T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM ARAMA ALGORİTMASI

Nurcan BOZKURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

Temmuz, 2022

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM ARAMA ALGORİTMASI

Nurcan BOZKURT tarafından hazırlanan tez çalışması 18.07.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üye. Abdullah SÖNMEZ, Üye
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kuantum Arama Algoritması başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Nurcan BOZKURT

İmza

Aileme, dostlarıma,

kıymetli hocalarıma

ve

değerli öğrencilerime

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca en çok desteği vererek okumanın ne kerte mühim bir mesele olduğunu her an hatırlatan ve çokça kahrımı çeken kıymetli, değerli, biricik canım annemle babama; her gönül yorgunluğumda manen desteğini hiçbir zaman esirgemeyen dostum Betül Artık'a ve kadim arkadaşlarıma; mezunu olduğum liseden üniversiteye tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca her türden okumalarla üretkenliğin önemini vurgulayarak destekleri, katkıları ve değerli sözleriyle yanımda olan tüm kıymetli hocalarıma burada bir kez daha teşekkür ediyor; karınca kararınca da olsa matematik ilim dünyasına kendi ana dilimizde yardımcı bir kaynak olacak nitelikte bir ürün bırakıyorum. A. Cahit Zarifoğlu'nun dediği gibi takdir-i ezele teslimiz ama gayrete de aşığız.

Sonuçta gayret bizden, takdiri Rabbimizdendir…

Nurcan BOZKURT

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii
ŞEKİL LİSTESİ viii
ÖZET ix
ABSTRACT xi
1 GİRİŞ 1
1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 4
1.3 Orijinal Katkı 4
2 KUANTUM MEKANİĞİN LİNEER CEBİR TEMELLERİ 5
2.1 Vektör Uzayları 5
2.2 İç Çarpım Uzayları 9
2.3 Lineer Operatörler ve Matrisler 12
2.4 Tensör Çarpım 16
3 MATEMATİKSEL BAKIŞ AÇISI İLE KUANTUM MEKANİĞİ 19
3.1 Kuantum Mekaniğin Matematiksel Postulatları 21
3.1.1 Durum Uzayı Postulatı 21
3.1.2 Zamansal Değişim Postulatı 30
3.1.3 Ölçüm Postulatı 35
3.1.4 Bileşik Sistem Postulatı 43
3.2 İşlemsel Model Olarak Kuantum Devreleri 57
3.3 Kuantum Arama Algoritması yahut Grover'in Arama Algoritması 65
3.3.1 Klasik Aramadan Kuantum Aramaya Geçiş 69
3.3.2 Grover Yinelemesi 72
3.3.3 Geometrik Açıdan Grover Yinelemesinin Hız Performansı 73
4 SONUÇ VE ÖNERİLER 84
KAYNAKÇA 85
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 86

SİMGE LİSTESİ

$\|q\rangle$	Kuantum durumu temsil eden ket vektörü
$\langle q\|$	Ket vektörün eşlenik transpozu bra vektörü
$\langle x\|y\rangle$	$\|x\rangle$ ve $\|y\rangle$ vektörlerinin iç çarpımı braket
H_n	n-boyutlu Hilbert uzayı
C^n	n-boyutlu Karmaşık vektör uzayı
$\otimes$	Tensör çarpımı

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 Çift yarık deneyi gözlemleri 2
Şekil 1.2 Işın ayrıştırıcılı kuantum deneyi 3
Şekil 3.1 Deterministik bir klasik bitin '0' ve '1' durumu 25
Şekil 3.2 p_0 ve p_1 olasılıklarına sahip olasılıksal klasik bit durumu 26
Şekil 3.3 Kartezyen koordinatlarına göre $|\psi\rangle$ durumlu bir kübitin Bloch küresi üzerindeki temsili [2] 29
Şekil 3.4 Sırasıyla deterministik klasik bit, olasılıksal klasik bit ve kuantum bitin geometrik durumları [1] 29
Şekil 3.5 $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları ile süperpozisyon durumun soldan sağa Bloch küreleri [8] 30
Şekil 3.6 Pauli X kapısının $|0\rangle$ durumunu $|1\rangle$ durumuna döndürmesi 31
Şekil 3.7 (a) Bir Bloch küresinin yüzeyindeki pür durumların temsili (b) Yoğunluk operatörü ile Bloch küresinin yüzeyindeki pür durumların ve içindeki karma durumların temsili [2] 54
Şekil 3.8 Bir kuantum devre modeli [1] 58
Şekil 3.9 Bir kuantum durumun kuantum devre diyagramındaki ölçüm şeması 59
Şekil 3.10 Kuantum devre modelinde Hadamard kapısı 60
Şekil 3.11 Bir kuantum devresindeki c kontrol kübit ve t hedef kübit girdilerine sahip CNOT kapısı [1] 62
Şekil 3.12 (a) Üç CNOT kapı dizisi ile kuantum takas işlemi (b) Bir devrede takas işlemi temsili [5] 63
Şekil 3.13 CNOT ve Hadamard kapıların bileşkesinden Bell durumlarını üreten kuantum devre modeli 63
Şekil 3.14 Kuantum devre modelinde Toffoli kapısı 63
Şekil 3.15 Kuantum devre modelinde Fredkin kapısı 64
Şekil 3.16 A kümesinin elemanları için faz ve olasılık genliklerinin değişimi [2] .. 67
Şekil 3.17 H_8 uzayındaki taban durumların olasılık genliklerinin genlik artırma sonucu değişimleri [2] 72
Şekil 3.18 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ ortogonal taban durumlara göre $|\psi\rangle$ durumun açısal temsili 75
Şekil 3.19 $|\psi\rangle$ durumu için faz değişimi sonrası genlik artırma sonucu oluşan bir G Grover yinelemesi 76
Şekil 3.20 Üç çekmeceli bir kutunun anahtar bulundurma durumları 81

ÖZET

Kuantum Arama Algoritması

Nurcan BOZKURT

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

Yaşadığımız dünyada hayatımızın neredeyse her safhasında bulunan bilgisayarlar birçok işte kullanılmakla önem arzetmektedir. Klasik bilgisayarlarla uğraşırken elimizde iki olası durum vardır; kapalı veya açık, yukarı veya aşağı anlamına gelen 0 ya da 1 değerine bit adı verilir. Klasik bilgisayarların aksine kuantum dünyasında her iki durumun mümkün olduğu süperpozisyon durumu vardır. Bu süperpozisyon durum, kuantum bilgisayarlarda kübit (qubit) adı verilen kuantum bitlerini oluşturur. Kuantum bitler, klasik bilgisayarlardaki bitlerden farklı olarak hem 0 hem de 1 değerini tutabilmektedir. Kuantum bitlerin, aynı anda bu iki durumu da tutabilme durumuna, süperpozisyon adı verilir. Kuantum bitleri matematiksel olarak "$|q\rangle$" şeklinde gösterilmektedir. Bu gösterimde "q" kübitin durumunu göstermektedir. Hem 0 hem de 1 değerini olasılık katsayılarına göre tutan her bir kuantum biti, matematiksel olarak $|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$; $a, b \in C$; $|a|^2 + |b|^2 = 1$ şeklinde gösterilir.

Yapay zeka fikrini besleyen kuantum mekaniği, atom ve atom altı boyutlarda baş gösteren ve sezgisel yöntemlerle anlamlandırılamayan problemlerin çözülebilmesine olanak tanıyan matematiksel bir modeldir. Doğanın yapı taşlarının (atomlar, moleküller, fotonlar, vb.) davranışlarının tanımına atıfta bulunan kuantum mekaniğinin matematiksel temelleri çoğunlukla temel mantık, lineer

cebir ve karmaşık sayılar kullanılarak ifade edilmektedir. Hilbert uzayları ve bu uzaylar üzerinde tanımlı operatörlere dayanan kuantum mekaniğin matematiksel modellemesi, dört postulat üzerine kurgulanır. Dört postulata göre yapılan kuantum hesaplamalarıyla birçok kuantum algoritması geliştirilerek kuantum bilgisayarların hazırlanmasına zemin oluşturur. Kuantum bilgisayarlar, kuantum mekaniğin sunduğu matematiksel modeli kullanarak günümüzde hali hazırda kullanılmakta olan klasik bilgisayarlardan çok daha hızlı bir şekilde hesaplama yapılabilmesine olanak tanımaktadır. Kuantum algoritmalarının özü temelde kuantum arama algoritmasına bağlıdır. Bu sebeple kuantum algoritmaların anlaşılması ve yenilerinin üretilebilmesi bakımından arama algoritması önem arz etmektedir. Grover'in kuantum arama algoritması, bu noktada resme dahil olarak kuantum durumların oluşturduğu bütünsel yapıyı modeller ve kuantum hesaplamada hız ve hesaplama gücünün ortaya çıkmasında önemli bir rol oynar. Böylelikle geliştirmiş olduğu arama algoritmasıyla Grover, klasik arama algoritmalarına nazaran çok daha hızlı bir çözüm ortaya koyar.

Anahtar Kelimeler: Kübit, kuantum matematiği, kuantum bilgisayar, kuantum arama algoritması.

ABSTRACT

Quantum Search Algorithm

Nurcan BOZKURT

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

Computers, which are present in practically every aspect of our life, are essential in today's world since they are employed in a variety of occupations. When working with traditional computers, we have two options: a bit is a value of 0 or 1, which implies off or on, up or down. In contrast to classical computers, quantum computers have a superposition state in which both states are feasible. In quantum computers, this superposition condition produces quantum bits known as qubits. Unlike bits in traditional computers, quantum bits may carry both 0 and 1 values. The state of quantum bits holding both these states at the same time is called superposition. Quantum bits are mathematically represented as "$|q\rangle$". In this notation, "q" denotes the state of the qubit. Each quantum bit holding both 0 and 1 according to their probability coefficient is mathematically represented as $|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle\ ; a, b \in C; |a|^2 + |b|^2 = 1$.

Quantum mechanics, which feeds the idea of artificial intelligence, is a mathematical model that allows solving problems that arise in atomic and subatomic dimensions and cannot be understood by intuitive methods. The mathematical foundations of quantum mechanics, which refer to the description of the behavior of nature's building blocks (atoms, molecules, photons, etc.), are often expressed using basic logic, linear algebra, and complex numbers. The

mathematical modeling of quantum mechanics based on Hilbert spaces and operators defined on these spaces is based on four postulates. Many quantum algorithms are generated as a result of quantum calculations based on the four postulates, and they serve as the foundation for the development of quantum computers. Quantum computers, which utilize the mathematical model provided by quantum mechanics, may do computations far quicker than traditional computers. Quantum algorithms are essentially defined by the quantum search algorithm. As a result, the search algorithm is crucial for understanding quantum algorithms and developing new ones. Grover's quantum search algorithm is included in the picture at this point, models the holistic structure formed by quantum states and plays an important role in the emergence of speed and computational power in quantum computing. Thus, the search algorithm developed by Grover provides a much faster solution than classical search algorithms.

Keywords: Qubit, quantum mathematics, quantum computer, quantum search algorithm.

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Değişen ve sürekli gelişim içerisinde olan dünyamızda bilim insanları teknolojinin birçok alanına katkı sağlamaktadır. Yaşadığımız bilgi çağında günbegün teknoloji ilerleyerek gelişim göstermektedir. Günümüzün önemli görülen değerleri arasında dünyayı etkileyen her şeyden anında ve hızlı bir şekilde herhangi bir disiplin hakkında bilgi almak yer alır. Bu bağlamda günümüz sorunlarının çoğunun bilim ve teknolojiyle çözüldüğü aşikârdır. Bilimsel ve günlük ihtiyaçlarımız için evde, ofiste, okulda, hastanede ve birçok kamu alanında iş yükünü hafifleten Yapay Zeka tabanlı programlar olarak adlandırılan akıllı uygulamaları kullanırız.

Klasik fiziğin merkezinde olan Newton fiziğine göre 1800'lere kadar ışığın parçacıklardan oluştuğu düşünülüyordu. Bu durum oldukça sezgiseldi. Öyle ki ışığın bir silahtan çıkan mermiler gibi düz bir çizgide hareket ettiğini görüyorduk. Ancak ışığın, madde ve gerçekliğin ötesinde atomik ve fotonik açıdan daha deteylı incelenmesi gerekiyordu. Işığın tuhaf davranışı ilk kez 1801 yılında İngiliz hekim Thomas Young tarafından düzenlenen çift yarık deneyi ile gösterildi.

Çift yarık deneyi ile fotonun ilginç davranışını gözlemlemek amacıyla elektronlar, yani tekil parçacıklar birbirine çok yakın ve çok ince iki deliğe, tek tek ateşlenir. Bu durumda parçacıklar, normalde bilye gibi nesneler fırlatıldığında beklenenin aksine, deliğin öteki tarafındaki perdede iki sütun halinde birikmez. Bunun yerine, çizgili bir desen oluşturur (Şekil 1.1). Bunun sebebi, birbiriyle girişim yapan (üst üste binen-süperpozisyon) dalgalar gibi davranması olarak açıklanır. Ancak bu davranış, dışarıdan bir gözlemcinin onları gözlemlemesine, yani yerlerini belirlemeye kalkana kadar sürer. Elektronların yeri tespit edilmeye çalışıldığında desen kaybolur ve tıpkı parçacık davranışı sonucunda görmeyi beklediğimiz gibi iki sütun olarak birikmeye başlar. Yani bir parçacık-dalga ikiliği meydana gelir. Parçacık-dalga ikiliği fenomeni, bir kuantum nesnesinin dalga gibi davranması;

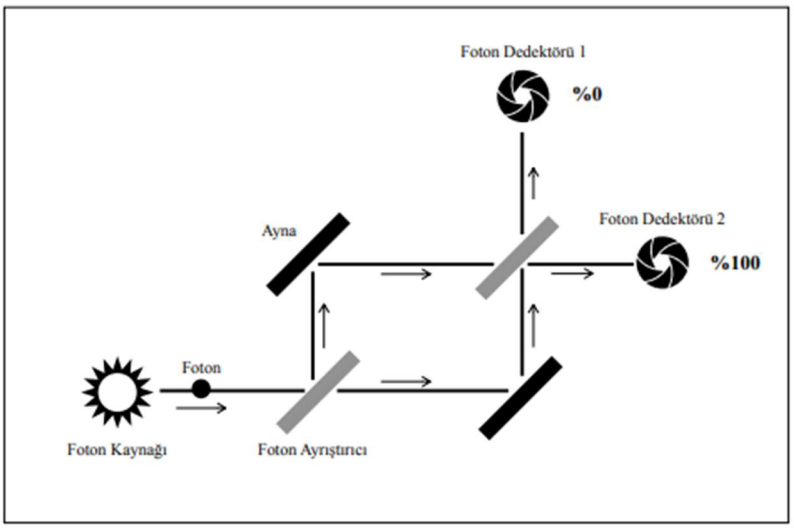
ancak o dalganın yerini belirlemeye kalktığınızda bu özelliğin kaybolarak parçacık gibi davranmaya başlamasıdır.



Şekil 1.1 Çift yarık deneyi gözlemleri

Çift yarık deneyi, klasik fizik anlayışının çok ötesinde kuantum fizik anlayışını derinleştirerek parçacık-dalga ikilisinin uygulamaları hakkında yeni fikirler üretmeyi sağlar. Böylelikle çift yarık deneyi, 1900'lü yılların başına doğru, maddenin atomik ve fotonik parçacıklarını ele alan "Kuantum Mekaniği" adı verilen yeni bir dönemin doğmasına zemin hazırlamıştır. Bir fizik dalı olan kuantum mekaniği, atom altı parçacıkları ve onların etkileşimlerini inceleyen bir temel fizik ve bilim dalıdır. Kuantum mekaniği sadece atomların ve moleküllerin davranışını doğru bir şekilde tanımlamakla kalmaz, aynı zamanda doğayı her ölçekte tanımlayabilir. Evrenin işleyişinden, evlerimizdeki bilgisayarlara, mutfağımızdaki mikrodalgadan banka cüzdanımızın ve internetimizin güvenliğine, nükleer enerjiden sağlık sektörüne kadar hayatımızın birçok alanında yardımcı olabilecek bir alandır. Bu manada kuantum mekaniği, fiziksel teorilerin inşası için matematiksel bir modelleme olarak kullanılabilir.

Kuantum mekaniğinin gözlemlenebildiği en iyi örneklerden biri Şekil 1.2'de verilmiş olan ışın ayrıştırıcılı kuantum deneyidir. Bu deney; bir foton kaynağı, iki ışın ayrıştırıcı, iki ayna ve iki de foton dedektörünün Şekil 1.2'deki gibi yerleştirilmesi ile hazırlanmış bir düzenekten oluşmaktadır [1].



Şekil 1.2 Işın ayrıştırıcılı kuantum deneyi

Kaynaktan çıkan fotonlar ışın ayrıştırıcıya çarptıklarında, %50 olasılıkla içinden geçerek yollarına devam edebilecekleri gibi %50 olasılıkla da yansıyarak devam edebilirler. Bu durum göz önünde bulundurularak verilen düzenek içerisinde kaynaktan atılan fotonların izleyebilecekleri yollara bakıldığında; fotonların %50 olasılıkla birinci dedektöre, %50 olasılıkla ise ikinci dedektöre ulaşabilecekleri sezgisel bakış açısıyla tahmin edilebilmektedir. Fakat deney yapıldığında, deneyin ne kadar tekrarlandığına bağlı olmaksızın fotonların her zaman yani %100 olasılıkla ikinci dedektöre ulaştığı gözlemlenmektedir. Bu durum, ilk bakışta anlamlandırılamasa da kuantum mekaniğinin sunduğu matematiksel model kullanılarak çözülebilmektedir [1]. Bu minvalde kuantum mekaniğin matematiksel modellemesine göre yapılan kuantum hesaplamaları yardımıyla kuantum bilgisayarlar geliştirilir.

Kuantum bilgisayarlar tanım gereği bilgisayım işlemlerini kuantum mekaniğin matematiksel hesaplamalarına göre yapar. Klasik bilgisayarlarda bit değerleri sadece “0” veya “1” olabilirken, kuantum mekaniğin özellikleri ile kuantum bilgisayarlarda bit değerleri belli olasılıklarla “0”, belli olasılıklarla da “1” olabiliyor. Kuantum bitlerin (kübit) fiziksel uygulamalarından olan kuantum bilgisayarların çalışma prensibi genel olarak atom altı parçacıkların kuantum süperpozisyonuna ve kuantum dolanıklığına dayanır. Süperpozisyon özelliği sayesinde kübitlere kodlanabilen bilgi miktarı üssel olarak artmaktadır. Bu sayede

aynı anda birden fazla hesaplama işlemini yapabilme avantajı kuantum bilgisayarları klasik bilgisayarlardan çok daha üstün kılar. Bu avantaj ile büyük veri analizlerinde, yapay zeka uygulamalarında, şifre çözümlemelerinde, optimizasyon problemlerinde, malzeme bilimlerinde, biyoteknoloji uygulamalarında kuantum bilgisayarların üstünlük sağlaması bekleniyor. Bu bağlamda kuantum bilgisayarları ile uyumlu algoritma ve uygulamaların geliştirilmesi en az kuantum bilgisayar geliştirmek kadar önemlidir. Kuantum algoritmaların yenilerinin üretilmesi ve geliştirilmesi açısından Grover tarafından kuantum arama algoritması geliştirilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bir fizik kuramının matematiksel yapısı çok önemlidir. Kuramı anlayabilmenin en iyi yollarından biri ise bu yapıyı çözümlemekten geçer. Bu yapı, kuramın hem yalın bir tasvirini verir hem de işleyişi ve öngörüleri konusunda kesin bilgi sağlar. Çoğu zaman fiziksel kavramlar ve formüller üzerinde yoğunlaşıp denklemler çözmekle uğraşırken, oldukça önemli olan matematiksel yapı gözden kaçabilir. Bu çalışmada kuantum kuramın üzerine kurgulandığı kuantum mekaniğinin matematiksel modellemesi ve hesaplamaları üzerinde durulur. Kuantum mekaniğinin üzerine kurulu olduğu temel matematik ise lineer cebir ve vektör uzaylarıdır. İlk olarak genel manada vektör uzayları konu edilerek kuantum mekaniği için gerekli matematiksel araçlar işlenmektedir. Akabinde ise, kuantum mekaniğinin matematiksel postulatları verilerek kuantum algoritmaları için temel teşkil eden kuantum arama algoritması inşa edilir. Böylelikle matematiğin kuantum kuramında nasıl kullanıldığı açıklanarak var olan çalışmaların anlaşılması ve yenilerinin üretilebilmesi için bir temel oluşturulmuştur.

1.3 Orijinal Katkı

Kuantum bilgisi ve hesaplamaları üzerine yapılan araştırma ve incelemelerle var olan kuantum hesaplarını anlamlandırabilme ve yeni kuantum algoritmaları geliştirebilmeye yönelik Grover'in kuantum arama algoritması sunulur.

2
KUANTUM MEKANİĞİN LİNEER CEBİR TEMELLERİ

Bu bölümde, kuantum mekaniğini derinlemesine incelemek ve daha anlamlı kılmak için gereken bir dil olan lineer cebirin temel kavramlarına değineceğiz.

2.1 Vektör Uzayları

Tanım 2.1. Bir $(G,*)$ grubu aşağıdaki aksiyomlar sağlanacak şekilde bir $*$ ikili işlemine göre kapalı bir G kümesidir:

- $\forall a,b,c \in G$ için

$$(a*b)*c = a*(b*c), \qquad * \text{ nin birleşmeliliği} \tag{2.1}$$

- $\forall x \in G$ için G de

$$e*x = x*e = x, \qquad e* \text{ için birim eleman} \tag{2.2}$$

  olacak şekilde bir e elemanı vardır.

- $\forall x \in G$ için G de

$$a*a' = a'*a = e, \qquad a \text{ nın } a' \text{ tersi} \tag{2.3}$$

  olacak şekilde bir a' elemanı vardır.

Eğer $(G,*)$ grubunda $*$ işlemi değişimli ise, yani her $a,b \in G$ için $a*b = b*a$ ise $(G,*)$ grubuna değişimli grup denir.

Örnek 2.2. C karmaşık sayılar kümesi bilinen $\cdot$ çarpma işlemi ile bir grup oluşturur. Gerçekten de, karmaşık sayıların çarpımı birleşmelidir ve çarpımın birimi olan 1'i içerir.

$$e^{i\beta} \in C \text{ için } e^{i\beta} \cdot e^{i(2\pi-\beta)} = e^{2\pi i} = 1 \tag{2.4}$$

eşitliği ise C'nin her elemanının bir tersi olduğunu gösterir.

Tanım 2.3. Boştan farklı bir H kümesi ile bu küme üzerinde iki $\top$ ve $\perp$ iç işlemleri tanımlansın. Eğer

- $(H, \top)$ ikilisi bir değişmeli grup
- $\perp$ işlemi birleşmeli
- $\perp$ işlemi $\top$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılımlı, yani;

$$\forall a, b, c \in H \; için \; a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c)$$
$$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c) \tag{2.5}$$

özellikleri sağlanıyorsa $(H, \top, \perp)$ üçlüsünün oluşturduğu bu cebirsel yapıya halka denir. Ayrıca $\perp$ işlemine göre birim eleman varsa halkaya birimli halka; eğer $\perp$ işlemine göre de değişme özelliğine sahipse halkaya değişmeli halka denir.

Örnek 2.4. $(Z, +, .)$, $(Q, +, .)$, $(R, +, .)$, $(C, +, .)$ birer halkadır. Çünkü bu kümeler verilen toplama işlemine göre birer değişmeli grup oluştururken çarpma işleminin birleşme ve toplama üzerine dağılma özelliğine de sahiptirler. Dolayısıyla bu cebirsel yapılar özellikleri sağladığından bu üçlüler birer halkadır.

Tanım 2.5. $(C, \top, \perp)$ halkası verilsin. C halkasının birim elemanı e olmak üzere $C^* = C - \{e\}$ kümesi için $(C^*, \perp)$ ikilisi bir grup ise $(C, \top, \perp)$ cebirsel yapısına aykırı cisim denir. Eğer $(C^*, \perp)$ ikilisi bir değişmeli grup ise $(C, \top, \perp)$ üçlüsüne cisim denir.

Örnek 2.6. $(R, +, .)$ birimli ve değişimli bir halkadır R reel sayılar kümesinin ' $+$ ' işlemine göre birim elemanı '0' ve '.' işlemine göre birim elemanı '1' dir. $R^* = R - \{0\}$ kümesi için $(R*, .)$ ikilisi bir değişmeli gruptur. Böylece $(R, +, .)$ cebirsel yapısı bir cisim oluşturur. Ancak $(Z, +, .)$ bir cisim değildir.

Tanım 2.7. Boştan farklı bir V kümesi ve $(C, +, .)$ cismi için; V üzerinde bir

$$\odot : C \times V \to V$$
$$(c, a) \to c \odot a \tag{2.6}$$

dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa V'ye vektör uzayı denir.

Her $a, b \in V$ ve $c_1, c_2 \in C$ için:

I. $(V,\oplus)$ bir değişmeli grup

II. $c_1 \odot (a \oplus b) = (c_1 \odot a) \oplus (c_1 \odot b)$

III. $(c_1 + c_2) \odot a = (c_1 \odot a) \oplus (c_2 \odot a)$

IV. $(c_1 c_2) \odot a = c_1 \odot (c_2 \odot a)$

V. $(C, +, .)$ cisminin ikinci işleme göre birim elemanı e olmak üzere;

$$\forall a \in V \text{ için } e \odot a = a \odot e = a \text{ dır.}$$

Örnek 2.8. $R^n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i)\,; x_i \in R, 1 \leq i \leq n\}$ sıralı n-lilerin kümesi standart vektör uzayıdır. Özel olarak, R^1 uzayı reel eksen; R^2 bir düzlem; R^3 reel vektör uzayıdır.

$K_n^m = A = [a_{ij}]\,; a_{ij} \in K\,; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ şeklinde tanımlanan $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi, matrislerde toplama ve skalarla çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır.

Burada vurgulamamızı gerektiren önemli hususlardan biri kuantum mekaniğin üzerine kurgulandığı cebirsel yapı $C^n = C \times C \times \dots \times C\,; \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_i)\,;\, z_i \in C\}$ (özel olarak ileride göreceğimiz sonlu boyutlu H_n Hilbert uzayı) olan kümesi de bir vektör uzayıdır. Herhangi bir vektör uzayının elemanı olan vektörleri bir kuantum sisteminde ifade etmek için, fizikçiler 1939 yılında Paul Dirac tarafından sunulan 'bra-ket' notasyonu olarak da bilinen Dirac temsilini kullanırlar. Bundan sonra biz de tez boyunca aksi belirtilmedikçe Dirac temsilini kullanarak ilerleyeceğiz.

