \mathscr{S}$ ve bundan dolayı $g\big(x, y(x)\big)$ Lebesgue ölçülebilirdir, yani I_g iyi tanımlanmıştır. (i) önermesindeki varsayımdan , I_g dışbükey , oysa (iv) önermesinden görüyoruz ki $I_g \not\equiv +\infty$. $\{y_n\} \subset L_m^p(\Omega)$ y'ye kuvvetle yakınsak olsun. Öyleyse burada, $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ öyle ki,

$$y_{n_k}(x) \to y(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (n_k \to \infty). \qquad \textbf{(3.66)}$$

Sonrasında, (iii) önermeden,

$$\lim_{n_k \to \infty} \inf \int_\Omega \Big(g\left(x, y_{n_k}(x)\right) - \alpha(x), y_{n_k}(x)\Big) - \beta(x))dx$$

$$\ge \int_\Omega \Big(g\big(x, y(x)\big) - \big(\alpha(x), y(x)\big) - \beta(x)\Big)\,dx, \qquad \textbf{(3.67)}$$

yazılır ve bundan dolayı,

$$\lim_{n_k\to\infty} inf I_g(y_{n_k}) \geq I_g(y) \qquad \textbf{(3.68)}$$

olur. Açıkça bu da şunu belirtir,

$$\lim\ inf_{n\to\infty} I_g(y_n) \geq I_g(y), \qquad \textbf{(3.69)}$$

yani, I_g, X'de alt yarı süreklidir. Şimdi 3.18' in kanıtına bakalım.

$w(x) \in \partial g\big(x, y(x)\big)$ ' de olduğu gibi $\forall w \in L_m^q(\Omega)$ 'nin $\partial I_g(y)'$e ait olduğu kolayca görülebilir. Şimdi, $w \in \partial I_g$ olsun.

Yani,

$$\int_\Omega \Big(g\big(x, y(x)\big) - g\big(x, u(x)\big)\Big)\, dx \leq \int_\Omega \big(w(x), y(x) - u(x)\big) dx,$$

$$\forall u \in L_m^p(\Omega)\,. \qquad \textbf{(3.70)}$$

D, Ω'nın keyfi ölçülebilir bir alt kümesi ve $u \in L_m^p(\Omega)$ olsun.

Burada,

$$u(x) = \begin{cases} y_0 & x \in D\ için, \\ y(x) & x \in \Omega \setminus \overline{D}\,, \end{cases} \qquad \textbf{(3.71)}$$

olarak tanımlanır. y_0 , $\mathbb{R}^{m\prime}$de keyfidir. Önceki eşitsizliğin yerine,

$$\int_D (g\big(x, y(x)\big) - g(x, y_0) - (w(x), y(x) - y_0))\, dx \leq 0. \qquad \textbf{(3.72)}$$

yazabiliriz. D keyfi , bu da şu anlama gelir tek bir $x \in \Omega$ için

$$g\big(x, y(x)\big) \leq g(x, y_0) + (w(x), y(x) - y_0), \qquad \forall y_0 \in \mathbb{R}^m \qquad \textbf{(3.73)}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla, bir tek $x \in \Omega$ için $w(x) \in \partial g\big(x, y(x)\big)$ olur .

$p = \infty$ durumu daha inceliklidir, çünkü $\partial I_g(y) \subset \big(L_m^\infty(\Omega)\big)^*$ artık Ω üzerinde Lebesque integrallenebilir fonksiyonlar değildir. Bununla birlikte, bu durumda $\partial I_g(y)'$nin $\mu_a + \mu_s$ formunda olduğu ortaya çıkmıştır, burada bir tek $x \in \Omega$ için $\mu_a \in L_m^1(\Omega), \mu_a(x) \in \partial g\big(y(x)\big)$ olur ve μ_s , $(L_m^\infty(\Omega))^*$ 'de tekildir.

Şimdi özel bir durumu ele alalım,

$$g(x,y) = I_K(y) = \begin{cases} 0 & y \in K, \\ +\infty & y \notin K, \end{cases} \quad \textbf{(3.74)}$$

burada, K, $\mathbb{R}^{m\prime}$nin kapalı bir dışbükey alt kümesidir.

$I_g, L_m^p(\Omega)'$nin kapalı dışbükey alt kümesi ve $\mathcal{K}'$nin gösterge fonksiyonudur.

Şöyle tanımlanır:

$$\mathcal{K} = \{y \in L_m^p(\Omega); y(x) \in K, \quad bir\ tek\ x \in \Omega\}, \quad \textbf{(3.75)}$$

ve 3.18' den $N_{\mathcal{K}} \subset L_m^q(\Omega)'$dan $\mathcal{K}'$ye normal koninin;

$$N_{\mathcal{K}}(y) = \{w \in L_m^q(\Omega); w(x) \in N_K(y(x)), bir\ tek\ x \in \Omega\}, \quad \textbf{(3.76)}$$

şeklinde tanımlandığını görüyoruz.

