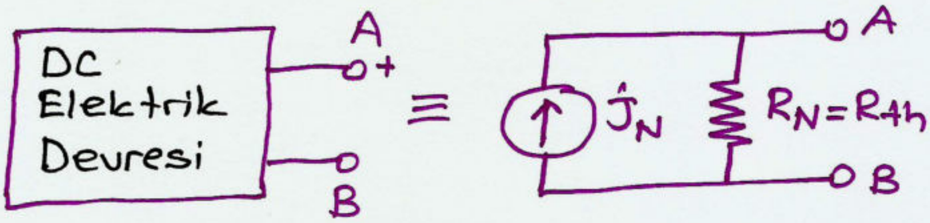
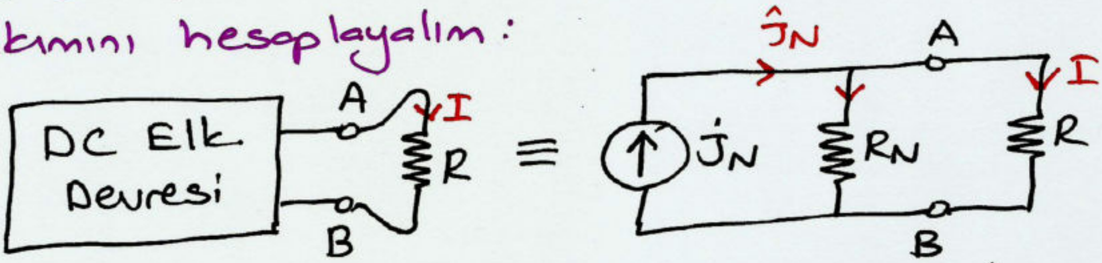
Doç.Dr. Recep YUMURTACI - YTÜ

Norton Teoremi



Bir elektrik devresinin (DC) A-B uçlarına göre eşdeğeri bir akım kaynağı ($\hat{J}_N$) ve bu akım kaynağının uçlarına paralel bağlı bir direnç (R_N) ile temsil edilebilir, modellenebilir. Bu eşdeğer devreye "Norton Eşdeğer Devresi" denir.

A-B uçları arasına R yük direncini bağlayalım ve yük akımını hesaplayalım:



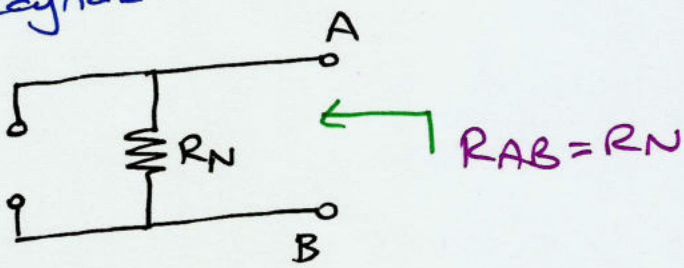
$$I = \frac{V_{AB}}{R} \quad \text{ve} \quad V_{AB} = R_{eş} \cdot \hat{J}_N = \left(\frac{R_N \cdot R}{R_N + R}\right) \cdot \hat{J}_N$$

$$I = \frac{V_{AB}}{R} = \left(\frac{R_N \cdot \cancel{R}}{R_N + R}\right) \cdot \hat{J}_N \cdot \frac{1}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{R_N}{R_N + R} \cdot \hat{J}_N}$$

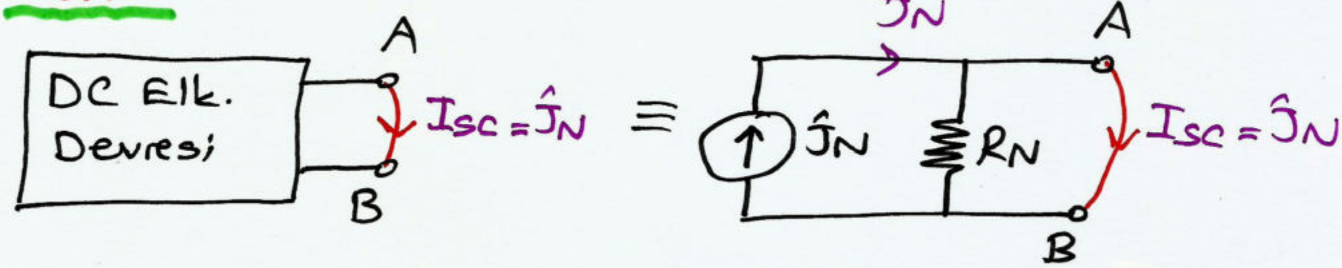
Norton Eşdeğer Devresi Elemanlarının Hesaplanması

R_N

$R_N = R_{th}$ olduğu için R_N, Thevenin eşdeğer devresindeki R_{th} gibi hesaplanır. Yani, gerilim kaynakları kısa devre akım kaynakları açık devre iken $\boxed{R_{AB} = R_N}$ olur.



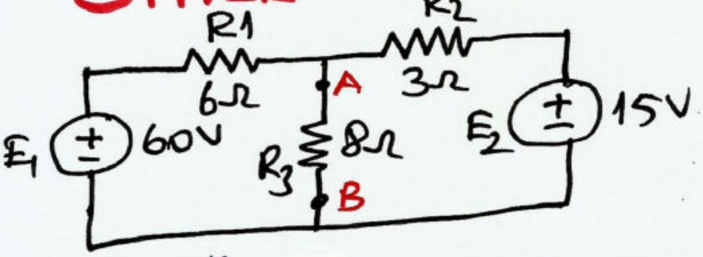
$\hat{J}_N$



Devrede A-B uçları kısa devre edilir. Devre herhangi bir yöntemle çözülerek A-B uçları arasından geçen kısa devre akımı (I_{sc}) hesaplanır.

$\boxed{\hat{J}_N = I_{sc}}$ olur.

Örnek

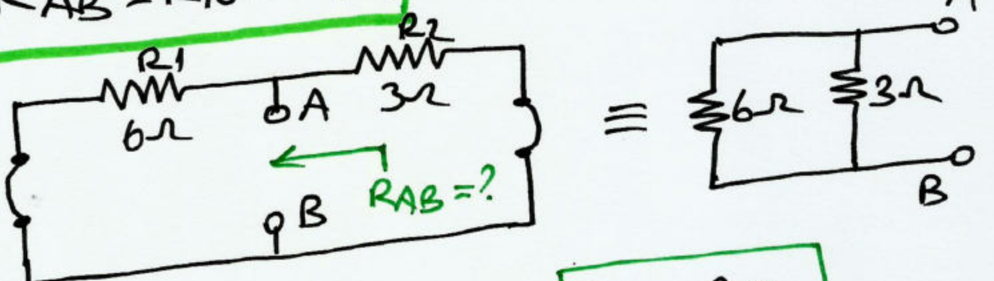


R_3 direncinin akımını Norton Teoremi ile hesaplayınız

Çözüm

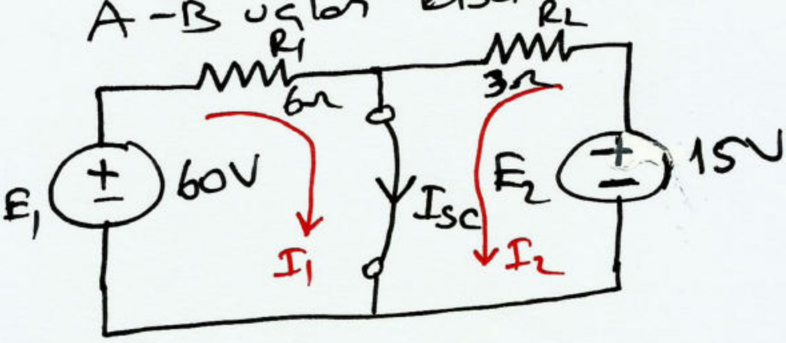
* Akımı hesaplanacak R_3 direnci kaldırılır, A-B uçları açık ve gerilim kaynakları kısa devre iken

$\boxed{R_{AB} = R_N = R_{th}}$ olur



$$R_{AB} = R_N = \frac{6.3}{6+3} \Rightarrow \boxed{R_N = 2\Omega}$$

* Norton akım kaynağının akımı $\hat{J}_N$'i bulmak için A-B uçları kısa devre edilir $\boxed{\hat{J}_N = I_{sc}}$ olur.