Kuantum sistemindeki bir $\boldsymbol{z}$ vektörü 'ket' olarak adlandırılan $|z\rangle$ ile temsil edilir;

$$|z\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{bmatrix} \leftrightarrow \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Bir $|z\rangle$ vektörünün (ket) eşlenik transpozu (dual vektör) 'bra' olarak isimlendirilir ve $\langle z|$ olarak gösterilir, kısacası $|z\rangle = (\langle z|)^{\dagger}$.

Tanım 2.9. V, C cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $G = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$, V deki bir vektör kümesi olsun. $\forall |v\rangle \in V$ için $|v\rangle = \sum_1^n c_i |v_i\rangle$ olacak şekilde $c_i \in C$ var ise

yani V deki her vektör G nin elemanlarının bir lineer birleşimi (kombinasyonu) olarak yazılabiliyorsa G kümesi V vektör uzayını geriyor veya üretiyor denir.

Örnek 2.10. C^2 vektör uzayı için $|v_1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $|v_2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ vektörleri C^2 vektör uzayını geriyor. Gerçekten de, C^2 deki herhangi bir $|v\rangle = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ vektörü, $|v\rangle = a_1|v_1\rangle + a_2|v_2\rangle$ olacak şekilde $|v_1\rangle$ ve $|v_2\rangle$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılabilmektedir.

Not 2.11. Bir vektör uzayı birçok farklı geren kümeye sahip olabilir. Önceki örnekteki C^2 vektör uzayı için,

$$|x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, |x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

vektörlerinden oluşan küme de C^2 vektör uzayını gerer. Öyle ki, C^2 deki herhangi bir $|v\rangle = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ vektörü,

$$|v\rangle = \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}|x_1\rangle + \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}|x_2\rangle \tag{2.9}$$

olacak şekilde $|x_1\rangle$ ve $|x_2\rangle$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak da yazılabilmektedir.

Tanım 2.12. V, C cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $S = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$, V'deki bir vektör kümesi olsun. $c_1, c_2, \dots, c_n \in C$ için

$$c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle + \cdots + c_n|v_n\rangle = 0 \tag{2.10}$$

eşitliği ancak $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \in C$ tek durumunda sağlanıyor ise $S = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ vektör kümesi lineer bağımsızdır denir. Aksi halde, bu eşitlik $\exists c_i \neq 0$ için sağlanıyorsa S vektör kümesi lineer bağımlıdır denir.

Tanım 2.13. V bir vektör uzayı ve $B = \{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$, V'deki bir vektör kümesi olsun. Eğer,

i. V deki her eleman B kümesindeki elemanların lineer kombinasyonu biçiminde yazılabiliyor, yani $\forall|v\rangle \in V$ için $|v\rangle = \sum_1^n c_i|b_i\rangle$ ve

ii. $B = \{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$ kümesi lineer bağımsız ise, B kümesine V vektör uzayının tabanı(bazı) denir.

Bir vektör uzayının tabanındaki elemanların sayısına vektör uzayının boyutu denir ve $boyV = n$ ile gösterilir.

2.2 İç Çarpım Uzayları

Tanım 2.14. V bir karmaşık vektör uzayı olmak üzere, V üzerinde $\langle .,. \rangle : V \times V \to C$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise bir iç çarpım fonksiyonudur:

1. Hermit özelliği: $\forall v, w \in V$ için $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ (2.11)

2. Bilineerlik özelliği: $\forall v, w, z \in V$ için ve $\forall c \in C$ için

$$\begin{gathered}\langle v + w, z\rangle = \langle v, z\rangle + \langle w, z\rangle \\ \langle v, w \ + \ z\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, z\rangle \\ \langle cv, w\rangle = c\langle v, w\rangle \\ \langle v, cw\rangle = \overline{c}\langle v, w\rangle\end{gathered} \tag{2.12}$$

3. Pozitif tanımlılık: $\forall v \in V$ için $\langle v, v\rangle \geq 0$ ve $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (2.13)

Bu durumda V vektör uzayına bir iç çarpım uzayı veya Hermit uzayı denir.

Örnek 2.15. R^nstandart reel vektör uzayı olsun. $X = (x_i), Y = (y_i) \in R^n$ için

$$\langle .,. \rangle : R^n \times R^n \to R \; ; \langle X, Y\rangle = \sum_1^n x_i y_i \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona R^n üzerinde standart iç çarpım yahut Öklid iç çarpımı olarak adlandırılır. Ayrıca R^n kümesi öklid iç çarpım fonksiyonu ile birlikte bir iç çarpım uzayı olup Öklid Uzayı olarak adlandırılır.

Örnek 2.16. $X = (x_i), Y = (y_i) \in C^n$ olmak üzere, C^n üzerinde tanımlanan

$$\langle .,. \rangle : C^n \times C^n \to C \; ; \langle X, Y \rangle = \sum_{1}^{n} x_i \overline{y_i} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona C^n üzerinde standart iç çarpım fonksiyonu veya Hermit iç çarpım fonksiyonu denir.

Not 2.17. $|x\rangle$ ve $|y\rangle$ vektörlerinin iç çarpımını Dirac gösterimi ile göstermek istersek matematikte kullanılan notasyon ile neredeyse örtüştüğünü söyleyebiliriz;

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle = |x\rangle \bullet |y\rangle &= (|x\rangle)^{\dagger} |y\rangle \\ &= \langle x||y\rangle \\ &= \langle x|y\rangle. \end{aligned} \tag{2.16}$$

$\langle x|y\rangle$ gösterimine ise $|x\rangle$ ve $|y\rangle$ vektörlerinin braket'i denir. Dikkat edilecek olursa, sonlu boyutlu reel veya karmaşık vektör uzaylarında bra bir sütun vektörüne karşılık geldiği için notasyonların benzeştiğini söyleyebiliriz.

Tanım 2.18. İç çarpımları sıfır olan iki vektöre ortogonal(dik)dir denir;

$|x\rangle \neq 0$, $|y\rangle \neq 0$ iken $\langle x|y\rangle = 0$ ise $|x\rangle$ ve $|y\rangle$ vektörleri ortogonaldir.

Tanım 2.19. V, C cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, $\|.\| : V \to R$ fonksiyonu; $\forall v, y \in V$ ve $c \in C$ için

$$\begin{aligned} \|v\| &\geq 0 \\ \|v\| = 0 &\Leftrightarrow v = 0 \\ \|cv\| &= |c|\|v\| \\ \|v + y\| &\leq \|v\| + \|y\| \end{aligned} \tag{2.17}$$

koşullarını sağlayan fonksiyona norm; $(V, \|.\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir.

Örnek 2.20. C^n karmaşık vektör uzayında, vektörün kendisi ile iç çarpımının karekökü olarak tanımlanan fonksiyon bir normdur. Yani, $|v\rangle \in C^n$ için

$$\||v\rangle\| = \sqrt{\langle v|v\rangle} \tag{2.18}$$

ile tanımlanan fonksiyon bir normdur. $|||v\rangle||$ niceliğine $|v\rangle$ vektörünün uzunluğu, boyu veya Öklidyen normu denir. Normu 1 olan vektörlere ise birim vektör denir.

Not 2.21. Her iç çarpım uzayı üzerinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonu ile bir norm üretir. Dolayısıyla her iç çarpım uzayı birer normlu uzaydır. Örnek 2.20'de tanımlanan norm ise genel yapısı itibariyle bu ifadeyi açık bir şekilde doğrular.

Tanım 2.22. Ortogonal birim vektörlerin kümesine ortonormal küme denir.

Örnek 2.23. $E = \{|x_1\rangle, |x_2\rangle, \dots, |x_n\rangle\}$ ortogonal vektör kümesi için

$$|e_1\rangle = \frac{|x_1\rangle}{||x_1\rangle||}, |e_2\rangle = \frac{|x_2\rangle}{||x_2\rangle||}, \dots, |e_n\rangle = \frac{|x_n\rangle}{||x_n\rangle||} \tag{2.19}$$

ile tanımlı $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ vektör kümesi ortonormaldir. Yani; $1 \leq i, j \leq n$ için $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ ise $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ ortonormal vektör kümesidir. Burada tanımlanan δ_{ij},

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.20}$$

biçiminde olup Kronecker Deltası olarak adlandırılır.

Tanım 2.24. $(V, \| \, . \, \|)$ normlu uzay olmak üzere $\forall x, y \in V$ için $d(x, y) = \| x - y \|$ biçiminde tanımlanan norm, V için bir metrik tanımlar. V metrik uzayı için $\{x_n\} \subset V$ dizisi gözönüne alındığında; verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N_\varepsilon \in N$ öyle ki $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. İç çarpımlı uzay, iç çarpımla tanımlanan norma göre Cauchy dizileri yakınsak olan (tam uzay) uzaya Hilbert uzayı denir ve H ile gösterilir.

Kuantum hesaplamada ve kuantum bilgisinde ortaya çıkan sonlu boyutlu karmaşık vektör uzaylarından ötürü Öklid uzayının yetersiz kaldığı açıktır. Öklid uzayını kuantum mekaniğiyle uyumlu biçime dönüştüren soyut vektör uzayı olan Hilbert uzayı bu eksikliği giderecek donanıma sahiptir. n-boyutlu Hilbert uzayı H_n , C karmaşık sayılar cismi üzerinde bir iç çarpım ile donatılmış n boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayında vektörler arasındaki mesafeler ve açılar ölçülebilirdir. H_n uzayı C^n uzayına izomorftur. Bu ise bize H_n uzayında bir ortonormal taban karşılamamızı sağlar.

Tanım 2.25. C karmaşık sayılar cismi üzerindeki Hilbert uzay H_n ve $\{|e_i\rangle\} \subseteq H_n$ $(1 \leq i, j \leq n)$ vektör kümesi olmak üzere; $\forall |e_i\rangle, |e_j\rangle \in H_n$ için $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ ise $\{|e_i\rangle\}$ vektör kümesine H_n için bir ortonormal tabandır denir. Böylelikle $\forall |h\rangle \in H_n$ için $|h\rangle = \sum_1^n c_i|e_i\rangle$; $c_i \in C$ olacak şekilde ortonormal tabanlarının bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. Buradaki $c_i = \langle e_i|h\rangle$ eşitliğini sağlayan değerlere $|h\rangle$'nin $\{|e_i\rangle\}$ tabanlarına göre katsayıları denir.

2.3 Lineer Operatörler ve Matrisler

Kuantum mekaniğinin çalışma prensiplerini ana hatlarıyla belirleyen lineer operatör kavramı ve bu kavramla bağlantılı olan matrisler konusuna bu bölümde değineceğiz.

Tanım 2.26. V ve Y aynı C cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $A: V \to Y$ bir dönüşüm olsun. A dönüşümü; $\forall |e_i\rangle \in V$ ve $c_i \in C$ için

$$A\left(\sum c_i|e_i\rangle\right) = \sum c_i A(|e_i\rangle) \tag{2.21}$$

olacak şekilde girdilerinde lineer ise A'ya, V'den Y'ye bir lineer dönüşüm denir. Her vektörü kendisine dönüştüren $\boldsymbol{I}$ dönüşümüne birim operatör denir. Yani,

$$\forall |v\rangle \in V \; için \; \boldsymbol{I}(|v\rangle) = |v\rangle. \tag{2.22}$$

Not 2.27. V, Y ve Z vektör uzayları; $A: V \to Y$ ve $B: Y \to Z$ lineer operatörler olmak üzere; BA gösterimi A ile B lineer operatölerinin bileşkesini gösterir ki bu ise vektör uzayları arasındaki geçişi sağlayarak yeni bir operatör tanımlar. Yani,

$$(BA)(|v\rangle) = B(A(|v\rangle)). \tag{2.23}$$

Lineer operatörleri anlamanın en iyi yolu onları matrisler ile bağdaştırmakla mümkündür. Aradaki bu bağlantıyı bulmak için öncelikle lineer operatörlerin bir matris karşılığı olabilir mi onu inceleyelim:

$A: V^m \to Y^n$ lineer operatörü için $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_m\rangle$ vektörleri V^m için bir taban ve $|y_1\rangle, |y_2\rangle, \dots, |y_n\rangle$ vektörleri ise Y^n için bir taban olsun.

$$A(|v_j\rangle) = \sum_i A_{ij}|y_i\rangle \tag{2.24}$$

ifadesindeki A_{ij} değerleri, matrisin tüm girdilerine sahip $m \times n$ tipindeki A operatörünün matris temsiline karşılık gelir.

Benzer düşünüş ile matrisleri lineer operatörler olarak görebilir miyiz ona bakalım:

$A = [A_{ij}] \in K_n^m$ matrisi verilsin. Bir $A: V^m \to Y^n$ tanımlı dönüşüm $\forall|v_i\rangle \in V^m$ için $A(|v\rangle) = A_{ij}.|v\rangle$ şeklindeki matris çarpımı ile tanımlandığında

$$A\left(\sum_i a_i|v_i\rangle\right) = \sum_i a_i A|v_i\rangle \tag{2.25}$$

eşitliği tanımlanan A matrisinin bir lineer dönüşüme karşılık geldiğini gösterir.

Tanım 2.28. V, F cismi üzerinde n-boyutlu vektör uzayı ve $A: V \to V$ lineer operatörü tanımlansın. Eğer bir $|v\rangle \in V$ vektörü ve bir $c \in F$ skaleri için

$$A|v\rangle = c|v\rangle \tag{2.26}$$

olacak şekilde $|v\rangle \neq 0$ vektörü var ise c skalerine A lineer dönüşümünün bir özdeğeri, $|v\rangle$ vektörüne ise c özdeğerine karşılık gelen A'nın bir özvektörü denir.

(2.26) eşitliğini $A|v\rangle = cI|v\rangle$ biçiminde yazmak mümkün olduğundan

$$(A - cI)\,|v\rangle = 0 \tag{2.27}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $P_A(c) = det(A - cI)$ ifadesine A lineer dönüşümünün karakteristik polinomu; $P_A(c) = det(A - cI) = 0$ denklemine ise karakteristik denklemi denir.

Tanım 2.29. Bir $A = [a_{ij}]\,; 1 \leq i, j \leq n\,; a_{ij} \in C$ kare matrisinin izi, A'nın esas köşegeni üzerindeki elemanlarının toplamı şeklinde tanımlanır:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \tag{2.28}$$

Buradaki tanımdan bir matrisin izi ile ilgili önemli birkaç özelliğe değinelim:

- ✓ Bir matrisin izi aslında bir lineer dönüşümdür;

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \;\; ve \;\; tr(cA) = c\, tr(A) \;\; (\forall c \in C \; için) \tag{2.29}$$

- ✓ İz alma tranpoz işlemi altında değişmez(invaryant)dir;

$$tr(A) = tr(A^T) \tag{2.30}$$

- ✓ Matris çarpımı sırasındaki değişiklikten izin değeri etkilenmez;

$$tr(AB) = tr(BA) \tag{2.31}$$

Böylelikle verilen bir matrisin izinin nasıl bulunacağını gördük. Dolayısıyla her matrise bir lineer operatör karşılık geldiğinden lineer operatörlerin izleri hakkında da bilgiye sahip olabiliriz. Bunun tersi olarak da bir lineer operatörün izinden de söz etmek mümkündür. Örneğin, $|v\rangle$ birim vektör ve A keyfi bir lineer operatör iken Gram-Schmidt yöntemi ile $tr(A|v\rangle\langle v|)$ iz değerini hesaplayabiliriz:

$$tr(A|v\rangle\langle v|) = \sum_i \langle i|A|v\rangle\langle v|i\rangle = \langle v|A|v\rangle. \tag{2.32}$$

Bu sonuç ise, $tr(A|v\rangle\langle v|) = \langle v|A|v\rangle$, bir A operatörünün izini hesaplamak için son derece kullanışlı olduğunu gösterir.

Kuantum mekaniğin üzerine kurulduğu cebirsel yapı olan H_n Hilbert uzayını gözönüne alarak bu uzay üzerindeki özel lineer operatörlere ve onların kuantum sistemi için önemli role sahip temel özelliklerine değinelim:

$A: H_n \to H_n$ şeklinde tanımlı A lineer operatörü, H_n uzayındaki bir vektörü yine H_n uzayındaki bir vektöre dönüştürür. Yani $|v\rangle, |y\rangle \in H_n$ için $A|v\rangle = |y\rangle$ olarak tasvir edilir.

Yukarıdaki açıklamamıza binaen lineer operatörlerin matrislerin yerine ve bunun tam aksi olan matrislerin de lineer operatörlerin yerine kullanılacağını görmüştük. Böylelikle, H_n uzayı üzerinde tanımlı bir A lineer operatörün ekini $A^\dagger$ ile yani ona karşılık gelen matrisinin eşlenik transpozu olarak tanımlayabiliriz:

$$A = \left[a_{ij}\right], \left(a_{ij} \in C\right) için \; A^\dagger = \left[a^*{}_{ji}\right], (1 \le i, j \le n). \tag{2.33}$$

Not 2.30. Bir A operatörünün(matris) bir $|v\rangle$ vektörü üzerindeki etkisinin eşlenik transpozesi ile olan ilişkisi şu şekildedir:

$$[A|v\rangle]^\dagger = |v\rangle^\dagger A^\dagger = \langle v|A^\dagger. \tag{2.34}$$

Tanım 2.31. H_n Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bir A lineer operatörü için;

- A'nın eki (karşılık gelen matrisin eşlenik transpozu yani Hermityen eşleniği) kendisine eşit ise, $\boldsymbol{A = A^\dagger}$, A 'ya Hermityen operatör,
- $\boldsymbol{A\,A^\dagger = A^\dagger A}$ ise A'ya normal operatör (dönüşüm),
- $A_{\boldsymbol{n}}A_{\boldsymbol{n}}^\dagger = A_{\boldsymbol{n}}^\dagger A_{\boldsymbol{n}} = I_{\boldsymbol{n}}$ eşitliği $A_{\boldsymbol{n}}$, A lineer operatörüne karşılık gelen $n \times n$ tipindeki matrisi için geçerli ise yani, $\boldsymbol{A\,A^\dagger = A^\dagger A = I}$ ise A'ya üniter operatör,
- $\boldsymbol{A^2 = A}$ ise A'ya projektör operatör; ayrıca $A^\dagger = A$ koşulunu da sağlıyor ise A'ya ortogonal projektör operatör,
- $\forall|v\rangle \in H_n$ için $\langle Av|v\rangle \geq 0$ ise A'ya pozitif operatör

isimlendirmeleri yapılır.

Tanımladığımız Hermityen, üniter, normal ve projektör operatörlerin ileride aktaracağımız kuantum mekaniğinin postulatları için kaydadeğer özelliklerine değinelim:

- İki hermityen $\boldsymbol{A = A^\dagger}$ ve $\boldsymbol{B = B^\dagger}$ operatörün toplamı bir Hermityen operatör olurken çarpımlarının her zaman Hermityen operatör olması gerekmez:

$$(\boldsymbol{AB})^\dagger = \boldsymbol{B^\dagger A^\dagger = BA \neq AB} \tag{2.35}$$

- Üniter operatörler iç çarpımı korur, yani bir Hilbert uzayındaki mesafeyi muhafaza eder. Böylelikle üniter operatörlerin vektörlerin normunu da koruduğunu söyleyebiliriz.
- Hermityen operatörlerin özdeğerleri reel değere sahiptir.

Örnek 2.32. Kuantum mekaniği ve kuantum hesaplamalarında çokça önemli olan Pauli matrisleri Hermityen ve üniter matrislere en iyi örnek olarak gösterilebilir:

$$\sigma_0 \equiv I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \sigma_1 \equiv \sigma_x \equiv X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$
$$\sigma_2 \equiv \sigma_y \equiv Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix};\ \sigma_3 \equiv \sigma_z \equiv Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Örnek 2.33. Bir $|v\rangle$ vektörünün kendisiyle dış çarpımı, $|v\rangle\langle v|$, bir projektör operatördür.

2.4 Tensör Çarpım

Tensör çarpım, daha büyük vektör uzayları oluşturmak için vektör uzaylarını bir araya getirmenin bir yoludur. Başka bir deyişle uzayları, vektörleri veya operatörleri birlikte kombine ederek düşünmenin matematiksel boyuttaki tezahürüdür. Bu yapı, çok parçacıklı sistemlerin kuantum mekaniğini anlamak için çok önemlidir. Daha kolay anlaşılması için sırasıyla n ve m boyutlu H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarını gözönüne alalım. H_1 ve H_2 uzaylarının tensör çarpımı, $H_1 \otimes H_2$, yeni ve daha büyük $n \times m$ boyutlu bir Hilbert uzayı tanımlar.

$\{|b_i\rangle\}_{i\in\{1,..,n\}}$; H_1 için bir ortonormal taban ve $\{|c_j\rangle\}_{j\in\{1,..,m\}}$; H_2 için bir ortonormal taban olduğunu varsayarsak, bu iki ortonormal tabanın tensör çarpımları

$$\{|b_i\rangle \otimes |c_j\rangle\}_{i\in\{1,..,n\},j\in\{1,..,m\}} \tag{2.37}$$

$H_1 \otimes H_2$ uzayı için bir ortonormal taban teşkil eder. H_1 ve H_2 uzaylarından alınan sırasıyla $|v_1\rangle$ ve $|v_2\rangle$ gibi iki vektörün tensör çarpımı, $H_1 \otimes H_2$ uzayında bir vektördür ve $|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle$ olarak yazılır. Tanımladığımız tensör çarpımı aşağıdaki aksiyomlarla karakterize edilebilir:

1) Keyfi bir $c \in C$ skaleri, $|v_1\rangle \in H_1$ ve $|v_2\rangle \in H_2$ için,

$$c(|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle) = (c|v_1\rangle) \otimes |v_2\rangle = |v_1\rangle \otimes (c|v_2\rangle) \tag{2.38}$$

2) $|v_1\rangle, |y_1\rangle \in H_1$ ve $|v_2\rangle \in H_2$ için,

$$(|v_1\rangle + |y_1\rangle) \otimes |v_2\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle + |y_1\rangle \otimes |v_2\rangle \tag{2.39}$$

3) $|v_1\rangle \in H_1$ ve $|v_2\rangle, |y_2\rangle \in H_2$ için,

$$|v_1\rangle \otimes (|v_2\rangle + |y_2\rangle) = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle + |v_1\rangle \otimes |y_2\rangle \tag{2.40}$$

Şimdi $H_1 \otimes H_2$ uzayı için ne tür bir lineer operatör tanımlanabilir onu inceleyelim. A ve B sırasıyla H_1 ve H_2 uzayları üzerindeki lineer operatörler olmak üzere

$$(A \otimes B)(|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle) \equiv A|v_1\rangle \otimes B|v_2\rangle \tag{2.41}$$

ile tanımlanan $A \otimes B$ tensör çarpımı, $H_1 \otimes H_2$ uzayı üzerinde bir lineer operatördür. Bu tanım $H_1 \otimes H_2$ nin elemanları üzerinde lineer olarak genişletilebilir:

$$(A \otimes B)\left(\sum_{ij} a_{ij}\,|b_i\rangle \otimes |c_j\rangle\right) \equiv \sum_{ij} a_{ij}\,A|b_i\rangle \otimes B|c_j\rangle. \tag{2.42}$$

Böylece Dirac notasyonu ile göstermiş olduğumuz tensör çarpımını ana hatlarıyla belirlemiş olduk. Biraz soyut gibi görünen tensör çarpımını, Kronecker çarpımı olarak bilinen uygun bir matris gösterimine geçilerek çok daha somut hale getirebiliriz. Bunun için $m \times n$ tipinde bir A matrisi ve $k \times l$ tipinde bir B matrisi ele alalım. Böylece, A'nın B ile Kronecker çarpımı,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

$mk \times nl$ tipindeki bir matrisi gösterir.

Örnek 2.34. Verilen iki $|a\rangle$ ve $|b\rangle$ vektörün Kronecker çarpımı,

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix};\ |b\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ -2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}. \tag{2.44}$$

Dikkat edilecek olursa, bir sütun ve bir satır vektörünün dış çarpımı aslında tensör çarpımın özel bir halidir.

Kronecker çarpımının matris gösterimi kolaylılığı ile transpoz, karmaşık eşlenik ve ek alma işlemleri üzerine dağıldığı da kolaylıkla gösterilebilir. Yani,

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*; (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T; (A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger \tag{2.45}$$

Not 2.35. Kullanışlı olması için notasyon olarak tensör çarpımı sembolünü ihmal ederek kullanacağız. Yani $|i\rangle \otimes |j\rangle$ yazımı yerine sadece $|i\rangle|j\rangle$ yahut $|ij\rangle$ şeklindeki yazımları kullanacağız. Örneğin dış çarpım biçiminde görünen tensör çarpımı için de aşağıdaki gösterimi seçersek daha kullanışlı ve anlaşılır olacaktır

$$(|i\rangle \otimes |j\rangle)(\langle k| \otimes \langle l|) = |i\rangle\langle k| \otimes |j\rangle\langle l| \tag{2.46}$$

Örnek 2.36. Pauli matrisleri X ve Y nin tensör çarpımı,

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes Y = \begin{bmatrix} 0.Y & 1.Y \\ 1.Y & 0.Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

biçimindedir.

3
MATEMATİKSEL BAKIŞ AÇISI İLE KUANTUM MEKANİĞİ

Bu bölümde, kuantum kavramı ile birlikte bu kavramdan mütevellit kuantum mekaniğin yapısal inşası için gereken matematiksel postulatlara ve bununla birlikte kuantum hesaplamalarına değineceğiz.

Yirminci yüzyılın başlarında, Newton ve Maxwell tarafından ileri sürülen klasik fizik teorilerinin belirli deneylerin gözlemlenen sonuçlarını izah ederken ciddi sorun ve eksikliklerle karşılaşıldığı görülmüştür. Böylelikle fizik bilimi için daha geniş kapsamlı olan ve matematiksel modellemeler yardımıyla tarif edilen kuantum mekaniği ile kuantum fiziği adı verilen yeni fizik teorileri geliştirilmiştir. Kuantum fiziği, kuantum elektrodinamiğinin fiziksel teorilerini ve kuantum alan teorisini içerir ancak bu fiziksel teoriler bu tezin araştırma kapsamı dışında olduğu için sadece kuantum bilgisi dahilinde matematiksel incelemeler yapacağız.

Latince *miktar* ve *ne kadar büyüklükte* gibi anlamları içeren *kuantum* kelimesi, fizik bilimi üzerinden ele alındığında genellikle madde ve ışığın, atom ve atomaltı parçacıkların dünyası ile ilgili kavramların izahı için kullanılır. Misal vermek gerekirse kuantum mekaniği, doğanın yapı taşlarının davranışının tanımına atıfta bulunur: atomlar, moleküller, fotonlar, elektronlar vb. Böylelikle kuantum mekaniği, atomik ve atom altı ölçekte fiziksel dünyanın bir modelidir; kuantum mekaniğinin matematiksel modellemesini tam olarak kapsayan dört postulat olduğu ortaya çıkmıştır:

1. Bir fiziksel sistem, sistemin *durum uzayı* olarak bilinen bir karmaşık *Hilbert uzayı* ile temsil edilir. Sistem, durum uzayındaki bir birim vektör olan *durum vektörü* ile tanımlanır.
2. Bir *kapalı* kuantum sistemin durumunun *zamana bağlı değişimi* bir üniter operatör ile tasvir edilir. Yani, sistemin başlangıç durumu $|v_1\rangle$ ise zamansal

değişime bağlı olarak U üniter operatörü ile sistemin durumu $|v_2\rangle = U|v_1\rangle$ şeklinde değişir.

