T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN KONVEKS METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA İTERASYON YAKLAŞIMLARI VE OPTİMİZASYON

Muhammet KNEFATI

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Mayıs, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN KONVEKS METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA İTERASYON YAKLAŞIMLARI VE OPTİMİZASYON

Muhammet KNEFATI tarafından hazırlanan tez çalışması 05.05.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Prof. Dr. Yusuf ZEREN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ, Üye
İstanbul Üniversitesi Cerrahpaşa _____

Danışmanım Prof. Dr. Vatan KARAKAYA sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta İterasyon Yaklaşımları ve Optimizasyon başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Muhammet KNEFATI

İmza

Akademik hayatım boyunca bana en büyük desteği veren
sevgili annem Fatema Abogalon'a ithafen...

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmamın her aşamasında sağladığı bilimsel bakış açısı ile ufkumu açarak tezimde yer alan konularda derinleşmemi sağlayan, kıymetli bilgi birikimi ile benden hiçbir desteğini esirgemeyen ve her zaman anlayışla beni yönlendiren kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya tez tamamlama sürecimdeki destekleri için tüm içtenliğimle sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Değerli katkıları ve önerileri ile tezimin kalitesini artırmama ve kendimi geliştirmeme yardımcı olan doktora tez izleme komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK ve Sayın Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY hocalarıma çok teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Yusuf ZEREN ve Sayın Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ hocalarıma değerli katkılarından dolayı çok teşekkür ederim. Çalışmalarım boyunca sabırla beni destekleyen ve her zaman yanımda olan değerli aileme ve çalışma arkadaşlarıma da en içten duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Muhammet KNEFATI

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ ix

TABLO LİSTESİ x

ÖZET xi

ABSTRACT xiii

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür özeti 1

1.2 Tezin Amacı 4

1.3 Hipotez 4

2 BAZI TEMEL GEOMETRİK VE SABİT NOKTA KAVRAMLARI 5

2.1 Fonksiyonel ve Analiz Temelli Tanım ve Teoremler 5

2.2 Bazı Geometrik Analiz Kavramları ve Özellikleri 7

2.2.1 ***CAT(0)*** Uzaylarının Geometrisi 10

2.2.2 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzayların Geometrisi 11

2.2.3 Jeodezik Metrik Uzaylarda Δ-Yakınsaması 13

2.3 Sabit Nokta Dönüşümleri ve Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri . . 15

3 *P* -DÜZGÜN KONVEKS METRİK UZAYLARDA ZAYIF TOPOLOJİ VE KONVEKSLİK 19

3.1 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Zayıf Topoloji 22

3.1.1 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Zayıf Yakınsama 23

3.1.2 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Konveks Kümeler ve Zayıf Kompaktlık 25

4 GENELLEŞTİRİLMİŞ *CAT(0)* UZAYLARINDA Δ-YAKINSAMA 27

4.1 $\boldsymbol{CAT_p(0)}$ Uzaylarında Δ-Yakınsaklık 29

4.2 $CAT_p(0)$ Uzaylarında S-İterasyon Yönteminin Yakınsaklığı 31
4.3 $CAT_p(0)$ Uzaylarında Optimizasyon Problemleri ve Uygulamaları . . . 36

5 *P*-DÜZGÜN KONVEKS METRİK UZAYLARDA GENİŞLEMEYEN TİPTEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA 41
5.1 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Belirli Operatör Sınıfları İçin Sabit Nokta Teoremleri 41
5.1.1 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylara ait Yeni Örnekler 41
5.1.2 Bazı Özel Operatörler için ***JK*** İterasyon Yönteminin Yakınsaklık Analizi 45
5.2 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Ortalama Genişlemeyen Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri 53
5.2.1 Ortalama Genişlemeyen Dönüşümlerin Sınıfı 54
5.2.2 Ortalama Genişlemeyen Dönüşümler için Sabit Noktaların Varlığı ve Yarı Kapalılık Prensibi 55
5.2.3 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Ortalama Dönüşümlerin Yakınsaklığı 59

6 *P*-DÜZGÜN KONVEKS METRİK UZAYLARDA AĞIRLIKLI ORTALAMA İZ DÜŞÜMLERİN YAKINSAKLIĞI 65
6.1 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Konveks Fizibilite Problemi 65
6.2 ***P***-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Ağırlıklı Ortalama İz Düşümlerin Yakınsaklığı 67
6.3 Ishikawa İz Düşüm Yöntemi 70

7 SONUÇ 74

KAYNAKÇA 76

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 83

SİMGE LİSTESİ

K	Cisim ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$)
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$	$\{a_n\}$ dizisinin üst limiti
$F(\mathscr{S})$	$\mathscr{S}$ Dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$CAT(\kappa)$	Eğriliği üstten κ ile sınırlı jeodezik uzay
ess sup f	f fonksiyon uzaylarında üst limit
$CAT_p(0)$	Genelleştirilmiş $CAT(0)$ uzayı
$\Delta(x,y,z)$	Jeodezik üçgen
$\Delta(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$	Karşılaştırma jeodezik üçgeni
$diam(C)$	C kümesinin çapı
$B(x,v)$	x merkezli v yarı çaplı açık yuvar
$(\mathscr{M},\rho)$	$\mathscr{M}$ Metrik uzayı
$(\mathbb{V},\|k\|)$	Normlu vektör uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$A(\{x_n\})$	$\{x_n\}$ Sınırlı dizisinin asimptotik merkezi
$r(\{x_n\})$	$\{x_n\}$ Sınırlı dizisinin asimptotik yarıçapı
$\mathbb{R}^n$	Öklid uzayı
$\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}$	U üzerinde tanımlı norm fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

bkz.	bakınız
ve ark.	ve arkadaşları

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Koni ve kürede bir jeodezi 8
Şekil 2.2 $\bar{\Delta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ karşılaştırma üçgenleri 10
Şekil 2.3 Orijin merkezli küreler 11
Şekil 2.4 $CAT(-1)$,$CAT(0)$,$CAT(1)$ sırasıyla örnek uzayları 12
Şekil 3.1 Zayıf yakınsama 24
Şekil 5.1 p-düzgün konveks metrik uzaylarda sıfır merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvarlar 44
Şekil 5.2 S, Thakur ve JK iterasyonlarının grafikleri 51
Şekil 5.3 S, Thakur ve JK iterasyonları ile tanımlanan diziler 54
Şekil 5.4 S, Thakur ve Karakaya iterasyonları ile tanımlanan diziler 64
Şekil 6.1 $\mathbb{S}^2$ birim küre üzerindeki ortalama iz düşüm 73

TABLO LİSTESİ

Tablo 5.1 S, Thakur ve JK-iterasyonlarının sabit noktalarını elde etmek için gerekli iterasyon sayısı 50
Tablo 5.2 S, Thakur ve JK-iterasyonlarının sabit noktalarını elde etmek için gerekli iterasyon sayısı 54
Tablo 5.3 S, Thakur ve Karakaya iterasyonlarının sabit noktalarını elde etmek için gerekli iterasyon sayısı 63

ÖZET

Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta İterasyon Yaklaşımları ve Optimizasyon

Muhammet KNEFATI

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

$CAT_p(0)$ uzaylarının ve p-düzgün konveks metrik uzayların Hadamard uzaylarından daha genel olan jeodezik metrik uzaylar olduğu bilinmektedir. Mevcut tez çalışmasında, jeodezik metrik uzaylarda genişlemeyen tipten dönüşümler kullanılarak minimizasyon ve bazı sabit nokta problemlerinin çözüm ve uygulamaları araştırılacaktır. Altı bölüm olarak tasarlanan bu çalışmada; birinci bölümde literatür özeti, tezin amacı ve hipotezi verilmiştir. İkinci bölüm ise tezin tamamında kullanılacak olan temel kavramları, tanımları ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde; p- düzgün konveks metrik uzaylarda alışılmış metrik topolojiden daha zayıf olan, zayıf yakınsama sağlayan ve τ_w olarak adlandırılacak olan yeni bir topoloji inşa edilmiştir. Bu yeni zayıf topolojiyle Banach uzaylarındaki kompaktlık kavramına benzer yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, p-düzgün konveks metrik uzaylarda kapalı konveks alt kümeler üzerinde iz düşüm dönüşümleri incelenerek bu uzaylarda Hilbert uzayları ve Banach uzaylarında var olan Opial ve Kadec Klee gibi geometrik özelliklerin benzer tanımları elde edilmiştir. Dördüncü bölümde; $CAT_p(0)$ uzaylarında CN^* eşitsizliğinin bir genellemesi verilmiş ve daha sonra bu uzaylarda S-iterasyonu, genişlemeyen dönüşümler altında dönüşümün sabit noktasına kuvvetli ve Δ-yakınsak olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte, elde edilen yakınsama sonuçları $CAT(0)$ uzaylarında minimizasyon problemlerini çözmek için uygulanmıştır. Beşinci bölümde, ilk olarak, doğrusal olmayan Lebesgue uzayları Hadamard uzaylarından p-düzgün konveks metrik uzaylara genişletilmiştir. Daha sonra, p-düzgün konveks metrik uzaylarda yeni tanımlanan genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfı için bazı Δ-yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca, bu

sınıfın sabit noktalarına yaklaşmak için yeni tanımladığımız JK-iterasyon yöntemi kullanılmıştır.

Son bölümde ise p-düzgün konveks metrik uzaylarda ağırlıklı ortalama iz düşüm dizileri için bazı eşitsizlikler kurulmuştur. Bununla birlikte elde edilen eşitsizlikler kullanılarak ağırlıklı ortalama iz düşüm dizisinin asimptotik regülerliği ve Δ-yakınsaklığı ispatlanmıştır. Ayrıca, p-düzgün konveks metrik uzaylarda belirli regülarite veya kompaktlık koşulları altında dizinin kuvvetli yakınsaklığı gösterilmiştir. Son olarak, p-düzgün konveks metrik uzaylarda Ishikawa iz düşüm dizisi tanımlanarak belirli şartlar altında Δ- yakınsaklığı ve kuvvetli yakınsaklığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: p-düzgün konveks metrik uzaylar, $CAT_p(0)$ uzayı, zayıf topoloji, Δ-yakınsaklık, genişlemeyen dönüşümler.