Burada $N_K(y) = \{z \in \mathbb{R}^m; (z, y-u) \geq 0, \forall u \in K\}$ $y \in K'$ de , K'deki normal konidir.

Özel olarak $m = 1\ ve\ K = [a.b]$ seçilirse,

$$N_{\mathcal{K}}(y) = \{w \in L^q(\Omega); w(x) = 0\ ,\ bir\ tek\ [x \in \Omega;\ a < y(x) < b], \quad \textbf{(3.77)}$$

$$w(x) \geq 0,\ bir\ tek\ [x \in \Omega;\ y(x) = b],\ w(x) \leq 0, bir\ tek\ [x \in \Omega; y(x) = a]\}. \quad \textbf{(3.78)}$$

yazılır.

Şimdi, $K = \{y \in \mathbb{R}^m;\ \|y\| \leq \rho\}$ alalım. Öyleyse,

$$N_K(y) = \begin{cases} 0 & eğer\ \|y\| = \rho, \\ \bigcup_{\lambda>0} \lambda_y & eğer\ \|y\| = \rho, \end{cases} \quad \textbf{(3.79)}$$

yazılır ve bundan dolayı $N_{\mathcal{K}}$ şöyle tanımlanır:

$$N_{\mathcal{K}}(y) = \{w \in L_m^q(\Omega);\ w(x) = 0, \quad bir\ tek\ [x \in \Omega; \|y(x)\| < \rho],$$

$$w(x) = \lambda(x)y(x), \qquad bir\ tek\ [x \in \Omega;\ \ \|y(x)\| = \rho$$

$$\text{burada } \lambda \in L_m^q(\Omega),\ \lambda(x) \geq 0,\ bir\ tek\ x \in \Omega\}. \quad \textbf{(3.80)}$$

$\mathbb{R}^{N\prime}$nin sınırlı açık bölgelerindeki uygun sınır değeri, koşullarıyla birlikte, doğrusal olmayan eliptik operatörlerin, maksimal monoton operatörlerin ve özellikle alt potansiyel operatörlerin başka bir kaynağını temsil eder.

Sonuç 3.1

$\phi_1: L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ eşlemesi şu şekilde tanımlanır,

$$\phi_1(u) = \{\|u\|_{L^1(\Omega)} w;\ \ w(x) \in L^\infty(\Omega),\ w(x) \in signu(x)\ bir\ tek\ \ x \in \Omega\} \quad \textbf{(3.81)}$$

bu da , $X = L^1(\Omega)$ uzayının J dualite eşlemesidir.

İspat :

Kolayca görülüyor ki, $\phi_1(u) \in J(u),\ \forall u \in L^1(\Omega)$. Diğer taraftan, Önerme 3.2'ye göre,

$$\partial\|u\|_{L^1(\Omega)} = \{w \in L^\infty(\Omega);\ w(x) \in signu(x), bir\ tek\ x \in \Omega\}, \quad \textbf{(3.82)}$$

yazılır ve bu şu anlama gelir,

$$\partial\left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^1(\Omega)}\right) = \phi_1(u),\ \ \forall u \in L^1(\Omega). \quad \textbf{(3.83)}$$

Çünkü Teorem 3.1'e göre $\partial\left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^1(\Omega)}\right)$ eşlemesi $L^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$' de maksimal monotondur. Buradan $\phi_1 \subset J$ ve iddia ettiğimiz gibi $\phi_1 = J$ olduğu sonucuna varabiliriz.

3.15 $L^2(\Omega)'$de Yarı Doğrusal Eliptik Operatörler

Ω, $\mathbb{R}^{N\prime}$ nin açık sınırlı bir alt kümesi ve $g: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ alt yarı sürekli, dışbükey, uygun bir fonksiyon olsun. Öyle ki, $0 \in D(\partial g)$.

$$\varphi(y) = \begin{cases} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla y|^2 + g(y)\right) dx & y \in H_0^1(\Omega)\ \ ve\ g(y) \in L^1(\Omega) \\ \infty & aksi\ halde \end{cases} \quad \textbf{(3.84)}$$

ile $\varphi: L^2(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu tanımlanır.

3.16 Önerme 3.3

φ fonksiyonu dışbükey, alt yarı sürekli ve $\not\equiv +\infty$**.** Buna ek olarak, $\partial\Omega$ sınırı yeterince düzgünse (örneğin C^2 sınıfından) ya da Ω dışbükey ise, $\partial\varphi \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$' dır ve

$$\partial\varphi = \left\{ \begin{array}{c} [y, w]; w \in L^2(\Omega); y \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), w(x) + \Delta y(x) \in \\ \partial g\big(y(x)\big),\ bir\ tek\ \ x \in \Omega \end{array} \right\} \quad \textbf{(3.85)}$$

şeklinde yazılır.

İspat:

Kolayca görülüyor ki, φ dışbükey ve $\not\equiv +\infty$.