3. Bir H_n durum uzayının $B = \{|b_i\rangle\}$ ortonormal tabanı için verilen bir durumu

$$|v\rangle = \sum_i c_i\,|b_i\rangle$$

için her $|b_i\rangle$ *durumunu ölçmenin olasılığı* $P(|b_i\rangle) = |c_i|^2$ şeklindedir. Ölçümden hemen sonra sistemin durumu $|b_i\rangle$ durumuna çöker.

4. *Bileşik (karma, kombine)* bir fiziksel sistemin *durum uzayı*, bileşimdeki her bir fiziksel sistemi temsil eden Hilbert durum uzaylarının *tensör çarpımı*dır. Ayrıca bir sistem $|v_1\rangle$ ve diğer sistem $|v_2\rangle$ durumunda ise bileşik sistemin durumu

$$|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle.$$

Yukarıda verdiğimiz kuantum mekaniğinin matematiksel postulatlarını detaylıca incelemeden evvel sıkça dile getirdiğimiz *durum* kavramını açıklayalım:

Bir kuantum sisteminin, konum; momentum; spin; polarizasyon gibi ilgili tüm fiziksel özelliklerinin koleksiyonuna o sistemin *durum*u adı verilir. Bir fiziksel durumu vektörleri kullanarak temsil edebiliriz. Öncelikle bunun için *dışlanma ilkesine* değinmemiz gerekir. Verilen bir fiziksel niceliğin konum, spin, kutuplaşma gibi durumunu modellerken; eğer durumlardan birinde kesin olarak bulunma gerçeği, diğer durumların herhangi birinde bulunma şansının olmadığını ifade ediyorsa bu iki durumun *dışlanmış durum* olduğu söylenir. Dışlanmış durumlara, matematiksel kavramlarla ilişkilendirilerek bakıldığında ortogonal vektörler ile bağlantılı olduğu görülebilir. Meselâ, kuantum mekaniksel sistemdeki bir kuantum parçacığın ve $1, 2, 3$ gibi üç kuantum kutusunun olduğunu varsayalım. Bu kuantum parçacığın,

$$|1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, |2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, |3\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

kuantum durumları ile temsil edilen 1,2 ve 3 kutularının herhangi birinde olması dışlanma ilkesine göre diğer iki kutuda kesin olarak bulunamayacağını gösterir. Bu metaforik yaklaşımla da görülebileceği gibi ortogonal vektörler ile dışlanmış

durumlar birbiriyle bağlantılı kavramlardır. Bu bağlamda, bir kuantum sisteminden bahsederken, *"vektör"* ve *"durum"* kelimelerini birbirinin yerine kullanabiliriz. Kuantum durumlar vektörler ile gösterilirken aslında onların kuantum durumlarını temsil ettiklerini vurgulamak için lineer cebirde kullanılagelenden farklı olarak *bra-ket* (Dirac) notasyon farklılığına gidilir.

3.1 Kuantum Mekaniğin Matematiksel Postulatları

3.1.1 Durum Uzayı Postulatı

Bir fiziksel sistem, sistemin *durum uzayı* olarak bilinen bir karmaşık *Hilbert uzayı* ile temsil edilir. Sistem, durum uzayındaki bir birim vektör olan *durum vektörü* ile tanımlanır.

Kuantum mekaniğin ilk varsayımı, kuantum mekaniğinin tanımlandığı matematiksel uzayla ilişkilidir. Bu uzay ise Hilbert uzayından başka bir şey değildir. Hilbert uzayının tanımını hatırlamak için Tanım 2.24'e bakınız. Kuantum hesaplamasının gerçekçi modellerini açıklamak için, tipik olarak yalnızca, sistemin durumunun sonlu boyutlu karmaşık Hilbert uzayındaki bir vektör tarafından tanımlandığı durumlarla ilgileneceğiz. Sonlu boyutlu H_n uzayı ile C^n karmaşık vektör uzayının izomorf olduklarını belirtmiştik. Bu ise bize H_n uzayında bir ortonormal taban karşılamamızı sağlar. Böylelikle H_n ve C^n uzaylarının izomorf olması gerçeğinden hareket ederek çalışılan durum uzayında bir ortonormal taban, *ket* vektörleri olarak şu şekilde ifade edilebilir

$$\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle\} \tag{3.2}$$

ve benzer şekilde *bra* vektörleri ile

$$\{\langle 0|, \langle 1|, \dots, \langle n-1|\} \tag{3.3}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Matris gösterimiyle tabanların her $|i\rangle$ ket vektörü $(i+1)$. satırda 1 ve diğerlerinin hepsinde 0 değerine sahip bir sütun vektörü olarak ifade edilir:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, |i\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, |n-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$\{|0\rangle, |1\rangle, .., |k\rangle, \dots, |n-1\rangle\}$, *durum uzayı* olan H_n karmaşık Hilbert uzayının bir tabanı olduğundan durum uzayındaki herhangi bir $|h\rangle \in H_n$ durum (ket vektörü)

$$|h\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \, |k\rangle \tag{3.5}$$

şeklinde yazılır ve bu yazılış verilen tabana göre tek türlüdür. Ayrıca bir kuantum sistemin durumu birim vektör olması gerektiğinden $\langle h|h\rangle = 1$ olmalıdır. Yani,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 = 1 \tag{3.6}$$

Buradaki her bir $c_k = \langle k|h\rangle$ karmaşık katsayısına tabandaki $|k\rangle$ durumunun *olasılık genliği* adı verilir.

Bir kuantum sistemin durumunun, foton; konum; momentum; spin; polarizasyon gibi ilgili tüm fiziksel özellikleri daha özelinde ise hem parçacık hem de dalga özelliği taşıdığını söylemiştik. Parçacık özellikleri, enerji ve momentum ile; dalga özellikleri de frekans ve dalga boyu içeren bir dalga fonksiyonu ile tanımlıdır. Bu dalga fonksiyonu ise kuantum mekaniğin zamana bağlı değişim postulatında tekrar değineceğimiz 'Schrödinger dalga denklemi' ile ilgilidir. Bu denklem, parçacığın kuantum durumunu, yani parçacığın bulunabileceği durumlara ait tüm olasılıkları barındırır. *Süperpozisyon*, tüm bu olasılıkların üst üste bindiği bir durumu, ya da kuantum parçacığının aynı anda bulunabileceği çok sayıda farklı durumun tümünü ifade eder. Buna bağlı olarak kuantum durumların süperpoze durumunu, matematiksel modellemeyle durumların (vektörlerin) *lineer birleşimi* olarak ifade ederiz. Yani bir kuantum sistemin hem $|x\rangle$ durumunda hem de $|y\rangle$ durumunda bulunma ihtimali bu iki vektörün lineer kombinasyonu olarak $a|x\rangle + b|y\rangle$ biçiminde $|x\rangle$ ve $|y\rangle$ durumlarının süperpozisyonu ile birlikte açıklanır.

Şimdi kuantum bilgi kuramında temel yapı birimi olan *kuantum bit* kısaca *kübit* kavramından bahsedelim. Kuantum bilgisayarlarda yapılan işlemler bir nesnenin kuantum durumuna bakılarak oluşturulan kübitler üzerinden gerçekleştirilir. Ancak bir kübitin formal tanımını sunmadan önce, şimdiye değin kullanılagelen dijital dünyadaki temel yapıtaşı olan *bit* kavramına kısaca değinelim. Cep telefonlarında, bilgisayarlarda veya sahip olduğumuz hemen hemen herhangi bir dijital elektronik cihazda, bilgiler en basit alfabe olan ikili (binary) sistem kullanılarak işlenir. İkili sayı sistemi, iki olası durumun olduğu kapalı veya açık, yukarı veya aşağı gibi sadece iki harften müteşekkildir; 0 ve 1. Klasik bilginin bu temel birimi *bit* olarak bilinir. Klasik bilgisayarların aksine kuantum dünyasında her iki durumun mümkün olduğu süperpozisyon durumu vardır. Bir Hilbert uzayındaki kuantum durumları, dışlanma ilkesine göre sadece 0 ya da 1 durumunda bulunamazlar; aksine onlar birbiriyle iç içe geçmiş süperpoze halde dururlar. Bu süperpozisyon durum, kuantum bilgisayarlarda *kübit* adı verilen *kuantum bit*lerini oluşturur. Kuantum bitlerin, aynı anda her iki durumu da tutabilme durumuna, süperpozisyon adı verilir. Hem 0 hem de 1 değerini olasılık katsayılarına göre tutan her bir kuantum biti, *kübit(*1-*kübit)*, iki boyutlu H_2 karmaşık Hilbert durum uzayına ait bir birim vektör olarak tanımlanır. H_2 durum uzayı için $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ kümesi ortonormal taban kümesine göre, herhangi bir $|\psi\rangle \in H_2$ kübiti taban vektörlerin lineer kombinasyonu(süperpozisyonu) olarak

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \; ; a, b \in C \; ; |a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad (3.7)$$

biçiminde en temel kübitler olan $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarına bağlı olarak ifade edilir. (3.7) eşitliğindeki $|\psi\rangle$ kübitine, a ve b olasılık genliğine sahip $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarının süperpozisyonundadır denir.

Buradaki $|0\rangle = [1 \quad 0]^T$ ve $|1\rangle = [0 \quad 1]^T$ durumlarından oluşan $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ kümesine *hesaplama tabanı*; $\langle\psi|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1$ ifadesine ise durum vektörleri için *birim olma(normalleştirme) koşulu* denir.

Görüldüğü gibi bir kübiti, bir bitten ayıran en aşikâr fark onun süperpozisyon halde olması, yani bitin durumu gibi salt tek bir durumda olmaması halidir. Ayrıca bir kübit karmaşık bir sayı iken, bir bit reel 0 ya da 1 sayısından ibarettir.

Örnek 3.1. $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ve $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ durumlarını hesaplama tabanına göre şu şekilde yazabiliriz:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \tag{3.8}$$

Bu süperpozisyon durumundan sistemin hem $|0\rangle$ hem de $|1\rangle$ durumunda olduğunu garip bir şekilde düşünmek mümkündür. Bunun ise çoğu matematiksel kavramların soyutluluğundan ileri geldiği düşünülebilir. Ancak öyle tarifi muhal bir kavramdır ki hem soyut hem somut manalara gelmesine karşın bu durumu laboratuvar ortamında göstermek mümkündür. Yine farklı bir şekilde, $|0\rangle$ durumunu da $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ durumlarının süperpozisyonunda yazmak mümkündür

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \tag{3.9}$$

Not 3.2. Kübitlerin üzerinde bir denklik bağıntısını aşağıdaki gibi inşa edebiliriz:

$\forall|u\rangle, |v\rangle \in H$ için $|u\rangle \equiv |v\rangle \Leftrightarrow |u\rangle = \lambda|v\rangle$ olacak biçimde $\exists\lambda \in C$ ve $|\lambda| = 1$ vardır. Bu biçimde tanımlanan bağıntı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahiptir;

- $\forall|u\rangle \in H$ için $|u\rangle = |u\rangle \Leftrightarrow |u\rangle = 1.|u\rangle$
- $\forall|u\rangle, |v\rangle \in H$ için $|u\rangle = \lambda|v\rangle$ ise $\bar{\lambda}|u\rangle = |v\rangle$
- $\forall|u\rangle, |v\rangle, |y\rangle \in H$ için $|u\rangle \equiv |v\rangle$ ve $|v\rangle \equiv |y\rangle$ ise $|u\rangle = \lambda_1|v\rangle$ ve $|v\rangle = \lambda_2|y\rangle$, $|u\rangle = \lambda_1\lambda_2|y\rangle \Leftrightarrow |u\rangle \equiv |y\rangle$; $|\lambda_1\lambda_2| = |\lambda_1||\lambda_2| = 1$.

Böylelikle kübitlerin oluşturduğu küme yukarıda tanımladığımız bağıntı ile bir denklik sınıfı oluşturur. Buradan elde ettiğimiz kübitlerin denkliğine bağlı olarak şu yorumu yapabiliriz:

$|\psi\rangle \in H$ kübiti için birim norma sahip olma koşulundan $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ dır. Bu tür birim norma sahip durum, $|e^{i\theta}| = 1$ birim normlu karmaşık sayısı ile çarpıldığında elde edilen $e^{i\theta}|\psi\rangle$ durumuna eşdeğerdir(denktir), yani $|\psi\rangle$ ile $e^{i\theta}|\psi\rangle$ durumları aynı fiziksel durumu haizdir. Buradaki θ değerine faz; $e^{i\theta}$ değerine ise *faz çarpanı* denir. Meselâ, $|0\rangle + |1\rangle$ durumu; $e^{i\theta}|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle$ vektörü ile tanımlanan duruma eşdeğerdir. Bu duruma benzeyen ve fakat fiziksel olarak farklılık arz eden diğer bir

durum ise süperpozisyondaki iki ortogonal durum arasındaki *bağıl faz çarpanı(faktörü)*dır. Örnekteki $|0\rangle + |1\rangle$ durumu bu sefer sadece süperpozisyondaki bir durumun *bağıl faz çarpanı* ile çarpılmış hali olan $|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle$ durumundan fiziksel olarak farklı olduğu âşikardır.

3.1.1.1 Klasik Bit ile Kuantum Bitin (Kübit) Fiziksel ve Anlamsal İrdelenişi

Bir klasik bitin durumu, sahip olduğu ikili sayı sistemi olan 0 ve 1 değerlerinden deterministik olarak birine eşittir. Klasik bitin durumu Şekil 3.1'de, 0 ve 1 olarak iki nokta ile gösterilen iki konumdan birinde olan bir nokta ile gösterilebilir.



Şekil 3.1 Deterministik bir klasik bitin '0' ve '1' durumu

Şimdiyse bir klasik bitin değerinin tam olarak bilinmediği ve fakat ya 0 ya 1 olma durumunun p_0 ve p_1 olasılık değerlerine göre değiştiği olasılıksal klasik bit durumunu inceleyelim. p_0 olasılıkla 0 durumunda ve p_1 olasılıkla 1 durumunda olan bir bitin durumunu

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

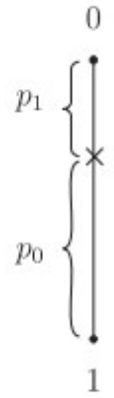
iki boyutlu vektörü ile temsil edebiliriz. Bu tanımdan anlaşılabileceği gibi, bit 0 durumuna, $p_0 + p_1 = 1$ gerçeği göz önünde tutularak, $p_0 = 1$ ve $p_1 = 0$ olduğunda sahiptir, yani bitin 0 durumunda olması

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

dır. Benzer şekilde 1 durumu $p_0 = 0$ ve $p_1 = 1$ olasılıkları ile temsil edilir

$$\binom{0}{1}. \tag{3.12}$$

Bu olasılıksal klasik bitin durumunu ise 0 ve 1 pozisyonları arasında p_0 ve p_1 olasılık değerlerine göre değişen doğru üzerindeki bir nokta ile Şekil 3.2'deki gibi tasvir edebiliriz.



Şekil 3.2 p_0 ve p_1 olasılıklarına sahip olasılıksal klasik bit durumu

Şimdi bir kuantum bitin yani kübitin durumunu detaylıca inceleyelim:

$|\psi\rangle \in H_2$ için bir kübitin durumu

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle\,; \alpha_0, \alpha_1 \in C; |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1 \tag{3.13}$$

olacak şekilde tanımlamıştık.

Herhangi bir $z = x + iy$ karmaşık sayısını polar koordinatları kullanarak

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta \tag{3.14}$$

biçiminde yazabiliriz. $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ ifadesi olan Euler özdeşliğini de kullanarak (3.14) eşitliğini

$$z = re^{i\theta} \tag{3.15}$$

olarak açıklamak mümkündür.

Bir kübitin durumunu, $r_0, \delta_0, r_1, \delta_1$ reel parametrelerini kullanarak α_0, α_1 karmaşık sayılarını $\alpha_0 = r_0 e^{i\delta_0}$ ve $\alpha_1 = r_1 e^{i\delta_1}$ olacak şekilde (3.13) eşitliğini yeniden toparlayarak yazarsak

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\delta_0}|0\rangle + r_1 e^{i\delta_1}|1\rangle \tag{3.16}$$

hâlini alır. $|\psi\rangle$ kübiti için ileride daha detaylı inceleyeceğimiz α_0 ve α_1 olasılık genlikleri ölçülebilir tek niceliklerdir. Dolayısıyla bu niceliklere bakarak gözlemlenebilir sonuçlarda bir değişiklik olup olmadığını inceleyebiliriz. Not 3.2. den, eğer $|\psi\rangle$ durumunu keyfi bir $e^{i\gamma}$ fazı ile çarparsak fiziksel olarak herhangi bir değişiklik olmaz. Gerçekten de,

$$|e^{i\gamma}\alpha_0|^2 = \left(e^{i\gamma}\alpha_0\right)^*\left(e^{i\gamma}\alpha_0\right) = \left(e^{-i\gamma}{\alpha_0}^*\right)\left(e^{i\gamma}\alpha_0\right) = {\alpha_0}^*\alpha_0 = |\alpha_0|^2. \tag{3.17}$$

Benzer ifade aynı şekilde $|\alpha_1|^2$ için de görülebilir. Eğer $|\psi\rangle$ durumunu $e^{-i\delta_0}$ ile çarparsak kübitin durumu için fiziksel olarak aynı ancak ifade olarak farklı olan

$$|\psi'\rangle = r_0 e^{i\delta_0} e^{-i\delta_0}|0\rangle + r_1 e^{i(\delta_1-\delta_0)}|1\rangle = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\phi}|1\rangle. \tag{3.18}$$

eşitini elde etmiş oluruz. Böylece artık durum salt r_0, r_1 ve $\phi = \delta_1 - \delta_0$ reel üç parametrisine dayanır. $|\psi'\rangle$ durumunu kartezyen koordinatlarına bağlı olarak yeniden yazacak olursak,

$$|\psi'\rangle = r_0|0\rangle + (x + iy)|1\rangle \tag{3.19}$$

olur ve $\langle\psi'|\psi'\rangle = 1$ birim olma koşulundan,

$$|r_0|^2 + |x + iy|^2 = 1 \tag{3.20}$$

gelir. (3.20) eşitliği,

$${r_0}^2 + x^2 + y^2 = 1 \tag{3.21}$$

olarak yeniden düzenlenip yazılabilir. Bu ise (x, y, r_0) kartezyen koordinatlı R^3 uzayındaki birim kürenin denklemidir. Böylece $|\psi'\rangle$ durumunu, birim küre merkezini küre üzerindeki bir noktaya bağlayan vektör ile temsil edebiliriz. Şekil

3.3 (a) ile bağlantılı olarak polar koordinatları kullanarak, R^3 uzayındaki kartezyen koordinatlarını şu şekilde ifade edebiliriz:

$$x = r\,sin\theta' cos\phi\,, y = rsin\theta' sin\phi\,, r_0 = z = rcos\theta' \tag{3.22}$$

$r = 1$ olduğu için,

$$|\psi'\rangle = r_0|0\rangle + (x + iy)|1\rangle = cos\theta'|0\rangle + sin\theta'(cos\phi + isin\phi)|1\rangle$$
$$|\psi'\rangle = cos\theta'|0\rangle + e^{i\phi}sin\theta'|1\rangle \tag{3.23}$$

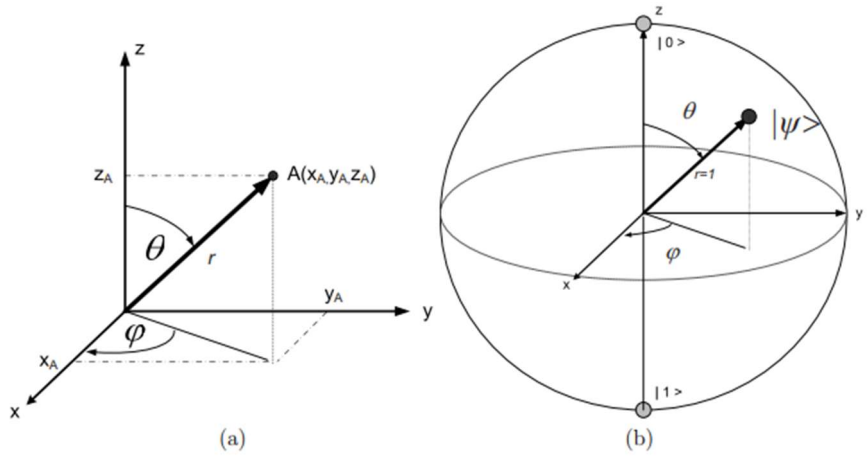
eşitliğine dönüşür.

Şimdi matematiğin kendine has dilini kullanarak bu harika sonucu okuyalım. Artık durum için sadece θ' ve ϕ parametreleri gereklidir. Ayrıca $\theta' = 0$ olduğunda $|\psi'\rangle = |0\rangle$ ve $\theta' = \pi/2$ olduğunda ise $|\psi'\rangle = e^{i\phi}|1\rangle$ durumlarının geldiğini kolayca farkedebiliriz. Böylelikle, $0 \leq \theta' \leq \pi/2$ ve $0 \leq \phi \leq 2\pi$ için birim küre üzerindeki tüm noktaları üretebiliriz. Bu değerlere dikkat edilecek olursa aslında birim kürenin sadece üst yarıküresiyle ilgilendiğimiz görülebilir. Bunu daha açık kılmak için $(1, \theta, \phi)$ polar koordinatlı $|\psi\rangle$ noktası ile $(1, \theta', \phi')$ polar koordinatlı $|\psi'\rangle$ karşılıklı noktalarını alalım. Burada noktaların karşılıklı olması sebebiyle $\theta' = \pi - \theta$ ve $\phi' = \phi + \pi$ değerlerine sahibiz. Bu iki durumun sadece $-1 = e^{i\pi}$ faz çarpanı ile ayrıldığını farketmek mümkündür; çünkü bir durumu, $\forall\gamma$ için $e^{i\gamma}$ faz çarpanı ile çarpmakla elde edilen durumlar için gözlemsel olarak bir farklılık teşkil etmiyordu:

$$|\psi'\rangle = cos(\pi - \theta)|0\rangle + e^{i(\phi+\pi)}sin(\pi - \theta)|1\rangle$$
$$= -cos\theta\,|0\rangle - e^{i\phi}sin\theta\,|1\rangle = -|\psi\rangle. \tag{3.24}$$

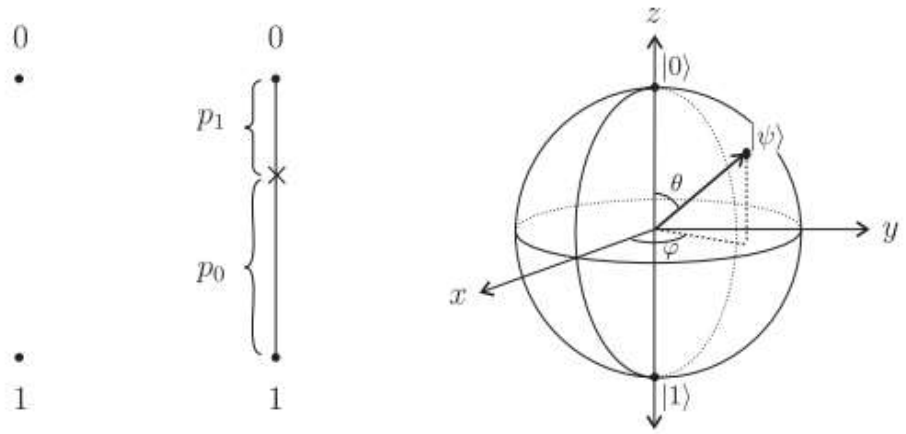
Böylece, $\theta' = \theta/2$ aldığımızda; bir kübitin durumunu, *Bloch küresi* adı verilen birim kürenin yüzeyindeki bir nokta olarak Şekil 3.3 (b)'deki gibi tasvir edebiliriz:

$$|\psi\rangle = cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle\,, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi\,, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{3.25}$$



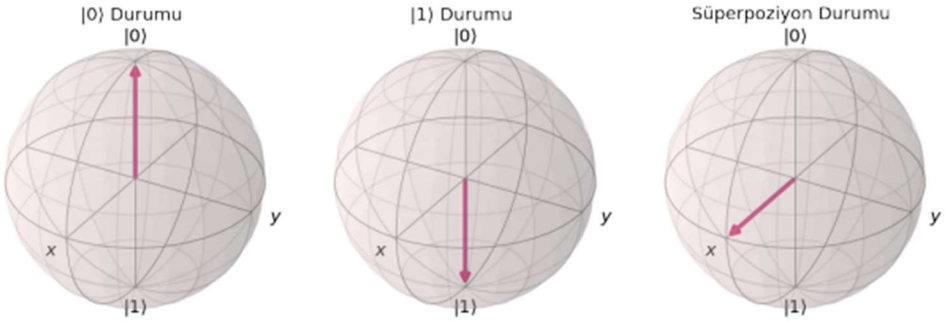
Şekil 3.3 Kartezyen koordinatlarına göre$|\psi\rangle$ durumlu bir kübitin Bloch küresi üzerindeki temsili [2]

Özet olarak, bir klasik bitle olasılıksal bitin ve bir kuantum bitin durumlarının geometrik ve anlamsal boyutlarının irdelenmesine bağlı grafiksel gösterimlerini Şekil 3.4'deki gibi karşılaştırmalı olarak görebiliriz.



Şekil 3.4 Sırasıyla deterministik klasik bit, olasılıksal klasik bit ve kuantum bitin geometrik durumları [1]

Ayrıca Bloch küresi üzerinde gösterebildiğimiz bir kübit durumu ile süperpozisyon durum kavramını geometrik olarak Şekil 3.5'deki gibi anlamlandırabiliriz.



Şekil 3.5 |0⟩ ve |1⟩ durumları ile süperpozisyon durumun soldan sağa Bloch küreleri [8]

Şekil 3.5'de verilen |0⟩ ve |1⟩ durumların süperpozisyonundaki durumu ise

$$|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}\ |0\rangle + 1/\sqrt{2}\ |1\rangle \tag{3.26}$$

şeklinde gösterebiliriz.

3.1.2 Zamansal Değişim Postulatı

Bir *kapalı* kuantum sistemin durumunun *zamana bağlı değişimi* bir üniter operatör ile tasvir edilir. Yani, sistemin başlangıç durumu $|\psi_1\rangle$ ise zamansal değişime bağlı olarak U üniter operatörü ile sistemin durumu $|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle$ şeklinde değişecektir.