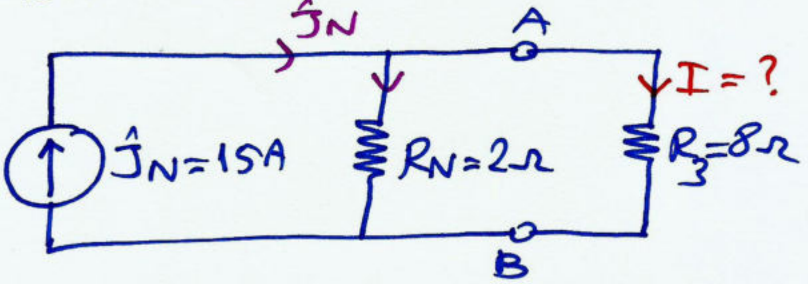
$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{60}{6} = 10A$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{15}{3} = 5A$$

$$\hat{J}_N = I_{sc} = I_1 + I_2 = 10+5$$

$$\boxed{\hat{J}_N = 15A}$$

Akımı hesaplanacak $R_3 = 8\Omega$'luk direnci Norton eşdeğer devresinde A-B uçları arasına bağlayalım:

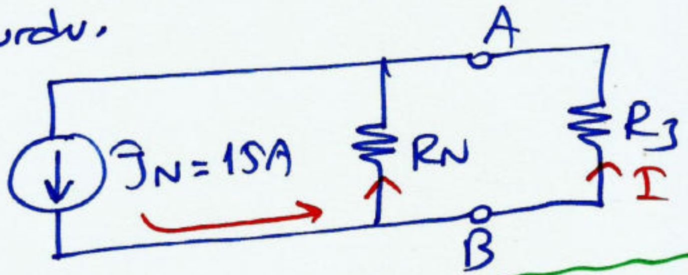


Akım Bölücüden

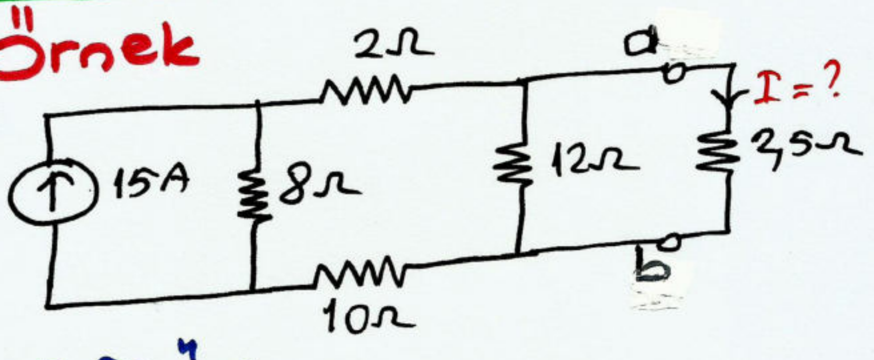
$$I = \frac{R_N}{R_N + R} \cdot \hat{J}_N$$

$$I = \frac{2}{2+8} \cdot 15 \Rightarrow \boxed{I = 3A}$$

Not: Yukarıdaki soruda $\hat{J}_N = -15A$ olsaydı akım kaynağının yönü değişirdi (↓) ve R_3'ün akımı B→A yönünde olurdu.



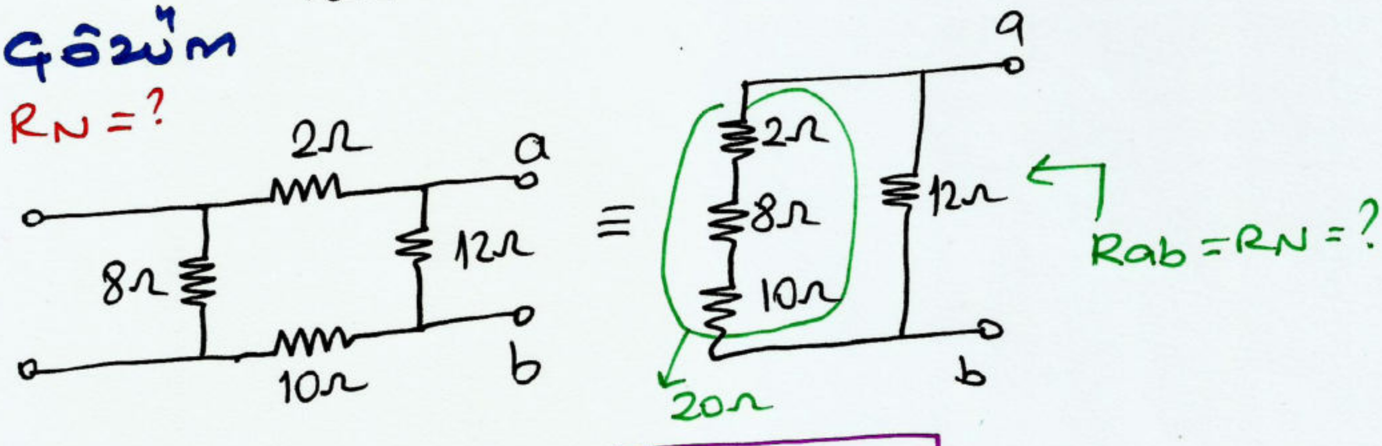
Örnek



Şekildeki devrede I akımını Norton Teoremi yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm

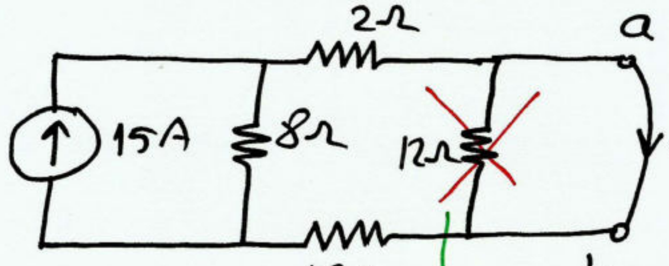
$R_N = ?$



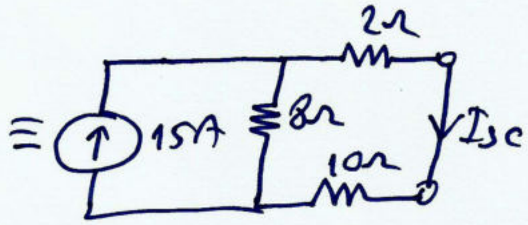
$$R_N = R_{ab} = \frac{20 \cdot 12}{20 + 12} \Rightarrow \boxed{R_N = 7{,}5\Omega}$$

$\hat{J}_N = ?$

a-b uçları kısa devre edilir. $I_{sc} = \hat{J}_N$ olur.

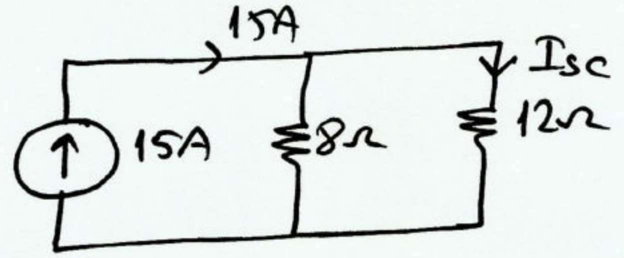


≡



↳ a-b uçları kısa devre yapılınca 12Ω'luk direnç de kısa devre olur

≡

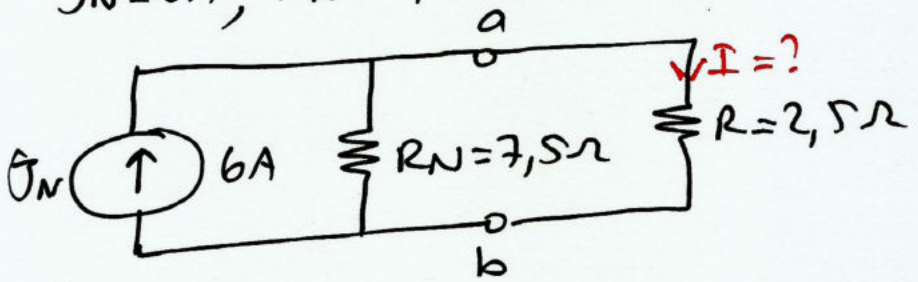


Akım bölücüden

$$I_{sc} = \frac{8}{8+12} \cdot 15$$

$$I_{sc} = 6A \Rightarrow \boxed{\hat{J}_N = 6A}$$

$\hat{J}_N = 6A$, $R_N = 7,5\Omega$ ve $R = 2,5\Omega$ ise



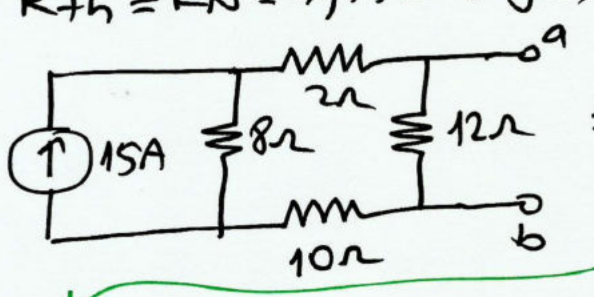
Akım bölücüden

$$I = \frac{7,5}{7,5+2,5} \cdot 6$$

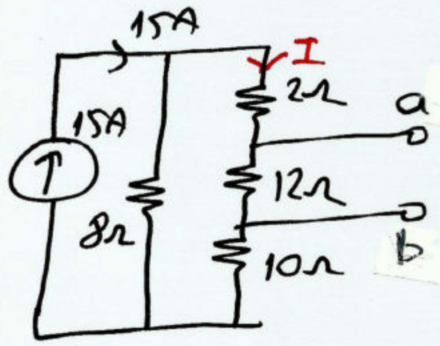
$$I = \frac{45}{10} \Rightarrow \boxed{I = 4,5A}$$

Örnek: Yukarıdaki soruyu Thevenin Teoremi ile çözünüz

$R_{th} = R_N = 7,5\Omega$ (aynı)