$\{y_n\} \subset L^2(\Omega)$, $n \to \infty$ olarak y'ye kuvvetle yakınsak olsun. Daha önce bahsettiğimiz gibi,

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_\Omega g(y_n)dx \geq \int_\Omega g(y)dx, \qquad (\mathbf{3.86})$$

yazabiliriz ve ayrıca, $L^2(\Omega) - norm'$unun alt yarı sürekliliği ile,

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_\Omega |\nabla y_n|^2 dx \geq \int_\Omega |\nabla y|^2 dx \qquad (\mathbf{3.87})$$

yazılır. Dolayısıyla, lim $inf_{n\to\infty}\varphi(y_n) \geq \varphi(y)$ olur.

Şimdi, 3.85' in ikinci kısmı tarafından tanımlanan operatörü $\Gamma \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ile gösterelim. Yani;

$$\Gamma = \{[y,w] \in \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \times L^2(\Omega);$$

$$w(x) - \Delta y(x) + \partial g\big(y(x)\big) \; bir \; tek \;\; x \in \Omega\}. \qquad \mathbf{(3.88)}$$

Burada , $\Gamma \subset \partial\phi$ olduğu açıktır. Bu nedenle Γ'nin $L^2(\Omega)$' de maksimal monoton olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla, $\Gamma = A_2 + B$ olduğunu ele alalım.

Burada, $A_2 y = -\Delta y$, $\forall y \in D(A_2) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$,

Ve $B_y = \big\{v \in L^2(\Omega); v(x) \in \partial g\big(y(x)\big), bir \; tek \; x \in \Omega\big\}$ ' dır.

Daha önce görüldüğü gibi, A_2 ve B operatörleri $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$' de maksimal monotondur.

B'yi $y \to By - y_0$ ile değiştirirsek, (burada $y_0 \in B(0)$) genellik kaybı olmaksızın $0 \in B(0)$ olduğunu varsayabiliriz.

Öte yandan kolayca görülüyor ki,

$(B_\lambda u)(x) = \beta_\lambda\big(u(x)\big), bir \; tek \; x \in \Omega, \forall u \in L^2(\Omega),$ burada $\beta = \partial g$ ve

$\beta_\lambda = \lambda^{-1}(1 - (1 + \lambda\beta)^{-1})$'dir. Bu da β'nın Yosida yaklaşımıdır.

Şimdi,

$$(A_2u, B_\lambda u) = -\int_\Omega \Delta u \beta_\lambda(u)\, dx \geq 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \qquad \textbf{(3.89)}$$

yazabiliriz veya eşdeğer olarak,

$$\int_\Omega g(1+\lambda A_2)^{-1} y(x) dx \leq \int_\Omega g\big(y(x)\big) dx, \qquad \forall y \in L^2(\Omega), \qquad (\mathbf{3.90})$$

yazabiliriz. Bu da aşağıdaki basit argümandan kaynaklanır.

$z = (I+\lambda A_2)^{-1} y \ : \ z - \lambda \Delta z = y$ ve Ω'da $z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

İkincisini, $\beta_\mu(z) = (1/\mu)(z - (1+\mu\beta)^{-1} z)$, $\mu > 0$ ile çarparsak ve Ω üzerine integral alırsak,

$$\int_\Omega \beta_\mu(z)(z-y) \leq 0, \quad \forall \mu > 0, \qquad (\mathbf{3.91})$$

elde ederiz. $\beta_\mu' \geq 0$ olduğundan

$$\int_\Omega \Delta z \beta_\mu(z) dx = -\int_\Omega \beta_\mu'(z) |\nabla z|^2 dx \leq 0, \qquad \forall \mu > 0. \qquad (\mathbf{3.92})$$

yazılır ve bu da bize,

$$\int_\Omega g_\mu(z) dx \leq \int_\Omega g_\mu(y) dx, \qquad \forall \mu > 0, \qquad (\mathbf{3.93})$$

bunu verir. Burada $g_\mu = \beta_\mu$.

Sonra, $\mu \to 0$ seçerek ve Teorem 3.2'i hatırlayarak istenen eşitsizliği elde ederiz. Ardından, Teorem 3.4'ü uygulayarak şu sonuca varabiliriz:

$\Gamma = A_2 + B$ maksimal monotondur.

Sonuç 2.2'den $R(A_2 + B) = L^2(\Omega)$'dır.

Dolayısıyla, $\forall f \in L^2(\Omega)$ için Dirichlet problem olan,

$$\begin{cases} -\Delta y + \beta(y) \ni f, & bir\ tek\ \Omega\ için \\ y = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \qquad \textbf{(3.94)}$$

3.94'ün $y \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ olacak şekilde benzersiz bir çözümü vardır.