ABSTRACT

Some Iterative Approximation of Fixed Points and Optimization in Uniformly Convex Metric Spaces

Muhammet KNEFATI

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

The present thesis aims to investigate the solution and applications of fixed point problems in geodesic metric spaces utilizing transformations of nonexpansive type. Geodesic metric spaces, which are more general than Hadamard spaces, include $CAT_p(0)$ spaces and p-uniformly convex metric spaces. These spaces are known to possess geodesic convex structures, which enable the definition of the shortest path distance between any two points within them. This study is designed as six chapters; the first chapter summarizes the literature, the aim, and the hypothesis of the thesis. The second chapter contains the basic concepts, definitions, and theorems that will be used throughout the thesis. In the third chapter, a new topology, named τ_w, is constructed which is weaker than the usual metric topology for p-uniformly convex metric spaces and provides weak convergence. With this new topology, compactness results similar to the notion of compactness in Banach spaces are obtained. Moreover, by studying projection mappings on closed convex subsets in p-smooth convex metric spaces, similar definitions of geometric properties such as Opial and Kadec Klee, which exist in Hilbert spaces and Banach spaces, are obtained. In the fourth section, a generalization of the inequality CN^* on $CAT_p(0)$ spaces is given and then S-iteration on these spaces is shown to be strongly and Δ- convergent to the fixed point of the mapping under nonexpansive transformations. Moreover, the obtained convergence results are applied to solve minimization problems on $CAT(0)$ spaces. In the fifth section, we first extend nonlinear Lebesgue spaces from $CAT(0)$ spaces to p-uniformly convex metric spaces. Then, some Δ-convergence and strong convergence theorems are proved for the newly defined class of generalized nonexpansive maps on p-smooth

convex metric spaces. Moreover, our newly defined JK-iteration method is used to approximate the fixed points of this class. Finally, new examples of this class in terms of p-smooth convex metric spaces are given.

In the last section, we define weighted average projection and Ishikawa projection iteration methods in p-uniformly convex metric spaces. We employ these methods to solve the feasibility problem in these spaces.

Keywords: p-uniformly convex metric spaces, $CAT_p(0)$ spaces, weak topology, Δ-convergence, nonexpansive mappings.

1
GİRİŞ

1.1 Literatür özeti

Banach uzaylarının geometrisi, matematikte önemli bir araştırma alanı olarak ortaya çıkmaktadır. Bir Banach uzayı tam normlu bir vektör uzayı olduğundan Banach uzaylarının geometrisi, bu uzayların şekil ve davranışı hakkında bilgi vermektedir. Konvekslik, simetri ve diğer geometrik özellikler, Banach uzayları üzerinde çalışmanın temel unsurları olarak karşımıza çıkmaktadır. Banach uzayları üzerindeki geometrik özellikler; lineer fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler, optimizasyon, olasılık teorisi, sayısal analiz, fizik, mühendislik ve ekonomi gibi matematiğin birçok alanında ve farklı bilim dallarında uygulama alanına sahiptir.

Tarihsel olarak, 1936 yılında, Clarkson [1] Banach uzaylarının geometrisini incelemek için bir yöntem olarak düzgün konveks metrik uzay kavramını tanımlamıştır. Bu uzaylar, Banach uzaylarından daha güçlü bir geometrik özellik taşımaktadır. Banach uzaylarından daha genel olan metrik uzaylara düzgün konvekslik kavramını taşımak için en kullanışlı uzaylar Hadamard uzaylarıdır. Hadamard uzaylarının geometrisi, Hilbert uzaylarının geometrisinin lineer olmayan hale getirilmesi olarak görülebilir. Hadamard uzaylarının tarihsel süreci, Wald'ın [2] 1936 yılında yapmış olduğu çalışmayla başlamıştır. 1950'lerde Alexandrov [3] tarafından Hadamard uzaylarının bazı ilginç özellikleri keşfedilmiş ve bunun bir sonucu olarak Hadamard uzayları Alexandrov anlamında pozitif olmayan eğrilik uzayları olarak da adlandırılmıştır. Hadamard uzayları; Öklid uzaylarını, Hilbert uzaylarını, pozitif olmayan kesit eğriliğine sahip tam basit bağlantılı Riemann manifoldlarını (örneğin klasik hiperbolik uzaylar ve pozitif tanımlı matrisler manifoldu) [2], lineer olmayan Lebesgue uzaylarını [4], $\mathbb{R}$-ağaçlarını [4], Hilbert yuvarını [5] ve Hiperbolik uzaylarını [6] kapsamaktadır. 1990'ların sonunda Hadamard uzaylarına ait analitik sonuçlar konveks ve lineer olmayan analiz teorisi için ortaya çıkmıştır ve bilim, ekonomi ve mühendislikte birçok optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır [4, 7–11].

Literatürde tam $CAT(0)$ uzayları Hadamard uzayları olarak adlandırılmaktadır ve sıklıkla birbirinin yerine kullanılmaktadır. $CAT(0)$ terimi 1987 yılında Gromov [12] tarafından "C" Cartan, "A" Alexandrov, "T" Toponogov ve sıfır üst eğrilik sınırı kavramlarının kısaltması olarak ortaya atılmıştır. $CAT(0)$ uzayları sınıfı, Alexandrov tarafından 1951 yılında tanıtılan Alexandrov uzayları kümesinin bir parçasıdır. Euclid geometrisine benzer aksiyomlarla tanımlanmıştır, ancak belirli eşitlikler eşitsizliklere dönüştürülmektedir. Eşitsizliğin işaretine bağlı olarak, eğriliği üstten sınırlı veya alttan sınırlı Alexandrov uzayları elde edilebilir. Bu iki sınıf uzayın tanımı benzer olsa da, özellikleri ve uygulamaları oldukça farklıdır. $CAT(0)$ uzaylarında konveks ve fonksiyonel analiz çalışmaları 1960 yılında Reshetnyak'ın [13] çalışmalarıyla başlamıştır. 1987 yılında Mikhail Gromov [12], metrik uzayın bir κ reel sayısı ile üstten sınırlı bir eğriliğe sahip olmasının ne anlama geldiğini anlamak için Alexandrov'un eğrilik tanımının önemini vurgulamıştır. Bu uzaylar için Gromov; Cartan, Alexandrov ve Toponogov'un öncü çalışmalarını tanımak için $CAT(\kappa)$ akronimini kullanmıştır. İlerleyen yıllarda bu alandaki literatür Kirk ve Panyanak [14], Jost [15], Reich [16] ve Sturm'un [17] çalışmalarıyla ivme kazanmıştır. 2011 yılında Noar ve Silberman [18] jeodezik uzaylarda p-düzgün konveks metrik uzay kavramını tanımlamışlardır. Bu uzayların p-düzgün konveks Banach uzaylarının birçok özelliğini sağladığını göstermişlerdir.

Düzgün konvekslik geometrik özelliği ile sabit nokta teori arasında yakın bir ilişki bulunmaktadır. 1965 yılında Kirk [19] düzgün konveks Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşüm sınıfları için sabit noktanın varlığını garanti eden sabit nokta teoremini ispatlamıştır. Bu teorem, optimizasyon ve oyun teorisi gibi birçok uygulama alanında kullanılmaktadır. Bunun yanı sıra, Banach uzaylarının geometrisi ve sabit nokta teoremi, birçok sabit nokta teoreminin geliştirilmesine de yol açmıştır. Bu teoremler arasında, Browder sabit nokta teoremi [20], Schauder sabit nokta teoremi [21] ve Caristi sabit nokta teoremi [22] gibi teoremler yer almaktadır. 2003 yılında Kirk [23] $CAT(0)$ uzaylarında genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını ispatlamıştır.

Metrik sabit nokta teorisinin temelinin 1922 yılında Banach [24] tarafından ispatlanan Banach büzülme prensibi olduğu bilinmektedir. Bu prensibe göre; bir X tam metrik uzayı üzerinde tanımlı bir T büzülme dönüşümü her zaman tek bir sabit noktaya sahiptir ve herhangi bir $x_1 \in X$ başlangıç noktası için, $x_{n+1} = Tx_n$ $(n \geq 1)$ ile tanımlı Picard iterasyon yöntemi [25] bu sabit noktaya kuvvetli yakınsar. Banach sabit nokta teoremi doğrusal olmayan analizde en yaygın olarak uygulanan sabit nokta teoremidir; çünkü T büzülme dönüşümü için sadece tam metrik uzay olma yapısı yeterlidir. Fakat, büzülme dönüşüm sınıfından daha genel olan dönüşüm sınıfları için Banach büzülme prensibini uygulamak mümkün olmayabilir. Ancak,

düzgün konvekslik özelliğini sağlayan tam metrik uzaylar sabit noktanın varlığını garanti etme imkanı vermektedir. Literatürde genişlemeyen bir dönüşüm için sabit nokta mevcut olsa bile Picard iterasyon yönteminin dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabileceğini gösteren birkaç örnek vardır (bkz. [26–28]). Bunun bir sonucu olarak, birçok araştırmacı Hilbert ve Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını yaklaşık olarak bulabilmek için farklı sabit nokta iterasyon yöntemleri geliştirmiştir (bkz. [26, 29–32]).

Son on yılda $CAT(0)$ uzaylarına uygulamaları olan optimizasyon yöntemlerine olan ilgi artmıştır. Minimizasyon problemleri, varyasyonel eşitsizlik problemleri, denge problemleri, monoton içerme problemleri ve diğerlerini içeren optimizasyon problemlerinin ekoloji, fizik, ekonomi, bilgisayar bilimleri ve mühendislik gibi çeşitli alanlarda çok kullanışlı olduğu bilinmektedir. Bundan dolayı bu alanlardan kaynaklanan birçok problem bir optimizasyon problemi olarak modellenebilmektedir. Bu nedenle, optimizasyon problemlerini çözmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiş ve çok sayıda yazar optimizasyon konusu üzerine çalışmaktadır. Bu yöntemler arasında sabit nokta yöntemleri, proksimal benzeri yöntemler, yardımcı ilkeler, ayrıştırma yöntemleri, ekstra gradyan yöntemleri ve normal dönüşüm denklemleri yer almaktadır (bkz. [33–39]).