≡

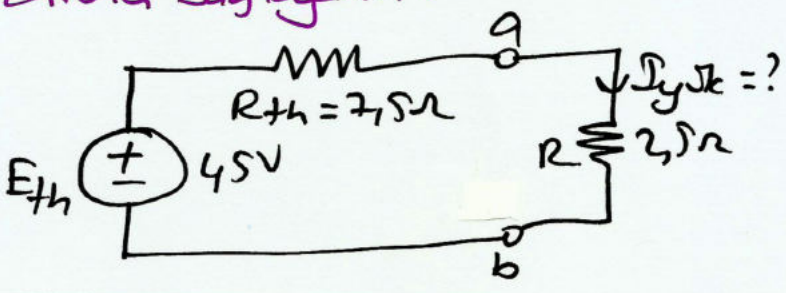


$V_{ab} = E_{th} = ?$

Akım bölücüden: $I = \frac{8}{8+24} \cdot 15 = 3,75A$

$V_{ab} = 12.I = 12 \cdot 3,75 = 45V \Rightarrow \boxed{E_{th} = 45V}$

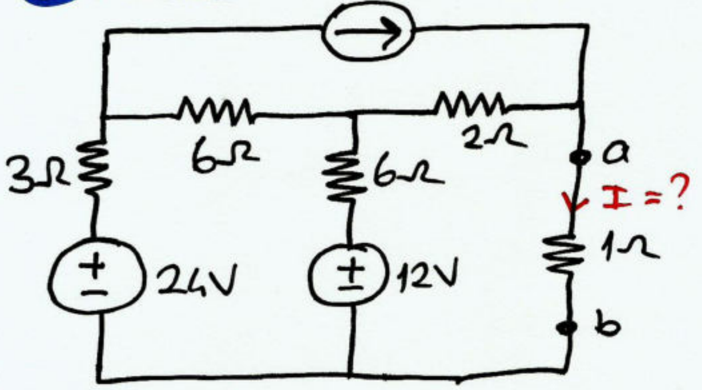
a-b uçları arasına (Thevenin eşdeğer devresinde) $R = 2,5\Omega$'luk direnci bağlayalım;



$$I_{yük} = \frac{E_{th}}{R_{th} + R} = \frac{45}{7,5+2,5}$$

$$\boxed{I_{yük} = 4,5A}$$

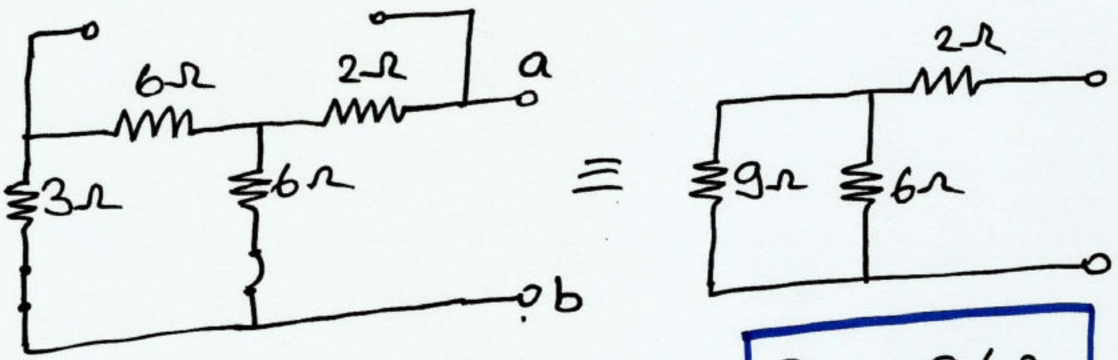
Örnek



Şekildeki devrede 1Ω'luk direncin akımını Norton Teoremi ile hesaplayınız

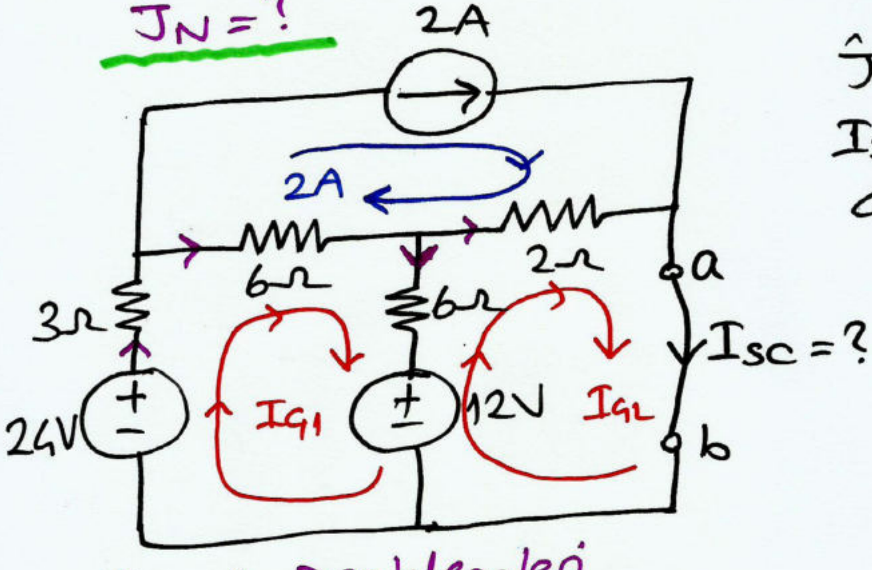
Çözüm:

$R_N = ?$



$R_N = R_{ab} = 2 + \left(\frac{6.9}{6+9}\right) \Rightarrow \boxed{R_N = 5,6\Omega}$

$\hat{J}_N = ?$



$\hat{J}_N = I_{sc}$'dir.

Isc kısa devre akımını G.A.Y. ile hesaplayalım:

Çevre Denklemleri

$I_{ç1}$ çevresi için: $3I_{ç1} + 6(I_{ç1}-2) + 6(I_{ç1}-I_{ç2}) - 24 + 12 = 0$

$(3+6+6)I_{ç1} - 6I_{ç2} - 12 - 24 + 12 \Rightarrow \boxed{15I_{ç1} - 6I_{ç2} = 24}$ 1. denklem

$I_{ç2}$ çevresi için: $-12 - 6(I_{ç1}-I_{ç2}) + 2(I_{ç2}-2) = 0$

$\boxed{-6I_{ç1} + 8I_{ç2} = 16}$ 2. denklem

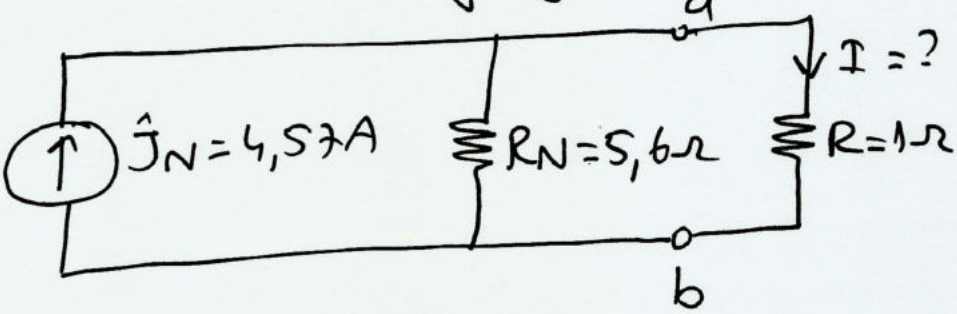
$$\left.\begin{array}{l} 15 I_{a_1} - 6 I_{a_2} = 24 \\ -6 I_{a_1} + 8 I_{a_2} = 16 \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{a_1} \\ I_{a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$I_{sc} = I_{a_2} = ?$$

$$I_{a_2} = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 24 \\ -6 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{15.16 - (-6).24}{15.8 - (-6).(-6)} = \frac{384}{84} = 4,57A$$

$$I_{sc} = \hat{J}_N = 4,57A \Rightarrow \boxed{\hat{J}_N = 4,57A}$$

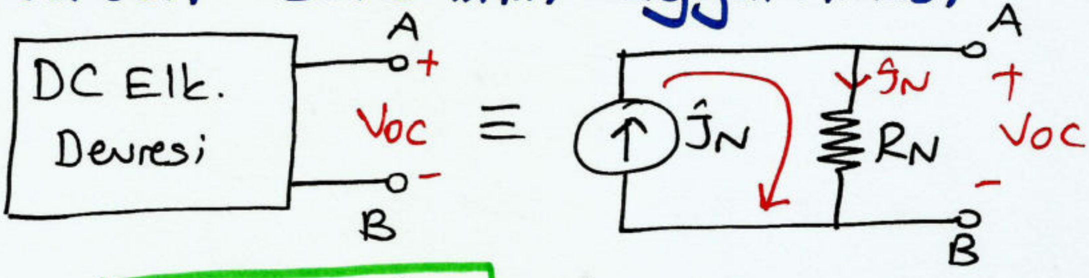
1Ω'luk direnci Norton Eşdeğer Devresinde a-b uçları arasına bağlayalım:



$$I = \frac{R_N}{R_N + R} \cdot \hat{J}_N = \frac{5,6}{5,6+1} \cdot 4,57$$

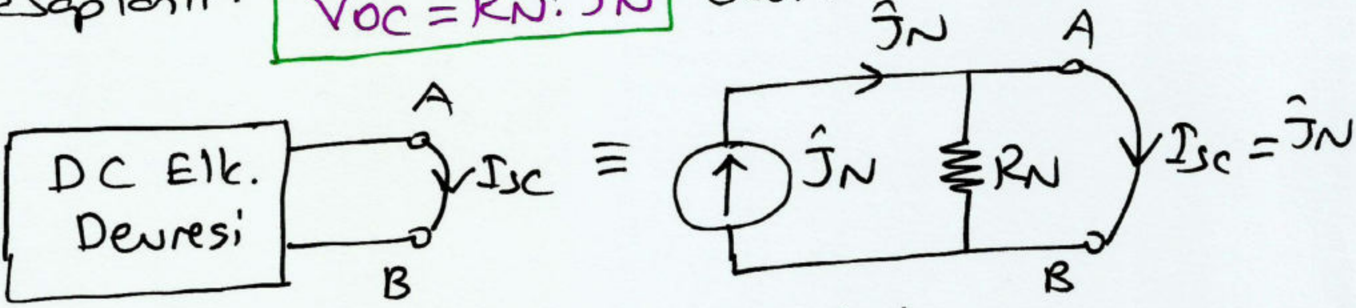
$$\boxed{I = 3,88A}$$

Bağımlı Kaynaklı DC Devrede Norton Teoreminin Uygulanması



$$\boxed{V_{OC} = R_N . \hat{J}_N}$$

Bağımlı kaynaklı DC devrede Thevenin Teoreminin uygulanmasında olduğu gibi A−B uçları arasındaki açık devre gerilimi (V_{OC}) ve kısa devre akımı (I_{SC}) hesaplanır. $\boxed{V_{OC} = R_N . \hat{J}_N}$ olur.



A−B uçları kısa devre edildiğinde

$\boxed{\hat{J}_N = I_{SC}}$ olur

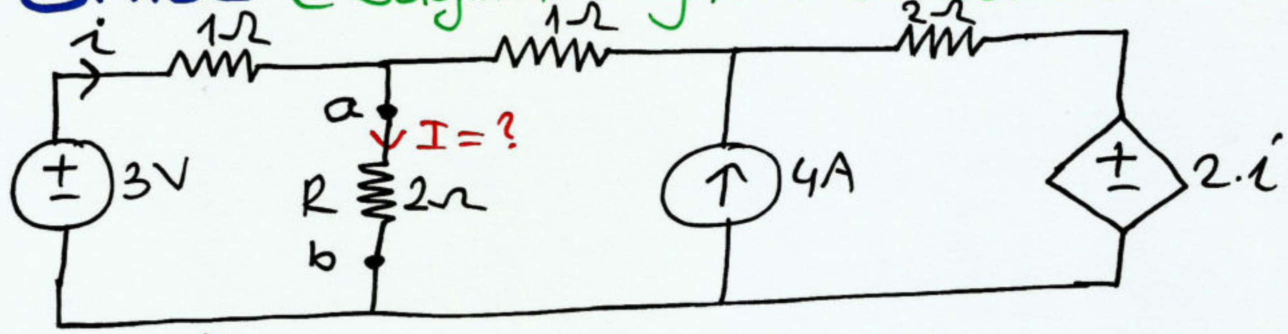
$\hat{J}_N = I_{SC}$ ve $V_{OC} = R_N . \hat{J}_N \Rightarrow R_N = \dfrac{V_{OC}}{\hat{J}_N} = \dfrac{V_{OC}}{I_{SC}}$

$$\boxed{R_N = \frac{\text{Açık Devre Gerilimi}}{\text{Kısa Devre Akımı}} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}}}$$

$$\boxed{\hat{J}_N = I_{SC} = \text{Kısa Devre Akımı}}$$

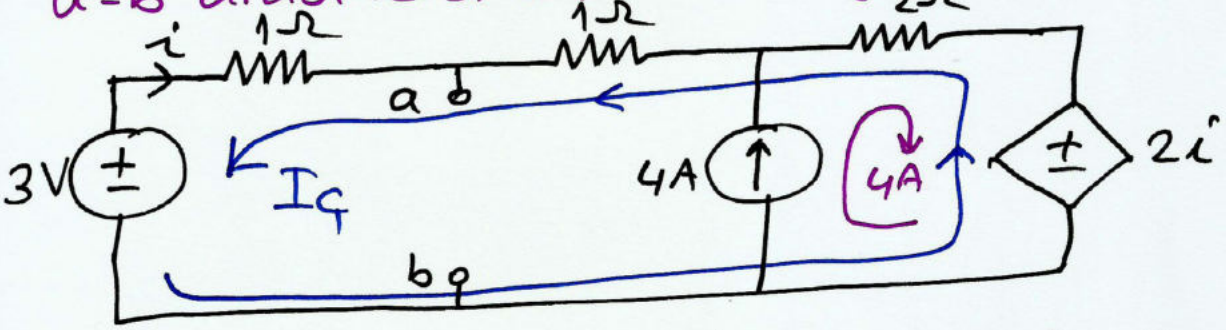
Doç.Dr. Recep YUMURTACI – YTÜ Elektrik Müh. Bölümü

Örnek (Bağımlı Kaynaklı DC Devrede Norton Teoremi)



Çözüm:

a-b arasındaki açık devre gerilimi Voc = ?

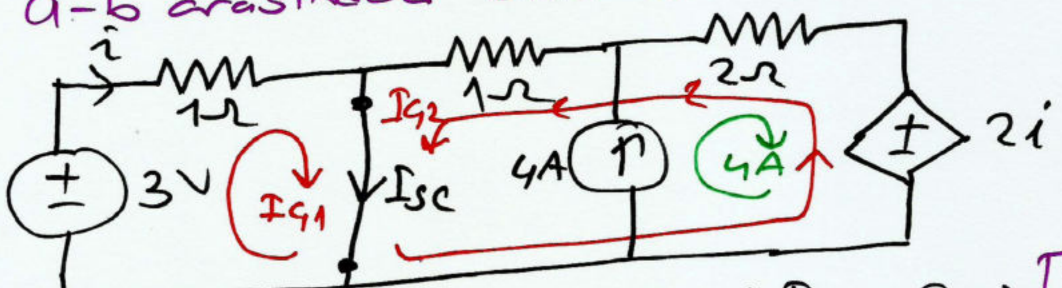


$$(1+1+2)I_ç - 2.4 - 2i + 3 = 0 \quad \text{ve} \quad i = -I_ç$$

$$4I_ç - 8 - 2(-I_ç) + 3 = 0 \Rightarrow 6I_ç = 5 \Rightarrow I_ç = \frac{5}{6} A$$

$$V_{oc} = V_{ab} = 1.I_ç + 3 = 1.\frac{5}{6} + 3 \Rightarrow \boxed{V_{oc} = \frac{23}{6} V}$$

a-b arasındaki kısadevre akımı Isc = ?



Çevre denklemleri $\quad -3 + 1.I_{ç1} = 0 \Rightarrow \boxed{I_{ç1} = 3A}$

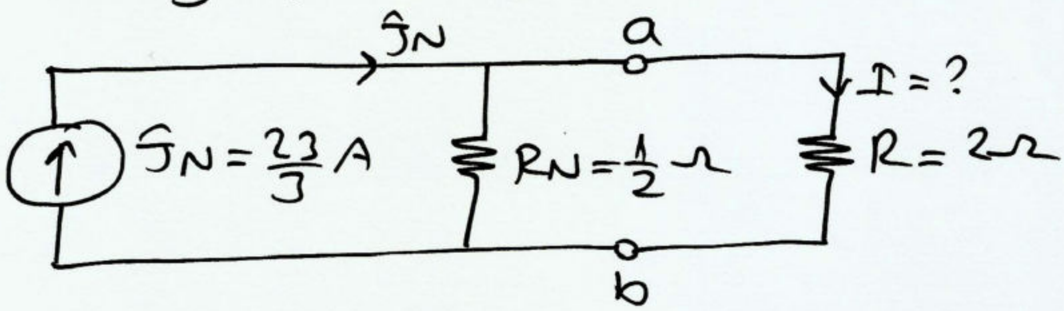
$$(2+1).I_{ç2} - 2.4 - 2i = 0 \quad \text{ve} \quad i = I_{ç1} = 3A$$

$$3I_{ç2} - 8 - 2.3 = 0 \Rightarrow \boxed{I_{ç2} = \frac{14}{3} A}$$

$$I_{sc} = \hat{J}_N = I_{ç1} + I_{ç2} = 3 + \frac{14}{3} \Rightarrow \boxed{\hat{J}_N = \frac{23}{3} A}$$

$$R_N = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{V_{oc}}{\hat{J}_N} = \frac{23}{6}.\frac{3}{23} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ \Omega \Rightarrow \boxed{R_N = 0{,}5\Omega}$$