Bir kuantum mekaniksel sistemin zamana bağlı durum değişikliğini sorgularsak bu bize bir sistemin $|\psi\rangle$ durum vektörünün zamana bağlı bir $|\psi(t)\rangle$ fonksiyon olması gerektiğini ifade eder. Kapalı, gözlemlenmeyen bir kuantum mekaniksel sistem, zamansal olarak sürekli ve deterministik bir şekilde gelişir. Ancak bu, ölçüm postulatında daha detaylı göreceğimiz gibi bir ölçüm sırasında meydana gelen öngörülemeyen sıçramalarla keskin bir tezat oluşturur. Yani bu tür bir kuantum sisteminin iç koşulları ve ortamı tamamen belirlendiğinde ve sistemde hiçbir ölçüm yapılmadığında, sistemin zamana bağlı değişimi H_n durum uzayındaki bir *üniter işlemciy*le (dönüşüm, operatör) açıklanır. Bunun sebebi ise bir kuantum işlemcisi bir kuantum durumu başka bir kuantum duruma dönüştürürken, yani belirli bir zaman ile kuantum durumların birim norma sahip olma koşulunun korunmasıdır. Bir kuantum durum üzerinde yapılan işlemler sonucunda kuantum durumun normunun korunması ancak üniter bir operatör ile sağlanır. Çünkü üniter operatörler iç çarpım ve normu koruyan lineer dönüşümlerdir. Bu tez

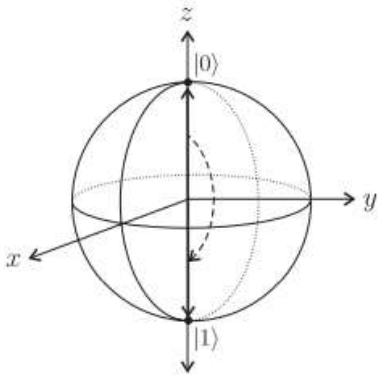
boyunca operatör ve dönüşüm kavramlarıyla işlemci, kapı ifadelerini birbiri yerine kullanacağız. Böylelikle, kapalı bir kuantum sistemin durumu zamana bağlı olarak lineerdir;

$$U\sum_i c_i\,|\psi_i\rangle = \sum_i c_i\,U|\psi_i\rangle \tag{3.27}$$

Belirttiğimiz gibi, kuantum durumlar üzerindeki tüm kuantum işlemcileri üniter işlemci olmak zorundadır aksi halde durumun birim olma koşulu sağlanmaz.

Kuantum hesaplamalarında çokça kullanılan H_2 durum uzayındaki 1-kübitlere etki eden birkaç üniter işlemciye değinelim:

(2.36) eşitliğinde tanımlanan üniter ve Hermityen operatörlere örnek olarak verdiğimiz Pauli matrisleri aslında en popüler kuantum işlemcileridir. Pauli X kapısına bazen işlevinden dolayı DEĞİL kapısı adlandırması da yapılır. Hatta Pauli X kapısını, Bloch küresi üzerindeki bir kuantum durumuna etkisini fiziksel olarak incelersek, $|0\rangle$ durumunu $|1\rangle$ durumuna; $|1\rangle$ durumunu da $|0\rangle$ durumuna x ekseni etrafında π açısı kadar döndürmesi olarak Şekil 3.6'daki gibi (3.28) yardımıyla gözlemleyebiliriz:



Şekil 3.6 Pauli X kapısının $|0\rangle$ durumunu $|1\rangle$ durumuna döndürmesi

$$X|0\rangle \equiv \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \equiv |1\rangle \tag{3.28}$$

Ayrıca X, Y, Z Pauli operatörlerine karşılık gelen üstel matrisleri de önemli 1-kübit işlemcilerindendir. Bu üstel işlemciler eksenlerle uyumlu olan isimlerine bağlı

olarak Bloch küresinin x-, y- ve z-eksenleri etrafındaki θ açılı dönmelere karşılık gelir. Bu sebeple (3.29) eşitliğinde verilen *dönme(rotasyon) kapıları* önemli üniter işlemcilerdendir;

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_x(\theta) &\equiv \mathrm{e}^{\frac{-i\theta X}{2}} = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right) X \\ \mathrm{R}_y(\theta) &\equiv \mathrm{e}^{\frac{-i\theta Y}{2}} = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right) Y \\ \mathrm{R}_z(\theta) &\equiv \mathrm{e}^{\frac{-i\theta Z}{2}} = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right) Z. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Bu rotasyon kapılarını hesaplama tabanındaki matrisler olarak yazabiliriz;

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_x(\theta) &= \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \\ \mathrm{R}_y(\theta) &= \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \\ \mathrm{R}_z(\theta) &= \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Şimdi, Bloch küresinin x-, y- ve z-eksenleri etrafındaki θ açılık dönüşlerine karşılık gelen matrisleri nasıl elde ettiğimizi kısaca inceleyelim.

Bloch küresi üzerinde $(1, \theta, \phi)$ polar koordinatlı bir noktayı (1-kübit), (3.25) eşitliğiyle ifade edebileceğimizi görmüştük. Bu durum vektörünü hesaplama tabanına bağlı olarak

$$\begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

biçimindeki sütun vektörü olarak yazabiliriz. Bu kübiti z-ekseni etrafında $(-\phi)$ açısı kadar döndürerek

$$|\psi'\rangle = cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i0}sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

durumunu elde ederiz. Bu dönüşüme karşılık gelen dönme matrisi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi}sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

işlemiyle tanımlayabiliriz. Buradan $b = 0$ ve $c = 0$ olduğu açıktır. Benzer mantıkla,

$$a.cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad d.e^{i\phi}sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.34}$$

(3.34) eşitliklerinin sağlanması ise ancak $a = 1$ ve $d = e^{-i\phi}$ olması halinde gerçekleşir. Böylelikle dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix} = e^{-i\frac{\phi}{2}} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

biçimini alır. Hatırlayacağımız gibi $e^{-i\frac{\phi}{2}}$ fazı ile çarpılmış olan ifadenin fiziksel olarak bir farklılığının oluşmadığını görmüştük. Böylelikle, bu önemli durumu gözönönünde tutarak, $(-\phi)$ açısı kadar z-ekseni etrafındaki döndürmeye karşılık gelen matrisi

$$\begin{bmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{bmatrix} = \mathrm{R}_z(-\phi) \tag{3.36}$$

şeklinde ifade edebiliriz. O halde (3.36) eşitliği yardımıyla, z-ekseni etrafındaki θ açısı kadar $\mathrm{R}_z(\theta)$ dönme matrisini,

$$\mathrm{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i.sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i.sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} - i. \begin{bmatrix} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & -sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - i.sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i.sin\left(\frac{\theta}{2}\right) Z = \mathrm{e}^{\frac{-i\theta Z}{2}}$$

üstel matrisiyle izah etmiş oluruz. Benzer mantık ve usulle, x- ve y-eksenleri etrafındaki θ açılı dönüşlere karşılık gelen $\mathrm{R}_x(\theta)$ ve $\mathrm{R}_y(\theta)$ dönme matrisleri de bulunabilir.

Daha genel olarak, orijini Bloch küresi üzerindeki bir $A(x_A, y_A, z_A)$ noktası ile bağlayan eksen etrafındaki θ açılı dönüş;

$$\mathrm{R}_A(\theta) = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(x_A X + y_A Y + z_A Z) \qquad (3.38)$$

şeklindedir.

Özetle, 2. Zamansal değişim postulatı, kapalı bir kuantum sistemin iki farklı zamandaki kuantum durumlarının nasıl ilişkili olduğunu açıklar. Ayrıca sürekli bir zamanda bir kuantum sistemin zamana bağlı değişimini meşhur Schrödinger denklemi ile de vermek mümkündür. Herhangi bir zamanda sistemin durumuna karşılık gelen $|\psi(t)\rangle$ vektörünün zamanla değişimi;

$$ih\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle \qquad (3.39)$$

diferansiyel denklemi olan *Schrödinger denklemi* ile verilir. Bu denklemdeki h fiziksel Planck sabitidir. Ayrıca buradaki $H(t)$, kuantum sistemin dinamiklerini belirleyen sistemin *Hamiltonyan*ı denilen bir Hermityen operatördür. $H(t)$ *Hamiltonyanı,* söz konusu dinamik sistemin zamansal değişimi altındaki

dinamiklerini tanımlar yani sistem için toplam enerji fonksiyonunu temsil eder ve sistemin enerji özdurumlarını (denge durumlarını) belirler. Ayrıca $H(t)$ genelde zamana bağlı bir fonksiyondur, ancak uygunluk için Hamiltonyanı sabit alırsak, sabit t_1 ve t_2 zamanları için Schrödinger denkleminin çözümü şu şekilde olur:

$$|\psi(t_2)\rangle = e^{-ihH(t_2-t_1)}|\psi(t_1)\rangle. \tag{3.40}$$

H Hermityen operatörleri için, $e^{-ihH(t_2-t_1)}$ operatörü üniter bir operatördür. Dolayısıyla, Hamiltonyanların sabit olması durumunda (kapalı bir kuantum sistemi) 2. Zamansal değişim postulatının Schrödinger denkleminin bir sonucu olduğu görülür, bu sebeple 2. Zamansal değişim postulatı Schrödinger denklemi ile de tanımlanır. Bu denklemin sonucu olarak, en genel hatlarıyla Hilbert uzayındaki kuantum işlemcilerinin üniter operatörler tarafından temsil edildiğini söyleyebiliriz.

3.1.3 Ölçüm Postulatı

Bir H_n durum uzayının $B = \{|b_i\rangle\}$ ortonormal tabanı için verilen bir $|v\rangle = \sum_i c_i\,|b_i\rangle$ durumu için; her $|b_i\rangle$ *durumunu ölçmenin olasılığı* $P(|b_i\rangle) = |c_i|^2$ şeklindedir. Ölçümden hemen sonra ise sistemin durumu $|b_i\rangle$ durumuna çöker.

Kuantum mekaniğine göre işleyen 1-kübit bir sistemin durumunun Hilbert uzayındaki bir vektör (ket) ile nasıl temsil edildiğini ve kuantum sistemin kapalı yani çevresiyle etkileşimin olmadığı durumda zamansal olarak üniter bir operatör ile değiştiğini gördük. Eğer kuantum sistemin bazı özelliklerini (sistemin anlık durumu) ölçmek istersek, sistemin gözlem için ölçüm cihazlarıyla ve çevresiyle etkileşimine izin vermeliyiz. Böylelikle sistem kapalılık halinden çıkar ve bir ölçüm süreci esnasında sistemin durumu artık üniter olarak değişmez.

Vaziyeti daha açık kılmak için $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarının süperpozisyonunda bulunan sistemin $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ durumunu ele alalım. Sistemi gözlemlemek istediğimiz zaman sistemin aslında $|0\rangle$ durumunda mı yoksa $|1\rangle$ durumunda mı olduğunu görmek için bir ölçüm yapmamız gerekir. Ancak bu durumda neyi ölçeceğimizi merak edebiliriz. Sistemi $|0\rangle$ durumunda yahut $|1\rangle$ durumunda olduğunu ölçeceğiz, ancak hangisi; ve süperpozisyon durumundan hasıl olan önemli bir soru olarak

hangi olasılıkla ölçeceğiz? Süperpozisyon kavramını yeniden ele alarak yorumlayacak olursak $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ kübitinin bulunabileceği $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarına ait olasılıkları barındırdığını söyleyebiliriz. Bu şekildeki $|\psi\rangle$ kübitine ise, a ve b olasılık genliğine sahip $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarının süperpozisyonunda olduğunu söylemiştik. Bu bağlamda ölçümsel olarak $|\psi\rangle$ kübiti, $|a|^2$ olasılıkla $|0\rangle$ durumunda ve $|b|^2$ olasılıkla $|1\rangle$ durumunda bulunur. Ancak bir gözlem ya da ölçüm yapıldığı vakit (yani çevresiyle etkileşime girdikten sonra) kübit bu durumlardan haliyle birinde görülür. Ölçüm sonucu olarak süperpozisyon durumundan tek bir duruma geçiş olan bu durum, *dalga fonksiyonunun çökmesi* olarak tanımlanır (çünkü durum vektörü aslında dalga denkleminin sürekli çözümüdür.) Bu söylediklerimizi aşağıda verdiğimiz *Von Neumann ölçümü* ismiyle anılan ölçüm postulatı ile açıklığa kavuşturalım:

H_n durum uzaylı sistemin $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\} \subseteq H_n$ ortonormal taban kümesine göre $|\psi\rangle \in H_n$ durumu

$$|\psi\rangle = c_1|\varphi_1\rangle + c_2|\varphi_2\rangle + \cdots + c_n|\varphi_n\rangle \tag{3.41}$$

$\{c_i\}, (1 \leq i \leq n)$ olasılık genlikleri olan karmaşık katsayıları tek türlü olacak biçimde yazılabilir. $|\psi\rangle$ durumunu tüm olasılıkların üstüste bindiği süperpoze durumdaki bu ortonormal tabanlara göre ölçebiliriz yani sistemin bu durumlardan hangisinde olacağını sorgulayabiliriz; sistemi $|\varphi_i\rangle$ durumununda ölçmenin olasılığı yani $|\varphi_i\rangle$ durumunu gözlemlemenin olasılığı,

$$\begin{aligned} P(\varphi_i) &= |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2 \\ P(\varphi_i) &= |c_i|^2 \end{aligned} \tag{3.42}$$

biçiminde verilir. Bu formülasyona Born kuralı (prensibi) denir. Ölçümden hemen sonra sistem $|\varphi_i\rangle$ durumuna çöker.

Buradan da anlaşılabileceği gibi kuantum durumlar üzerinde yapacağımız ölçümler ile yalnızca sonucun olasılığını tahmin edebiliriz. Bu ise süperpozisyon kavramının farklı açıdan bir tezahürüdür.

Şimdi verdiğimiz ölçüm postulatının önemli bir durumunu açıklayacağız. Bu ölçüm postulatının başka bir formülasyonu, birbirini dışlayan ölçüm sonuçlarının ortogonal projeksiyon operatörlerine (projektörler) karşılık gelmesidir. Ölçümlerin bu şekildeki sınıflandırılması ise *projektif ölçümler* olarak adlandırılır. Öyle ki, isminden de anlaşılacağı gibi projektif ölçümler projektör operatörlerin işlevlerinden esinlenilerek adlandırılmıştır. Hatırlayacak olursak, bir ortogonal P projektörü, $P^2 = P$ ve $P^\dagger = P$ özelliklerine haiz bir lineer operatör idi. Ayrıca bir $|\varphi\rangle$ ket vektörün kendisiyle olan dış çarpımı da, $|\varphi\rangle\langle\varphi|$, bir projektör tanımlıyordu;

$$|\varphi\rangle\langle\varphi||\psi\rangle \mapsto |\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle|\varphi\rangle. \tag{3.43}$$

Teorem 3.3. $B = \{|b_n\rangle\} \subseteq H_n$ ortonormal taban kümesi olmak üzere, H_n üzerinde tanımlı her T lineer operatörü,

$$T = \sum_{b_n, b_m \in B} T_{n,m} |b_n\rangle\langle b_m| \tag{3.44}$$

$T_{n,m} = \langle b_n|T|b_m\rangle$ olacak biçimde yazılabilir.

Bu teorem bize, B ortonormal taban kümesinin vektörleriyle oluşan olası tüm dış çarpımların, $\{|b_n\rangle\langle b_m|\}$, aslında H_n üzerindeki lineer operatörler için bir taban inşa ettiğini açıklar. Böylelikle, birim operatör I,

$$I = \sum_{b_n \in B} |b_n\rangle\langle b_n| \tag{3.45}$$

$B = \{|b_n\rangle\}$ tabanındaki çözümlemeye sahip olur. Daha genel olarak, I birim operatörünün P_i ortogonal projektörlerine ayrışımı

$$I = \sum\nolimits_i P_i \tag{3.46}$$

olarak yazılır. Böylece projektif ölçüm bakımından, $\{|\varphi_i\rangle\} \subseteq H_n$ ortonormal taban kümesine göre sistemin $|\psi\rangle = \sum_i c_i|\varphi_i\rangle$ durumunu $|\varphi_i\rangle$ durumunda gözlemleme olasılığı

$$P(\varphi_i) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle \tag{3.47}$$

$P_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ olacak biçimde ölçülür. Ayrıca ölçümdeki olası tüm çıktıların olasılık değerleri için

$$\sum_i P(\varphi_i) = \sum_i \langle\psi|P_i|\psi\rangle = 1 \tag{3.48}$$

geçerlidir. Sistem ölçümden hemen sonra

$$|\varphi_i\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{P(\varphi_i)}} \tag{3.49}$$

normalleştirilmiş durumda bırakılır(çöker). Yani, bu projektif ölçüm $|\psi\rangle$ durumunu P_i projektör operatörlerine karşılık gelen ortogonal altuzayların birine $P(\varphi_i)$ olasılığı ile yansıtır (izdüşürür, projekte eder). İşte bu projektif ölçümde önemli rol alan P_i projektör operatörlerine *ölçüm operatörü* de denir.

Sonuç olarak Von Neumann ölçümüyle $\{c_i\}$ olasılık genliği katsayılarının projektif ölçümde $\sqrt{P(\varphi_i)}$ olarak karşılık geldiğini görebiliriz. Aynı şekilde, esasında $|\psi\rangle$ durumu üzerindeki dik izdüşüm (iç çarpım, projeksiyon) uzunluğunun karesi olarak görülen $|\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2 = |c_i|^2$ olasılık değeri de projektif ölçüm olarak $\langle\psi|P_i|\psi\rangle$ değerine denk gelir;

$$\langle\psi|P_i|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\psi\rangle = (\langle\varphi_i|\psi\rangle)^\dagger(\langle\varphi_i|\psi\rangle) = |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2 \tag{3.50}$$

Ayrıca $|\psi\rangle$ durumu için $|\varphi_i\rangle$ taban durumlarının $\frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{P(\varphi_i)}}$ durumuna tekabül ettiği de açıkça görülebilir. Kısası bu sonuçlar ile aslında Von Neumann ölçümünün, normalleştirilmiş bir $|\varphi_i\rangle$ durumu için $|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ formundaki tüm P_i projektör operatörleri ile projektif ölçümün özel bir durumu olduğunu söyleyebiliriz.

$|i\rangle \in H_n$ $(0 \leq i \leq n-1)$ hesaplama tabanındaki Von Neumann ölçümüne en basit örnek olarak I birim operatörünün $I = \sum_i P_i$; $P_i = |i\rangle\langle i|$ biçimindeki ayrışımına bağlı bir projektif ölçüm olarak görülebilir. Ayrıca bu örnekten anlaşılacağı gibi ölçüm operatörlerinin sayısı ise H_n durum uzayının boyutuna eşittir.

Kuantum mekaniğin ölçüm postulatı olarak bir kuantum sistemi ölçmek istediğimizde ölçeceğimiz şeyin aslında sadece sistemin durumunu oluşturan

süperpozisyona katılan durumlarda bulunmasını ve bunun da ancak olasılık değerlerine bağlı olarak bulunacağını gördük. Ancak bununla birlikte sistemde yapılan ölçümden hemen sonra sadece tek bir durum ile dalga çöküşüyle karşılaşıyoruz. Yani gerçek hayatta durumları ölçemiyoruz ancak bir parçacığın momentumu, spini, konumu ve enerjisi gibi buna benzer birçok fiziksel büyüklükleri ölçebiliyoruz. İşbu sebepten sistemin durumu için gözlemlenebilir bir şeyler arıyoruz. Şimdi sistemin ölçülebilirliği bakımından gözlemlenebilir niceliklerin ne ile bağlantılı olduğunu inceleyelim. Bir parçacığın momentumu veya enerjisi gibi yukarıda değindiğimiz gözlemlenebilir nicelikler bir matematiksel operatörle ilişkilidir. Bu gözlemlenebilir operatör ise sistemin durum uzayı üzerinde tanımlı bir Hermityen operatördür. Kuantum sistemin herhangi bir Hermityen M operatörü,

$$M = \sum_i m_i P_i \tag{3.51}$$

m_i reel özdeğerli M'nin özuzayı üzerinde P_i ortogonal projektörleri ile spektral ayrışıma sahiptir. Buradaki P_i projektörleri ortogonal tam bir küme oluşturur;

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad ve \quad \sum_i P_i = I. \tag{3.52}$$

Bir başka bakışla diyebiliriz ki bir gözlemlenebilir, projektörlerin ağırlıklı toplamıdır.

$|\varphi\rangle \in H_n$ durumlu bir kuantum sistemin bir gözlemlenebilir ölçümü $\{M_i\}$ ölçüm operatörlerinin kümesi ile karakterize edilir. Kuantum sistemin herhangi M gözlemlenebiliri,

$$M = \sum_i \lambda_i M_i \tag{3.53}$$

şeklinde her M_i projektörüne karşılık λ_i özdeğerli bir spektral ayrışıma sahiptir. Bir $|i\rangle \in H_n$ taban vektörüne karşılık gelen ölçüm operatörü ise $M_i = |i\rangle\langle i|$ biçiminde M_i projektör operatörüyle tanımlanabilir. $|\varphi\rangle$ durumundaki kuantum

sistemini ölçtüğümüzde M_i ölçümünün bir sonucu olarak meydana gelen *i* indisli çıktıyı gözlemlemenin olasılığı

$$P(\lambda_i) = \langle\psi|M_i|\psi\rangle \tag{3.54}$$

şeklinde M_i ölçüm operatörünün λ_i reel özdeğerine karşılık gelir ve ölçümün muhtemel tüm çıktılarının olasılıkları toplamı 1'i vermelidir;

$$\sum_i P(\lambda_i) = \sum_i \langle\psi|M_i|\psi\rangle = 1. \tag{3.55}$$

Bu bilgileri Born kuralıyla ilişkilendirerek

$$P(\lambda_i) = \langle\psi|M_i|\psi\rangle = |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2 \ ; \ M = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \tag{3.56}$$

eşitliğinin olduğunu söyleyebiliriz. Üstelik buradaki $\{|\varphi_i\rangle\} \subseteq H_n$ ortonormal taban kümesi için M_i projektörü λ_i özdeğerine karşılık gelen $|\varphi_i\rangle$ özvektörüne sahiptir. Sonuç olarak, kuantum sistemin ölçümünün olası çıktıları ölçüm operatörlerinin özdeğerleridir. Ayrıca gözlemlenen olası çıktılar, ölçüm operatörlerinin λ_i özdeğerlerine karşılık geldiğinden ölçüm için fiziksel bir yorum yapabilmek için λ_i özdeğerlerinin reel sayı olması gerekir. Bu ise ölçüm operatörlerinin ancak Hermityen bir operatör için reel özdeğere sahip olması durumunda hasıl olur. Böylelikle ölçüm operatörlerinin ölçüm sürecinin fiziksel bir yorumunu açıklamak için neden reel özdeğerlere sahip Hermityen operatör olması gerektiği de açığa kavuşmuş olur.

Şimdi tanımladığımız projektif ölçüm ve Von Neumann ölçümünü özetleyecek bir örnek verelim.

Örnek 3.4. $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ durumundaki 1-kübitin $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ kanonik tabanındaki ölçümü ile sadece iki olası çıktısı vardır. Yani salt $|0\rangle$ veya $|1\rangle$ taban durumunu gözlemleyebiliriz. Bunlara karşılık gelen projektörler ise

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ ve \ P_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

dır. $|0\rangle$ taban durumuna karşılık gelen 0 çıktısının olasılığı

$$P(0) = \langle\psi|P_0|\psi\rangle = |c_0|^2 \tag{3.58}$$

dır. Aslında bu ifadeyi açıkça şu şekilde yazabiliriz

$$\begin{aligned} P_0|\psi\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ P(0) &= \langle\psi|(P_0|\psi\rangle) = [c_0^* \quad c_1^*]\begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \end{bmatrix} = |c_0|^2. \end{aligned} \tag{3.59}$$

P_0 ölçüm operatörünü uyguladıktan sonra kübitin normalleştirilmiş durumu

$$|\psi_0'\rangle = \frac{P_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_0|\psi\rangle}} = \frac{c_0|0\rangle}{\sqrt{|c_0|^2}} = |0\rangle \tag{3.60}$$

halini alır. Benzer şekilde $P(1) = |c_1|^2$ ve P_1 ölçüm operatörü uyguladıktan sonra $|\psi_1'\rangle = 1$ elde edilir. Ve böylece olasılık koşulu ile $P(0) + P(1) = |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ olduğunu görebiliriz. Bu örnekteki kübiti verilen $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ değerleri için gözlemlenebilirlik durumuna göre inceleyerek ilişkilendirebiliriz:

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ durumundaki 1-kübitin bir gözlemlenebilirinin sırasıyla $(+1)$ ve (-1) özdeğerlerine karşılık $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ özvektörlerine sahip olduğunu varsayalım. Bu iki durum çıktısı $P(0) = P(1) = 1/2$ olasılıklarıyla gözlemlenir.

$|0\rangle$ ve $|1\rangle$ özvektörlerine karşılık gelen projektör operatörleri, M_0 ve M_1;

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ve \; M_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

$|\psi\rangle$ durumunun projektif ölçümü, $|0\rangle$ özvektörüne karşılık gelen $(+1)$ özdeğerini

$$P(0) = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = \langle\psi|0\rangle\langle 0|\psi\rangle \tag{3.62}$$

olasılıkla üretir ve benzer şekilde, $|1\rangle$ özvektörüne karşılık gelen (-1) özdeğerini

$$P(1) = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = \langle\psi|1\rangle\langle 1|\psi\rangle \tag{3.63}$$

olasılıkla üretir. Böylelikle

$$M_0|\psi\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$P(0) = \langle\psi|(M_0|\psi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad -1]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}[1 \quad -1]\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2} \tag{3.64}$$

ve aynı şekilde $P(1) = \langle\psi|M_1|\psi\rangle = 1/2$ değerlerine ulaşırız.

Özetle kuantum mekaniğin ölçüm postülatı, birden çok olası değeri olan fiziksel olarak anlamlı bir miktar için, sistemin karşılıklı olarak dışlanmış durumlarını ölçümlerin olası değeriyle ilişkilendiren bir hermityen operatörün olduğunu söyler.