Daha özel olarak, $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & eğer\ r > 0, \\ \mathbb{R}^- & r = 0, \end{cases} \qquad \textbf{(3.95)}$$

yazılırsa, problem 3.94 ünlü obstacle problemine indirgenir.

$$\begin{cases} -\Delta y = f, & bir\ tek\ [y > 0], \\ -\Delta y \geq f,\ y \geq 0, & bir\ tek\ \Omega \\ y = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \qquad \textbf{(3.96)}$$

Bu, daha sonra ayrıntılı olarak vereceğimiz serbest bir sınır problemini tanımlayan eliptik bir varyasyonel eşitsizliktir. Ayrıca, y'nin 3.94'teki çözümünün ve y_ε çözümlerinin $H_0^1(\Omega)$' daki limiti olduğunu da not edelim.

$$\begin{cases} -\Delta y + \beta_\varepsilon(y) = f\ , & \Omega \\ y = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \qquad \textbf{(3.97)}$$

burada, β_ε β'nın Yosida yaklaşımıdır. Aslında 3.97'deki denklem y_ε ile çarpılırsa

$$\|y_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\Delta y_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C, \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \textbf{(3.98)}$$

olur ve bundan dolayı, $\{y_\varepsilon\}$, $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$' de sınırlıdır. Bu da,

$$\int_\Omega \left|\nabla(y_\varepsilon - y_\lambda)\right|^2 dx + \int_\Omega \big(\beta_\varepsilon(y_\varepsilon) - \beta_\lambda(y_\lambda)\big)(y_\varepsilon - y_\lambda)dx = 0, \qquad (\mathbf{3.99})$$

olduğu anlamına gelir ve böylece,

$$\int_\Omega |\nabla(y_\varepsilon - y_\lambda)|^2 dx + \int_\Omega \big(\beta_\varepsilon(y_\varepsilon) - \beta_\lambda(y_\lambda)\big)\big(\varepsilon\beta_\varepsilon(y_\varepsilon) - \lambda\beta_\lambda(y_\lambda)\big)dx \leq 0, \qquad (\mathbf{3.100})$$

yazılır. Çünkü $\beta_\varepsilon(y) \in \beta((1+\varepsilon\beta)^{-1}y)$ ve β monotondur. Dolayısıyla, $\{y_\varepsilon\}$ dizisi $H_0^1(\Omega)'$de Cauchy dizisidir ve bundan dolayı $H_0^1(\Omega)'$da $y = \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon$ vardır. Bu açıkça şunu ima eder:

$$\begin{array}{ll} \Delta y_\varepsilon \to \Delta y & L^2(\Omega), \\ y_\varepsilon \to y & H^2(\Omega), \\ \beta_\varepsilon(y_\varepsilon) \to g & L^2(\Omega). \end{array} \qquad (\mathbf{3.101})$$

Şimdi, Önerme 3.2 'de (iv)' den görüyoruz ki bir tek $x \in \Omega$ için $g(x) \in \beta\big(y(x)\big)$ olur ve bundan dolayı y, (3.94)' deki denklemin çözümüdür.

3.17 Doğrusal Olmayan Sınırlı Neumann Koşulları

Ω, C^2 sınıfında $\partial\Omega$ sınırı ile $\mathbb{R}^N$' nin sınırlı ve açık bir alt kümesi olsun.

$j: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ alt yarı sürekli, uygun, dışbükey bir fonksiyon ve $\beta = \partial j$ olsun.

$\varphi: L^2(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} j(u)dx & u \in H^1(\Omega), j(u) \in L^1(\partial\Omega), \\ +\infty & aksi\ halde. \end{cases} \quad \textbf{(3.102)}$$

$\forall u \in H^1(\Omega)$ olduğundan, u'nun üzerindeki izi iyi tanımlanmış ve $L^2(\partial\Omega)'$ye aittir. Dahası, önceki örnekte olduğu gibi , ϕ'nin $L^2(\Omega)'$da dışbükey ve alt yarı sürekli olduğunu biliyoruz. Alt diferansiyel $\partial\phi \subset L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için gerekli açıklamalar Önerme 3.4'te yapılmıştır.

3.18 Önerme 3.4

Öncelikle,

$$\partial\varphi(u) = -\Delta u, \qquad \forall u \in D(\partial\varphi), \quad \textbf{(3.103)}$$

yazabiliriz, burada

$$D(\partial\varphi) = \left\{u \in H^2(\Omega);\ -\frac{\partial u}{\partial v} \in \beta(u), \quad bir\ tek\ \partial\Omega\right\} \quad \textbf{(3.104)}$$

olur ve, $\partial/\partial v$, $\partial\Omega$' nın konormal türevidir. Dahası, C_1, C_2 gibi bazı pozitif sabitler vardır öyle ki,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1\|u - \Delta u\|_{L^2(\Omega)} + C_2, \qquad \forall u \in D(\partial\varphi). \quad \textbf{(3.105)}$$

İspat:

$A: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$Au = -\Delta u, \quad u \in D(A),$$

$$D(A) = \left\{u \in H^2(\Omega);\ -\frac{\partial u}{\partial v} \in \beta(u), \quad bir\ tek\ \partial\Omega\right\}. \quad \textbf{(3.106)}$$

tarafından tanımlanan bir operatör olsun.