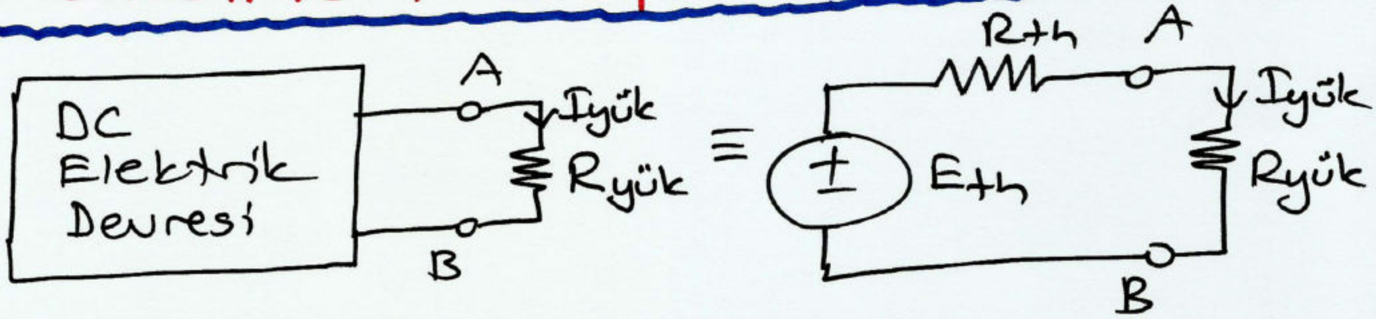
$\hat{J}_N = \frac{23}{3} A$, $R_N = \frac{1}{2} \Omega$ ve $R = 2\Omega$ ise $I = ?$



$$I = \frac{R_N}{R_N + R} \cdot \hat{J}_N = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} \cdot \frac{23}{3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{23}{3}$$

$$\boxed{I = \frac{23}{15} = 1,533 A}$$

Maksimum Güç Teoremi



Yükün maksimum güç çekmesi için yük direncinin değeri ne olmalıdır? (Ryük = ?)

$$I_{yük} = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_{yük}} \quad \text{ve} \quad P_{yük} = R_{yük} \cdot I_{yük}^2$$

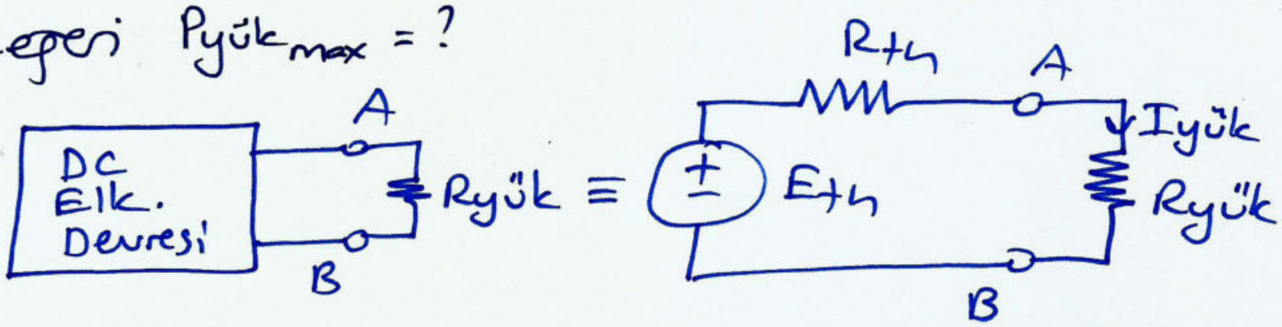
$$P_{yük} = R_{yük} \cdot \frac{E_{th}^2}{(R_{th} + R_{yük})^2}$$

$$\frac{\partial P_{yük}}{\partial R_{yük}} = 0 \xrightarrow{\text{Çözümü}} \boxed{R_{yük} = R_{th}} \text{ olmalıdır}$$

Yükün maksimum güç çekebilmesi için $R_{yük} = R_{th}$ olmalı

(Yükün direnci gerilim kaynağının (E_{th}) iç direncine (R_{th}) eşit olmalıdır)

* A-B uçları arasından çekilebilecek maksimum güç değeri $P_{yük_{max}} = ?$



$$R_{yük} = R_{th} \Rightarrow I_{yük} = \frac{E_{th}}{R_{th}+R_{yük}} = \frac{E_{th}}{2R_{th}}$$

$$P_{yük_{max}} = R_{yük}\cdot I_{yük}^2 = R_{th}\cdot\left(\frac{E_{th}}{2R_{th}}\right)^2 = R_{th}\cdot\frac{E_{th}^2}{4R_{th}^2}$$

$$\boxed{P_{yük_{max}} = \frac{E_{th}^2}{4R_{th}}}$$

* Yükün maksimum güç çekmesi ($R_{yük}=R_{th}$) halinde sistemin verimi nedir?

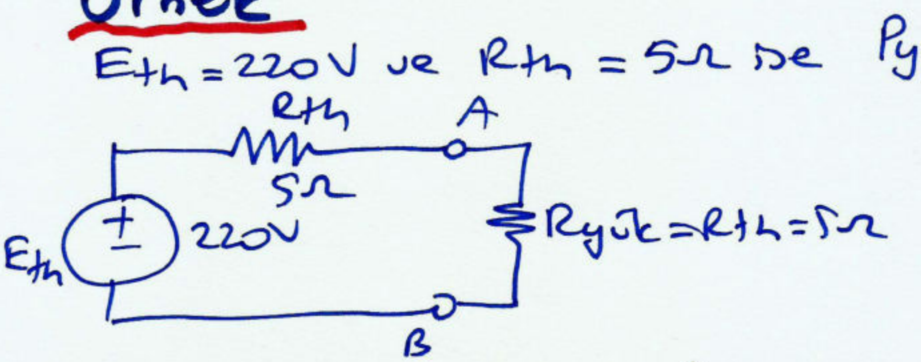
$$\text{Verim} = \eta = \frac{P_{çıkış}}{P_{giriş}} = \frac{P_{yük}}{P_{kaynak}} = \frac{R_{yük}\cdot\cancel{I_{yük}^2}}{(R_{th}+R_{yük})\cancel{I_{yük}^2}}$$

$$\text{Verim} = \eta = \frac{R_{yük}}{R_{th}+R_{yük}} = \frac{\cancel{R_{th}}}{2\cancel{R_{th}}} = \frac{1}{2}$$

Yükün maksimum güç çekmesi ($R_{yük}=R_{th}$ olması) halinde verim %50'dir.

Örnek

$E_{th}=220V$ ve $R_{th}=5\Omega$ ise $P_{yük_{max}}=?$



$$I_{yük} = \frac{E_{th}}{2R_{th}} = \frac{220}{2.5} = 22A$$

$$P_{yük_{max}} = R_{yük}\cdot I_{yük}^2$$

$$P_{yük_{max}} = 5.22^2 = 2420W$$

veya $P_{yük_{max}} = \dfrac{E_{th}^2}{4R_{th}} = \dfrac{220^2}{4.5} = 2420W$

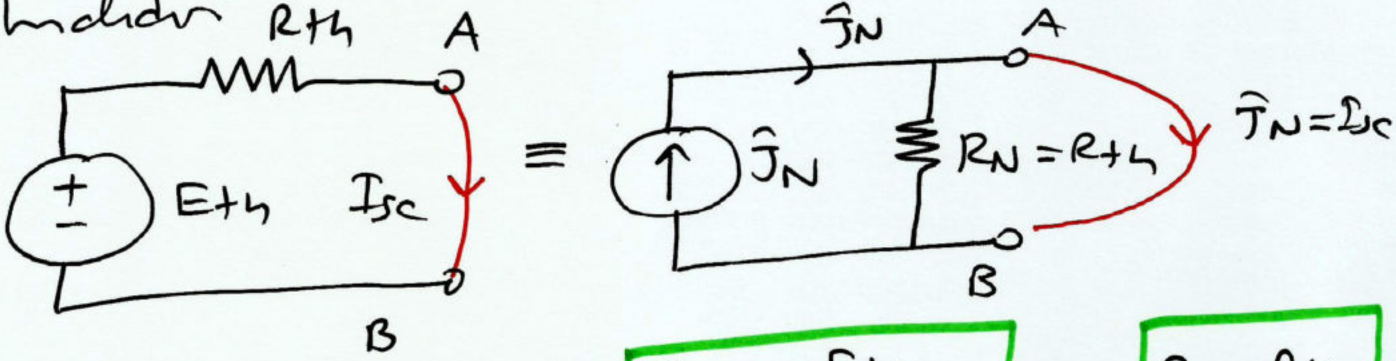
Doç.Dr. Recep YUMURTACI - YTÜ Elektrik Müh. B.