Ölçüm postulatı bakımından değinmemiz gereken önemli bir husus ise ortogonal projektör operatör olan ölçüm operatörlerinin bir özuzay üzerinde yansıtmada bulunmasıdır. Dolayısıyla tanımladığımız projektif ölçümler, ortogonal durumlar ile sınırlı kalmaktadır. Bu kısıtlamanın dışına çıkarak ortogonal durumlara ait olmayan çıktıları ise ölçümün en genel hâli olan *Pozitif Operatör Değerli Ölçümler (POVM)* ile yaparız;

$|\psi\rangle$ durumundaki bir kuantum sisteminde gerçekleştirilen bir ölçümü açıklayan $\{M_i\}$ ölçüm operatörlerinin kümesi için,

$$A_i = M_i^{\dagger}M_i \;\; ve \;\; \sum_i A_i = I \tag{3.65}$$

özelliklerini haiz A_i operatörleri ile *Pozitif Operatör Değerli Ölçüm* tanımlarız. Buradaki A_i operatörleri aşağıdaki iki özelliğe sahiptir:

- tanımından da anlaşılabileceği gibi pozitif ve reel özdeğerlere sahip bir *pozitif operatör*dür,
- çeşitli ölçüm çıktılarının olasılık tahminleri için $\{M_i\}$ ölçüm operatörlerini kullanmaktan ziyade $\{A_i\}$ operatörlerin kümesi kullanılır;

$$P(\lambda_i) = \langle\psi|\, M_i^{\dagger}M_i|\psi\rangle = \langle\psi|A_i|\psi\rangle. \tag{3.66}$$

Tanımladığımız en genel ölçüm tipi olan *Pozitif Operatör Değerli Ölçüm* kümesindeki tüm elemanlar ölçüm operatörü değildir. Bu genel ölçüm tipinin özel

olarak ölçüm operatörlerine indirgenmesi, yalnızca projektif ölçümler durumunda yani tüm POVM kümesindeki A_i elemanları $A_i \equiv {P_i}^{\dagger} P_i = P_i$ ölçüm operatörlerine denk olduğunda hasıl olur. POVM'un projektif ölçümlerden ayrılan diğer bir yanı ise sistemin ölçüm sonrası durumunu açıklamaktan ziyade salt ölçümlerin istatistikleriyle ilgili olmasıdır. Ayrıca projektif operatörlerin sayısı tanımlandığı Hilbert uzayının boyutuna tam olarak eşit iken; POVM kümesindeki A_i operatörlerinin sayısı ise tanımlandığı Hilbert uzayının boyutundan farklı olabilir.

3.1.4 Bileşik Sistem Postulatı

Bileşik (karma, kombine) bir fiziksel sistemin *durum uzayı*, bileşimdeki her bir fiziksel sistemi temsil eden Hilbert durum uzaylarının *tensör çarpımı*dır. Ayrıca bir sistem $|v_1\rangle$ ve diğer sistem $|v_2\rangle$ durumunda ise bileşik sistemin durumu $|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle$.

Şimdiye kadar kuantum sistemlerin durum uzayının salt 1-kübit durumu ile oluşan durumlarını inceledik. Birden fazla kübitten oluşan kuantum sistemlerin davranışını tek ve daha büyük bir kuantum sistemi olarak ele almak için gereken soyut matematiksel kavram daha önce detaylıca incelediğimiz tensör çarpımdır. Bu soyut kavramı daha rahat anlamak için iki kübitten oluşan bileşik sistemi ele alalım. Unutulmamalıdır ki, iki kübitlik bir bileşik sistemden farklı boyutlara sahip bileşik sistemlere de genelleme yapılabilir. İki kübitten oluşan bileşik kuantum sistemi, boyut; ölçüm olasılığı ve bileşik (ortak) kuantum işlemcileri bağlamında aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Bileşik kuantum sistemin boyutu:

İki kübitten oluşan bir bileşik sistem, dört boyutlu bir tek kuantum sistemi şeklindedir. Öyle ki her 1-kübit $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ gibi iki dışlanmış durumdan meydana geldiğinden, iki kübitten oluşan bileşik sistem, 2-*kübit*, tensör çarpım ile 4 farklı duruma sahip olacaktır:

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle \\ |01\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle \\ |10\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle \end{aligned} \tag{3.67}$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Tensör çarpımın özellikleri hatırlanacak olursa burada elde edilen 4 farklı durum aslında

$$|00\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, |01\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, |10\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, |11\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{3.68}$$

biçimindeki durumlar, bileşik durum uzayı olan $H_2 \otimes H_2 = H_4$ Hilbert uzayına göre ortonormal taban teşkil etmektedir.

2. Bileşik kuantum sistemi için ölçüm olasılığı:

$|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$ gibi 1-kübitten meydana gelen $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ bileşik kuantum durumunu tensör çarpım ile $|\boldsymbol{\psi}\rangle = |\psi_1\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ biçiminde elde ederiz. Bu bileşik durum daha büyük boyuta sahip ancak yine tek bir kuantum sistemi olarak ele alındığı için bu sistem üzerinde de, ölçüm postulatında belli duruma sahip kuantum sistemleri için verdiğimiz ölçüm hesaplamalarını benzer şekilde uygulayabiliriz. Öyle ki, bileşik kuantum sistemi için $|\psi_1\rangle$ durumunu $|\varphi_1\rangle$ durumunda; $|\psi_2\rangle$ durumunu ise $|\varphi_2\rangle$ durumunda gözlemlemenin olasılığını sorgulamak, aslında $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ bileşik kuantum durumunu $|\boldsymbol{\varphi}\rangle = |\varphi_1\varphi_2\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$ durumunda gözlemlemenin olasılığını araştırmakla aynıdır;

$$\begin{aligned} P(|\boldsymbol{\varphi}\rangle) &= |\langle\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\psi}\rangle|^2 \\ &= |\langle\varphi_1\varphi_2|\psi_1\psi_2\rangle|^2 \\ &= |[\langle\varphi_1| \otimes \langle\varphi_2|]\,[|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle]|^2 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Burada her 1-kübiti ait oldukları sistem içinde düşündüğümüzde, $|\psi_1\rangle$ durumunu $|\varphi_1\rangle$ durumunda ölçmenin olasılığı $P(|\varphi_1\rangle) = |\langle\varphi_1|\psi_1\rangle|^2$ ve $|\psi_2\rangle$ durumunu $|\varphi_2\rangle$ durumunda ölçmenin olasılığı $P(|\varphi_2\rangle) = |\langle\varphi_2|\psi_2\rangle|^2$ biçiminde Born kuralı ile hesaplanabildiğini biliyoruz. Ayrıca temel olasılık kuramına göre birbirinden bağımsız iki olayın birlikte gerçekleşme olasılığı, olayların ayrı ayrı gerçekleşme olasılıklarının çarpımı şeklinde tanımlıdır. Buna bağlı olarak, sistemde $|\psi_1\rangle$ durumunu $|\varphi_1\rangle$ durumunda gözlemle olasılığı, $|\psi_2\rangle$ durumunu ise $|\varphi_2\rangle$ durumunda

gözlemleme olasılığından bağımsız olduğundan bu iki durumun birlikte gerçekleşme olasılığı için

$$P(|\boldsymbol{\varphi}\rangle) = P(|\varphi_1\rangle)P(|\varphi_2\rangle) \tag{3.70}$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla bileşik sistemin $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ durumunu $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$ durumunda gözlemleme olasılığı,

$$P(|\boldsymbol{\varphi}\rangle) = |[\langle\varphi_1| \otimes \langle\varphi_2|]\,[|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle]|^2 = |\langle\varphi_1|\psi_1\rangle|^2|\langle\varphi_2|\psi_2\rangle|^2 \tag{3.71}$$

biçiminde tanımlıdır.

3. Bileşik kuantum sistemi üzerinde kuantum işlemcileri:

$|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$ gibi 1-kübitten meydana gelen bileşik kuantum sistemi için, eğer $|\psi_1\rangle$ kübiti üzerinde U_1 üniter operatörü ve $|\psi_2\rangle$ kübiti üzerinde U_2 üniter operatörü tanımlıysa $U_1 \otimes U_2$ üniter işlemcisi,

$$\begin{aligned}[U_1 \otimes U_2]|\psi_1\psi_2\rangle &= [U_1 \otimes U_2][|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle] \\ &= [U_1|\psi_1\rangle] \otimes [U_2|\psi_2\rangle]\end{aligned} \tag{3.72}$$

biçiminde $|\psi_1\psi_2\rangle$ bileşik sistemi üzerinde tanımlı ortak işlemcidir. Burada da farkedilecek olursa yine tensör çarpımın avantajlarını kullanarak bileşik sistem üzerine etki eden ortak üniter işlemci tanımladık.

Yukarıda özellikleriyle beraber inşa ettiğimiz iki kübitten oluşan bileşik sistem durumunun, 2-kübit, H_4 durum uzayındaki bir vektör ile temsil edildiğini gördük. Bu kısımda birden fazla kübitten meydana gelen bileşik sistemin kolay anlaşılması için özel olarak 2-kübit durumunu inceledik. Daha büyük boyutlu Hilbert uzayını inşa etmek için; $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ durumlarıyla n-kübitten oluşan bileşik durumu $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ tensör çarpımı ile veririz. Bu bileşik durumun 2^n boyutlu vektör ile temsil edileceği aşikârdır, yani

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle = |\psi_1\psi_2 \dots \psi_n\rangle \in H_{2^n} \tag{3.73}$$

Burada edindiğimiz bilgiler ışığında, her 4-boyutlu vektörün 2-boyutlu iki vektörün tensör çarpımı şeklinde yazılabilmesi mümkün mü diye düşünebiliriz.

Böylesine önemli ve ince nüansı ayırt etmek için aşağıdaki iki kavramsal tanımı vermemiz gerekir:

Tanım 3.5. Herhangi 2-kübit durumu $|\boldsymbol{\psi}\rangle \in H_4$ için $|\boldsymbol{\psi}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ olacak biçimde en az bir $|\psi\rangle \in H_2$ ve $|\varphi\rangle \in H_2$ durumları var ise $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ durumuna *ayrılabilir durum* denir. Aksi durumda, $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ durumuna *dolanık durum* denir. Yani, durumların tensör çarpımı olarak yazılabilen bileşik durumlara *ayrılabilir*; aksi haldeki bileşik durumlara ise *dolanık durum* ismi verilir.

Fiziksel olarak farklı ve düşünsel açıdan garip olan bu dolanıklık olgusu, kuantum fiziğini özünde klasik fizikten farklı kılan en bariz şeydir. Çünkü bu durum bize aynı anda iki maddenin birbirleriyle sürekli dolanık halde bulunduğunu söyler. Bu dolanıklık olgusunu ve aslında fizikteki mekaniğe bakışın çerçevesini genişleterek kuantum mekaniği düşüncesine yol açan *çift yarık deneyi*, açıklanmasında ve anlaşılmasında zorlanılan bu durumları çok iyi anlatan bir deneydir; aynı anda fırlatılmış fotonların birbirleriyle sürekli etkileşiminden yani dolanıklılığından dolayı en son yapılacak gözlem için fotonların bir bütün olarak yığılmasının gözlemlenmesi, dolanıklık kavramını anlatan en güzel örnektir. Şimdi bu durumu matematiksel modellemeyle anlatan soyut bir örnek verelim:

Örnek 3.6. $|\boldsymbol{\varphi}\rangle, |\boldsymbol{\psi}\rangle \in H_4$ için $|\boldsymbol{\varphi}\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$ ve $|\boldsymbol{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ durumları ayrılabilir durumlar mıdır inceleyelim. Öncelikle $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$ durumunu incelemekle başlarsak, $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$ durumunun ayrılabilir olduğunu varsayalım. O halde ayrılabilir durum tanımı gereği, $|\boldsymbol{\varphi}\rangle \in H_4$ için $|\boldsymbol{\varphi}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ olacak biçimde en az bir $|\psi\rangle = \begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} \in H_2$ ve $|\varphi\rangle = \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix} \in H_2$ durumları vardır. $|\boldsymbol{\varphi}\rangle = |\psi\rangle|\varphi\rangle$ durumunu matris yazımı biçiminde açıkça gösterirsek;

$$|\boldsymbol{\varphi}\rangle = |\psi\rangle|\varphi\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_1\varphi_1\\ \psi_1\varphi_2\\ \psi_2\varphi_1\\ \psi_2\varphi_2\end{bmatrix} \tag{3.74}$$

eşitliği sebebiyle $\psi_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = 1/\sqrt{2}$ ve $\psi_2 = -1/\sqrt{2}$ değerlerinin bu eşitlik için bir çözüm olduğunu söyleyebiliriz. Böylelikle,

$$|\boldsymbol{\varphi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = |-+\rangle \tag{3.75}$$

(3.75) ile $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$ durumu $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \in H_2$ ve $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in H_2$ durumlarının tensör çarpımı şeklindeki yazılışından bir ayrılabilir durumdur. Benzer teknik ile, $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ durumunun olmayana ergi yöntemiyle ayrılabilir olup olmadığına bakalım. $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ durumunun ayrılabilir olduğunu varsayarsak,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_1\varphi_1\\\psi_1\varphi_2\\\psi_2\varphi_1\\\psi_2\varphi_2\end{bmatrix} \tag{3.76}$$

eşitliğine göre $\psi_1\varphi_2 = 0$ mevcuttur ki buradan $\psi_1 = 0$ veya $\varphi_2 = 0$ olması gerekir. Ve fakat $\psi_1 = 0$ ise $\psi_1\varphi_1 = 0$ olur, böylelikle çelişki meydana gelir. Diğer türlü $\varphi_2 = 0$ ise $\psi_2\varphi_2 = 0$ olur, yine burada da çelişkili sonuç mevcuttur. Dolayısıyla $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ durumunu $|\boldsymbol{\psi}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ olacak biçimde hiçbir $|\psi\rangle \in H_2$ ve $|\varphi\rangle \in H_2$ durumları bulunamamaktadır, dolayısıyla $|\boldsymbol{\psi}\rangle$ durumu ayrılabilir değil; dolanık bir durumdur.

Not 3.7. Örnek 3.6.'da verdiğimiz bu durumların ayrılabilir durum olup olmadıklarını incelerken matris açılımından ziyade $|\psi\rangle = \psi_1|0\rangle + \psi_2|1\rangle$ ve $|\varphi\rangle = \varphi_1|0\rangle + \varphi_2|1\rangle$ şeklindeki süperpozisyon durumlarını kullanarak tensör çarpım yardımıyla aynı eşitliklere ulaşmak mümkündür, şöyle ki; $|\boldsymbol{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ durumu için bakacak olursak, $|\boldsymbol{\psi}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) &= (\psi_1|0\rangle + \psi_2|1\rangle) \otimes (\varphi_1|0\rangle + \varphi_2|1\rangle)\\ &= \psi_1\varphi_1|00\rangle + \psi_1\varphi_2|01\rangle + \psi_2\varphi_1|10\rangle + \psi_2\varphi_2|11\rangle\end{aligned} \tag{3.77}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir ki bu da

$$\psi_1\varphi_1 = 1/\sqrt{2}\,,\ \psi_1\varphi_2 = 0\,,\ \psi_2\varphi_1 = 0\,,\ \psi_2\varphi_2 = 1/\sqrt{2} \tag{3.78}$$

aynı denklemlere ulaştırır bizi.

Bileşik durumların meydana getirdiği iki farklı ayrılabilir durum ve dolanık durum kavramları aslında kübitlerin yapısı ve durum uzayı bakımından önemli bilgiler vermektedir. Öyle ki, tek tek 1-kübitlerin tensör çarpımıyla daha geniş durum uzayının inşa edildiği rahatlıkla görülür. Hatta oluşan bu durum uzayını tanımlayan taban vektörlerini tanımlamak da mümkündür. Örneğin, $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \subseteq H_4$ kümesi 2-kübit sistemi için hesablama tabanı teşkil eder. Buna bağlı olarak, herhangi $|\varphi\rangle \in H_4$ durumu,

$$|\varphi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle \tag{3.79}$$

$|c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 = 1$ koşulu sağlanacak biçimde taban vektörlerinin süperpozisyonunda yazılır. Dolanık durumları incelediğimizde yapısı gereği aslında bulundukları durum uzayı için bir taban vektörüdür, yani bileşik kübitlerin uzayı için dolanık durumlar bir ortonormal taban sağlar. Özel olarak (3.80) ile verdiğimiz aşağıdaki dolanık 2-kübit durumları *Bell durumları* olarak adlandırılır;

$$\begin{aligned}
|\varphi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \\
|\varphi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\
|\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\
|\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

2-kübit sistemi için bu özel durumlar, $H_{2^2} = H_4$ durum uzayı için ortonormal taban teşkil eder.

3.1.4.1 Bir Kuantum Sistemin Durumu için Alternatif ve Geometrik Bir Bakış

Şimdiye değin bir kuantum sistemin durumunu ket ile isimlendirdiğimiz bir durum vektörü ile temsil ettik. Aslında bu durum vektörleri, bir ortonormal taban için taban vektörlerinin süperpozisyonundaki yazılışı ile sistem hakkındaki maksimum bilgiyi karakterize eden *pür durum*lardır. Yani $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle\} \in H_n$ ortonormal taban kümesi için herhangi pür durum, c_i katsayıları olasılık genlikleri olmak üzere

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |b_i\rangle \;\; ; \;\; \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1 \qquad (3.81)$$

şeklinde taban vektörlerinin bir süperpozisyonunda yazılan Hilbert uzayının boyutuna karşılık gelen ket(durum) vektörleri ile tanımladığımız kuantum durumlardır. Bu pür durumların dışında, pür durumların olasılıklarına bağlı olarak tanımlanan kübitler de mevcuttur; tıpkı $1/3$ olasılıkla $|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ pür durumunda ve $2/3$ olasılıkla $|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ pür durumundaki bir kübit gibi. Bu olasılık dağılımı ile tanımlanan duruma $|\varphi_1\rangle$ ve $|\varphi_2\rangle$ durumlarının topluluğu veya karışımı denir. Bu şekildeki pür durumların istatistiksel bir karakterizasyonunu gerektiren kuantum sistemin durumuna *karma durum* adı verilir.

Herhangi sayıdaki n-kübitten oluşan bir sınıf üzerinde tanımlı birçok karma duruma sahip olabiliriz. $\{(|\psi_1\rangle, p_1), (|\psi_2\rangle, p_2), \dots, (|\psi_k\rangle, p_k)\}$; $i = 1,2, \dots, k$ şeklinde p_i olasılıkla $|\psi_i\rangle$ (n-kübit) pür durumundaki sistem, k sayıda n-kübit üzerindeki genel bir *karma durumu* temsil eder. Karma durumun yapısına dikkat edildiğinde, p_i olasılıklarının biri hariç diğerlerinin sıfır olması halinde bir pür durumun aslında bir karma durumun özel bir durumu olduğu görülebilir. Ancak dikkat edilecek husus, buradaki p_i değerleri karma durum için olasılık genliklerinden ziyade klasik manada olasılık değerlerini ifade eder; $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Şimdi bir kuantum sistemin durumunu alternatif gösterim olarak yoğunluk operatörü aracılığıyla karakterize edeceğiz. Biliyoruz ki, karmaşık elemanlı $n \times n$ matrislerin kümesi $C^{n\times n}$, matris çarpımı ile bir iç çarpım uzayıdır. Ayrıca bir iç çarpım uzayı olan Hilbert uzayından, $C^{n\times n}$ uzayına bir izomorfizma mevcuttur; dolayısıyla her $|\psi\rangle \in H_n$ vektörü ile bir $\rho \in C^{n\times n}$ matrisi arasında karakterizasyon kurabiliriz. Öyle ki, bir kuantum sistemin durumu alternatif olarak Hilbert uzayı üzerinde tanımlı yoğunluk operatörü(matrisi) adı verilen lineer operatörlerle(matrislerle) tanımlanır. Bir $|\psi\rangle$ durum vektörünün dış çarpımıyla oluşan operatöre *yoğunluk operatörü(matrisi)* adı verilir, yani

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad (3.82)$$

şeklindeki yoğunluk operatörüyle tanımlanan $|\psi\rangle$ durumuna bir *pür durum* denir.

Kuantum mekaniğin postulatlarını, durumların alternatif temsili olan yoğunluk operatörü bakımından kısaca incelersek alternatif temsilin çok kullanışlı olduğu görülecektir. Öyle ki, $|\psi\rangle$ durumuna U üniter operatörünü uyguladığımızda $U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger = U\rho U^\dagger$ yoğunluk operatörüne sahip $U|\psi\rangle$ durumunu elde ederiz. Ayrıca $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ yoğunluk operatörlü durumun hesaplama tabanındaki ölçümünü düşünelim. Ölçüm postulatından hatırlayacak olursak, $|0\rangle$ durumunu elde etmenin olasılığı,

$$\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle = \langle 0|\rho|0\rangle \tag{3.83}$$

biçimindeki bir reel sayıya tekabül eder. Bu ifadenin reel sayı olmasından da

$$\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle = \mathrm{tr}(\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle) = \mathrm{tr}(|0\rangle\langle 0||\psi\rangle\langle\psi|) = \mathrm{tr}(|0\rangle\langle 0|\rho) \tag{3.84}$$

eşitlikleri iz alma özelliklerinden mevcuttur. Bu ifadelere bağlı olarak pür durumlar için yoğunluk operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir;

- Hermityen bir operatördür: $\rho^\dagger = (|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$.
- İdempotenttir: $\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi||\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$
- Herhangi ortonormal $\{|n\rangle\}$ taban kümesi için, yoğunluk matrisinin izi 1'dir:
  $\mathrm{tr}(\rho) = \sum_n \langle n|\rho|n\rangle = \sum_n \langle n|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle = \sum_n \langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle = 1$ veya
  $\mathrm{tr}(\rho) = \sum_{i=1}^n c_i\, {c_i}^\dagger = \sum_{i=1}^n |c_i|^2 = 1$ şeklinde de elde edilebilir.
- Benzer olarak, $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$.
- Pozitif yarıtanımlıdır: $\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2 \geq 0$.
- Bir pür durumun yoğunluk operatörü taban durumların dış çarpımlarının toplamı şeklinde temsil edilebilir.

$\{(|\psi_1\rangle, p_1), (|\psi_2\rangle, p_2), \dots, (|\psi_k\rangle, p_k)\}$ biçiminde k tane pür durumun olasılıklarına bağlı *karma durumun yoğunluk operatörü* ise

$$\rho_{karma} = \sum_{i=1}^{k} p_i\, |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{3.85}$$

p_i olasılıkla her bir $|\psi_i\rangle$ pür durumun karşılık gelen yoğunluk operatörlerinin toplamı şeklindedir. Karma durumlar, pür durumların bazı özelliklerini taşırken en bariz fiziksel durumlarında ayrılırlar;

- Hermityen bir operatördür.
- İdempotent değildir: ${\rho_{karma}}^2 \neq \rho_{karma}$
- $\mathrm{tr}(\rho_{karma}) = 1$.
- Ancak, $\mathrm{tr}({\rho_{karma}}^2) < 1$.
- Pozitif yarıtanımlıdır.

Özetle, yoğunluk operatörü ρ, bir kuantum durumunun daha eksiksiz bir karakterizasyonunu sağlar; yani kuantum sistemi hakkında edinebileceğimiz son raddedeki bigiyi sunar. Ayrıca pür ve karma kuantum durumlarını ayırt etmemize de olanak sağlar. Öyle ki her durum için ρ, bir Hermityen operatör ve $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ iken salt pür durumlar için $\rho^2 = \rho$ ve $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$ eşitlikleri geçerlidir.

Şimdi bir kuantum sistemin durumunu daha bariz ve en kapsamlı bilgiyle belirleyen yoğunluk operatör(matris)lerinin özelliklerini daha detaylı biçimde irdeleyelim:

Hatırlayacak olursak polarize fotonlar, $1/2$ dönmeye(spin) sahip parçacıklar, uyarılmış ve temel durumdaki atomlar gibi herhangi iki boyutlu(seviyeli) bir kuantum sistemi 1-kübit oluşturur. Böylelikle herhangi $|\psi\rangle \in H_2$ kübitin $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ hesaplama tabanına göre pür durumu $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$; $|a|^2 + |b|^2 = 1$ biçiminde yazılır. Ayrıca $|\psi\rangle$ kübitinin durumunu,

$$|\psi\rangle = cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi} sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \ , \qquad 0 \leq \theta \leq \ \pi \ , \qquad 0 \ \leq \phi \leq \ 2\pi \qquad (3.86)$$

şeklinde Bloch (birim) küresinin yüzeyindeki $(1, \theta, \phi)$ polar koordinatlı bir nokta ile ifade edebileceğimizi görmüştük. Bu $|\psi\rangle$ kübitinin durum vektörünü hesaplama tabanına bağlı olarak

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \qquad (3.87)$$

biçimindeki sütun vektörü(ket) olarak yazabiliriz. Bu açılıma bağlı olarak, $|\psi\rangle$ pür durumunu yoğunluk matrisi gösteminde şu şekilde yazabiliriz;

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \frac{1}{2}e^{-i\phi}sin(\theta) \\ \frac{1}{2}e^{i\phi}sin(\theta) & sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

Bloch küresinin yüzeyine $(1, \theta, \phi)$ polar koordinatı ile birebir dönüşüm sağlayan $|\psi\rangle$ pür durumu için karşılık gelen kartezyen koordinat (x, y, z) olmak üzere,

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(\theta)cos(\phi) \\ sin(\theta)sin(\phi) \\ cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

biçiminde tanımlı $\boldsymbol{s}$ vektörüne *Bloch vektörü* denir.

Not 3.8. (2.36) eşitliğinde tanımlanan I birim matrisiyle, üniter ve Hermityen operatör olan Pauli matrisleri reel Hilbert uzayı için taban teşkil eder. Ayrıca her Pauli matrisi, $1/2$ dönmeye(spin) sahip parçacığın uzaysal olarak üç yöndeki dönmesini tasvir eden gözlemlenebilir bir operatör ile bağlantılıdır. Buna bağlı olarak her 2×2 karmaşık Hermityen matrisini, $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ taban kümesinin bir lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz. Üstelik $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Pauli matrislerinin izi sıfır olduğundan, bir Hermityen matrisin pozitif yarıtanımlı ve 1 değerli ize sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Yukarıda verdiğimiz bilgiler ışığında, $|\psi\rangle$ pür durumunu $\boldsymbol{s}$ Bloch vektörüne ve Pauli matrislerinin bir vektörü olan σ ifadesine bağlı olarak,

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z\right) = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{s}\sigma) \tag{3.90}$$

biçiminde yazabiliriz.

Şimdi daha genel olarak, $0 \leq r \leq 1$ için Bloch (birim) küresindeki (r, θ, ϕ) polar koordinatına sahip $|\psi\rangle$ durumun ρ yoğunluk matrisinin özelliklerini $(\mathrm{r}_x, \mathrm{r}_y, \mathrm{r}_z)$ kartezyen koordinatlarına bağlı olarak detaylıca inceleyelim:

- Her $|\psi\rangle$ durumun ρ yoğunluk matrisini, $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ taban kümesinin bir lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz;

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + \mathrm{r}_x\sigma_x + \mathrm{r}_y\sigma_y + \mathrm{r}_z\sigma_z\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{r}_z & \mathrm{r}_x - i\mathrm{r}_y \\ \mathrm{r}_x + i\mathrm{r}_y & 1-\mathrm{r}_z \end{bmatrix}. \tag{3.91}$$

- $0 \le r^2 = {\mathrm{r}_x}^2 + {\mathrm{r}_y}^2 + {\mathrm{r}_z}^2 \le 1$ için ρ yoğunluk matrisinin izi $\mathrm{tr}(\rho)$,

$$\mathrm{tr}(\rho) = \frac{1}{2}\left((1+\mathrm{r}_z) + (1-\mathrm{r}_z)\right) = 1. \tag{3.92}$$

geçerlidir. Üstelik $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ Pauli matrislerinin izi sıfır olduğundan bu ifadeyi kolayca elde etmek mümkündür. Ayrıca

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{r}_z & \mathrm{r}_x - i\mathrm{r}_y \\ \mathrm{r}_x + i\mathrm{r}_y & 1-\mathrm{r}_z \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{r}_z & \mathrm{r}_x - i\mathrm{r}_y \\ \mathrm{r}_x + i\mathrm{r}_y & 1-\mathrm{r}_z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+r^2+2\mathrm{r}_z & 2(\mathrm{r}_x - i\mathrm{r}_y) \\ 2(\mathrm{r}_x + i\mathrm{r}_y) & 1+r^2-2\mathrm{r}_z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.93}$$

için $\mathrm{tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}(1+r^2)$ dir.