Son yıllarda, optimizasyon problemleri hem Hilbert hem de Banach uzaylarında yukarıda bahsedilen yöntemler kullanılarak kapsamlı bir şekilde çalışılmıştır. Optimizasyon problemlerinin çözümü için en başarılı ve etkili yöntemlerden biri sabit nokta iterasyon yöntemleridir. Bunun bir sonucu olarak, sabit nokta iterasyon yöntemlerini kullanarak optimizasyon problemlerinin çözümlerini bulmak için birçok farklı teknik geliştirilmiştir. Genel olarak, bir optimizasyon probleminin çözümünü bulmak uygun bir doğrusal olmayan dönüşüm için sabit nokta bulmaya eş değerdir. Örneğin, bir minimizasyon probleminin çözümü minimizasyon problemi ile ilişkili konveks fonksiyonun resolvent sabit noktasıdır. Bu nedenle, sabit nokta teorisi optimizasyon problemlerinin incelenmesinde büyük önem taşımaktadır. Sabit nokta teorisinin doğrusal olmayan analizde yıllar içinde hızlı bir gelişme gösteren ve ters problemler, sinyal işleme, oyun teorisi, bulanık teori ve optimal kontrol problemleri gibi çeşitli matematiksel problemlerdeki kapsamlı uygulamaları nedeniyle birçok araştırmacının ilgisini çekmeye devam eden araştırma alanlarından biri olduğu da söylenebilir (bkz. [4, 16, 32, 40–48]). Böylece, sabit nokta teorisi modern doğrusal olmayan ve konveks analizin çekirdeği olarak düşünülebilir.

Çoğu durumda optimizasyon problemlerinin kesin çözümlerini bulmak genellikle çok zor olduğundan optimizasyon problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için iterasyon yöntemleri Hilbert ve Banach uzaylarında kapsamlı bir şekilde

çalışılmıştır. Son zamanlarda doğrusal uzaylardan (Hilbert ve Banach uzayları) doğrusal olmayan uzaylara, türevlenebilir manifoldlara, Hadamard uzaylarına ve p-düzgün konveks metrik uzaylara genelleştirilmiştir. Nonlineer uzaylar doğrusal uzaylardan daha fazla uygulamaya sahip olduğundan araştırmacılar için daha çok ilgi görmektedir. Örneğin, doğrusal uzaylarda konveks olmayan birçok problemle doğrusal olmayan uzaylarda konveks problemler olarak karşılaşılabilir. Ayrıca, enerji fonksiyonelinin minimize edicileri (Hadamard uzayında konveks ve alttan yarı sürekli bir fonksiyonel örneği) geometri ve analizde çok kullanışlıdır. Bununla birlikte, Hadamard uzaylarındaki minimizasyon problemlerinin incelenmesinin, hesaplamalı filogenetik, difüzyon tensör görüntüleme, konsensüs algoritmaları, insan akciğerleri ve kan damarlarındaki hava yolu sistemlerinin modellenmesinde çok önemli olan ağaç dallanmaları modelinin ortalamalarını hesaplamada çok yararlı olduğu kanıtlanmıştır (ayrıntılar için bkz. [4, 7–11]). Dolayısıyla, doğrusal olmayan uzaylar optimizasyon problemlerinin incelenmesi için daha elverişlidir. Bu nedenle, bu tezdeki amacımız doğrusal olmayan uzaylarda, özellikle de Hadamard ve p-düzgün konveks metrik uzaylarda optimizasyon ve sabit nokta problemlerinin çalışılmasını daha da geliştirmek ve genelleştirmektir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, p-düzgün konveks metrik uzaylarda kapalı konveks alt kümeler üzerinde iz düşüm dönüşümler incelenerek Hilbert uzayları ve Banach uzaylarındaki gibi zayıf topoloji, opial, Kadec Klee, zayıf yakınsama, Δ-yakınsama, kavramları, tanımlanmıştır. Genişlemeyen dönüşüm tipi olan ortalama genişlemeyen ve (D) koşulunu sağlayan bazı önemli dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının varlığı araştırılmıştır. Ayrıca bu dönüşüm sınıflarının, yapısına uygun olarak literatürde var olan bazı sabit nokta iterasyon yöntemlerinin bu dönüşümlerin sabit noktalarına Δ-yakınsak ve kuvvetli yakınsak oldukları gösterilmiştir. Son olarak, bu uzaylarda optimizasyona ait bazı önemli kavramlar olan minimizasyon ve konveks fizibilite problemleri ispatlanmıştır.

1.3 Hipotez

Lineer uzaylar olarak bilinen Banach ve Hilbert uzaylarında geçerli olan yakınsama, kompaktlık ve bu uzayların geometrik özelliklerinden olan Opial, Kadec-Klee gibi kavramlar lineer olmayan jeodezik uzaylara genellenmiş ve zayıf topoloji altında yeni kavramlar tanımlanmıştır. Ayrıca bu kavramların sabit nokta iterasyonları altında davranışları araştırılarak elde edilen sonuçlara göre optimizasyon problemlerine uygulanmıştır.

2
BAZI TEMEL GEOMETRİK VE SABİT NOKTA KAVRAMLARI

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca, optimizasyon ve sabit nokta problemleri ile ilgili bazı yeni ve önemli çalışmaların detaylı literatür taramasına yer verilecektir.

2.1 Fonksiyonel ve Analiz Temelli Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 (**Metrik Uzay**). $\mathscr{M}$ boş olmayan bir küme olsun. $\rho : \mathscr{M} \times \mathscr{M} \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı ρ fonksiyonu her $x, y, z \in \mathscr{M}$ için

(İ) $\rho(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = y$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$

şartlarını sağlıyorsa ρ fonksiyonuna $\mathscr{M}$ üzerinde bir metrik denir ve $(\mathscr{M}, \rho)$ ikilisi de metrik uzay olarak adlandırılır [49].

Tanım 2.2 (**Yakınsak Dizi**). $(\mathscr{M}, \rho)$ metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisi ve $x \in \mathscr{M}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in \mathscr{M}$ noktasına yakınsıyor denir [49].

Tanım 2.3 (**Tam Metrik Uzay**). $(\mathscr{M}, \rho)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise $(\mathscr{M}, \rho)$ metrik uzayına tam metrik uzay denir [50].

Tanım 2.4 (**Cauchy Dizisi**). $(\mathscr{M}, \rho)$ metrik uzayinda $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine $(\mathscr{M}, \rho)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir [49].

Tanım 2.5 (**Fejér Monoton Dizisi**). $(\mathscr{M}, \rho)$ bir metrik uzay, A, $\mathscr{M}$'nın bir alt kümesi ve $\{x_n\}$, $\mathscr{M}$ uzayında bir dizi olsun. Eğer her $c \in A$ ve her $n \geq 1$ için

$$\rho(x_{n+1}, q) \leq \rho(x_n, q)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $\{x_n\}$ dizisine A kümesine göre Fejér monoton dizisi denir [51].

Fejér monotonluğu kavramı ilk olarak 1967 yılında matematikçi Halpern [52] tarafından ortaya atılmıştır. Halpern, belirli bir iterasyon algoritması tarafından üretilen bir dizinin Fejér monotonluğunun, genişlemeyen bir dönüşüm için sabit bir noktanın varlığını gerektirdiğini göstermiştir. Bu sonuç daha sonraki yıllarda birçok matematikçi tarafından genişletildi ve genelleştirildi.

Tanım 2.6 (**Lineer Uzay**). U boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+ : U \times U \to U$ ve $\cdot : \mathrm{K} \times U \to U$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa U'ya K cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

I. $U, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

(1) Her $u, v \in U$ için $u + v \in U$ dir,

(2) Her $u, v, w \in U$ için $u + (v + w) = (u + v) + w$ dir,

(3) Her $u \in U$ için $u + \phi = \phi + u = u$ olacak şekilde $\phi \in U$ vardır,

(4) Her $u \in U$ için $u + (-u) = (-u) + u = \phi$ olacak şekilde $-u \in U$ vardır,

(5) Her $u, v \in U$ için $u + v = v + u$ dir.

II. $u, v \in U$ ve $\beta, \gamma \in \mathrm{K}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

(1) $\beta \cdot u \in U$ dir,

(2) $\beta \cdot (u + v) = \beta \cdot u + \beta \cdot v$ dir,

(3) $(\beta + \gamma) \cdot x = \beta \cdot x + \beta \cdot x$ dir,

(4) $(\beta \cdot \gamma) \cdot u = \beta \cdot (\gamma \cdot u)$ dir,

(5) $1 \cdot u = u$ dir (Burada 1, K nin birim elemanıdır).

$\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ise U'ya reel lineer uzay, $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ ise U'ya kompleks lineer uzay adı verilir [49].

Tanım 2.7 (**Normlu Uzay**). U bir lineer uzay olsun ve K cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $\|\cdot\| : U \to$ K fonksiyonunun u'daki değerini $\|u\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon

(i) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

(ii) Her $\beta \in$ K ve her $u \in U$ için $\|\beta \cdot u\| = |\beta| \cdot \|u\|$

(iii) Her $u, v \in U$ için $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna U üzerinde norm, $(U, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir. U üzerinde

$$\rho(u, v) = \|u - v\|, \quad (u, v \in U)$$

ile verilen norm bir metrik tanımlar ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir [49].

Tanım 2.8 (**Banach Uzayı**). U normlu lineer uzay olsun. Eğer U uzayı

$$\rho(u, v) = \|u - v\|, \quad (u, v \in U)$$

norm metriğine göre tam ise U uzayına Banach uzayı denir [49].

Tanım 2.9 (**Alttan Yarı Sürekli Fonksiyon**). $(\mathscr{M}, \rho)$ bir metrik uzay, $u_0 \in \mathscr{M}$ ve $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta > 0$ vardır; öyle ki

$$\rho(u_0, v) < \delta \text{ iken } f(u_0) - \varepsilon < f(v)$$

sağlanıyor ise f fonksiyonuna u_0 noktasında alttan yarı sürekli fonksiyon denir [50].