Kaynak Dönüşümleri

1) Gerilim Kaynağının Akım Kaynağına Dönüştürülmesi

(Thevenin Eşdeğer Devresinden Norton Eşdeğer Devresinin Elde Edilmesi)

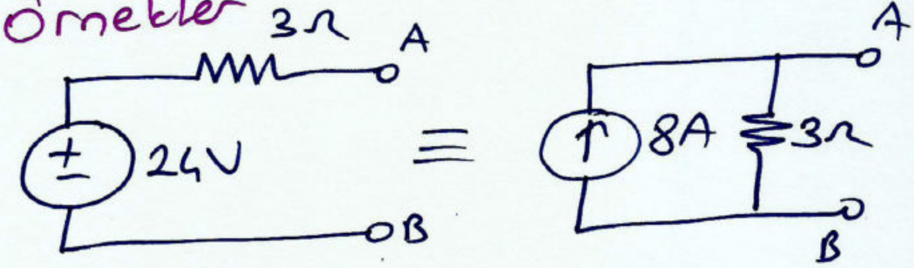
Kaynak dönüşümlerinin yapılabilmesi için kaynakların mutlaka iç dirençleri olmalıdır. Bir gerilim kaynağı varsa devrede ona seri bağlı bir direnç olmalı veya akım kaynağına paralel bir direnç olmalıdır.



$$I_{sc} = \hat{J}_N = \frac{E_{th}}{R_{th}} \Rightarrow \boxed{\hat{J}_N = \frac{E_{th}}{R_{th}}} \text{ ve } \boxed{R_N = R_{th}}$$

Örnekler

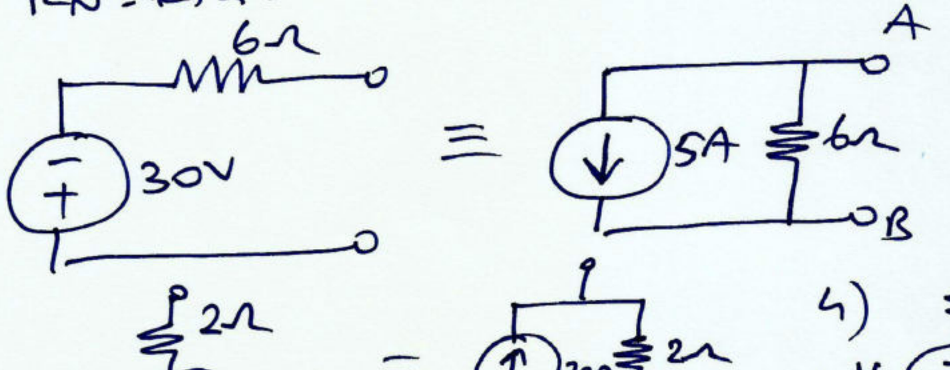
1)



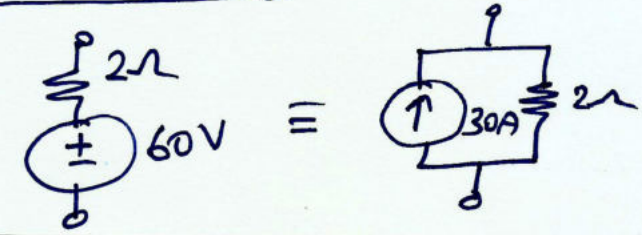
$$\hat{J}_N = \frac{E_{th}}{R_{th}} = \frac{24}{3} = 8A$$

$$R_N = R_{th} = 3\Omega$$

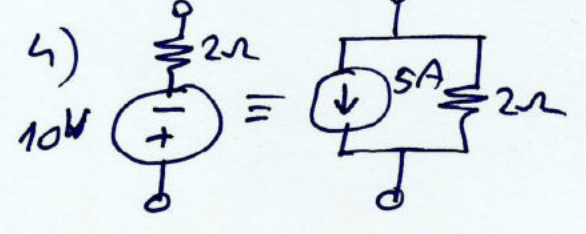
2)



3)

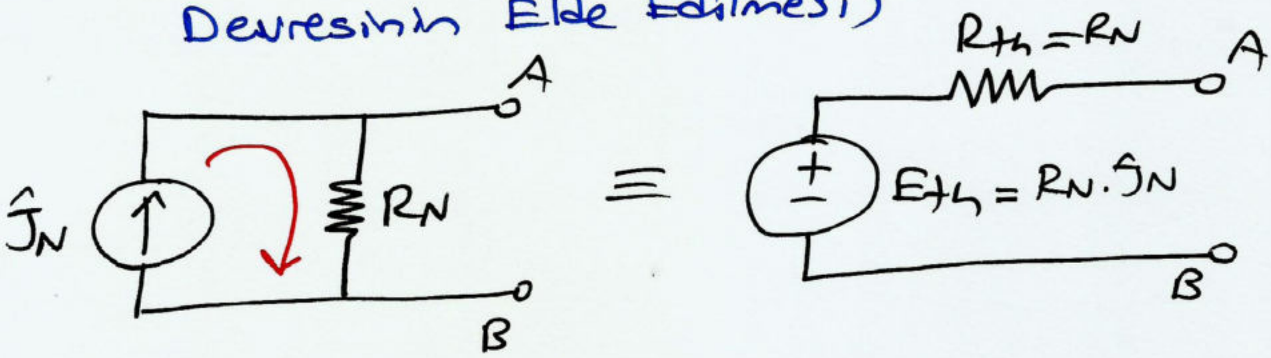


4)



2) Akım Kaynağının Gerilim Kaynağına Dönüştürülmesi

(Norton Eşdeğer Devresinden Thevenin Eşdeğer Devresinin Elde Edilmesi)

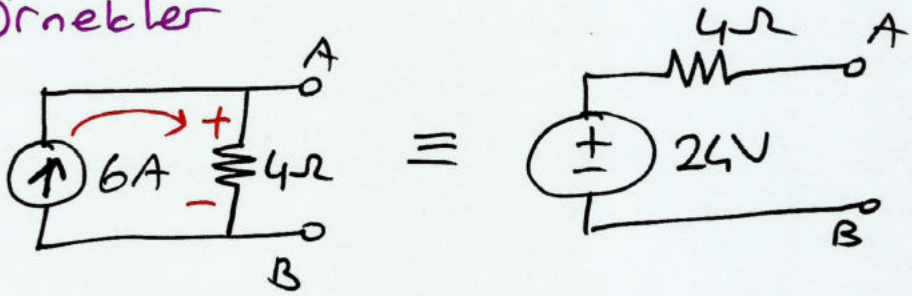


$V_{oc} = E_{th}$

$$\underbrace{V_{oc} = R_N \cdot \hat{J}_N}_{\boxed{E_{th} = R_N \cdot \hat{J}_N}} \quad \text{ve} \quad \boxed{R_{th} = R_N}$$

Örnekler

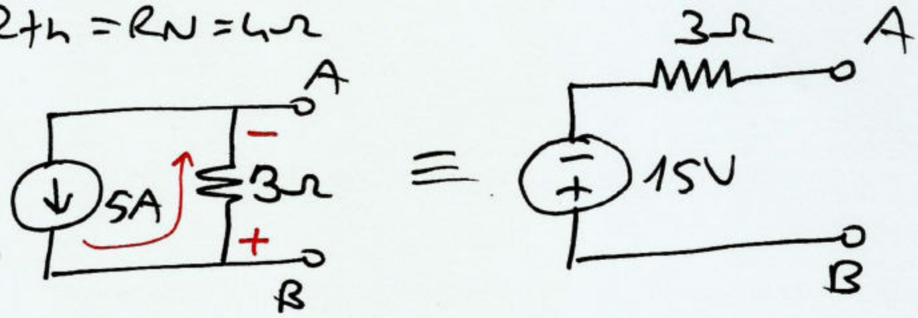
1)



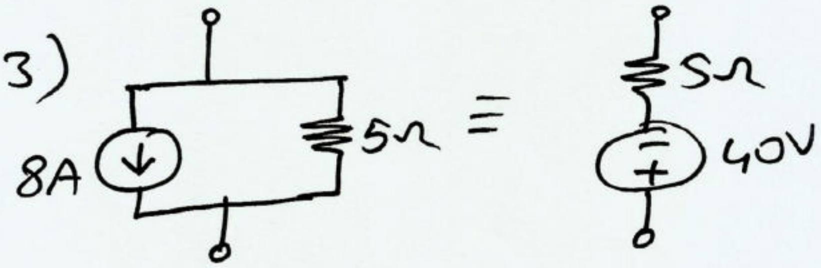
$E_{th} = R_N \cdot \hat{J}_N = 4 \cdot 6 = 24V$

$R_{th} = R_N = 4\Omega$

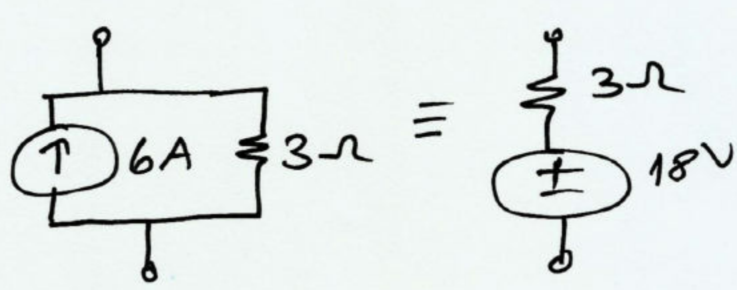
2)



3)