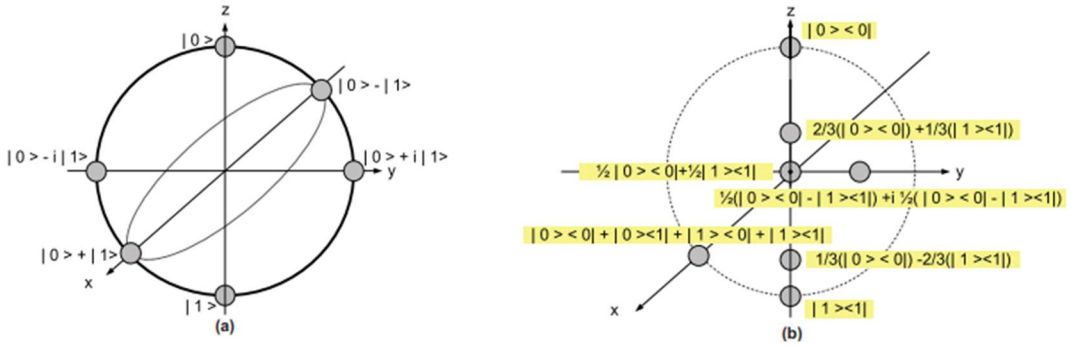
Bu eşitliklerden görülebileceği gibi $|\psi\rangle$ pür veya karma durumu için ρ yoğunluk matrisinin izi $\mathrm{tr}(\rho) = 1$ değerine sahiptir. Ancak $|\psi\rangle$ pür durumu için $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$ iken; $|\psi\rangle$ karma durumu için $\mathrm{tr}({\rho_{karma}}^2) < 1$ eşitsizliği geçerlidir. Yani $r^2 = 1$ için $\mathrm{tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}(1+r^2) = 1$ olduğundan $|\psi\rangle$ durumu Bloch birim küresinin *yüzeyindeki* bir noktayla eşleşen bir pür durumdur; $0 \le r^2 < 1$ için $\mathrm{tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}(1+r^2) < 1$ olduğundan $|\psi\rangle$ durumu Bloch birim küresinin *içindeki* bir noktayla eşleşen bir karma durumdur.

- ρ yoğunluk operatörü pozitif yarıtanımlı olduğundan ve $0 \le r^2 \le 1$ için $\det(\rho) \ge 0$ dır;

$$\det(\rho) = \frac{1}{4}\left[(1-{\mathrm{r}_z}^2) - ({\mathrm{r}_x}^2 + {\mathrm{r}_y}^2)\right] = \frac{1}{4}(1-r^2) \ge 0 \tag{3.94}$$

Bu ifadeden de anlaşılıyor ki, Bloch birim küresinin $0 \le |r| < 1$ için içindeki noktaları yahut $|r| = 1$ için yüzeyindeki noktaları ile 1-kübitin yoğunluk matrisleri arasında karşılıklı birebir eşleme mevcuttur. Hatta pür durumlar için

$r^2 = 1$ olduğundan $\det(\rho) = 0$ durumundaki 1-kübit pür durum; $\det(\rho) > 0$ için karma durumdur çıkarımında bulunuruz (Şekil 3.7).



Şekil 3.7 (a) Bir Bloch küresinin yüzeyindeki pür durumların temsili (b) Yoğunluk operatörü ile Bloch küresinin yüzeyindeki pür durumların ve içindeki karma durumların temsili [2]

Şekil 3.7 incelendiğinde karma durumlar, klasik durumlara bir bakıma daha yakındır. Klasik durumlar z-ekseni boyuncadır (birim matrisi başlangıç noktasıdır). Biz bu eksenden ayrıldıkça kuantum davranışı ortaya çıkıyor. İki kutup çok ilgi çekicidir: Burası pür durumların klasik davranışla kesiştiği yerdir.

Bir kuantum sistemin durumlarının ayrımı ve gözetimi bakımından alternatif bir formülasyon olan yoğunluk operatörü, bileşik sistemler için de önem arz etmektedir. Hatırlayacak olursak kuantum mekaniğin dördüncü postulatı olarak verdiğimiz bir bileşik sistemin durumu, bileşime katılan her bir sistemin durumlarının tensör çarpımı şeklindeydi. Örneğin, A ve B gibi iki durum uzayından meydana gelen bileşik sistem için Hilbert uzayı $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ biçimindedir. Ayrıca bu H_{AB} bileşik sistemi üzerindeki bir durum vektörü ise $|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = |\psi\rangle_A|\psi\rangle_B = |\psi_A\psi_B\rangle$ biçimindeki gösterimlerle birlikte tanımlanmıştı. Üstelik durumların tensör çarpımı şeklinde yazılabilen bileşik durumlara ayrılabilir; aksi durumdaki bileşik durumlara ise dolanık durum adı verildiğini unutmayalım. Bu şekilde tanımlanan bileşik sistemlerin yoğunluk matrisleri de bileşime katılan durumların yoğunluk matrislerinin tensör çarpımı ile tanımlanır;

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \tag{3.95}$$

Bu tür bir bileşik sistemin genel durumu $|\psi\rangle_{AB}$ dolanık pür durum olabilir ve buna bağlı olarak bileşime katılan durum vektörleri için $|\psi\rangle_A \in H_A$ ve $|\psi\rangle_B \in H_B$

biçiminde tensör çarpıma katılan durumlar olarak ayırt etmek mümkün olmayabilir. Bununla birlikte, bileşime katılan herhangi bir sistemin durumu genel olarak karma bir durum olarak tanımlanabilir, dolayısıyla ait olduğu Hilbert uzayı üzerinde bir yoğunluk matrisi ile tanımlanabilir. Bu şekildeki ρ_{AB} yoğunluk matrisli bir bileşik kuantum sistemin bir altsisteminin yoğunluk matrisi *indirgenmiş yoğunluk matrisi* olarak tanımlanır. H_{AB} bileşik sisteminin ρ_{AB} yoğunluk matrisine göre bileşime katılan H_A sisteminin indirgenmiş yoğunluk matrisi(operatörü),

$$\rho_A \equiv tr_B(\rho_{AB}) \tag{3.96}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanımlamadaki tr_B operatörü bileşime katılan H_B sistemi üzerindeki *kısmi iz operatörü*dür. Kısmi iz alınırken, H_B sistemine ait olasılık genlikleri kaybolur; bunun nedeni ise herhangi bir yoğunluk matrisi için $tr(\rho) = 1$ geçerlidir. Böylelikle sadece H_A sistemine ait olasılık genlikleri kalır. Bu matematiksel işlem aynı zamanda "iz sürme" olarak da adlandırılır. Bu şekliyle $|\psi\rangle_{AB} \in H_A \otimes H_B$ pür durumundaki bileşik sistem için karma duruma sahip olan H_A sisteminin H_B sistemine göre ρ_A indirgenmiş yoğunluk matrisi

$$\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) = tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|_{AB}) \tag{3.97}$$

biçimindedir. Gerçekten de sonlu n-boyutlu H_A uzayı için yoğunluk matrisi ρ_A ,

$$\rho_A = \sum_i p_i \left|e_i^A\right\rangle\left\langle e_i^A\right| \tag{3.98}$$

şeklinde ortonormal ayrışıma sahiptir. H_A ile aynı uzayı paylaşan H_B için $\{\left|e_j^B\right\rangle\}$ bir ortonormal tabandır. $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ bileşik sistemin $|\psi\rangle_{AB}$ pür durumu

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}\left|e_i^A\right\rangle \otimes \left|e_i^B\right\rangle \tag{3.99}$$

dır. Bu durum için H_A sisteminin ρ_A indirgenmiş yoğunluk matrisini hesablayalım, yani H_B durum uzayına göre ρ_{AB} yoğunluk operatörünün kısmi izini alalım;

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) = tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|_{AB}) &= \sum_i \sum_j \sqrt{p_i p_j}\left|e_i^A\right\rangle\left\langle e_i^A\right| \mathrm{tr}\left(\left|e_j^B\right\rangle\left\langle e_j^B\right|\right) \\ &= \sum_i \sum_j \sqrt{p_i p_j}\left|e_i^A\right\rangle\left\langle e_i^A\right| \delta_{ij}\end{aligned} \tag{3.100}$$

ve sonuç olarak,

$$\mathrm{tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_i p_i \left|e_i^A\right\rangle\left\langle e_i^A\right| = \rho_A \tag{3.101}$$

biçiminde elde edilen H_B sistemine göre iz alma(tr_B) işlemine ρ_A'nın *pürleştirilmesi* adı verilir.

Örnek 3.9. *Bell durumları* olarak adlandırılan dolanık 2-kübit durumlarından $|\varphi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ durumunu ele alalım. Yoğunluk matrisleri dolanık durumlar hakkında birçok bilgi verdiği için bu Bell durumunun yoğunluk matrisi

$$\begin{aligned}\rho_{\varphi^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00| + \langle 11|) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)\end{aligned} \tag{3.102}$$

biçimindedir. Bu dolanık Bell durumunun ikinci kübitine göre kısmi iz alırsak

$$\begin{aligned}\rho_A = tr_B(\rho_{AB}) &= tr_2\left(\rho_{\varphi^+}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}_2(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}_2(|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \\ &\quad \otimes |1\rangle\langle 1|) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|\mathrm{tr}(|0\rangle\langle 0|) + |0\rangle\langle 1|\mathrm{tr}(|0\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 0|\mathrm{tr}(|1\rangle\langle 0|) \\ &\quad + |1\rangle\langle 1|\mathrm{tr}(|1\rangle\langle 1|)) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 1|\langle 1|0\rangle + |1\rangle\langle 0|\langle 0|1\rangle + |1\rangle\langle 1|\langle 1|1\rangle)\end{aligned} \tag{3.103}$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$$

birinci kübit için indirgenmiş yoğunluk operatörünü elde etmiş oluruz. Elde ettiğimiz bu durum Bloch küresinin merkezindeki nokta olan bir karma durumdur. Dolanık durum bileşik uzayda pürdür ancak ilginç bir şekilde onun kısmi izleri bir karma durum gösterir. Dolayısıyla Schmidt ayrışımından hareketle, bir durumun dolanık olması için gerek ve yeter koşul Schmidt rankının 1'den büyük olmasıdır. Bu yüzden ikibileşenli bir pür durumun dolanık olması ancak ve ancak indirgenmiş durumlarının karma durumlar olmasıdır.

3.2 İşlemsel Model Olarak Kuantum Devreleri

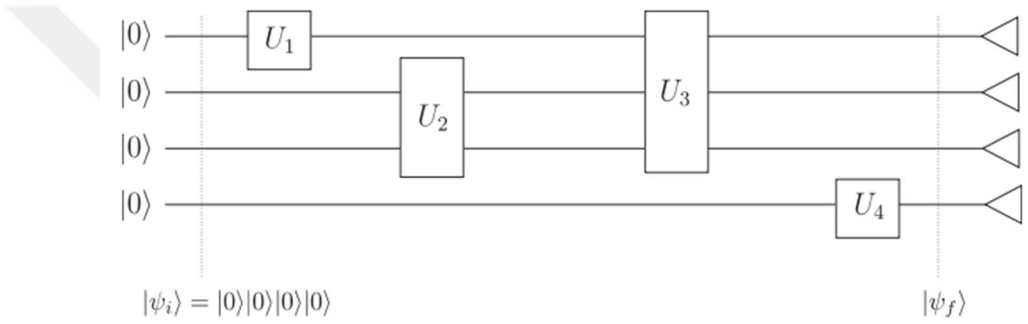
Kuantum hesaplama modeli, bir kuantum hesabının kontrol edilmesinin ve kuantum bilgisinin işlenmesinin yanısıra bir kuantum bilgisayarın inşası için gereken kaynakların bir araya gelmesiyle oluşan yapıdır. Kuantum hesaplamanın birkaç işlemsel modeli vardır, ancak bu tezin içeriği bakımından yalnızca ikisi çok önemlidir; kuantum devreleri ve adyabatik kuantum hesaplama. Diğer modeller, topolojik kuantum hesaplama ve tek yönlü kuantum hesaplamayı içerir. Biz bu tez konusu bağlamında sadece kuantum devrelerinin bir tartışmasını ele alacağız.

Kuantum devreleri, klasik bilgisayarların yapı ve inşasına benzer nitelikte prensiplere sahiptir; öyle ki kuantum bilgisinin temel bilgi birimi olan kübitler ve onları manipule eden kuantum kapılarla birlikte bilgi iletiminde rol oynayan tellerden meydana gelir. Teller, işlemler arasında seyahat eden kuantum durumları ifade eder yani kübitler üzerine etki eden kuantum kapıları birbirine bağlayan yapılardır. Kuantum kapıları(işlemciler) tarafından yapılan dönüşüm her zaman tersine çevrilebilirdir (terslenebilir/üniter), bu ise kuantum modellendirme yapısını klasik bilgisayarlardan önemli ölçüde ayıran bir kriterdir.

Bir kuantum devre diyagramında teller yatay çizgiler olarak gösterilir ve kübitlerin bu teller boyunca zaman içinde soldan sağa doğru yayılması şematik olarak resmedilir. Kapılar yahut lineer dönüşümler dikdörtgen bloklar şeklindeki kutular ile gösterilmiştir; yani bu kutular, bir veya daha fazla kübit üzerindeki kapıları ve diğer üniter işlemleri temsil eder. Dönüşümler üniter olduğundan her zaman

terslenebilirdir bu sebeple girdi ve çıktı kübitlerinin sayısı aynıdır. Ölçüm ise içinde sembolik bir ölçüm cihazı bulunan ve literatürde birçok farklı temsili olan bir (üçgen) kutu ile gösterilir. Yardımcı (ancilla) sistemler sunulabileceğinden, bir kuantum devresinde ölçüm her zaman projektif bir ölçüm olarak anlaşılır. Ölçümler önceden de bahsettiğimiz gibi, aksi belirtilmedikçe, hesaplama tabanında gerçekleştirilir. Bu söylediklerimizi örnek bir şematik diyagramda toparlayarak verebiliriz:

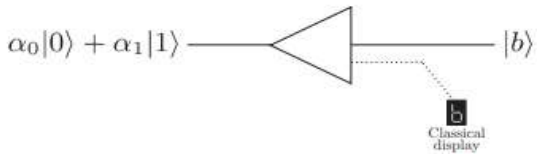
$|\psi_i\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \in H_{2^4}$ ve sıklıkla $|\psi_i\rangle = |0\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle$ veya $|\psi_i\rangle = |0000\rangle$ biçiminde yazdığımız 4-kübiti için kuantum devre diyagramını inceleyelim (Şekil 3.8).



Şekil 3.8 Bir kuantum devre modeli [1]

Devrenin sol tarafında $|\psi_i\rangle = |0000\rangle$ 4-kübitinin dört telden oluşan girişi vardır. U_1, U_2, U_3 ve U_4 biçiminde etiketli olan kutular ise soldan sağa doğru belirtilen sırada kübitlere uygulanan kuantum kapılarını temsil eder. Devrenin sağ tarafında ise kapılar etki ettikten sonra dolanık olan 4-kübit durumu $|\psi_f\rangle$ vardır. Daha sonra ortaya çıkan durumun ölçümünü yapan küçük bir üçgen kutu vardır. Bu üçgen kutu farklı ölçüm tiplerini modellemek için farklı tiplerle değiştirilebilir. Burada ölçüm postulatında açıkça izah ettiğimiz ölçümün hesaplama tabanına bağlı olarak yazılan sonuçlarını devre şemasında ölçüm sonucunu belirlemek adına indis(etiket) ile göstermek kullanışlı olur. Şöyle ki herhangi bir $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \in H_2$ durumunun hesaplama tabanına göre ölçümü, elde edilen çıktıyı gösteren klasik 'b' etiketiyle birlikte $|c_b|^2$ ($b \in \{0, 1\}$) olasılıkla $|b\rangle$ kuantum durumu ile sonuçlanır. Genellikle ölçüm sonucunda meydana gelen klasik bilgi

önemsendiğinden kuantum çıktısı yok sayılır ve ölçüm sonucunun etiketini taşıyan klasik tel çıkarılır. Bu aşamalar Şekil 3.9'daki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.9 Bir kuantum durumun kuantum devre diyagramındaki ölçüm şeması

3.2.1 Kuantum Kapıları yahut Kuantum Dönüşümleri

Kuantum mekaniğin zamansal değişim postulatında değindiğimiz H_2 kuantum sistemi üzerinde tanımlı 1-kübitlere etki eden üniter operatörlere *1-kübit kuantum kapısı* adı verildiğini belirtmiştik. En temel 1-kübit işlemcisi olan *kuantum DEĞİL* kapısı, $|0\rangle$ durumunu $|1\rangle$ durumuna ve tam tersi olarak $|1\rangle$ durumunu $|0\rangle$ durumuna dönüştürür; hesaplama tabanında verilen $a|0\rangle + b|1\rangle$ genel kuantum durumunu, $a|1\rangle + b|0\rangle$ durumuna çevirir. Genellikle hesablama tabanı olarak verilen bir tabana göre kuantum kapılarını matris formunda yazmak mümkündür. (2.36) eşitliğinde tanımlanan kuantum DEĞİL kapısını, X sembolü ile veya önemli kuantum işlemcileri olan Pauli kapılarından biri olarak sayabileceğimiz şekilde tanımlamak mümkündür. Tanımlanan kuantum kapısının üniter olduğuna dikkat edilmelidir; zira kuantum mekaniğin zamansal değişim postulatında değindiğimiz kuantum durumların üniter gelişimi bunu ifade etmektedir. Söyleyeceğimiz bir diğer nokta ise klasik sistemlerde tek bitlik işlemci sadece *DEĞİL* kapısı iken, tek kübitlik kapılar sadece kuantum *DEĞİL* kapısıyla sınırlı değildir. Bir kuantum durumdan başka bir kuantum duruma dönüşüm olarak tanımladığımız kuantum kapılar için 1-kübit kapılarına örnek vereceğimiz diğer önemli kapı sınıfı ise (3.29) yardımıyla verdiğimiz $\mathrm{R}_x(\theta), \mathrm{R}_y(\theta), \mathrm{R}_z(\theta)$ *dönme kapıları*dır. Bununla birlikte özel bir öneme sahip olan üç kapı daha vardır; H Hadamard kapısı, faz-$\pi/8$ -T kapısı ve Pauli-Z kapısıdır.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

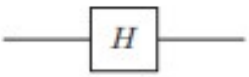
biçiminde tanımladığımız Hadamard kapısının ilginç olan yanı ise meşhur $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ kuantum durumları üzerindeki etkileridir. Öyle ki hesablama tabanına ait olan $|0\rangle$ durumuna etki etmesi sonucu oluşan denk süperpozisyon durum şeklinde yarı olasılık değerleriyle $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarının gözlemlenmesidir;

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \tag{3.105}$$

Bu durum ise diğer hesablama tabanı olan $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ durumları arasındaki geçişleri de göstermektedir;

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle \\ H|+\rangle &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = |0\rangle \\ H|-\rangle &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = |1\rangle \end{aligned} \tag{3.106}$$

Hadamard kapısının bir kuantum devresindeki gösterimi ise kapı isminin kısaltmasının kutucuk üzerinde yazımı biçimindedir (Şekil 3.10).



Şekil 3.10 Kuantum devre modelinde
Hadamard kapısı

Pauli Z kapısı da hatırlayacağımız gibi

$$Z = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{3.107}$$

biçiminde tanımlanmıştı. Bu kapının hesablama tabanı üzerindeki etkisini incelersek eğer

$$|0\rangle \mapsto |0\rangle \; ve \; |1\rangle \mapsto -|1\rangle \tag{3.108}$$

şeklinde $|0\rangle$ durumu üzerinde etkisi olmazken $|1\rangle$ durumunun işaretini değiştirir. Bu aşama ise ileride açıklayacağımız çokça önemli olan bir faz değişimini tanımlar.

Sonsuz sayıda 1-kübit kapıları arasında önemli olan diğer 1-kübit kapısı ise faz-$\pi/8$ kapısı adını verdiğimiz ve T sembolüyle gösterdiğimiz kapı

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

matris gösterimine sahiptir. faz-$\pi/8$ kapısının hesablama tabanları üzerinde etkisi;

$$\begin{aligned} T|0\rangle &= |0\rangle \\ T|1\rangle &= e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Aslında T kapısını faz çarpanı yardımıyla yazacak olursak (3.109) eşitliğinin

$$\begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

matris gösterimine denk olduğu görülecektir. Bu ise T kapısının neden faz-$\pi/8$ kapısı olarak anıldığını ifade eder.

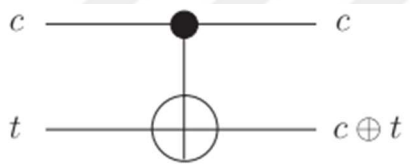
Şimdi $n \geq 2$ için yani sayıca birden fazla ağ üzerine etki eden n-kübit kuantum kapılarını inceleyelim. Ayrıca kuantum mekaniğin ikinci postulatından biliyoruz ki, bir *kapalı* kuantum sistemin durumunun *zamana bağlı değişimi* bir üniter operatör ile tasvir edilir yani n-kübit üzerinde tanımlı olan her kapı bir üniter matris ile temsil edilir. Böylece klasik kapıların işlevlerinden önemli ölçüde ayrılan kuantum kapıların yardımıyla üniter değişimin doğası gereği işlemlerin terslenebilirliği sözkonusudur.

2-kübit kapıları için önemli olan *kontrolleştirilmiş-DEĞİL (CNOT)* kapısı, kontrol kübit ve hedef kübit olmak üzere iki kübit girdili kapı olarak tanımlanır. İsminden de anlaşılacağı üzere kontrolleştirilmiş-DEĞİL (CNOT) kapısı, kontrol kübitin değerine bağlı olarak, hedef kübit üzerine DEĞİL (NOT) kapısı uygulanacak biçimde tanımlanır. Öyle ki, kontrol kübiti $|1\rangle$ durumunda ise hedef kübite DEĞİL (NOT) kapısı uygulanır. Kontrol kübiti ise kübit girişlerindeki değerlerden

bağımsız olarak değişmeden kalır. Bu koşullara uygun 2-kübit üzerine etki eden CNOT kapısı H_4 kuantum sistemi üzerinde tanımlı olarak

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

matris gösterimine sahiptir. CNOT kapısını tanımına bağlı olarak klasik mantık kapıları ile izah edebiliriz. Birinci kübit olan kontrol kübitini c, hedef kübitini ise t ile temsil edersek; CNOT kapısı c hedef kübitini $c \oplus t$ (buradaki $\oplus$ işlemi XOR ile temsil edilen klasik 'ya da' mantık kapısıdır ve aynı zamanda mod2'ye göre toplama işlemini temsil etmektedir) durumuna dönüştürür (Şekil 3.11).



Şekil 3.11 Bir kuantum devresindeki c kontrol kübit ve t hedef kübit girdilerine sahip CNOT kapısı [1]

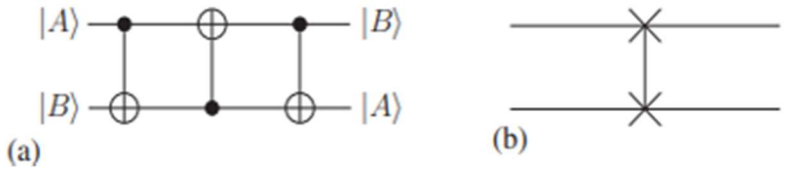
Bu iki kübitli duruma (2-kübit) etki eden CNOT kapısını

$$|c, t\rangle \mapsto |c, c \oplus t\rangle \tag{3.113}$$

$\oplus$ (mod2) işlemi yardımıyla tanımlanan dönüşüm olarak tasvir edebiliriz. Üç CNOT kapısını birleştirirsek kübitlerin değişimlerini sağlayan bir nevi takas işlevi gören işlemci tanımlamış oluruz;

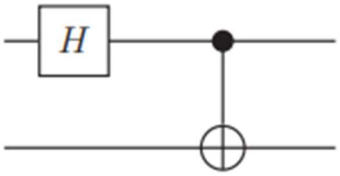
$$\begin{aligned} |A, B\rangle \mapsto |A, A \oplus B\rangle \mapsto |A \oplus (A \oplus B), A \oplus B\rangle = |B, A \oplus B\rangle \\ \mapsto |B, (A \oplus B) \oplus B\rangle = |B, A\rangle. \end{aligned} \tag{3.114}$$

Bu şekilde tanımladığımız kuantum *takas* işleminin kuantum devrelerindeki gösterimi Şekil 3.12'de gösterilmiştir.



Şekil 3.12 (a) Üç CNOT kapı dizisi ile kuantum takas işlemi (b) Bir devrede takas işlemi temsili [5]

Bir CNOT kapısını önceden tanımladığımız bir H Hadamard kapısı ile bileşke edersek ilginç şekilde hesablama tabanından Bell durumlarını üretir. Bu işlemin şaşırtıcı yanı ise bir tensör çarpım uzayında olan hesablama tabanının dolanık durumda olan Bell durumlarına dönüşümüne olanak sağlamasıdır. Bir kuantum devresindeki gösterimi ise Şekil 3.13'de verilmiştir.

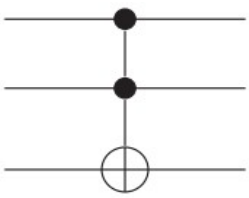


Şekil 3.13 CNOT ve Hadamard kapıların bileşkesinden Bell durumlarını üreten kuantum devre modeli

3-kübit üzerine etki eden Toffoli kapısını $\oplus$ işlemi yardımıyla tanımlayabiliriz;

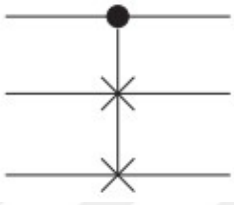
$$|A, B, C\rangle \mapsto |A, B, C \oplus AB\rangle \tag{3.115}$$

yani ilk iki kontrol kübiti $|1\rangle$ ise üçüncü kübitin durumu değişir. Bir diğer deyişle Toffoli kapısı, CNOT kapısının da ötesinde aslında XOR işleminin genelleştirilmiş halidir. Buna bağlı olarak Toffoli kapısını, iki kontrol kübit girdisine sahip olduğundan 2XOR şeklinde tanımlayabiliriz (Şekil 3.14).