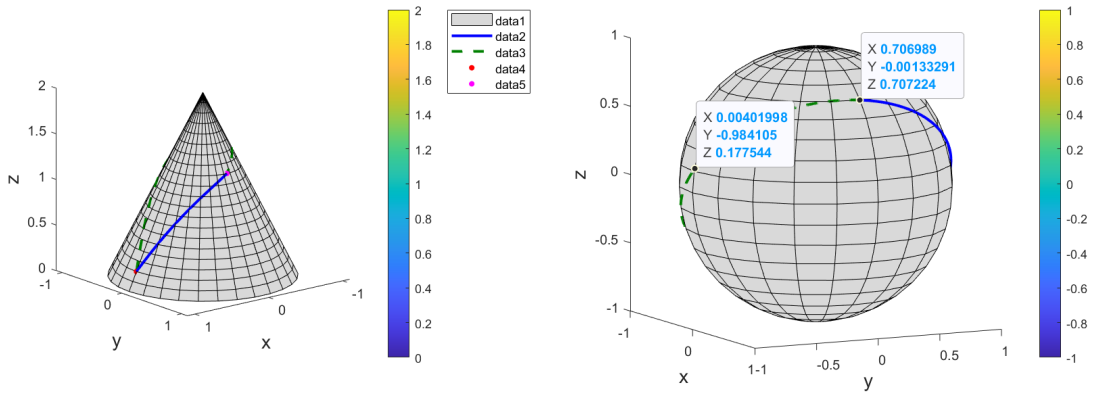
2.2 Bazı Geometrik Analiz Kavramları ve Özellikleri

Metrik uzayların genel yapısı reel dünya problemlerini çözmek için mevcut sonuçların uygulanmasını zorlaştırmaktadır. Bu nedenle, bu tür mevcut sonuçların metrik uzaylarda uygulanmasını garanti eden bazı özelliklerin dikkate alınması gerekmektedir. Bu özelliklerden biri, uzaklığı koruyan dönüşümün varlığıdır. Bu özellik metrik uzaya, normlu lineer uzayın lineer yapısına benzer bir yapı sağlar. Bu özelliğe sahip metrik uzaylara jeodezik metrik uzaylar denir.

$(\mathscr{M}, \rho)$ bir metrik uzay ve $x, y \in \mathscr{M}$ olsun. $\eta : [0, 1] \to \mathscr{M}$ sürekli bir operatör ve $\eta(0) = x,\ \eta(1) = y$ olmak üzere her $s, t \in [0, 1]$ için

$$\rho(\eta(s), \eta(t)) = |s - t|\rho(x, y)$$

koşulu sağlanıyorsa η operatörüne x ve y'yi birleştiren bir jeodezik denir. Ayrıca η jeodezik görüntüsü x ve y'yi birleştiren jeodezik parçası olarak adlandırılır ve tek olduğunda $[x,y]$ ile gösterilmektedir. Şekil 2.1'de koni ve kürede bir jeodezi gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Koni ve kürede bir jeodezi

Herhangi iki $x,y \in \mathscr{M}$ noktası için, x ile y'yi birleştiren bir η jeodezik varsa $(\mathscr{M},\rho)$ metrik uzayına jeodezik uzay denir. Genel olarak, iki noktayı birleştiren bir segment jeodezik uzaylarda tek olmayabilir. Eğer herhangi iki $x,y \in A$ noktası $\mathscr{M}$'deki bir jeodezik tarafından birleştirilebiliyorsa $\mathscr{M}$ uzayına tek jeodezik uzay denir [4].

Her $x,y \in \mathscr{M}$ ve $t \in [0,1]$ için, x ve y'yi birleştiren jeodezik segmentteki tek bir z noktası

$$\rho(x,z) = (1-t)\rho(x,y) \text{ ve } \rho(z,y) = t\rho(x,y)$$

özelliklerini sağlıyor ise $tx \oplus (1-t)y$ şeklinde gösterilmektedir.

Tanım 2.10. $\mathscr{M}$ bir metrik uzay ve $x,y,z \in \mathscr{M}$ olsun. Eğer $\rho(x,z) = \rho(y,z) = \frac{1}{2}\rho(x,y)$ ise z'ye x ve y noktalarının metrik orta noktası denir [4].

Lemma 2.1. *$\mathscr{M}$ bir tam metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıda verilen ifadeler denktir:*

(i) *$\mathscr{M}$ uzayı bir jeodezik uzaydır.*

(ii) *Her $x,y \in \mathscr{M}$ için*

$$\rho^2(x,z) + \rho^2(y,z) = \frac{1}{2}\rho^2(x,y)$$

sağlayan bir $z \in \mathscr{M}$ noktası vardır.

(iii) *$\mathscr{M}$ içindeki her nokta çiftinin bir metrik orta noktası vardır [4].*

Tanım 2.11 (**Jeodezik Konveks Kümeler**). $\mathscr{M}$ bir jeodezik metrik uzay ve C, $\mathscr{M}$'in bir alt kümesi olsun. Eğer C iki noktasını birleştiren jeodezik segmenti içeriyorsa

konvekstir denir. Başka bir deyişle; eğer her $x, y \in C$ için $tx \oplus (1-t)y \in C$ ise C kümesine konveks küme denir [4].

Yukardaki tanıma bağlı olarak aşağıdaki ifadeler verilebilir:

(a) Tek olmayan jeodezik metrik uzayda bir jeodezik segment konveks olmayabilir.

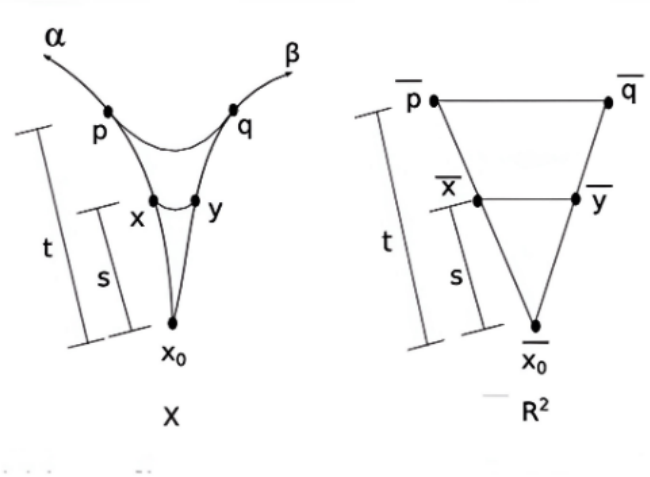
(b) Tek jeodezik metrik bir uzayın indirgenmiş metriğe sahip bir alt kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul jeodezik olmasıdır [2].

Tek jeodezik metrik uzayın en yaygın örneği $\mathbb{R}^n$'dir. Bu durumda, herhangi x ve y noktalarını birleştiren tek jeodezik parça bir doğru parçasıdır ve $tx \oplus (1-t)y \in C$ noktalarının kümesidir.

Yukarıdaki verilen (b) maddesi gereğince $\mathbb{R}^2$ içindeki yuvarlak bir diskin jeodezik bir metrik uzay olduğu ve $\mathbb{R}^2$ içindeki bir dairenin ise bir jeodezik metrik uzay olmadığı görülebilir. Daha genel olarak, $\rho(x,y) = \|x-y\|$ metriğine sahip bir E normlu lineer uzay jeodezik bir metrik uzaydır. $[0,1]$ 'den E'ye kadar olan mesafeyi koruyan $t \mapsto tx + (1-t)y$ operatörü E'de x ve y'yi birleştiren lineer parametrelendirilmiş bir jeodeziktir. E'nin tek jeodezik olması için E'deki birim yuvarın kesin konveks olması gerekmektedir (kesin konveks birim yuvarın tanımı için (bkz. [2, 26]).

Jeodezik metrik uzayların diğer temel örnekleri arasında sabit eğrilikli M_k^n model uzayları, tam Riemann manifoldları, çok yüzlü kompleksler, Busemann uzayları, Hadamard uzayları, p-düzgün konveks metrik uzaylar yer almaktadır (bu uzayların ayrıntılı bir incelemesi için bkz. [2, 4, 13, 15, 53]). Bununla birlikte, bu örneklerden ikisi, yani Hadamard uzayları ve p-düzgün konveks metrik uzaylar, sonraki bölümlerde tartışılacaktır. Keyfi bir jeodezik metrik uzayın geometrisini Öklid geometrisiyle karşılaştırmak için aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 2.12. $\mathscr{M}$ bir jeodezik metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$'de bir $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ jeodezik üçgeni x_1, x_2, x_3 noktalarından (Δ'nın köşeleri olarak bilinir) ve her iki nokta arasında bir jeodezik parçadan (Δ'nın kenarları olarak bilinir) oluşmaktadır. Öklid düzlemindeki $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ jeodezik üçgeni $i, j \in 1,2,3$ için $d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \rho(x_i, x_j)$ koşulunu sağlayan karşılaştırma üçgeni $\bar{\Delta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ şeklindedir (Şekil 2.2) [2].



Şekil 2.2 $\bar{\Delta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ karşılaştırma üçgenleri

2.2.1 *CAT(0)* Uzaylarının Geometrisi

Şimdi, $CAT(0)$ uzaylarını karakterize etmek için kullanılan argumanlar aşağıda verilecektir.

Tanım 2.13. Δ, $\mathscr{M}$'de bir jeodezik üçgen ve $\bar{\Delta}$, Δ'nın $\mathbb{R}^2$'deki karşılaştırma üçgeni olsun. Eğer her $x, y \in \Delta$ noktaları ve $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$ için

$$\rho(x,y) \leq \rho_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}, \bar{y})$$

eşitsizliği sağlanıyor ise Δ üçgeni $CAT(0)$ eşitsizliğini sağlamaktadır denir.

Tanım 2.14. Bir $\mathscr{M}$ jeodezik metrik uzayında, eğer tüm jeodezik üçgenler $CAT(0)$ eşitsizliğini sağlıyorsa $CAT(0)$ uzayı denir.

Bu tanıma denk olarak; bir $\mathscr{M}$ uzayının $CAT(0)$ uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x, y, z \in \mathscr{M}$ olmak üzere z, $[x, y]$ doğru parçasının orta noktası için

$$\rho^2(x,z) \leq \frac{1}{2}\rho^2(x,y) + \frac{1}{2}\rho^2(x,z) - \frac{1}{4}\rho^2(y,z)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitsizlik Bruhat ve Titis'in CN eşitsizliği olarak adlandırılmaktadır [34].