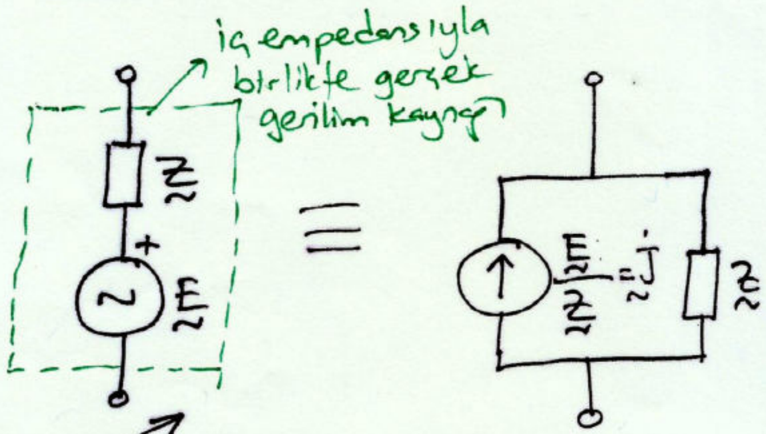


4)

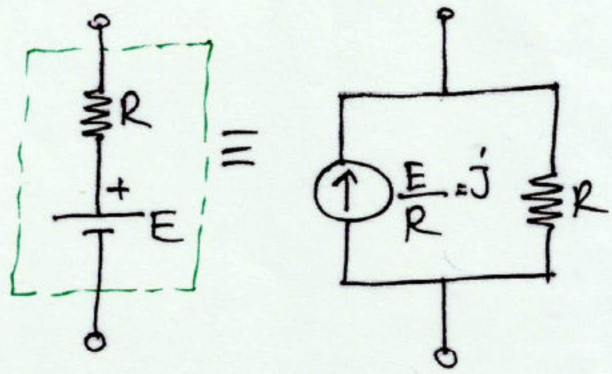


Thevenin Teoremi ve Norton Teoreminden Yararlanarak Devre Çözümünde Gerilim Kaynağının Akım Kaynağına veya Akım Kaynağının Gerilim Kaynağına Dönüştürülmesi (Kaynakların iç Empedanslarının Olması Şartıyla)

AC Devresinde



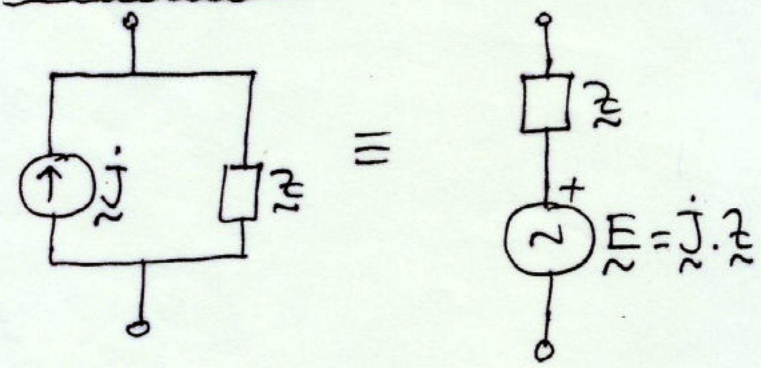
DC Devresinde



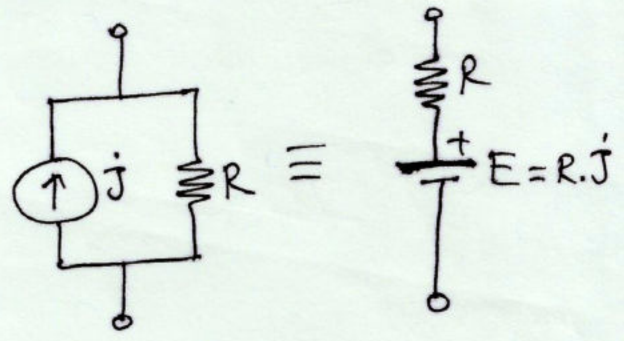
Gerilim kaynağının akım kaynağına dönüştürülmesi

Akım kaynağının gerilim kaynağına dönüştürülmesi

AC Devresinde

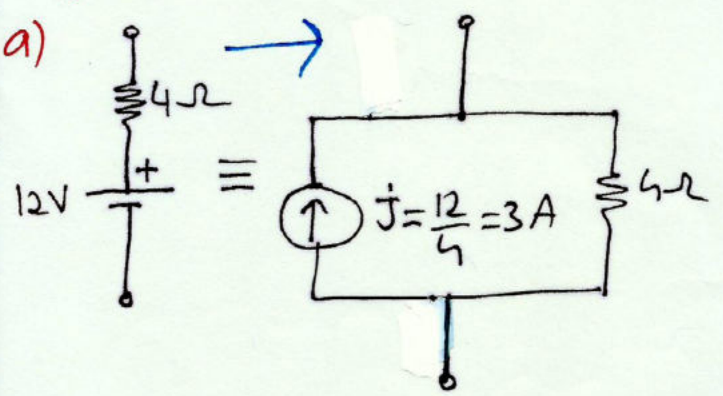


DC Devresinde

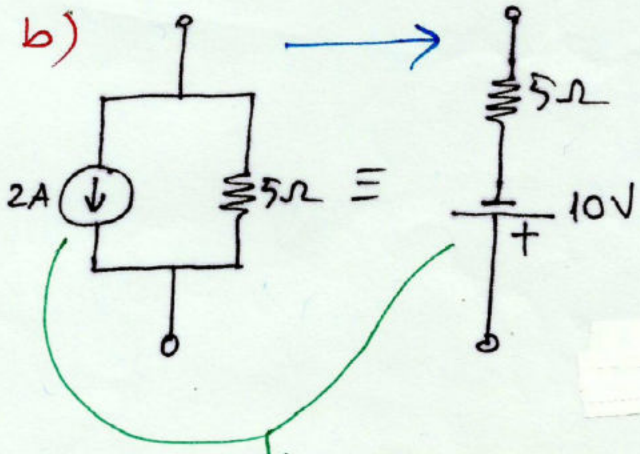


Örnekler

a)

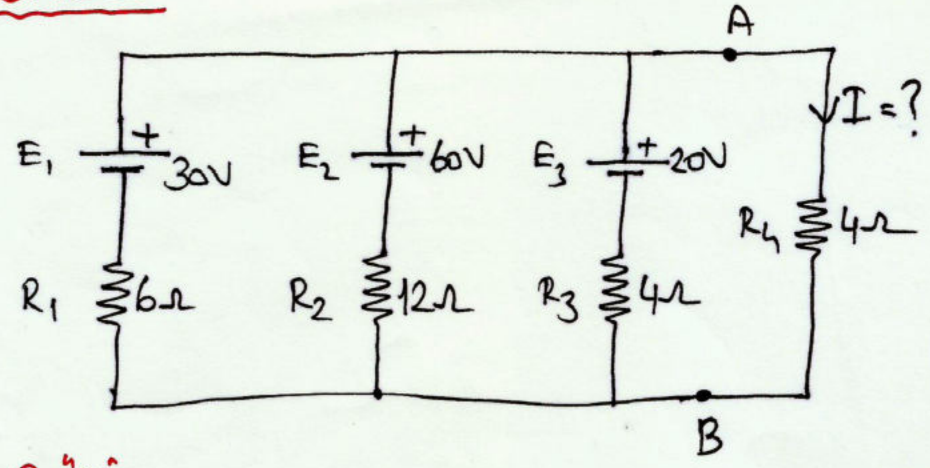


b)



Akım yönü aşağı doğru olduğu için gerilim kaynağının alt kutbu (+), üst kutbu (−)