Şekil 3.14 Kuantum devre modelinde Toffoli kapısı

Kuantum devrelerindeki kontrol kübitlerinin sayısı artıkça genel olarak *n*XOR kapılarını elde ederiz. 2XOR olan Toffoli kapısını önemli kılan özellik ise herhangi bir klasik devreyi simüle edebilmesidir. Yani, terslenebilir olmayan klasik devreleri de simüle edebildiğinden her klasik devrenin tersinir bir eşdeğeri vardır. Dolayısıyla kuantum bilgisayarlar, klasik bilgisayarların yapabildiği her işlemi yapabilir. Bir sonraki önemli kapı ise biri kontrol kübiti olan 3-kübit girdisine sahip olan Fredkin kapısıdır. Kontrol kübiti $|1\rangle$ durumuna sahip ise hedef kübitleri takas ederek etki eder (Şekil 3.15).



Şekil 3.15 Kuantum devre modelinde Fredkin kapısı

Kuantum bilgi teorisinin birçok uygulamasında yaygın bir yapı olarak kullanılan yardımcı sistemler, belirli bir hedefin anlaşılmasına ve daha kolay uygulanmasına yardımcı olur. Ancilla değişkenleri de bu tür yardımcı sistemlerden biridir. Klasik bir devreyi bir kuantum devresine çevirirken, sadece kuantum bilgisayarlar yalnızca tersinir mantık uyguladığı için ekstra kübitler eklemek gerekir. Bu tür ekstra kübitler, işçi kübitler olarak da anılan ancilla (veya yardımcı kübitler) dir. Ancilla kübitleri değişebilir veya değişmeyebilir; sonuç için önemli değildir. Bir g fonksiyonunun ancilla kübitlerinin çıktısını temsil ettiğini varsayalım; bu bir çöp bitidir, değeri önemli değildir. NOT kapıları ekleyerek, ancilla kübitlerin her zaman $|0\rangle$ durumundan başlamasını sağlayabiliriz. Ancilla kübiti ile hesaplamanın genel modelini şu şekildedir

$$|x, 0\rangle \mapsto |f(x), g(x)\rangle \tag{3.116}$$

Hesaplamadan önce bir CNOT kapısı ekleyerek, dönüşümün sonunda değişmeden kalan *x* girdisinin bir kopyası oluşturulur

$$|x, 0,0\rangle \mapsto |x, f(x), g(x)\rangle \tag{3.117}$$

Dördüncü bir y girdisi ekleyerek sonucu bir CNOT işlemiyle ekleyelim:

$$|x, 0,0, y\rangle \mapsto |x, f(x), g(x), y \oplus f(x)\rangle \tag{3.118}$$

Bu son işlemden görülüyor ki son CNOT işlemi dışında hesaplamalar y girdisini etkilemedi. Hesaplamalarda uygulanan her işlem üniter yapıya sahip olduğundan ters işlemleri uygularsak

$$|x, 0,0, y \oplus f(x)\rangle \tag{3.119}$$

durumu elde ederiz. Bu prosedürde karalama defteri niteliğinde kulanılan ortadaki iki kaydı -ancilla kübitleri- hesaplamayız, bunun sonuç için bir değeri yoktur. Böylece ortadaki ancilla kübitleri belirtmeden basitçe

$$|x, y\rangle \mapsto |x, y \oplus f(x)\rangle \tag{3.120}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu formül, geri dönüşümlü hesaplamanın, çöp kübitleri üretilmeden gerçekleştirilebileceğini gösterir.

Ancilla kübitlerin kullanılmasına en basit örnek ise Fredkin kapısıdır; üç kübit girdisine sahip olan ancak sadece biri kontrol kübiti olan bu kapı, kontrol kübiti $|1\rangle$ durumda ise hedef kübitleri takas eder. Bu durumda kontrol kübiti bir ancilla kübitidir; değeri gerçekleştirilen hesaplama ile ilgisizdir. Varlığı ise kapının tersine çevrilebilir olmasını sağlar.

3.3 Kuantum Arama Algoritması yahut Grover'in Arama Algoritması

Bu bölümde yalnızca basitliği ve zarafeti nedeniyle değil, aynı zamanda potansiyel uygulama yelpazesi açısından da etkileyici bir keşif olan Grover'in kuantum arama algoritmasını tartışacağız.

Kuantum araması, bir kuantum algoritmasının özünü gösterir, bu sebeple kuantum algoritmaların anlaşılması ve yenilerinin üretilmesi bakımından oldukça önemlidir. Kuantum arama algoritması esasında kuantum kavramının üzerine inşa edildiği süperpozisyon durumun bir fonksiyon için olası tüm değerleri taşıdığı bilgisine dayanmaktadır.

Şimdi kuantum arama algoritmasını klasik arama algoritmasına göre kıyaslayarak ve birbirinden ayırt edecek nitelikte bir örnek sunarak başlayalım. Mesela, İstanbul'daki gezilecek tarihi yerlerin bir haritasını edindiniz. Ancak bu harita için en kısa rotaya sahip tüm yerleri gezebilecek nitelikteki rotayı arıyorsunuz. Bu rotayı oluşturmak için klasik olarak yapılan en basit algoritma, olası tüm rotaların listesini çıkarıp hangi rotanın en kısa uzunlukta olduğuna dair bir kayıt tutmaktan geçer. Tabii kuantum arama bakımından ileride detaylıca inceleyeceğimiz gibi bu arama daha farklı ve etkili olacaktır.

Bu hikayeyi algoritma bakımından modelleyebilmek için tüm rotaların bulunduğu $N = 2^n$ elemandan oluşan ve her $a_i \in H_{2^n}$ $(1 \leq i \leq 2^n)$ elemanı için $A = \{a_i\}$ arama uzayına sahip olduğumuzu varsayalım ve bu arama uzayından bir elemanı aradığımızı düşünelim. Bu aramayı klasik arama yaklaşımıyla bir a_i elemanını tekrarlı olarak seçerek seçilen elemanın sorgu için bir çözüm olup olmadığına karar verip sonlandırabiliriz. Bu şekilde çözüme ulaşmak için klasik bir arama algoritması ortalama $N/2$ yani eleman sayısının yarısı kadar sorgu gerektirir ve en kötü durumda ise tüm elemanları inceleyerek son elemana kadar $N - 1$ sorgu gereklidir. Kabataslak düşündüğümüz bu arama algoritmamız için gerekli olan dönüşümleri tanımlayalım.

Sahip olduğumuz $A = \{a_i\}$ arama uzayının ortalaması

$$\bar{a} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \tag{3.121}$$

olmak üzere, her bir elemanın ortalamaya göre tersini bulduran P dönüşümü

$$\begin{gathered} P\colon a_i \mapsto a_i' \\ a_i' = \bar{a} + (\bar{a} - a_i) = 2\bar{a} - a_i \end{gathered} \tag{3.122}$$

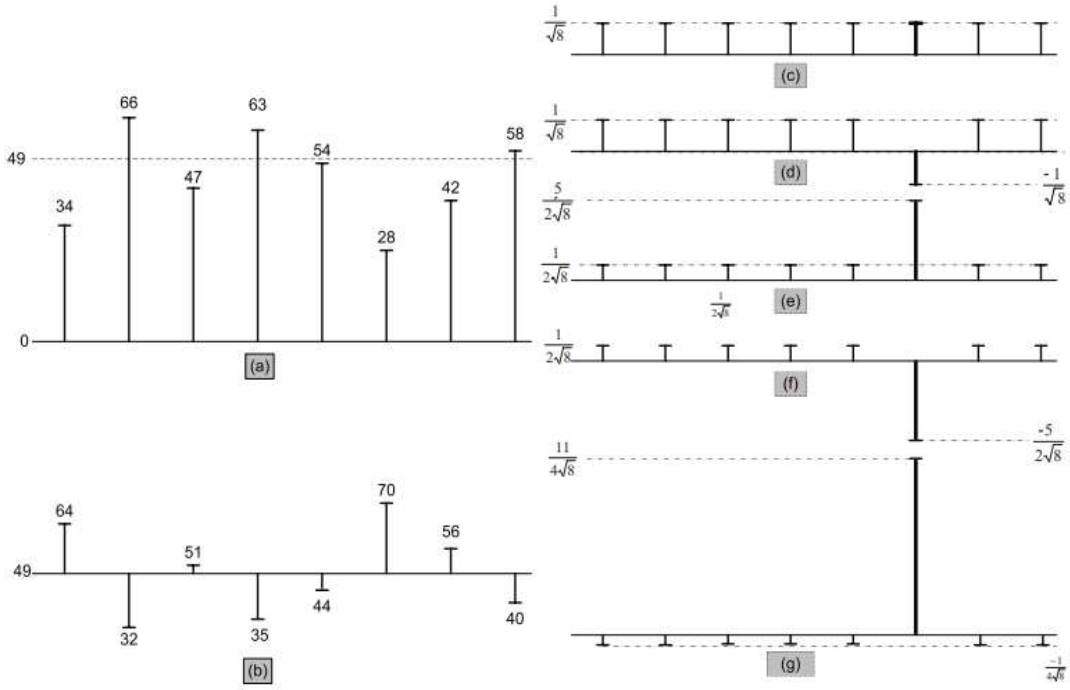
biçiminde tanımlanır. Tanımladığımız ifadeleri şimdi $8 = 2^3$ elemanlı $A = \{34, 66, 47, 63, 54, 28, 42, 58\}$ kümesi üzerinde analiz ederek inceleyelim. $A = \{a_i\}$ arama uzayının ortalaması

$$\bar{a} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} a_i = 49 \tag{3.123}$$

ve P dönüşümüne göre kümenin her bir elemanının ortalamaya göre tersi aşağıdaki biçimdedir (Şekil 3.16 (a)-(b));

$34 \mapsto 98-34=64, \quad 66 \mapsto 98-66=32, \quad 47 \mapsto 98-47=51, \quad 63 \mapsto 98-63=35,$

$54 \mapsto 98-54=44, \quad 28 \mapsto 98-28=70, \quad 42 \mapsto 98-42=56, \quad 58 \mapsto 98-58=40.$



Şekil 3.16 A kümesinin elemanları için faz ve olasılık genliklerinin değişimi [2]

Şimdi, $1/\sqrt{8}$ eşit genlikli $A=\{a_i\}$ arama uzayının elemanları için kuantum mekaniğin 3. Ölçüm postulatından genliklerin karelerinin toplamının yani olasılık değerinin 1 olmasını istediğimiz durumu ele alalım. Aradığımız elemanı tanımlayan karmaşık sayının fazını tersine çevirebilen bir dönüşüm (kahin-oracle) olduğunu varsayalım ve aradığımız 6. elemanın faz değişimiyle diğer durumların faz değişimlerini inceleyelim.

$A=\{a_i\}$ arama uzayımız $8=2^3$ elemanlı olduğundan olasılık değerinin 1 olması gerekliliğinden *ortalama olasılık genliği* $\bar{g}=1/\sqrt{8}$ dir. Şekil 3.16 (c)'de görüldüğü üzere eşit genliğe sahip olan a_i elemanları için aradığımız 6. elemanı tanımlayan karmaşık sayının faz değişimi esasında genliğinin işaretinin değişmesidir; $g_6=-1/\sqrt{8}$. Şekil 3.16 (d)'de aranan 6. elemanın faz değişimi gösterilmiştir. Böylece birinci faz değişimi sebebiyle yeni ortalama genlik,

$$\bar{g}' = \frac{7\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)}{8} = \frac{3}{4\sqrt{8}} \tag{3.124}$$

dır. $\bar{g}$' ortalama genliğine göre her bir elemanın tersi, tanımladığımız P dönüşümüne bağlı olarak,

$$\begin{gathered} g_1' = g_2' = g_3' = g_4' = g_5' = g_7' = g_8' = 2\left(\frac{3}{4\sqrt{8}}\right) - \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{8}} \\ g_6' = 2\left(\frac{3}{4\sqrt{8}}\right) + \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{5}{2\sqrt{8}} \end{gathered} \tag{3.125}$$

(3.125) yardımıyla Şekil 3.16 (e)'de gösterildiği halini alır. Aradığımız 6. elemanın ikinci faz değişimi Şekil 3.16 (f)'deki gibi $g_6' = -5/2\sqrt{8}$ biçiminde olup buna bağlı olarak yeni ortalama genlik

$$\bar{g}'' = \frac{7\left(\frac{1}{2\sqrt{8}}\right) - \left(\frac{5}{2\sqrt{8}}\right)}{8} = \frac{1}{8\sqrt{8}} \tag{3.126}$$

biçiminde olacaktır. Elde edilen bu yeni ortalamaya göre elemanların ikinci terslerini incelersek

$$g_1'' = g_2'' = g_3'' = g_4'' = g_5'' = g_7'' = g_8'' = 2\left(\frac{1}{8\sqrt{8}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{8}} = -\frac{1}{4\sqrt{8}} \tag{3.127}$$

biçiminde olduğunu görürüz. Böylelikle aramamızla eşleşmeyen elemanların genliklerinin yani görülme olasılıklarının azaldığını fark edebiliriz. Buna mukabil aradığımız 6. elemanın genliğinin

$$g_6'' = 2\left(\frac{1}{8\sqrt{8}}\right) + \frac{5}{2\sqrt{8}} = \frac{11}{4\sqrt{8}} \tag{3.128}$$

değerine ulaştığını Şekil 3.16 (g)'de görebiliriz. Bu adımlarla aradığımız elemanın olasılık değerini istikrarlı bir şekilde artırmış oluruz.

3.3.1 Klasik Aramadan Kuantum Aramaya Geçiş

Faz değişimini ve genlik artırma işlemlerini klasik açıdan açıklamaya çalıştığımız bu örnek ile kuantum arama algoritmasının aşamalarını oluşturmamız için bir zemin hazırlamış oluruz. Öyle ki, g_i $(1 \leq i \leq 8)$ karmaşık sayılarını H_8 uzayındaki taban durumların olasılık genlikleri olarak gözönüne alırsak sistemin orijinal durumunu,

$$|\psi\rangle = g_1|000\rangle + g_2|001\rangle + g_3|010\rangle + g_4|011\rangle + g_5|100\rangle + g_6|101\rangle + g_7|110\rangle + g_8|111\rangle \quad (3.129)$$

$|\psi\rangle \in H_8$ olacak biçimde düşünebiliriz. Aradığımız 6. elemanın faz değişimine bağlı olarak genlik artırma sonucu yukarıda yaptığımız işlemlere göre son durum

$$|\psi\rangle'' = g_1''|000\rangle + g_2''|001\rangle + g_3''|010\rangle + g_4''|011\rangle + g_5''|100\rangle + g_6''|101\rangle + g_7''|110\rangle + g_8''|111\rangle \quad (3.130)$$

olur. Yani aradığımız 6. eleman olan $|101\rangle$ durumunun olasılık değerini baştaki $\left(1/\sqrt{8}\right)^2 = 0.25$ değerinden $(g_6'')^2 = \left(11/4\sqrt{8}\right)^2 = 121/128 = 0{,}94531$ değerine yani yaklaşık 2,5 katına çıkarmış oluruz. Böylelikle $|\psi\rangle''$ durumunun kuantum arama bakımından ölçümü yapıldığında artırılan olasılık değerinden, ölçüm aranan $|101\rangle$ durumu ile sonuçlanır.

Şimdi klasik düşünüşle tasarladığımız bu modeli detaylıca kuantum arama algoritmasına göre uyarlayalım. Kuantum arama algoritmasında temel ana fikir, $N = 2^n$ elemandan oluşan veri kümesi için bir $0 \leq x \leq 2^n - 1$ elemanın indisiyle; $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |2^n - 1\rangle\}$ kanonik tabana sahip H_{2^n} Hilbert uzayının bir $|x\rangle$ taban durumunu ilişkilendirmektir. Bu ilişkilendirmeyi yaparken ilk basamak aradığımız elemanın x_0 indisini tanımlamaktır. Bu elemanların indisleri üzerinde yaptığımız arama için aradığımız elemanı belirlemeye yardımcı olan bir fonksiyon tanımlayalım. $f: \{0 \leq x \leq 2^n - 1\} \mapsto \{0,1\}$ şeklinde tanımlı olan fonksiyon için, eğer x arama problemine bir çözüm ise $f(x) = 1$; aksi halde çözüm değilse $f(x) = 0$ değerini alır;

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \neq x_0 \\ 1, x = x_0 \end{cases} \tag{3.131}$$

Tanımladığımız $f(x)$ fonksiyonunun yardımıyla aradığımız elemanın tam olarak belirlenmesinde önemli role sahip olan başrolümüze geçelim. Bu aranan elemanı belirleme aşamasında Türkçe çevirisi *'kahin'* anlamına gelen ve *'kara kutu'* sıfatlandırması da yapılan *'oracle'* yer almaktadır. Oracle, istenen elemanı *işaretlemek* için bir *faz değişim* (ters çevirme) işlemi gerçekleştirir. Ancak bunu sadece aradığımız eleman için yapar, diğer elemanların fazlarında bir değişiklik yapmaz. Oracle operatörünün işleyişini anlayabilmek için tanımladığımız $f(x)$ fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki yapıyı inceleyelim;

$$|x\rangle|y\rangle \mapsto |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle \tag{3.132}$$

x indeksine karşılık gelen $|x\rangle$ taban durumunu temsil eden n adet kübiti girdi olarak kabul ederken; diğer bir tek kübit girdisi olan $|y\rangle$ ile $f(x) = 1$ iken döndürülen, diğer durumlarda ise değişmeden kalan ve *oracle kübit* olarak adlandırılan bir tek kübiti temsil eder. Bu şekliyle tanımlı oracle için $|x\rangle|0\rangle$ durumunu hazırlayarak oracle kübitinin $|1\rangle$ durumuna çevrilmiş olup olmadığını kontrol ederek x indeksinin arama problemimize bir çözüm olup olmadığını kontrol edebiliriz. Oracle bu şekilde çözümü belirleyerek aradığımız elemanın fazını değiştirmekle $(-1)^{f(x)}[|x\rangle \otimes |y\rangle]$ çıktısını üretir. Eğer oracle kübitinin durumu $|y\rangle = |1\rangle$ ise Hadamard kapısını uyguladıktan sonra kübitin durumu $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ durumuna dönüşür. Diğer birçok kuantum algoritmalarında olduğu gibi kuantum arama algoritmasında da başlangıç durumu olarak oracle kübitini $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ durumu ile başlatmak daha kullanışlıdır. Çünkü x eğer aradığımız probleme bir çözüm değilse $|x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ durumuna oracle uygulamak durumu değiştirmeyecektir. Eğer ki x aradığımız probleme bir çözüm ise oracle'ın etkisiyle $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları değiştirilerek son durum $-|x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ olur. (Oracle çözümü belirlediğinde oracle kübiti $-\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ durumuna döndürülür.) Böylece oracle işleyişini

$$|x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \tag{3.133}$$

ile tasvir edebiliriz. Bu tasvirde dikkat edilecek husus ise görüldüğü üzere oracle kübitinin durumu bu dönüşümde değişmemiştir (yani sadece tek bir *n* kübitlik girdiyi kullanmıştır). Kuantum arama algoritması boyunca $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ olarak değişmeden kaldığından oracle operatörünün yapısını daha da basitleştirerek

$$|x\rangle \rightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle \tag{3.134}$$

formunda yazabiliriz. Yani aradığımız elemanın x_0 indeksine karşılık gelen taban durumu oracle ile çözüm olarak işaretlenerek fazı ters çevrilirken; oracle kübit ise değişmeden kalır. Böylece oracle, çözümün fazını değiştirmekle arama probleminin çözümlerini işaretleyerek bir çözüm üretmiş olur.

Toparlamak gerekirse oracle, yukarıda tanımladığımız $f(x)$ fonksiyonunun görevini üstlenerek girdi eleman kombinasyonları içerisinden, belirlenen elemanı bulmak ve faz değişim (ters çevirme) işlemi adını verdiğimiz çözümü işaretlemekle görevli olan bir üniter operatördür.

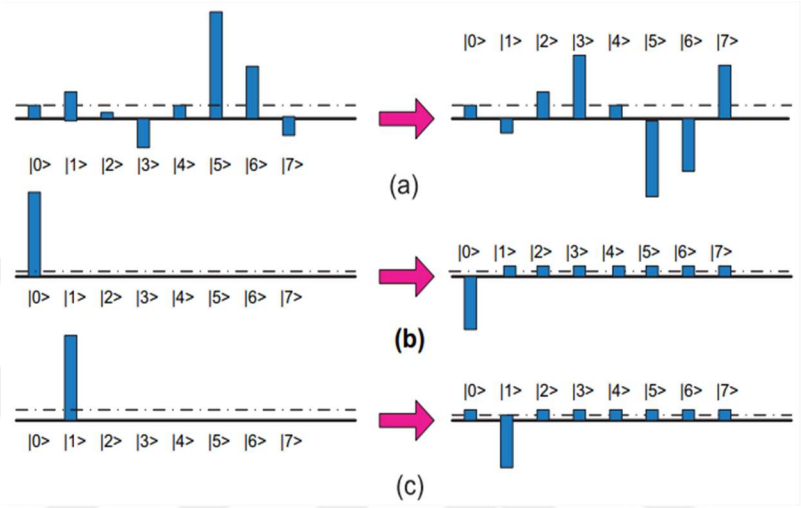
Kuantum algoritmalarının en temel ve önemli amaçlarından birisi de kuantum durum dediğimiz süperpozisyon durumun muhafaza edilmesidir. Bu durumu gözlemek için Hadamard dönüşümünü kullanarak bilgisayarı eşit süperpozisyon durumuna getirebiliriz. Aslında bunu tıpkı klasiktekine benzer nitelikte durumların ortalamasını veren bir dönüşüm gibi düşünebiliriz. Öyle ki $|0\rangle^{\otimes n}$ başlangıç durumu ile arama uzayımız için Hadamard dönüşümü uygulandığında

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \tag{3.135}$$

denk süperpozisyon durumunu elde etmiş oluruz. Bu durumda görülüyor ki $N = 2^n$ elemanın genliği, her bir durum için $1/\sqrt{2^n}$ şeklinde eşit dağıtılmış olur. Bu denk süperpozisyon durumuna arama uzayı için ortalama-ağırlıklı durum nitelendirmesi yapabiliriz. Buna bağlı olarak arama uzayımız için $|\psi\rangle$ ortalama-ağırlıklı durumuna göre, her bir durumun ters durumunu bulduran $\boldsymbol{D}_{\psi}$ operatörü,

$$\boldsymbol{D}_{\psi} = 2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbf{I} \tag{3.136}$$

dönüşümü ile klasikteki aritmetik ortalamayla tanımlanan elemanların terslerini bulduran P dönüşümüne benzer şekilde tanımlanır. $\boldsymbol{D}_{\psi}$ operatörüne işlevinden ötürü *genlik artırma operatörü* adı verilir. Bu genlik artırma operatörünün görevi esasında genliklerin ortalama-ağırlıklı duruma göre simetriğini almaktır.



Şekil 3.17 H_8 uzayındaki taban durumların olasılık genliklerinin genlik artırma sonucu değişimleri [2]

Şekil 3.17'yi incelediğimizde, ortalama-ağırlıklı duruma göre genlik artırma operatörün uygulanması sonrası durumların olasılık genlikleri yeniden dağıtılır ve bu işlemden sonra her bir durumdaki genlik artar yahut azalır. Dikkat edilecek olursa durumların olasılık genlikleri pozitifse ortalamaya göre ters alma (genlik artırma) işleminden sonra negatif durumun olasılık genliği büyür ve Şekil 3.17(a)'da gördüğümüz gibi pozitif olur. Tam tersine tek bir duruma bağlı olarak genlik artırma işlemine tabi tuttuğumuzda görülme olasılığına sahip olmayan durumların da ortaya çıktığını Şekil 3.17(b)-(c)'de gözlemleyebiliriz.

3.3.2 Grover Yinelemesi

Kuantum arama algoritması için önemli olan oracle ve genlik artırma operatörlerinin işlevini özetleyecek olursak; oracle ile aranan eleman bulunarak negatif faz ile işaretlenir ve genlik artırma operatörü ile genliklerin ortalama-ağırlıklı duruma göre simetriği alınarak negatif durumda olan seçili genlik daha

büyük bir şekilde pozitif hale geçerken diğer olasılıkların genlikleri azaltılır. Böylelikle oracle ile işaretlenmiş olan elemanın genliği genlik artırma operatörü ile artırılarak ölçüm sonucu olarak çıkması sağlanır. İşte bu şekilde **O** oracle ve $\boldsymbol{D}_{\psi}$ genlik artırma operatörlerinin birbiri akabinde kullanımı birer **G** *Grover yinelemesi(iterasyon)* meydana getirir;

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{D}_{\psi}\mathbf{O} = (2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathrm{I})\mathbf{O} \tag{3.137}$$

Bu şekilde yapılan **G** *Grover yinelemesi* ile aslında arama algoritmamızın yapısını inşa etmiş oluruz. Sonuç olarak, her **G** *Grover yinelemesi* belli bir açıyla bağlantılı olarak çözümün fazını değiştirir ve süperpozisyon durumun olasılık genliklerinin ortalama değeri aynıyken çözümün genliği yinelemeler ile artırılırak çözüme ulaşılmış olur. Fark edilecek önemli husus, yapılan yinelemelerin sayısı olacaktır. Grover yinelemesinde oracle, başlangıçta her biri $\frac{1}{\sqrt{2^n}}$ olasılık genliğine sahip 2^n taban vektörün denk süperpozisyon durumunu girdi olarak aldığını hatırlarsak; $n = 30$ değeri için H_{2^n} Hilbert uzayındaki $2^{30} \approx 10^9$ taban vektörlerin her birinin olasılık genliği 10^{-4} civarında düşük bir değerdir. Böyle bir durumda çok küçük olasılık genliğine sahip olan çözümü ayırt etmek oldukça zordur bu zorluğu ise yeterli miktarda **G** *Grover yinelemesi*nin ardından çözümün genliğini artırmakla kolaylaştırabiliriz.