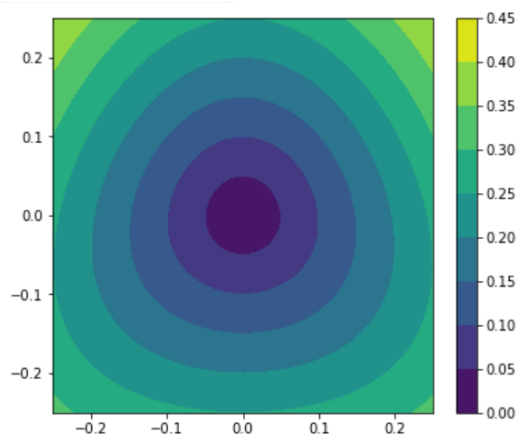
Örnek 2.1. *$\mathscr{M} = \mathbb{R}^2$ uzayı üzerinde $\rho_{\mathscr{M}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ metriği tanımlansın. $x, y \in \mathscr{M}$ için x ile y'yi birleştiren jeodezik*

$$(1-t)x \oplus ty = \left((1-t)x_1 + ty_1, ((1-t)x_1 + ty_1)^2 - (1-t)\left(x_1^2 - x_2\right) - t\left(y_1^2 - y_2\right)\right)$$

olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}^2$ *için*

$$\rho_{\mathscr{M}}(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \left(x_1^2 - x_2 - y_1^2 + y_2\right)^2}$$

olur. Bu takdirde, $\left(\mathbb{R}^2, \rho_{\mathscr{M}}\right)$ *bir Hadamard uzayıdır (Şekil 2.3).*



Şekil 2.3 Orijin merkezli küreler

Örnek 2.2. $\mathscr{M} = \left\{\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\right\}$ *olarak verilen Riemann metriği ile oluşturulan Poincaré düzlemi olsun. Her* $(x_1, x_2) \in \mathscr{M}$ *için*

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{x_2^2}, \quad g_{12} = 0$$

koşullarını sağlayan $\mathscr{M}$ *bir Hadamard uzayıdır [54].*

Örnek 2.3. $\mathscr{M} = \mathbb{R}^2$ *üzerinde* $\rho_{\mathscr{M}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ *metriği tanımlansın.*

$$\rho_{\mathscr{M}}(v,u) = \begin{cases} \|v - u\|_2, & \text{eğer } v = \mu u \quad \text{ise} \quad (\mu \in \mathbb{R}) \\ \|v\|_2 + \|u\|_2, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

$\left(\mathbb{R}^2, \rho\right)$*'nin bir* $\mathbb{R}$*- ağaç metriği olduğu açıktır. Dolayısıyla* $\left(\mathbb{R}^2, \rho\right)$ *bir Hadamard uzayıdır [55].*

2.2.2 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzayların Geometrisi

Bu bölümde, p-düzgün konveks metrik uzaylar kavramını kısaca gözden geçireceğiz. Bu uzayların ayrıntılı bir incelemesi [56–62]'de bulunabilir.

Noar ve Silberman [58], p-düzgün konveks Banach uzayları gibi diğer Banach uzaylarında elde edilen sonuçları daha da genelleştirmek için 2011 yılında p-düzgün konveks metrik uzay kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

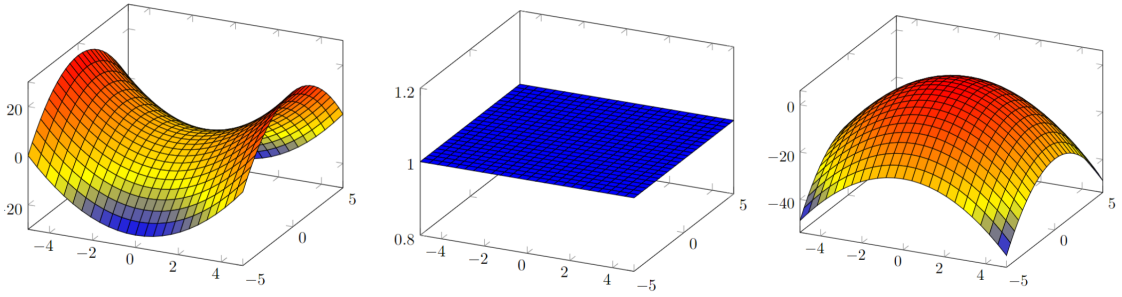
Tanım 2.15. $\mathscr{M}$ bir jeodezik metrik uzay olsun. Her $u,v,w \in \mathscr{M}$ ve $t \in [0,1]$ için $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\rho(w,(1-t)u \oplus tv)^p \leq (1-t)\rho(w,u)^p + t\rho(w,v)^p - \frac{c}{2}t(1-t)\rho(u,v)^p \qquad (2.1)$$

koşulunu sağlayan $\mathscr{M}$ metrik uzayına $c > 0$ parametresi ile p-düzgün konveks metrik uzay denir [58].

p-düzgün konveks metrik uzay kavramı, klasik p-düzgün konveks Banach uzayı kavramının aşikar bir genellemesidir [58, 63]. Örneğin, $p \geq 2$ için L^p-uzayları, p-düzgün konveks metrik uzayların tipik örnekleridir. Ayrıca, (2.1) eşitsizliğinde $p = 2 = c$ alındığında $CAT(0)$ eşitsizliği elde edilir [2, 58]. Her $CAT(0)$ uzayı $c = 2$ parametresiyle 2-düzgün konvekstir.

$CAT(0)$ uzayı bazı özelliklerle Öklid uzayını temsil ederken $CAT(\kappa)$ uzayları $\kappa > 0$ özelliğiyle Öklid dışı geometrinin olduğu uzaylardır. Bir CAT(κ) uzayı ($\kappa > 0$) $\text{diam}(\mathscr{M}) < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ ile herhangi bir $0 < \epsilon \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} - \text{diam}(\mathscr{M})$ için $c = (\pi - 2\sqrt{\kappa}\epsilon)\tan(\sqrt{\kappa}\epsilon)$ parametresi ile 2-düzgün konvekstir [57, 58, 62, 64]. Şekil 2.4 farklı κ değerleri için CAT(κ) örnek uzayları gösterilmiştir. (2.1) eşitsizliği, p-düzgün konveks metrik uzayların tekliğini garanti etmektedir.



Şekil 2.4 $CAT(-1)$,$CAT(0)$,$CAT(1)$ sırasıyla örnek uzayları

Tanım 2.16 (Yönlü Türev). $(\mathscr{M},\rho)$ bir jeodezik metrik uzay ve $f : \mathscr{M} \to (-\infty,\infty]$ konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $\eta : [0,c] \to \mathscr{M}$, x noktasından başlayan bir jeodezik ise, bu takdirde

$$D_\eta f(x) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\eta(t)) - f(x)}{t}$$

limitine f'nin x noktasında η yönündeki türevi denir. f fonksiyonu konveks olduğundan, yukarıdaki limit her zaman mevcuttur [65].

Teorem 2.1. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir jeodezik metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) x^**, f fonksiyonunun minimumudur.*

(2) x^* *noktasından başlayan her* $\tau : [0,1] \to \mathscr{M}$ *jeodeziği için* $D_\tau f(x^*) \geq 0$ *sağlanır [65].*

Aşağıda p-düzgün konveks metrik uzayda kapalı konveks kümelere dair birkaç örnek verilmiştir.

Örnek 2.4. $(\mathscr{M}, \rho)$ *bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. Bu takdirde (2.1) eşitsizliği ile tanımlı her metrik yuvar, yani,*

$$B(z,r) := \{x \in \mathscr{M} : \rho(x,z) \leq r\}$$

$z \in \mathscr{M}$ *ve* $r > 0$ *için kapalı konveks bir kümedir. Konveks olmayan yuvara sahip jeodezik metrik uzaylar da bulunmaktadır[4] .*

Örnek 2.5. *Bir* $\eta : [0,\infty) \to \mathscr{M}$ *izometrisine jeodezik ışın, bir* $\eta : \mathbb{R} \to \mathscr{M}$ *izometrisine jeodezik doğru ve bir* $x : [0,1] \to \mathscr{M}$ *izometrisine jeodezik segment denir. Bu takdirde,* $\eta([0,\infty))$*,* $\eta(\mathbb{R})$ *ve* $\eta([0,1])$ *kapalı konveks kümelerdir.*

Örnek 2.6. $f : \mathscr{M} \to (-\infty, \infty]$ *alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *olmak üzere f'nin α-alt düzey kümesi, yani*

$$\{x \in \mathscr{M} : f(x) \leq \alpha\}$$

kapalı bir konveks kümedir.

Örnek 2.7. $C \subset \mathscr{M}$ *kapalı bir konveks küme ve* $\mathscr{S} : C \to C$ *genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, $\mathscr{S}$'nin sabit noktalar kümesi, yani,*

$$F(\mathscr{S}) := \{x \in C : x = \mathscr{S}x\}$$

kapalı ve konvekstir.

Tanım 2.17. $(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay ve $A \subset \mathscr{M}$, $\mathscr{M}$'nin bir alt kümesi olsun. Bu takdirde, A'nın kapsayan tüm konveks kümelerinin kesişimine A'nın konveks kabuğu denir ve conv(A) ile gösterilir. Ayrıca A'yı kapsayan tüm kapalı konveks kümelerinin kesişimine A'nın kapalı konveks kabuğu denir ve $\overline{\text{conv}}A$ ile gösterilir.

2.2.3 Jeodezik Metrik Uzaylarda Δ-Yakınsaması

Zayıf yakınsaklık Banach uzaylarında önemli bir kavramdır [66]. Jost, Hadamard uzaylarında zayıf yakınsamayı tanıtan ilk kişidir [17]. Sosov ise Hadamard

uzaylarında ψ-yakınsama ve φ-yakınsama kavramlarını tanımlamıştır [67]. Her ikisi de Hilbert uzaylarındaki zayıf yakınsamayı jeodezik metrik uzaylarına genellemişlerdir. Lim [68] 1976'da genel bir metrik uzay için Δ-yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Daha sonra Kirk ve Panyanak [69] tarafından $CAT(0)$ uzaylarına uyarlanmıştır ve son olarak Espínola ve Fernández-León [70] φ-yakınsama kavramının Δ-yakınsama kavramı ile eş değer olduğunu ispatlamıştır. Ancak Kirk ve Panyanak bu iki kavramın CAT(0) uzaylarında Jost'un tanımladığı zayıf yakınsaklık kavramına denk olmadığını göstermiştir [69].