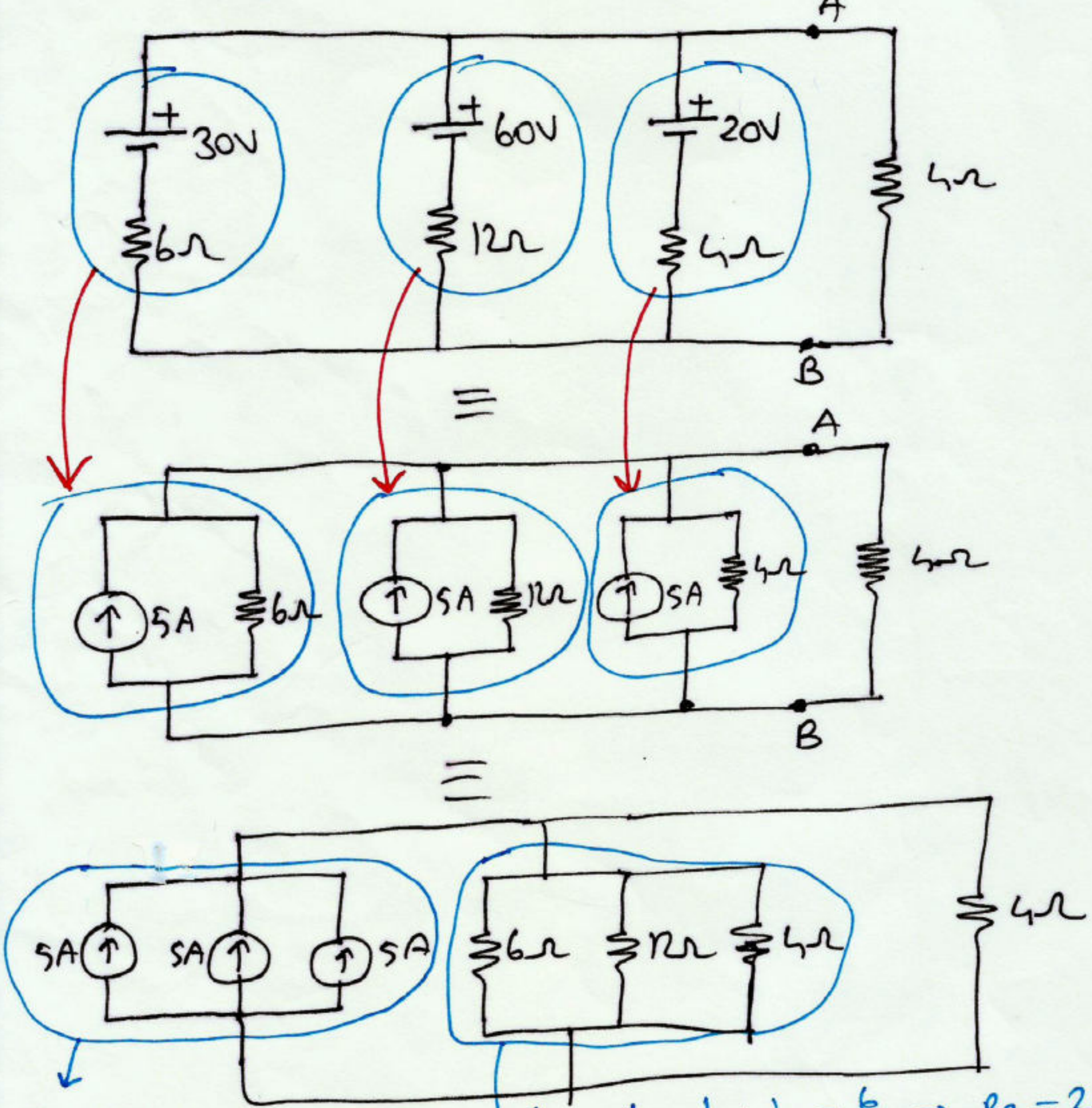
Örnek



Şekildeki devrede R_4 direncinden geçen akımı bulunuz.

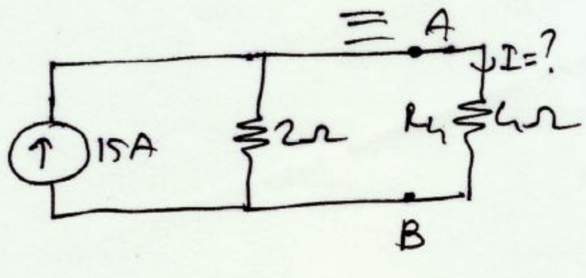
Çözüm

Gerilim kaynaklarını akım kaynaklarına dönüştürerek çözüm



$5+5+5=15A$

$$\frac{1}{R_e}=\underset{(2)}{\frac{1}{6}}+\underset{(1)}{\frac{1}{12}}+\underset{(3)}{\frac{1}{4}}=\frac{6}{12}\Rightarrow R_e=2\Omega$$



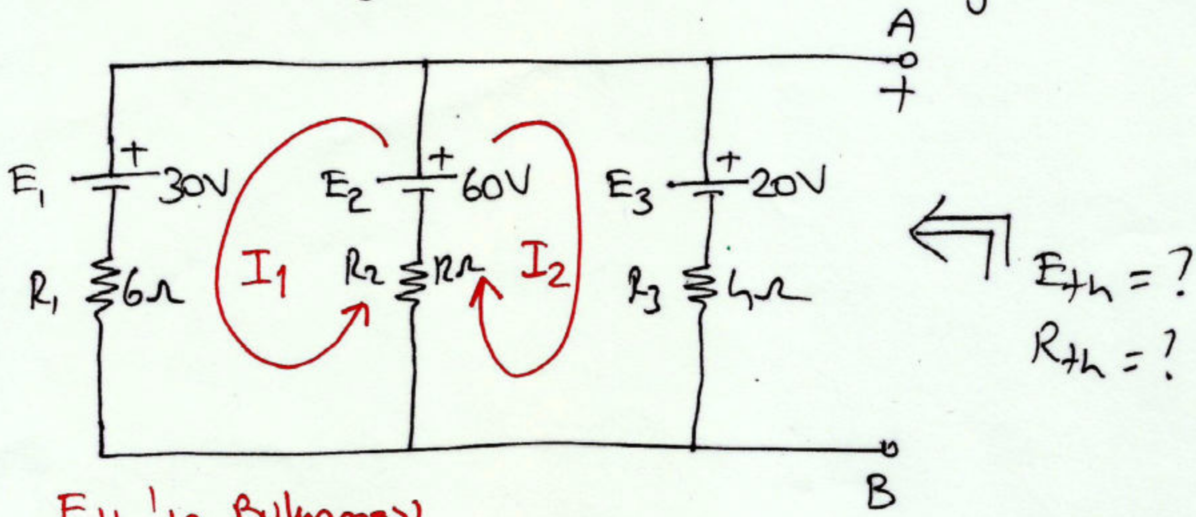
$$V_{AB}=15\cdot R_T=15\cdot\left(\frac{2\cdot 4}{2+4}\right)=\frac{120}{6}=20V$$

$$I=\frac{V_{AB}}{R_4}\Rightarrow I=\frac{20}{4}$$

$$\boxed{I=5A}$$

Thevenin Teoremi ile Çözüm

A-B uçları arasındaki akımı istenen R_4 direnci çıkartılır ve A-B uçlarına göre devrenin Thevenin eşdeğeri bulunur



E_{th}'in Bulunması

$V_{AB} = E_{th} = E_3 + R_3 . I_2 \quad I_2 = ?$ ÇAY ile bulalım.

$$\left.\begin{array}{l}(R_1+R_2).I_1 + R_2.I_2 = E_2 - E_1 \\ R_2.I_1 + (R_2+R_3)I_2 = E_2 - E_3\end{array}\right\} \quad \underbrace{\begin{array}{l}18I_1 + 12I_2 = 30 \\ 12I_1 + 16I_2 = 40\end{array}}$$

Cramer yöntemi ile

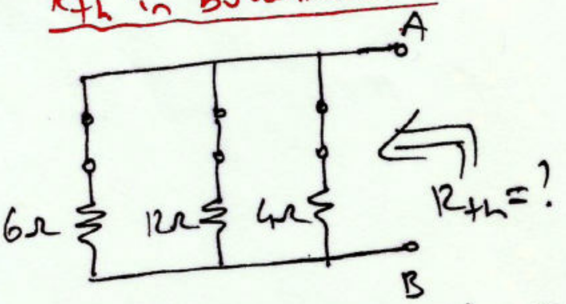
$$\begin{bmatrix}18 & 12 \\ 12 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1 \\ I_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}30 \\ 40\end{bmatrix}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix}18 & 30 \\ 12 & 40\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}18 & 12 \\ 12 & 16\end{vmatrix}} = \frac{(18.40 - 12.30)}{(18.16 - 12.12)} = \frac{\cancel{6}(3.40 - 2.30)}{\cancel{6}(3.16 - 2.12)} = \frac{60}{24} = 2,5A$$

$$I_2 = 2,5A \Rightarrow E_{th} = V_{AB} = E_3 + R_3 I_2 = 20 + 4.2,5 = 30V$$

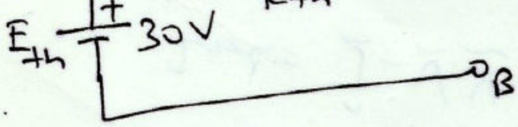
$$\boxed{E_{th} = 30V}$$

R_{th}'in bulunması

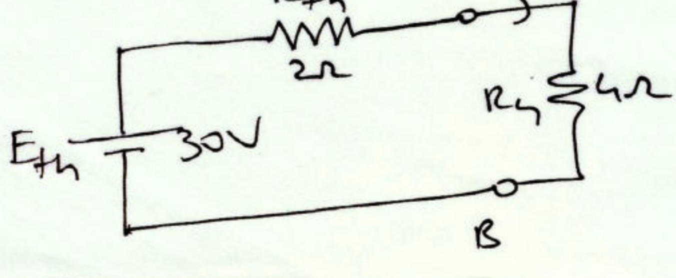


$$\frac{1}{R_{th}} = \underset{(2)}{\frac{1}{6}} + \underset{(1)}{\frac{1}{12}} + \underset{(3)}{\frac{1}{4}} = \frac{6}{12} \Rightarrow \boxed{R_{th} = 2\Omega}$$

Devrenin Thevenin eşdeğeri



A-B uçlarına R_4 bağlanırsa,



$$I = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_4} = \frac{30}{2+4} = 5A$$

$$\boxed{I = 5A}$$

Görüldüğü gibi gerilim kaynaklarını akım kaynaklarına dönüştürerek çözüm DAHA KOLAY.

168