A, iyi tanımlanmıştır çünkü $\forall u \in H^2(\Omega), (\partial u/\partial v) \in H^{1/2}(\partial\Omega)'$dır. Kolayca görülüyor ki, $A \subset \partial\varphi'$dir. Nitekim Green formülüne göre,

$\forall u \in D(A)$ ve $v \in H^1(\Omega)$ için,

$$\int_\Omega Au(u - v)dx = \int_\Omega \nabla u(\nabla u - \nabla v)dx + \int_{\partial\Omega} \beta(u)(u - v)dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} j(u)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_{\partial\Omega} j(v)dx \quad (\mathbf{3.107})$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$(Au, u - v) \geq \varphi(u) - \varphi(v), \qquad \forall u \in D(A),\ \ v \in L^2(\Omega) \qquad \textbf{(3.108)}$$

olur. Burada, $(.,.)$ $L^2(\Omega)$' daki olağan skaler çarpımdır. Böylece $A = \partial\varphi$ olduğunu gösterebiliriz ve A'nın $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)'$de maksimal monoton olduğunu kanıtlamamız yeterli olur. Yani $R(I + A) = L^2(\Omega)$.

Bu amaca yönelik, $f \in L^2(\Omega)'$yı sabitleriz ve $u + Au = f$ denklemini ele alırız.

$$\begin{matrix} u - \Delta u = f & \Omega\,, \\ \frac{\partial u}{\partial v} + \beta(u) \ni 0 & \partial\Omega. \end{matrix} \qquad \textbf{(3.109)}$$

(3.29)'u aşağıdaki yaklaşımla tekrar inceleyecek olursak;

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial v} + \beta_\lambda(u) = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \qquad \textbf{(3.109)'}$$

burada, $B_\lambda = \lambda^{-1}(1 - (1 + \lambda\beta)^{-1}),\quad \lambda > 0.$ β_λ'nın Lipschitz sabiti $1/\lambda$ ile Lipschitz sürekliliği olduğunu hatırlayalım ve $\lambda \to 0\ için$

$$\beta_\lambda(u) \to \beta^0(u), \quad \forall u \in D(\beta) \qquad \textbf{(3.120)}$$

yazalım.

Öncelikle (3.109)' daki denklemin benzersiz bir çözümü $u_\lambda \in H^2(\Omega)$ olduğunu gösterelim. Aslında, $u \xrightarrow{T} v\big|_{\partial\Omega}$ operatörünü $L^2(\partial\Omega)'$dan $L^2(\partial\Omega)$ 'ya düşünelim. Burada $v \in H^1(\Omega)$ doğrusal sınır değer probleminin bir çözümüdür.

$$v - \Delta v = f \quad \Omega' da, \quad v + \lambda\frac{\partial u}{\partial v} = (1 + \lambda\beta)^{-1}u \quad \partial\Omega' da. \qquad \textbf{(3.121)}$$

Dahası, Green formülünden görebiliriz ki,

$$\|v - \bar{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla(v - \bar{v})|^2 dx + \frac{1}{\lambda}\int_{\partial\Omega} (v - \bar{v})^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\partial\Omega} ((1 + \lambda\beta)^{-1}u - (1 + \lambda\beta)^{-1}\bar{u})(v - \bar{v})dx, \qquad (\mathbf{3.122})$$

yazılır. Burada, $\{v, u\}$ ve $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ 3.121' i karşılar. Çünkü,

$$|(1 + \lambda\beta)^{-1}x - (1 + \lambda\beta)^{-1}y| \leq |x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \ \lambda > 0, \qquad \textbf{(3.123)}$$

yazabiliriz. Buradan da,

$$\|v-\bar{v}\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{2\lambda}\|Tu-T\bar{u}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\leq\frac{1}{\lambda}\|u-\bar{u}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}. \qquad (\mathbf{3.124})$$

olduğu anlamını çıkarabiliriz.

Çünkü, iz teoremi ile $v\to v\Big|_{\partial\Omega}$ haritası $H^1(\Omega)'dan \quad H^{1/2}(\partial\Omega)\subset L^2(\partial\Omega)'$ a süreklidir,

$$\|v-\bar{v}\|_{H^1(\Omega)}\geq C\|Tu-T\bar{u}\|_{L^2(\partial\Omega)} \qquad \mathbf{(3.125)}$$

ve dolayısıyla T haritası $L^2(\partial\Omega)'$nın daralmasıdır. Banach sabit nokta teoremini uygulayarak, $Tu=u$ olacak şekilde $u\in L^2(\partial\Omega)$ olduğu sonucuna varıyoruz ve bu nedenle (3.109)'daki problemin benzersiz bir çözümü $u_\lambda\in H^1(\Omega)$ vardır diyoruz.

$$\begin{cases} u_\lambda-\Delta u_\lambda=f & \Omega'da \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}=-\beta_\lambda(u_\lambda) & \partial\Omega'\text{da.} \end{cases} \qquad \mathbf{(3.126)}$$

Şimdi şunu not edelim $B_\lambda(u_\lambda)\in H^1(\Omega)$ (çünkü $B_\lambda\, Lipschitz$) ve bundan dolayı $\partial\Omega'$ya olan iz , $H^{1/2}(\partial\Omega)'$ a aittir. Doğrusal Neumann problemi için klasik düzenlilik teorisi ile $u_\lambda\in H^2(\Omega)$ olduğu sonucuna varıyoruz.

$$\|u_\lambda\|_{H^2(\Omega)}\leq C\big(1+\|f\|_{L^2(\Omega)}\big),\ \ \forall\lambda>0, \qquad \mathbf{(3.127)}$$

burada, $C,\lambda\ ve\ f'$den bağımsızdır.