Şimdi, Δ-yakınsaklık kavramı ile ilgili bazı tanımlar verilecektir. $(\mathscr{M}, \rho)$ bir metrik uzay ve (x_n), $\mathscr{M}$'de sınırlı bir dizi olsun.

$$r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \rho(x, \{x_n\})$$

olarak tanımlansın. $\{x_n\}$'nin asimptotik yarıçapı

$$r(\{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}) : x \in \mathscr{M}\}$$

şeklindedir ve $\{x_n\}$ dizisinin asimptotik merkezi

$$A(\{x_n\}) = \{x \in \mathscr{M} : r(x, \{x_n\}) = r(\{x_n\})\}$$

olarak tanımlanan kümedir [68].
Ariza [71] p-düzgün konveks metrik uzaylarda $A(\{x_n\})$'nin tam olarak bir nokta içerdiğini göstermiştir.

Tanım 2.18 (Δ**-Yakınsaklık**). $(\mathscr{M}, \rho)$ bir metrik uzay ve x_n bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisinin bütün $\{u_n\}$ alt dizilerinin asimptotik merkezi, $\omega(x_n) := \bigcup A(u_n)$, tek bir $x \in \mathscr{M}$ noktası ise $\{x_n\}$ dizisine x noktasına Δ-yakınsaktır denir ve $\Delta\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [68].

Lemma 2.2. *$\mathscr{M}$, $c_{\mathscr{M}} > 0$ parametresiyle bir tam p-düzgün konveks metrik uzay ve $\{x_n\}$, $\mathscr{M}$ uzayında sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde, aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir:*

i. $\{x_n\}$ asimptotik merkezinin yalnızca bir noktası vardır.

ii. $\{x_n\}$ bir Δ-küme noktasına sahiptir [71].

Teorem 2.2. *$\mathscr{M}$ bir tam p-düzgün konveks metrik uzay ve $\{x_n\}$, M uzay içinde sınırlı bir dizi olsun. Eğer her $q \in \omega_\Delta(\{x_n\})$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, q)$ mevcut ise bu takdirde, $\omega_\Delta(\{x_n\}) = \{q\}$ tek değerlidir ve $x_n \xrightarrow{\Delta} q$'dır.*

Yarı-kapalılık prensibi, sabit nokta teoremleri üzerine yapılan çalışmaların bir parçası olarak geliştirilmiş bir ilkedir. Bu prensip, zayıf kapalılık prensibi olarak da bilinir ve belirli bir sınıftaki dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını kanıtlamak için sıklıkla kullanılır. Ayrıca, bu prensip bir metrik uzaydaki bir dizisinin zayıf olarak bir limit noktasına yakınsaması durumunda, verilen bir dönüşümün bu dizinin görüntüleri de zayıf olarak aynı limit noktasına yakınsıyorsa, limit noktasının dönüşümün sabit noktası olduğunu belirtir [72].

Özellikle, genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaları için yarı-kapalılık prensibi kullanılabilir. Bu prensibi uygulamak için genellikle uygun bir iterasyon dizisi oluşturulur ve zayıf bir limit noktasına yakınsadığı gösterilir. Daha sonra, dönüşümün genişlemeyen özelliği kullanılarak, görüntülerin de aynı limit noktasına zayıf olarak yakınsadığı gösterilir ve böylece sabit noktanın varlığı kanıtlanır.

Tanım 2.19 (**Yarı Kapalılık Prensibi**)**.** $(\mathscr{M}, \rho)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$, $\mathscr{M}$ uzayında bir dizi ve $\mathscr{S} : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$$x_n \xrightarrow{\Delta} x, \quad \rho\left(x_n, \mathscr{S}x_n\right) \to 0 \Rightarrow \mathscr{S}x = x$$

ise bu takdirde, $\mathscr{S}$ dönüşümüne yarı-kapalılık prensibini sağlar denir.

2.3 Sabit Nokta Dönüşümleri ve Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri

Sabit nokta teorisi, Browder [73] tarafından doğrulandığı gibi modern matematikte en önemli araçlardan biridir ve lineer olmayan fonksiyonel analizin gelişimine öncülük etmiştir. Sabit nokta teorisi modern matematikte en önemli araçlardan biridir. Sabit nokta teoremi, düzgün (uniform) olarak konveks Banach uzayları için Banach büzülme prensibi bir geliştirilmesiydi. Son elli yıl içinde, Banach uzaylarının geometrik özelliklerini kullanarak farklı sınıflardaki operatörler için çok sayıda sabit nokta sonucu elde edilmiştir.

Şimdi, tez boyunca kullanılan dönüşümlere ait tanımlamalar aşağıda verilecektir.

Tanım 2.20. $(\mathscr{M}, \rho)$ bir metrik uzay, A, $\mathscr{M}$'nin boş olmayan bir alt kümesi ve $\mathscr{S} : A \to A$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$\rho(\mathscr{S}x, \mathscr{S}y) \leq \rho(x, y)$$

ise $\mathscr{S}$'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

$F(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ dönüşümünün sabit noktalar kümesi olmak üzere, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ ve her $x \in A$ ve her $q \in F(\mathcal{S})$ için

$$\rho(\mathcal{S}x, q) \leq \rho(x, q)$$

ise $\mathcal{S}$'ye yarı-genişlemeyen (quasi-nonexpansive) dönüşüm denir. Genişlemeyen dönüşüm sınıfları birçok araştırmacı tarafından genişletilmiştir. Önemli genellemelerden bazıları [74–76]'da bulunabilir.

2008'de T. Suzuki [77], genişlemeyen operatörlerin bir uzantısı olarak (C) operatörleri sınıfını tanımlamıştır.

Tanım 2.21. $(\mathcal{M}, \rho)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{S} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ bir (C) operatörü olsun. Bu takdirde, her $x, y \in \mathcal{M}$ için

$$\frac{1}{2}\rho(x, \mathcal{S}x) \leq \rho(x, y) \Rightarrow \rho(\mathcal{S}x, \mathcal{S}y) \leq \rho(x, y)$$

koşulu sağlanmaktadır.

Tanım 2.22. $(\mathcal{M}, \rho)$ bir metrik uzay, A, $\mathcal{M}$'nin boş olmayan bir alt kümesi ve $\mathcal{S} : A \to A$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in A$ için $a + b \leq 1$ şartını sağlayan negatif olmayan a ve b reel sayıları var ise

$$\rho(\mathcal{S}x, \mathcal{S}y) \leq a\rho(x, y) + b\rho(x, \mathcal{S}y)$$

koşulunu sağlayan $\mathcal{S}$ dönüşümüne ortalama genişlemeyen (mean nonexpansive) dönüşüm denir.

2018 yılında Donghan ve ark. [78], $(\mathrm{D_a})$ koşulu olarak adlandırdıkları yeni bir genelleştirilmiş genişlememe şartını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 2.23. A, $\mathcal{M}$ Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $\mathcal{S} : A \to A$ bir dönüşüm olsun.

$$\|\mathcal{S}x - \mathcal{S}y\| \leq \|x - y\|,$$

olmak üzere her $\alpha \in [a, 1], x \in A$ ve $y \in C(\mathcal{S}, x, \alpha)$ için

$$C(\mathcal{S}, x, \alpha) = \{(1-\alpha)p + \alpha\mathcal{S}q : p, q \in A, \|\mathcal{S}p - p\|, \|\mathcal{S}q - q\| \leq \|\mathcal{S}x - x\|\}$$

olacak şekilde tanımlanan $\mathcal{S}$ dönüşümü (Da) koşulunu sağlamaktadır denir.

Bu düşünceden esinlenerek, 2020 yılında Bejenaru ve Postolache [79], $\alpha = 1$ sabitini alarak daha genel olan (D) operatör sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.24. A, $\mathscr{M}$ Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $\mathscr{S} : A \to A$ bir dönüşüm olsun.

$$\|\mathscr{S}x - \mathscr{S}y\| \leq \|x - y\|,$$

olmak üzere her $x \in A$ ve $y \in C(\mathscr{S}, x)$ için

$$C(\mathscr{S}, x) = \{\mathscr{S}p : p \in C, \|\mathscr{S}p - p\| \leq \|\mathscr{S}x - x\|\}$$

olacak şekilde tanımlanan $\mathscr{S}$ dönüşümü (D) koşulunu sağlamaktadır denir.

(D) koşulunu sağlayan operatör sınıfı, Suzuki ve ortalama operatör sınıflarına benzer şekilde genişlemeyendir. Ayrıca $\mathscr{S}$ dönüşümü (D) koşulunu sağlıyor ise $\mathscr{S}$ yarı-genişlemeyendir.

Genişlemeyen operatörler için, klasik Picard iterasyon yöntemi [25] operatörün sabit noktalarına yakınsamayabilir. Bu nedenle, 1953'te Mann [80], genişlemeyen operatörlerin sabit noktalarına aşağıda verilen şekilde yeni bir iterasyon yöntemi tanımlamıştır.

$$\begin{cases} x_1 \in A \\ x_{n+1} = (1 - a_n)\, x_n + a_n \mathscr{S} x_n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bundan sonra, 2007'de Agarwal ve ark. [81] aşağıdaki iki adımlı iterasyon yöntemini tanımlamıştır:

$$\begin{cases} x_1 \in A, \\ y_n = (1 - b_n)\, x_n + b_n \mathscr{S} x_n, \\ x_{n+1} = (1 - a_n)\, \mathscr{S} x_n + a_n \mathscr{S} y_n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

İterasyonların sabit bir büzülme dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığı, Picard algoritmasıyla aynı yakınsaklık oranına yakınsadığı, ancak Mann'dan daha hızlı yakınsadığı ispatlanmıştır.