3.3.3 Geometrik Açıdan Grover Yinelemesinin Hız Performansı

Şimdi **G** Grover yinelemelerini her defasında gerçekleştirdiğimizde durumlar üzerindeki değişikliklerini irdelemek adına bir durum için **G** Grover yinelemesinin etkisini geometrik olarak inceleyelim. Öncelikle inceleyeceğimiz arama kriterlerini biraz daha genişleterek, arama kriterlerimizi sağlayan V veritabanımızda $M \leq N$ eleman olduğunu varsayalım. V veritabanındaki N elemanı, arama kriterlerini sağlayan elemanların kümesi Ç ve tamtersi olarak arama kriterlerini karşılamayan elemanların kümesi $\bar{\text{Ç}}$ şeklinde iki ayrık alt kümeye ayıralım;

$$V = \text{Ç} \cup \bar{\text{Ç}}\,, \qquad |V| = N, \qquad |\text{Ç}| = M, \qquad |\bar{\text{Ç}}| = N - M \tag{3.138}$$

$|\alpha\rangle$ ve $|\beta\rangle$ iki ortonormal durumları için; $|\alpha\rangle$ durumu, arama için sorguyu sağlamayan elemanların x indislerine karşılık gelen $N-M$ tane $|x\rangle$ taban durumun bir denk süperpozisyonu ve $|\beta\rangle$ durumu, arama için çözüm olan elemanların x indislerine karşılık gelen M tane $|x\rangle$ taban durumun bir denk süperpozisyonu olmak üzere,

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum_{x \in \bar{Ç}} |x\rangle \quad ve \quad |\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x \in Ç} |x\rangle \tag{3.139}$$

biçiminde yazılabilir. Tanımladığımız eşitliklere bağlı olarak bu iki durumun ortogonal olduğu açıkça görülebilir; $\langle \alpha | \beta \rangle = 0$. Böylelikle arama uzayındaki herhangi bir $|\psi\rangle$ süperpozisyon durumunu,

$$|\psi\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle \quad ; \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{3.140}$$

a ve b olasılık genliklerine sahip olacak biçimde ifade edebiliriz. Buradaki a ve b olasılık genlikleri; arama için sorguyu sağlamayan x indisli bir elemanın $|x\rangle$ durumuna ait olasılık değeri $N-M/N$ olup

$$a = \sqrt{\frac{N-M}{N}} \tag{3.141}$$

ifadesi olasılık genliğidir ve benzer şekilde sorguya çözüm olan x indisli bir elemanın $|x\rangle$ durumuna ait olasılık değeri M/N olup olasılık genliği

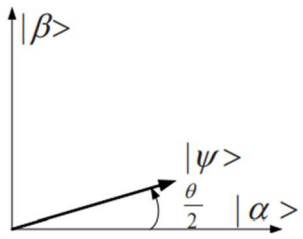
$$b = \sqrt{\frac{M}{N}} \tag{3.142}$$

biçimindedir. Bu tanımlamalar ile oluşturduğumuz $|\psi\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$ durumunu dönüşümlerin meydana getirdiği açısal değişikliklerle birlikte irdeleyebilmek adına

$$a = \sqrt{\frac{N-M}{N}} = \cos\frac{\theta}{2} \quad ve \quad b = \sqrt{\frac{M}{N}} = \sin\frac{\theta}{2} \tag{3.143}$$

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\beta\rangle$$

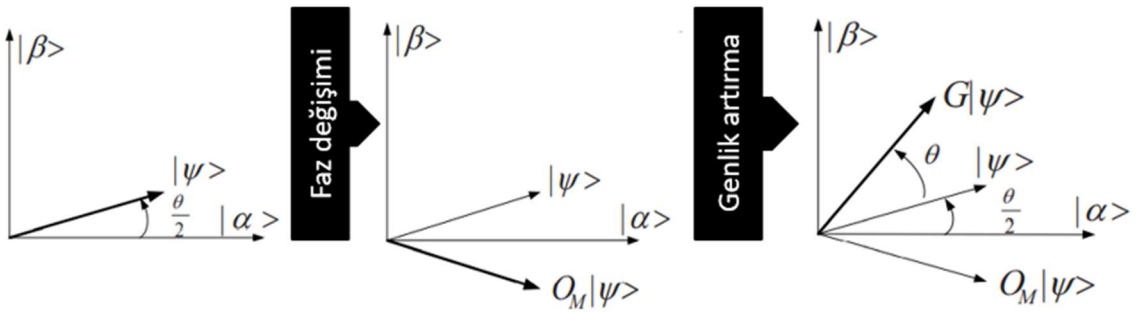
olacak biçimde, $|\psi\rangle$ durumunun $|\alpha\rangle$ ile yaptığı açıyı $\theta/2$ ile Şekil 3.18'deki gibi ifade edelim. Oracle ile aranan çözümlerin fazlarının değişimi meydana geldiğinden; $|\psi\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$ durumu için oracle M adet çözümün fazını değiştirerek $\boldsymbol{O}_M|\psi\rangle = a|\alpha\rangle - b|\beta\rangle$ biçiminde $|\beta\rangle$ durumunun işaretini değiştirmekle etki eder.



Şekil 3.18 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ ortogonal taban durumlara göre $|\psi\rangle$ durumun açısal temsili

Böylelikle geometrik açıdan Şekil 3.19'daki gibi; $|\psi\rangle$ durumu, $\boldsymbol{O}_M$ faz değişimi ile $\theta/2$ kadar $|\alpha\rangle$ durumuna göre yansıtılmış olur. Oracle ile çözümlerin fazı değiştirildikten sonra elde edilen $\boldsymbol{O}_M|\psi\rangle$ durumunu, $\boldsymbol{D}_\psi = 2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbf{I}$ genlik artırma operatörü de benzer şekilde $|\psi\rangle$ durumuna göre bir yansıtma işlemi gerçekleştirir (Şekil 3.19).

Not 3.10. Simetri operatörleriyle ilgili dönüşüm grupların özelliklerinden, iki boyutlu öklidyen düzlemde iki yansıtma operatörün çarpımı bir döndürme(rotasyon)dir.



Şekil 3.19 $|\psi\rangle$ durumu için faz değişimi sonrası genlik artırma sonucu oluşan bir G Grover yinelemesi

Böylelikle iki yansıtma işleminin çarpımı olan bir $\mathbf{G} = \boldsymbol{D}_{\psi}\boldsymbol{O}_{M}$ Grover yinelemesi bir döndürme(rotasyon) işlemi meydana getirmiş olur (Şekil 3.19). Bu aşamalarla (Şekil 3.19), bir **G** Grover yinelemesi $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\beta\rangle$ durumunu $|\beta\rangle$ çözüm durumuna doğru θ açısıyla döndürmüş olur. Bu sebeple **G** Grover yinelemesi aşağıdaki matris gösterimine sahiptir;

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.144}$$

Böylece bir **G** Grover yinelemesi, $|\psi\rangle$ durumunu arama kriterine çözüm sunan durumların süperpozisyonuna doğru döndürerek

$$\mathbf{G}|\psi\rangle = \boldsymbol{D}_{\psi}\boldsymbol{O}_{M}|\psi\rangle = \cos\frac{3\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{3\theta}{2}|\beta\rangle \tag{3.145}$$

durumuna getirir. Buradan da anlıyoruz ki bir kez tekrarlanan **G** Grover yinelemesi ile çözümün fazı θ radyan kadar döndürülür. Böylelikle tekrarlanan her **G** Grover yinelemesi θ radyan kadar döndürek durum vektörünü $|\beta\rangle$ çözümlerine yaklaştıracaktır.

Sonuç olarak $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\beta\rangle$ durumuna k kere **G** Grover yinelemesi uygulanırsa,

$$\mathbf{G}^{k}|\psi\rangle = \cos\frac{(2k+1)\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{(2k+1)\theta}{2}|\beta\rangle \tag{3.146}$$

yapısında genel durumu elde edilir. Yeterli miktarda yapılan yinelemeler sonucunda; $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ hesaplama tabanına göre yapılan gözlemler ışığında, yapılan

G Grover yinelemeleriyle $|\beta\rangle$ çözümüne yaklaştırılıp olasılık değerleri artırılan $|\beta\rangle$ süperpozisyon durumundaki çıktıların biriyle arama problemine bir çözüm gözlemlemiş oluruz.

Bu şekilde yapılacak arama için herhangi bir durum üzerinde yapılan **G** Grover yinelemesinin etkisini açısal olarak incelemek bize Grover arama algoritmasının ne kadar tekrarlanması gerektiği konusunda fikir verecektir. Öyle ki Grover arama algoritmasının ana fikri olan $|\psi\rangle$ durumunu $|\beta\rangle$ çözüm durumuna yaklaştırmak esasında arama problemi için gözlemlenecek çözümlerin olasılık değerlerini artırmak manasına gelir. Bu minvalde, $|\psi\rangle$ durumunu $|\beta\rangle$'ya yaklaştırmak için gereken **G** Grover yinelemelerinin sayısına T dersek; $|\psi\rangle$ durumu T kez $|\beta\rangle$'nın $\theta/2 \leq \pi/4$ açısı dahilinde dönmesi gerekir diyebiliriz. M ve N'nin belirli değerleri için çok daha yüksek bir başarı olasılığı elde etmek mümkündür. Bu durumları gözönünde tutarak, N eleman içinde M çözümün $M \ll N$ olduğu durumlar için T tekrar sayısını inceleyelim. Yukarıda yaptığımız geometrik incelemelerden biliyoruz ki, bir **G** Grover yinelemesi θ radyan kadar $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{N-M}{N}}|\alpha\rangle + \sqrt{\frac{M}{N}}|\beta\rangle$ durumunu döndürerek $|\beta\rangle$ çözüm durumuna yaklaştırır. Bu nedenle sistemi $\arccos\sqrt{M/N}$ radyan boyunca döndürmek $|\psi\rangle$ durumunu $|\beta\rangle$'ya yaklaştıracaktır. $\mathrm{CI}(x)$ fonksiyonu $x \in R$ sayısına en yakın tam sayıyı veren fonksiyon olmak üzere; **G** Grover yinelemesini

$$T = \mathrm{CI}\left(\frac{\arccos\sqrt{M/N}}{\theta}\right) \tag{3.147}$$

miktarınca T kez tekrarlamak, $|\psi\rangle$ durumunu $|\beta\rangle$ nın $\theta/2 \leq \pi/4$ açısı dahilinde döndürür. Böylelikle **G** Grover yinelemelerinin sayısı için elde ettiğimiz bu form kuantum arama algoritmasını gerçekleştirmek için kullanılan oracle çağrılarının sayısı için tam bir ifade olarak kullanışlıdır; ancak T'nin temel davranışını özetleyen daha basit bir ifadeye sahip olmak faydalı olacağından **G** Grover yineleme sayısını daha farklı inceleyelim.

Bir **G** Grover yinelemesi $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\alpha\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\beta\rangle$ durumu için çözümün fazını θ radyan kadar döndürdüğünden; T kez tekrar edilen **G** Grover yinelemesinin θ

açısıyla döndürmesi sonucu T tekrar sayısı için $T\theta \leq \frac{\pi}{2}$ sınırlandırması gerekir. Ayrıca trigonometrik hesaplamalar yardımıyla

$$\sqrt{\frac{M}{N}} = \sin\frac{\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \tag{3.148}$$

olduğu açıktır. T tekrar sayısı ile gereken sınırlamadan

$$T\frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4} \quad ; \quad T\sqrt{\frac{M}{N}} = T\sin\frac{\theta}{2} \leq T\frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4} \tag{3.149}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylelikle (3.149) yardımıyla gerekli *T tekrar sayısı* için zarif bir üst sınır elde etmiş oluruz;

$$T \leq \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}} \tag{3.150}$$

Buradaki unutulmayacak husus; T tekrar sayısı M çözümlerinin sayısına bağlıdır, ancak bu çözümlerin kimliğine bağlı değildir. Böylelikle arama problemine yüksek olasılıkla bir çözüm elde etmek için T kez $\mathbf{G}$ Grover yinelemesi ve dolayısıyla $\boldsymbol{O}_M$ oracle çağrıları gereklidir. Yani $|\psi\rangle$ durumunu $|\beta\rangle$'ya yaklaştırmak için gereken $\mathbf{G} = \boldsymbol{D}_\psi \boldsymbol{O}_M$ Grover yinelemesi, $\boldsymbol{O}_M$ oracle çağrılarının sayısı kadardır; $T = \boldsymbol{O}_M\left(\sqrt{N/M}\right)$. Ayrıca temel birkaç matematik hesabı içinde $\theta/2 \approx \sin\theta/2 = \sqrt{M/N}$ yaklaşık hata payı ile durumdaki açısal hatanın en fazla $\theta/2 \approx \sqrt{M/N}$ olduğunu da söyleyebiliriz.

Sonuç olarak, klasik arama algoritmaları için gereken $\boldsymbol{O}_M(N/M)$ yineleme sayısı ise artık kuadratik hızla değişime uğramıştır; $\boldsymbol{O}_M\left(\sqrt{N/M}\right)$. Böylelikle, Grover'in kuantum arama algoritmasının klasik arama algoritmalarına nazaran daha hızlı çözüme ulaştırma imkanı sunduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz. Bu bağlamda, günümüz bilişim-teknoloji çağında büyük veriler üzerinde çalışılan ve araştırma yapılan alanlarda ihtiyaç duyulan çözüme hem yüksek olasılıkla hem de çok daha kısa sürede ulaşılması daha önemli ve etkin rol oynar.

Örnek 3.11. Grover algoritması olarak isimlendirdiğimiz kuantum arama algoritma tasarımının zorlu görevine ilişkin bir sezgi kazandırmak için $n = 2$ kübit kullanılarak ifade edilebilen $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ biçiminde veri tabanında $N = 2^2 = 4$ eleman bulunan bir veri kümesi içerisinden bir tek çözümü aradığımız $M = 1$ için $|11\rangle$ durumunu bulmayı hedefleyen bir örnekle Grover arama algoritmasının nasıl işlediğini inceleyelim. İlk olarak, arama uzayımızın ait olduğu sisteme Hadamard dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen durum vektörü

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2} \tag{3.151}$$

olup dört elemanın genliği, her biri için $1/\sqrt{N} = 1/\sqrt{4}$ şeklinde eşit dağıtılmış olur. İkinci aşamada ise oracle, arama uzayı içerisinden aradığımız $|11\rangle$ elemanını bularak işaretleme yapar. Yani $|11\rangle$ durumunda bulunan kübit, oracle uygulanarak $-|11\rangle$ durumuna geçmiş olur. Aslında oracle, işaretlemeyi kübitleri Bloch küresi için z-ekseni etrafında döndürerek yaptığından; 2-kübitli bir sistemde oracle, kuantum mantık kapıları içerisinden kontrolleştirilmiş-Z kapısına denk gelmektedir;

$$\text{oracle} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.152}$$

Kontrolleştirilmiş-Z kapısı yani oracle uygulandıktan sonra, belirlenen olasılığın genliği negatif olarak işaretlendiği için ortalama genlik $1/\sqrt{4}$ kadar azalmıştır. Bu aşamadan sonra ise elde edilen durum vektörü

$$|\psi'\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2} \tag{3.153}$$

şeklinde olacaktır. Bu aşamadan sonra oracle ile işaretlenmiş olan elemanın genliğini artırma aşaması vardır. Bu aşamayı genlik artırma operatörü, genliklerin ortalama-ağırlıklı duruma göre simetriğini alarak yapar. Yukarıda açıkladığımız bilgiler ışığında oracle ve genlik artırma işleminden oluşan **G** Grover yinelemesini

ne kadar tekrar ettireceğimizi belirleyebiliriz. $|\psi\rangle$ durumunun $|\alpha\rangle$ ile arasındaki $\theta/2$ açısı,

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{N-M}{N}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \tag{3.154}$$

değerindedir. Bir **G** Grover yinelemesi $|\psi\rangle$ durumunu $\theta = \pi/3$ açısı kadar döndürdüğünden sadece tek bir **G** Grover yinelemesi yeterli olacaktır;

$$T = \mathrm{CI}\left(\frac{\arccos\sqrt{M/N}}{\theta}\right) = 1 \tag{3.155}$$

Çünkü bir **G** Grover yinelemesinden sonra $|\psi\rangle$ durumunun açısı $\theta/2 + \theta = \pi/2$ olup çözüm durumu $|\beta\rangle$'ya ulaşmış olacaktır. Bunu gerçeklemek için oracle ile elde edilen $|\psi'\rangle$ durumunun genliğini artıralım. $\boldsymbol{D}_{\psi}$ genlik artırma operatörü, bu aşamada negatif durumda olan seçili genliği daha büyük bir şekilde pozitif hale geçirerek $|\psi'\rangle$ durumunun genliğini artırır;

$$\boldsymbol{D}_{\psi}|\psi'\rangle = |11\rangle. \tag{3.156}$$

Böylelikle sadece bir **G** Grover yinelemesi ile

$$\mathbf{G}|\psi\rangle = \boldsymbol{D}_{\psi}\boldsymbol{O}_{M}|\psi\rangle = |11\rangle \tag{3.157}$$

aranan çözüme klasikteki algoritmalara nazaran daha kısa sürede ulaşmış oluruz. $M = 1$ için yaptığımız bu örnekle bağlantılı olarak genel yapıdaki kuantum arama algoritmasını aşağıdaki biçimde verebiliriz:

Algoritma: Grover'in Kuantum Arama Algoritması

Girdi: (1) $\boldsymbol{O}$ oracle dönüşümünü gerçekleştir; $|x\rangle|y\rangle \mapsto |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$, x_0 dışındaki tüm $0 \leq x < 2^n$ için $f(x) = 0$ ve $f(x_0) = 1$; (2) $|0\rangle$ durumunda $n+1$ kübit hazırla.

Çıktı: x_0.

Çalışma süresi: $\boldsymbol{O}\left(\sqrt{2^n}\right)$ işlem.

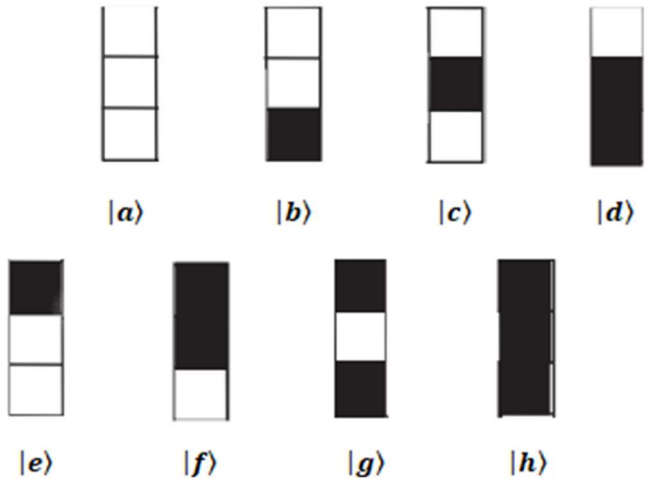
İşlem süreci:

1. Bir $|\psi\rangle$ durumu ile başla. Eğer başlatılmamışsa, $H^{\otimes n}|0\rangle$ ile başla.

2. **tekrarla**
    3. $|\psi\rangle$ durumuna faz değişim operatörü $\boldsymbol{O}$ oracle uygula
    4. $|\psi\rangle$ durumuna genlik artırma operatörü uygula:$\boldsymbol{D}_{\psi} = 2|\psi\rangle\langle\psi| - \mathbf{I}$

   Grover iterasyonunu $\mathbf{G} = \boldsymbol{D}_{\psi}\boldsymbol{O}$; $T \approx \left\lceil \frac{\pi}{4}\sqrt{2^n} \right\rceil$ **kez uygula**.
5. Kübitlerin ölçülmesi: $\rightarrow x_0$

Örnek 3.12. Şimdi kuantum arama algoritmasının anlaşılabilirlik ve uygulanabilirlik bakımından ayrıca çalışma hız performasının incelenmesi için **G** Grover yineleme sayısına bağlı olarak biraz daha somut bir arama örneği yapalım. Şöyleki üç çekmeceye sahip olan bir kutu için, kutunun çekmecelerinin anahtarla dolu olan kısmını siyahla boş olanlarını ise beyaz olarak resmedelim. Üç çekmeceli bir kutu için çekmecelerine göre sekiz farklı anahtar bulundurma durumu mevcuttur. Bu anahtarların bulunma konumlarını, 1'in siyahı ve 0'ın beyazı gösterdiği ikili dizilere dönüştürelim. Okuma sırasının sütuna göre olduğu Şekil 3.20'de gösterilen her üçlü çekmeceyi, anahtarlara göre ikili diziler halinde aşağıdaki durumlara sahip olacak biçimde gösterebiliriz.



Şekil 3.20 Üç çekmeceli bir kutunun anahtar bulundurma durumları

$$a = [0,0,0]\ ;\ b = [0,0,1]\ ;\ c = [0,1,0]\ ;\ d = [0,1,1]$$
$$e = [1,0,0]\ ;\ f = [1,1,0]\ ;\ g = [1,0,1]\ ;\ h = [1,1,1] \qquad (3.158)$$

Bu modellemede anahtarların üç çekmecede de bulunduğu durumu inceleyelim. Modellemeyi kuantum arama algoritmasına göre oluşturmak için veri tabanında

$N = 2^3 = 8$ elemanın olduğu $n = 3$ durumunu ele alalım. Kutunun üç çekmecesinin de anahtarla dolu olduğu durumu arayalım. Bunun için tek bir çözümün olduğu $M = 1$ için $|\mathrm{h}\rangle = |111\rangle$ durumunu aramamız gerekir. Sistemi denk süperpozisyon duruma getirmek için uygulanan Hadamard dönüşümünden sonra sistemin durumu

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \tag{3.159}$$

olur. Faz değişim operatörü olan oracle ile aradığımız $|111\rangle$ elemanın fazı değiştirilerek $-|111\rangle$ biçiminde negatif olarak işaretlenir;

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle - |111\rangle) \tag{3.160}$$

Böylece oracle ile aranan elemanın fazı değiştirilerek ortalama genlik $1/\sqrt{8}$ kadar azalmış olur. Şimdi oracle ile işaretlenen elemanın genliğini artırma aşaması vardır. Genlik artırma işleminden sonra sistemin durumu

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{2\sqrt{8}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + 5|111\rangle) \tag{3.161}$$

olur. Görüldüğü üzere aradığımız $|111\rangle$ elemanın olasılık genliği artarken aramadığımız elemanların görülme olasılıkları azalır. Bu şekilde oracle ve genlik artırma operatörleri, seçili genlik 1 değerine ve diğer olasılıkların genlikleri sıfıra ulaşana kadar birbiri ardınca tekrarlanmalıdır. Sunduğumuz bilgilere dayanarak, Grover algoritması için gerekli yineleme sayısını

$$T \leq \left\lceil \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{8}{1}} \right\rceil \tag{3.162}$$

ile hesaplayabiliriz. Bu eşitsizlikten anlaşılıyor ki takribi 2 yinelemeden sonra aradığımız kutunun üç çekmecesinin de anahtarla dolu olduğu $|h\rangle = |111\rangle$ durumun genliğinin daha da yükseltilerek ölçüm sonucu olarak çıkması sağlanır.

Yaptığımız çözümleme ve analizlere bağlı olarak klasik ve kuantum arama algoritmalarının temel stratejileri arasındaki bağlantıyı görmek mümkündür; Grover'in kuantum arama algoritmasindaki yaklaşımı, arama uzayının süperpoze durumu için aranan durumun genliğini bulma olasılığını artırmaktır. Ayrıca kuantum arama algoritması, verdiğimiz örneklerle benzer mantıkta sırasız bir veritabanında belirli bir anahtarı keşfetme görevi olarak da görülebilir. N tane anahtar, N boyutlu karmaşık vektör uzayının bir tabanı olarak temsil edilir ve veritabanı, genellikle tüm genlikleri $1/\sqrt{N}$ değerine eşit olan genel bir süperpozisyon durumdur. Klasik hesaplama yaklaşımında, sırasız bir veritabanında bir sayı bulmak için en iyi algoritma rastgele arama algoritmasıdır ve ortalama olarak $N/2$ adım gereklidir; burada N veritabanının boyutudur ve en kötü durumda ise $N-1$ adımda aranan eleman bulunabilir. Kuantum hesaplamalarında ise, veritabanını anahtarların süperpozisyonu olan bir durum olarak tanımlayarak, aramayı tek bir işlemde paralel olarak değerlendirebiliriz. Kuantum arama algoritmasında aranan durumun genliğini artırma işlemi için ortalama $\sqrt{N}$ adım gerekliyken klasik arama algoritmasında bu adım sayısı $N/2$ dir. Bu sebeple günümüz bilgi-veri çağında arama eyleminin çok daha büyük veri kümeleri için yapılan inceleme ve çalışmalarında zamanın tasarruflu kullanımı bakımından daha avantajlı ve gerekli olduğu aşikardır.

4
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma ile öncelikle bilim alanının gözde fenomenlerden biri olan dalga-parçacık ikiliği durumunu ortaya çıkaran çift yarık deneyinden bahsedilerek kuantum kavramının çıkış noktası incelenmiştir. Günümüz teknolojileriyle birlikte hemen her alanda duyulmaya başlanan 'kuantum' kavramı derinleştirilerek doğadaki zerreden kürreye her bir yapıtaşının atomik düzeydeki davranışlarının kuantum mekaniğini tanımladığını ve kuantum mekanik kuramının matematiksel modellemesinin oluşturulmasının özünde lineer cebirle, mantık ve olasılık temellendirmesiyle mümkün olduğu gözlenmiştir. Dört postulat aracılığıyla kuantum mekaniğin üzerine kurgulandığı matematiksel modelleme incelenmiştir.

Kuantum işlemcilerin yapıtaşı olan kuantum bitler (kübitler); kübitler aracılığıyla süperpozisyon durum ve kuantum mantık kapılarıyla yapılan kuantum hesaplamalar verilmiştir. Kuantum bilgisayarların programlanmasına olanak tanıyan ve algoritmaların özünde yer alan Grover'in Kuantum Arama Algoritması detaylı analizleriyle incelenerek örneklerle açıklanmıştır. Yapılan bu çalışmayla doğada kuantum mekaniğinden etkilenen problemlerin kuantum matematiğini kullanarak klasik bilgisayarlara göre daha seri ve etkin bir şekilde çözümleyebilen kuantum bilgisayarların geliştirilebileceği sunulmuştur.

Matematikçiler, fizikçiler ve bilgisayar bilimcilerle, yapay zeka ilgilileri başta olmak üzere, geniş bir kesime hitap etmesi için hazırlanan bu çalışma kuantum matematiği ile yapılan hesaplamalar üzerine incelemelerle, kuantum dünyasındaki mevcut kuantum bilgilerini anlamlandırabilme ve yeni kuantum hesaplamaları geliştirebilmeye yönelik bir temel oluşturmuştur.

KAYNAKÇA

[1] P. Kaye, R. Laflamme, M. Mosca, An Introduction to Quantum Computing, Oxford University Press, (2007).

[2] Dan C. Marinescu and Gabriela M. Marinescu, Quantum Information and Error Correction From Classical to Quantum Concepts, (2009).

[3] M. Lanzagorta and J. Uhlmann, Quantum Computer Science, (2009).

[4] M. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, (2010).

[5] P. Wittek, Quantum Machine Learning, (2014).

[6] The Mathematics of Quantum Mechanics, Martin Laforest, (2015).

[7] F.M. de Paula Neto, A.J. da Silva and W.R. de Oliveira, ''Quantum probabilistic associative memory architecture'', Neurocomputing 351 (2019) 101–110.

[8] A. Mavi, Kuantum Hesaplamaya Teorik ve Uygulamalı Giriş, (2021).

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. N. Bozkurt, M. Özavşar, "Grover's Search Algorithm or Quantum Search Algorithm", 8th International IFS and Contemporary Mathematics Conference, İstanbul, TÜRKİYE, pp: 166, 16-19 Haziran 2022.