Şimdi, 3.109'daki problemde varoluşu elde etmek için, (3.126)'da $\lambda\to 0$ sınırına geçiyoruz.

Aşağıdaki haritalamaya göre,

$$u\to\left(u\Big|\partial\Omega,\frac{\partial u}{\partial v}\Big|\,\partial\Omega\right)$$

$H^2(\Omega)'$dan $H^{3/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)'ya$ kadar süreklidir ve $H^2(\Omega)'nın\, H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$'ya kompakttır, burada gerekirse bir alt dizi seçerken $\lambda\to 0$ olarak kabul edebiliriz.

$$\begin{array}{ll} u_\lambda\rightharpoonup u & H^2(\Omega), \\ u_\lambda\to u & H^1(\Omega), \\ u_\lambda\big|_{\partial\Omega}\to u\big|_{\partial\Omega} & H^{3/2}(\partial\Omega)\subset L^2(\partial\Omega), \\ \frac{\partial u_v}{\partial v}\to\frac{\partial u}{\partial v} & H^{1/2}(\partial\Omega)\subset L^2(\partial\Omega). \end{array} \qquad (\mathbf{3.128})$$

Dahası, 3.127' deki denklemden $\{\beta_\lambda(u_\lambda)\}$ ile $L^2(\partial\Omega)$ sınırlı olduğu için, $\lambda \to 0$ olduğunu varsayabiliriz.

$$\beta_\lambda(u_\lambda) \rightharpoonup g \qquad L^2(\partial\Omega). \tag{3.129}$$

Açıkça görebiliriz ki, (3.126), (3.128) ve (3.129)'teki denklemlerden;

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} + g = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.130}$$

yazılır.

Bir tek $x \in \Omega \ için \ g(x) \in \beta\big(u(x)\big)$ olduğunu gösterelim.

Aslında, $\tilde{\beta} \subset L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ operatörü şöyle tanımlanmıştır:

$$\tilde{\beta} = \big\{[u,v] \in L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega); \quad v(x) \in \beta\big(u(x)\big) \ bir \ tek \ x \in \partial\Omega\big\} \tag{3.131}$$

ve açıkça maksimal monotondur.

$$\tilde{\beta}_\lambda(u)(x) = \beta_\lambda\big(u(x)\big),$$

$$\Big(\big(I + \lambda\tilde{\beta}\big)^{-1}u\Big)(x) = (1 + \lambda\beta)^{-1}u(x), \ \ bir \ tek \ x \in \partial\Omega. \tag{3.132}$$

3.129' dan;

$\tilde{\beta}_\lambda(u_\lambda) \rightharpoonup g, \quad (I + \lambda\tilde{\beta})^{-1}u_\lambda \rightharpoonup u$ ve $\tilde{\beta}_\lambda(u_\lambda) \in \tilde{\beta}\left(\big(I + \lambda\tilde{\beta}\big)^{-1}u_\lambda\right)$ yazılabilir.

Bundan dolayı, $g \in \tilde{\beta}(u)$sonucuna varabiliriz.

Burada, u'nun denklem (3.109) için bir çözüm olduğunu, $L^2(\Omega)$'da f keyfi olduğundan $A = \partial\varphi$ olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Son olarak (3.127)'de $\lambda \to 0$ olmasına izin vererek iddia ettiğimiz gibi (3.105)' deki denklemi elde ederiz.

3.19 Doğrusal Olmayan Difüzyon Operatörü

$\Omega, \mathbb{R}^N$'nin (düzgün bir sınır olan $\partial\Omega$ ile) sınırlı açık bir alt kümesi olsun.

Genellikle $\forall u \in H^1(\Omega)$ için, $H_0^1(\Omega)$ ile belirtilen Sobolev uzayında $\partial\Omega'$ da boş bir ize sahiptir ve $H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)$'nın dualidir.

Burada, $H^{-1}(\Omega)$'nın skaler çarpımı olan bir Hilbert uzayı olduğuna dikkat edelim.

$$\langle u, v\rangle = (J^{-1}u, v) \qquad \forall u, v \in H^{-1}(\Omega), \tag{3.133}$$

Yine burada, $J = -\Delta$, $H_0^1(\Omega)$'nın $H^{-1}(\Omega)$ üzerine kanonik izormorfizm ya da dualite eşlemesidir, ve $(.,.)$ $H_0^1(\Omega)$ ve $H^{-1}(\Omega)$ arasındaki eşleşmedir.