2016 yılında Thakur ve ark. [82], Banach uzaylarında genelleştirilmiş genişlemeyen bir operatörün sabit noktalarına yakınsamak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımlamışlardır:

$$\begin{cases} x_1 \in A, \\ y_n = (1 - \alpha_n)\, x_n + \alpha_n \mathscr{S} x_n, \\ z_n = \mathscr{S}\left((1 - \beta_n)\, x_n + \beta_n y_n\right), \\ x_{n+1} = \mathscr{S} z_n, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.2}$$

(2.2)'deki iterasyon yönteminin sadece [80, 81, 83, 84]'deki algoritmalardan daha hızlı olmadığı, aynı zamanda (α_n) ve (β_n) parametrelerine göre daha kararlı olduğu sayısal olarak hesaplanmıştır. (2.2)'den ilham alan Ahmad ve ark. [85] Banach

uzaylarında aşağıdaki gibi JK-iterasyon yöntemi adı verilen yeni bir algoritma tanımlamışlardır:

$$\begin{cases} x_1 \in A, \\ y_n = (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n \mathscr{S} x_n, \\ z_n = \mathscr{S} y_n, \\ x_{n+1} = \mathscr{S}\left((1-\beta_n) z_n + \beta_n \mathscr{S} z_n\right), n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.3}$$

2017 yılında Karakaya ve ark. [86], aşağıdaki iki adımlı sabit nokta iterasyon yöntemini:

$$\begin{cases} x_1 \in A \\ y_n = \mathscr{S}((1-\beta_n)x_n + \beta_n \mathscr{S} x_n), \\ x_{n+1} = \mathscr{S}((1-\alpha_n)\mathscr{S} x_n + \alpha_n \mathscr{S} y_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.4}$$

(2.4) ile oluşturulan dizileri kullanarak bazı sayısal deneyler yaparak ele alınan örnekler için [80, 81, 83, 84]'deki algoritmalardan daha hızlı olduğunu göstermişlerdir.

3
P -DÜZGÜN KONVEKS METRİK UZAYLARDA ZAYIF TOPOLOJİ VE KONVEKSLİK

Kesin konveks refleksif Banach uzaylarında kapalı konveks kümeler üzerine metrik iz düşümlerin iyi tanımlı ve tek değerli dönüşümler olduğu ancak bu dönüşümlerin Hilbert uzayı olması durumunda ise genişlemeyen olduğu bilinmektedir. Hadamard uzayları üzerindeki metrik iz düşümler Hilbert uzayında olduğu gibi genişlemeyendir [2]. Bu bölümdeki amacımız, metrik iz düşümlerin p-düzgün konveks metrik uzaylar üzerindeki davranışını incelemek ve buna dayanarak p-düzgün konveks metrik uzaylarında zayıf topoloji inşa etmektir.

Lemma 3.1. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p- düzgün konveks metrik uzay ve $A\subset\mathscr{M}$ olsun. $C_0 := A$ olarak alınırsa $n\in\mathbb{N}$ için C_n uç noktaları C_{n-1} içinde olan tüm jeodeziklerin birleşimi olsun. Bu takdirde,*

$$\operatorname{conv}(A)=\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$$

olur.

İspat. $\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ konveks bir kümedir ve A kümesini içerdiği açık olarak görülmektedir. Diğer taraftan bu özelliklere sahip en küçük kümedir.

$(\mathscr{M},\rho)$ bir metrik uzay ve $C\subset\mathscr{M}$ olsun. $x\in\mathscr{M}$ ile C kümesi arasındaki uzaklık fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\rho(x,C) := \inf_{c\in C}\rho(x,c).$$

Ayrıca, iz düşüm dönüşümü şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\pi_C(x) := \{c\in C : \rho(x,C)=\rho(x,c)\}.$$

Dolayısıyla $\pi_C : \mathscr{M}\to 2^C$ küme değerli bir dönüşümdür. Eğer $\pi_C(x)$ kümesi her $x\in\mathscr{M}$ için tek değerli ise C kümesine bir Chebyshev kümesidir denir ve π_C, $\mathscr{M}$'den

C'ye bir dönüşüm olarak kabul edilir. Aşağıda verilen teorem bir p-düzgün konveks metrik uzayının herhangi bir konveks kapalı alt kümesinin Chebyshev olduğunu belirtmektedir ve iz düşüm temel özelliklerini özetlemektedir.

Teorem 3.1 (**Metrik İz Düşüm Teoremi**). *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p- düzgün konveks metrik uzay ve $C \subset \mathscr{M}$ kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Bu takdirde*

(i) C kümesi Chebyshev'dir.

(ii) Eğer $x \in \mathscr{M}\backslash C$ ve $z \in C\backslash\{\pi_C x\}$ ise

$$\rho\left(x,\pi_C x\right)^p + k\rho\left(\pi_C x,z\right)^p \leq \rho(x,z)^p$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

(iii) $\pi_C : M \to C$ dönüşümü süreklidir.

İspat. (i) $x \in \mathscr{M}$ olsun. C üzerinde $c \mapsto \rho(x,c)$ fonksiyonunun tek bir minimuma sahip olduğunu göstermemiz gerekmektedir. $c \mapsto \rho(x,c)$ fonksiyonu kesin konveks olduğundan en fazla bir minimuma sahiptir. Bir minimumun varlığını göstermek için, bir minimuma sahip $(c_n) \subset C$ dizisini alalım, yani,

$$\rho\left(x,c_n\right)^p \to \inf_C \rho(x,\cdot)^p,$$

$c_{mn} := \frac{1}{2}c_m + \frac{1}{2}c_n$ olsun. Bu takdirde, C konveks olduğundan $c_{mn} \in C$'dir ve (2.1) eşitsizliğinden

$$\rho\left(x,c_{mn}\right)^p \leq \frac{1}{2}\rho\left(x,c_m\right)^p + \frac{1}{2}\rho\left(x,c_n\right)^p - \frac{k}{4}\rho\left(c_m,c_n\right)^2$$

ya da

$$\frac{k}{4}\rho\left(c_m,c_n\right)^p \leq \frac{1}{2}\rho\left(x,c_m\right)^p + \frac{1}{2}\rho\left(x,c_n\right)^2 - \rho\left(x,c_{mn}\right)^p$$

şeklinde elde edilmektedir. $\{c_n\}$ dizisi minimum olduğundan $\{c_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Limit noktası açıkça bir minimum noktasıdır ve C içinde yer almaktadır.

(ii)'yi kanıtlamak için $\eta : [0,1] \to \mathscr{M}$ dönüşümünü $\pi_C x$ ve z'yi birleştiren jeodezik olarak gösterelim. (2.1) eşitsizliği ile her $t \in (0,1)$ için

$$\rho\left(x,\eta_t\right)^p \leq (1-t)\rho\left(x,\pi_C x\right)^p + t\rho(x,z)^2 - kt(1-t)\rho\left(\pi_C x,z\right)^p \tag{3.1}$$

elde edilir. C konveks olduğundan η jeodeziği C içinde yer almaktadır ve

$$\rho\left(x,\pi_C x\right)^p \leq \rho\left(x,\eta_t\right)^p \tag{3.2}$$

sağlanır. (3.1) ve (3.2)'den

$$t\rho\left(x,\pi_C x\right)^p + kt(1-t)\rho\left(\pi_C x,z\right)^p \leq t\rho(x,z)^p$$

bulunur. Son eşitsizlik t ile bölünür ve $t \to 0$ limiti alınırsa

$$\rho\left(x,\pi_C x\right)^p + kd\left(\pi_C x,z\right)^p \leq \rho(x,z)^p$$

elde edilir.

(iii) $x_n \to x$ olsun. $\pi_C x_n \to \pi_C x$ olduğunu ispatlayalım. Aksi takdirde $\pi_C x_n$ bir Cauchy dizisi değildir. Dolayısıyla, her $n,m > N(\varepsilon)$ için $\rho(\pi_C x_n, \pi_C x_m) > \varepsilon$ sağlayacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Kabul edelim ki; $r = \rho(x,C)$ olsun. Bu takdirde

$$\lim \rho\left(x_n,\pi_C x_n\right) = \lim \rho\left(x_n,C\right) = \rho(x,C) = r$$

olur. Benzer şekilde $\lim \rho\left(x_m,\pi_C x_m\right) = \lim \rho\left(x_m,C\right) = \rho(x,C) = r$ yazılabilir. (2.1) eşitsizliğinden

$$\rho\left(x,\frac{\pi_C x_n \oplus \pi_C x_m}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}\rho\left(x,\pi_C x_n\right)^p + \frac{1}{2}\rho\left(x,\pi_C x_m\right)^p - \frac{C_M}{4}\rho(\pi_C x_n,\pi_C x_m)^p \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) eşitsizliğinin her iki tarafının limit supremumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}\,\rho\left(x,\frac{\pi_C x_n \oplus \pi_C x_m}{2}\right)^p &\leqslant \frac{1}{2}\overline{\lim}\,\rho\left(x,\pi_C x_n\right)^p + \frac{1}{2}\overline{\lim}\,\rho\left(x,\pi_C x_m\right)^p - \frac{C_M}{4}\overline{\lim}\,\rho(\pi_C x_n,\pi_C x_m)^p \\
&\leqslant \frac{1}{2}r^p + \frac{1}{2}r^p - \frac{C_M}{4}\varepsilon^p \\
&\leqslant r^p - \frac{c_M}{4}\varepsilon^{p^4} \\
&< r^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $\rho(x,C) = r$ ile çelişir. Dolayısıyla $\pi x_n \to \pi x$ bulunur.

■

Bu bölümün kalan kısmında p-düzgün konveks metrik uzaylarda aşağıdaki hipotezi bir lemma olarak vereceğiz.