$j: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ alt yarı sürekli, dışbükey, uygun bir fonksiyon ve $\beta = \partial j$ olsun.

$\varphi: H^{-1}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_\Omega j\big(u(x)\big)dx & u \in L^1(\Omega) \ ve\ j(u) \in L^1(\Omega)\,, \\ +\infty & aksi\ halde. \end{cases} \tag{3.134}$$

Aşağıdaki Önerme 3.5' i incelersek, $\partial\varphi: H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ alt diferansiyelinin uygun sınır koşulları ile sadece $u \to -\Delta\beta(u)$ operatörü olduğunu görebiliriz.

Burada, $\lambda u - \Delta\beta(u) = f$ denklemi literatürde doğrusal olmayan difüzyon denklemi veya gözenekli ortam denklemi olarak bilinir.

3.20 Önerme 3.5

Farz edelim ki,

$$\lim_{|r|\to\infty} \frac{j(r)}{|r|} = +\infty. \tag{3.135}$$

Öyleyse, φ fonksiyonu $H^{-1}(\Omega)$'da dışbükey ve alt yarı süreklidir. Dahası $\partial\varphi \subset H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$'dır.

$$\partial\varphi = \{[u, w] \in \big(H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)\big) \times H^{-1}(\Omega);\quad w = -\Delta v,$$

$$v \in H_0^1(\Omega),\ \ v(x) \in \beta\big(u(x)\big),\ \ bir\ tek\ x \in \Omega\}. \tag{3.136}$$

şeklinde tanımlanır.

3.21 Önerme 3.6

Ω, R^N'nin açık bir alt kümesi olsun.

$w \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ ve u$\in H_0^1(\Omega)$ ise,

$$w(x)u(x) \geq -|h(x)|, \quad x \in \Omega \tag{3.137}$$

olur.

Bazı $h \in L^1(\Omega)$ için $wu \in L^1(\Omega)$ ve

$$w(u) = \int_\Omega w(x)u(x)dx \qquad \textbf{(3.138)}$$

(Burada , $w(u)$ fonksiyonel değerdir. $w \in H^{-1}(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$)

3.22 Eliptik Varyasyonel Eşitsizlikler

X onun duali olan X^* ile birlikte yansımalı bir Banach uzayı ve $A: X \to X^*$ monoton bir operatör olsun. (lineer ya da lineer olmayan)

$\varphi: X \to \bar{R}$ ve X , alt yarı sürekli dışbükey bir fonksiyon olsun. ($\varphi \not\equiv +\infty$.)

Şayet f, X'in verilen bir elemanı ise aşağıdaki problemi inceleyelim.

$y \in X'$i bulalım, öyle ki,

$$(y - z, Ay) + \varphi(y) - \varphi(z) \leq (y - z, f), \qquad \forall z \in X. \qquad \textbf{(3.139)}$$

Yazmış olduğumuz eşitsizlik, A operatörü ve φ dışbükey fonksiyonu ile ilişkili soyut bir eliptik değişken eşitsizliğidir, buna eşdeğer olarak şu şekilde de ifade edilebilir.

$$Ay + \partial\varphi(y) \ni f, \qquad (3.140)$$

Burada, $\partial\varphi \subset X \times X^{*\prime}$ ın alt diferansiyelidir. Özel olarak, $\varphi = I_K$ kapalı dışbükeyin bir gösterge fonksiyonudur.

$$I_K \begin{cases} 0 & x \in K, \\ +\infty & aksi\ takdirde \end{cases} \qquad (3.141)$$

buradan problem (3.139) şu hale gelir:

$y \in K$ bulunur, öyle ki;

$$(y - z, Ay) \leq (y - z, f), \qquad \forall z \in K. \qquad (3.142)$$

Burada A operatörünün kendisinin sürekli dışbükey bir fonksiyon olan $\psi: X \to R$ fonksiyonunun alt diferansiyeli $\partial\psi$ olduğunu fark etmek bize fayda sağlayacaktır.

Öyleyse (3.139)'daki varyasyon eşitsizliği minimizasyon problemine eşdeğerdir.

$$\min\{\psi(z) + \varphi(z) - (z, f);\ \ z \in X\} \qquad (3.143)$$

veya sorun olması durumunda (3.142) 'de

$$\min\{\psi(z) - (z, f); z \in K\}. \qquad (3.144)$$

yazılır.

3.23 Iraksaklık Tipi Doğrusal Olmayan Eliptik Problemler

Şimdi sınır değer problemini inceliyoruz,

$$\lambda y - div_x \beta\big(\nabla y(x)\big) \ni f(x), \qquad x\Omega, \qquad (3.145)$$

$$y = 0, \qquad \partial\Omega, \qquad (3.146)$$

burada Ω, düz sınırı $\partial\Omega$ olan R^N' in sınırlı ve açık bölgesidir, f fonksiyonu $L^2(\Omega)'$dadır ve λ negatif olmayan bir sabittir.

$\beta: R^N \to 2^{R^N}$, $R^N \times R^N$' de $0 \in \beta(0)$ olacak şekilde maksimal monoton bir grafiktir.

(3.145)' deki denklem; difüzyon akısının q , yerel yoğunluğun y , gradyanının ∇y, doğrusal olmayan bir fonksiyonunda difüzyon benzeri süreçlerin denge durumunu tanımlar. β'nın potansiyel bir fonksiyon olduğu özel durumda, ($\beta = \nabla j$, $j: R \to R$) fonksiyonel $\phi(y) = \int_\Omega j(\nabla y)dx + (\lambda/2) \int_\Omega y^2\, dx$ sistemin enerjisi olarak görülebilir ve denklem (3.145) , ϕ'nin kritik noktalarını tanımlar.

(3.145) denkleminin eliptik karakteri β üzerinde monotonluk varsayımı ile verilmiştir. (3.145) denklemi ve onun sınır koşulu (3.146) oldukça doğrusal olmayabilir ve bu nedenle varlık açısından beklenebilecek en iyi çözüm zayıf bir çözümdür.

4
SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmamız boyunca maksimal operatörler ile monoton operatörleri bir arada kullanarak Banach uzaylarındaki dinamiklere etkilerini incelemiş bulunmaktayız. Elde ettiğimiz sonuçların, bu yönde yapılacak olan çalışmalara ışık tutarak, literatürde önemli bir yol gösterici olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

[1] E.Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Rs Applications, New York, 1990.

[2] G.Minty, Monotone(nonliner) Operators in Hilbert Spaces, 1962.

[3] G.Minty, On the generalization of a direct method of the calculus of variations, 1967.

[4] F.Browder, Problemes Nonlinearies, Less Presses de'lUniversite de Mont'real, 1966.

[5] F.Browder, Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces, Nonlinear Functional Analysis, 1970.

[6] H. Brezis, Problemes unilateraux, ´ J. Math. Pures Application, 1972.

[7] H. Brezis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E. Zarantonello (Ed.), Academic Press, New York, 1971.

[8] H. Brezis, Equations et inequations nonlin ´ eaires dans les espaces vectorielles en dualit ´ e,´ Ann. Institute Fourier, 18 (1968).

[9] J.L. Lions, Quelques Methodes de R ´ esolution de Probl ´ emes Nonlineaires ´ , Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

[10] R.T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1969.

[11] R.T. Rockafellar, On the maximal monotonicity of subdifferential mappings,

Pacific J. Math., 33 (1970).

[12] R.T. Rockafellar, Local boundedness of nonlinear monotone operators, Michigan Math. J., 16 (1969).

[13] J.J. Moreau, Proximite et dualit ´ e dans un espace hilbertien, ´ Bull. Soc. Math. France, 93 (1965).

[14] J.J. Moreau, Fonctionnelle Convexes, Seminaire sur les equations aux d ´ eriv ´ ees partielles, ´ College de France, Paris 1966–1967.

[15] . D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[16] J.L. Lions, Quelques Methodes de R ´ esolution de Probl ´ emes Nonlin ` eaires ´ , Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

[17] V. Barbu, Optimal Control of Variational Inequalities, Pitman, London, 1983.

[18] V. Barbu, Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems, Academic Press, San Diego, 1993.

[19] H. Brezis, G. Stampacchia, Sur la regularit ´ e de la solution d'in ´ equations elliptiques, ´ Bull. Soc. Math. France, 95 (1968).

[20] H. Brezis, M.G. Crandall, A. Pazy, Perturbations of nonlinear maximal monotone sets, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1970).

[21] . H. Brezis, F. Browder, Some properties of higher order Sobolev spaces, J. Math. Pures Appl., 61 (1982).

[22] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[23] G. Duvaut, J.L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[24] G. Duvaut, J.L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[25] A. Friedman, Variational Principles and Free Boundary Problems, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[26] L.I. Hedberg, Two approximation problems in function spaces, Ark. Mat., 16 (1978).

[27] R. Kobayashi, Y. Giga, Equations with singular diffusivity, J. Statistical Physics, 95 (1999).

[28] R.T. Rockafellar, On the maximality of sums of nonlinear operatorsw, Trans. Amer. Math. Soc., 149 (1970).

[29] R.T. Rockafellar, Integrals which are convex functional II, Pacific J. Math., 39 (1971).

[30] R.T. Rockafellar, Integral functionals, normal integrands and measurable selections, Nonlinear Operators and the Calculus of Variations, J.P. Gossez, E. Dozo, J. Mawhin, L. Waelbroeck (Eds.), Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.

[31] . L.I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, Physica, D, 60 (1992).

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

[1] E.Sinen, Banach Uzaylarında Maksimal Monoton Operatörler, International Sypmposium of Scientific Research and Innovative Studies (ISSRIS) , Balıkesir, 2021.