Lemma 3.2. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir jeodezik metrik uzay ve C, $\mathscr{M}$'nin konveks bir alt kümesi olsun. $\pi_C : \mathscr{M} \to C$ şeklinde tanımlı C üzerindeki bir iz düşüm dönüşümü olsun. Bu takdirde, her $x \in \mathscr{M}$ ve $y \in C$ için $\rho\left(\pi_c(x),y\right) \leq \rho(x,y)$ koşulu sağlanmaktadır.*

Örnek 3.1. *Çapı $R_\kappa/2 < 2$ ve $\kappa \in (0,2]$ parametresine sahip $CAT(\kappa)$ uzayları için Lemma 3.2 sağlanmaktadır [87].*

Teorem 3.2 (**Düzgün Konveks Metrik Uzayların Sonsuz Kesişim Özelliği**). *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\{C_i\}_{i\in N}$, $\mathscr{M}$'de sınırlı kapalı konveks kümelerin artmayan bir ailesidir. Bu takdirde, $\bigcap_{i\in N} C_i \neq \emptyset$ olur.*

İspat. $x \in \mathscr{M}$ alalım ve bunun C_i üzerine iz düşümünü $x_i := \pi_{C_i} x$ ile gösterelim. Bu takdirde $(\rho(x,x_i))_i$ negatif olmayan sayıların sınırlı ve azalan olmayan bir ailesidir ve dolayısıyla l limitine sahiptir. Eğer $\ell = 0$ ise $x \in \bigcap_{i\in N} C_i$; $\ell > 0$ ise $\{x_i\}$ bir Cauchy dizisidir. $x_{ij} := \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_j$ olarak alındığında (2.1) eşitsizliğinden

$$\rho\left(x,x_{ij}\right)^p \leq \frac{1}{2}\rho(x,x_i)^p + \frac{1}{2}\rho\left(x,x_j\right)^p - \frac{1}{4}\rho\left(x_i,x_j\right)^p$$

bulunur ve buradan

$$\frac{k}{4}\rho\left(x_i,x_j\right)^p \leq \frac{1}{2}\rho(x,x_i)^p + \frac{1}{2}\rho\left(x,x_j\right)^p - \rho\left(x,x_{ij}\right)^p$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{x_i\}$ bir Cauchy dizisi olduğu görülmektedir ve limit noktası $\bigcap_{i\in N} C_i$ içinde yer almaktadır. Böylece ispat tamamlanır. ■

3.1 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Zayıf Topoloji

$x_0 \in \mathscr{M}$ için $\eta(0) = x_0$ olacak şekilde $\eta : [0,1] \to \mathscr{M}$ jeodeziklerin kümesi $\Gamma_{x_0}(\mathscr{M})$ ile gösterilsin.

Tanım 3.1 (**Zayıf Açık Kümeler**). $(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay ve A, $\mathscr{M}$'nin bir alt kümesi olsun. Her $x_0 \in A$ için

$$A_{x_0}(\delta;\eta_1,\ldots,\eta_n) := \left\{x \in \mathscr{M} : \rho\left(x_0,\pi_{\eta_j}x\right) < \delta \quad j = 1,2,\ldots,n\right\} \subseteq A$$

olacak şekilde bazı $\delta > 0$ ve sonlu jeodezik ailesi $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n \in \eta_{x_0}(\mathscr{M})$ varsa, A'ya zayıf açık küme denir.

Lemma 3.3. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzayı olsun. Bu takdirde, τ_w zayıf açık kümeler ailesi boş küme ile birlikte $\mathscr{M}$ üzerinde bir topoloji tanımlamaktadır ve bu topolojiye $\mathscr{M}$ üzerinde zayıf topoloji denir.*

İspat. Her $\delta > 0$ için $x \in \mathscr{M}$ ise herhangi bir sonlu jeodezik $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n \in \eta_x(\mathscr{M})$ ailesi için $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n \subseteq \mathscr{M}$ olduğu açıktır. Boş küme tanım gereği τ_w içindedir. İlk olarak $\bigcup_{i\in I} A_i$'nin zayıf açık küme olduğunu ispatlayalım. Bunun için $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ olsun. Bu takdirde, bazı $j \in I$ için $x \in A_j$'dır. A_j zayıf açık olduğundan $\delta > 0$ için $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n \in \eta_x(\mathscr{M})$ vardır; öyle ki $A_x(\delta;\eta_1,\ldots,\eta_n) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ olur. Dolayısıyla $\bigcup_{i\in I} A_i$ zayıf açıktır.

Şimdi, A_1 ve A_2 iki zayıf açık küme olarak alalım ve $x \in A_1 \cap A_2$ olsun. Bu takdirde $\delta_1, \delta_2 > 0$ için $\eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m \in \Gamma_x(\mathscr{M})$ vardır; öyle ki $A_x(\delta_1; \eta_1, \ldots, \eta_n) \subseteq A_1$ ve $A_x(\delta_2; \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \subseteq A_2$'dır. Kabul edelim ki; $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun ve $A_x(\delta; \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ kümesini göz önüne alalım. Buradan

$$A_x(\delta; \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \subseteq A_x(\delta_1; \eta_1, \ldots, \eta_n) \cap A_x(\delta_2; \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \subseteq A_1 \cap A_2$$

elde edilir. Bu nedenle $A_1 \cap A_2$ zayıf açıktır. ■

Şimdi, herhangi bir zayıf açık kümenin alışılmış metrik topolojide açık olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Lemma 3.4. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. Bu takdirde x_0'dan başlayan her $\eta : [0,1] \to \mathscr{M}$ jeodezik dönüşümü için $A_{x_0}(\delta; \eta)$ kümesi metrik topolojide açıktır.*

İspat. $x \in A_{x_0}(\delta, \eta)$ olsun. Bu takdirde $\rho(x_0, \pi_C x) = s$ olacak şekilde bir $s < \delta$ sayısı vardır. Teorem 3.1'den π_C dönüşümü süreklidir. Dolayısıyla $\rho(x, y) < \nu$ olduğunda $\rho(\pi_\eta x, \pi_\eta y) < \delta - s$ olacak şekilde bir ν sayısı vardır. $B(x, \nu)$ açık yuvarının, $A_{x_0}(\delta, \eta)$ kümesinin bir alt kümesi olduğunu ispatlayalım. $y \in B(x, \nu)$ alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \rho\left(x_0, \pi_\eta y\right) &\leqslant \rho\left(x_0, \pi_\eta x\right) + \rho(\pi_\eta x, \pi_\eta y) \\ &< s + \delta - s = \delta \end{aligned}$$

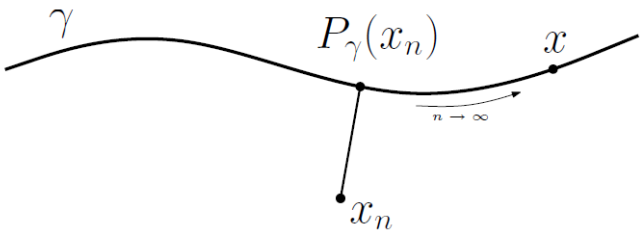
elde edilir. Buradan $B(x, \delta - s) \subset A_{x_0}(\delta, \eta)$ bulunur ve $A_{x_0}(\delta, \eta)$ bir açık kümedir. ■

3.1.1 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Zayıf Yakınsama

Bu bölümde, Jost [17] tarafından verilen zayıf yakınsama kavramı kullanılacaktır.

Tanım 3.2 (**Zayıf Yakınsama**)**.** $(\mathscr{M}, \rho)$ bir jeodezik metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. x_0'dan başlayan her $\eta : [0,1] \to \mathscr{M}$ jeodezik dönüşümü için $\pi_\eta x_n \to x$ ise $\{x_n\}$ dizisine $x \in \mathscr{M}$ noktasına zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \overset{w}{\to} x$ şeklinde gösterilir.

Zayıf yakınsama kavramı dizinin sınırlılığını gerektirmemektedir. Örneğin; sonlu ama artan (sınırsız) uzunlukta sayılabilir sayıda ışının ortak bir tepe noktasında buluştuğu basit bir ağaç düşünelim. Eğer $\{x_n\}$ jeodezik ışının η_n ucu ve x ortak tepe noktası ise o zaman $x_n \overset{w}{\to} x$'e yakınsamaktadır ve yapısı gereği $\{x_n\}$ sınırsızdır. (Şekil (3.1)).



Şekil 3.1 Zayıf yakınsama

Her $x \in \mathscr{M}$ ve her $\eta \in \Gamma_x(\mathscr{M})$ için $A_x(\delta;\eta) \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim.

Teorem 3.3. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay ve $\{x_n\} \subset \mathscr{M}$ bir dizi olsun. Bu takdirde, $x_n \xrightarrow{w} x$ ile $x_n \xrightarrow{\tau_w} x$ yakınsamaları birbirine denktir.*

İspat. $x_n \xrightarrow{w} x$ olsun. O zaman $\eta \in \Gamma_x(H)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho\left(x, \pi_\eta x_n\right) = 0$ veya denk olarak $x_n \in A_x(\delta;\eta)$ yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $A \in \tau_w$ içinde x olsun. O zaman $\eta_1,\ldots,\eta_n \in \Gamma_x(\mathscr{M})$ ve $\delta > 0$ vardır; öyle ki $A_x(\delta;\eta_1,\ldots,\eta_n) \subseteq A$'dır. $x_n \in A_x(\delta;\eta_1,\ldots,\eta_n)$ yeterince büyük n için $x_n \in A$ elde edilir. Varsayalım ki $x_n \xrightarrow{\tau_w} x$ ancak $x_n \overset{w}{\nrightarrow} x$ olsun. Bu takdirde, $\eta \in \Gamma_x(\mathscr{M})$ vardır, öyle ki $\lim_n \pi_\eta x_n \neq x$; yani x_n olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Sonsuz sayıda n için $x_n \notin A_x(\delta;\eta)$'dır. Şimdi, x içeren bir $B \in \tau_w$ alalım; öyle ki $B \subseteq A_x(\delta;\eta)$ olsun. Bu nedenle $x_n \notin B$ olduğunda sonsuz sayıda n vardır. Ancak bu durum $x_n \xrightarrow{\tau_u} x$ ile çelişmektedir. ■

Lemma 3.5. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. Bu takdirde, $\mathscr{M}$, τ_w topolojisine göre Hausdorff'tur.*

İspat. $x,y \in \mathscr{M}$ birbirinden farklı iki nokta olsun. $\mathscr{M}$ p-düzgün konveks metrik olduğundan, $\eta,\tilde{\eta} : [0,1] \to \mathscr{M}$, x ile y'yi $\eta(0) = x, \eta(1) = y$ ve $\tilde{\eta}(0) = y, \tilde{\eta}(1) = x$ olacak şekilde bağlayan tek jeodezikler vardır. Kabul edelim ki; $l_\eta := \rho(x,y)$ ve $\delta \in \left(0, l_\eta\right)$ olsun. Her $z \in \mathscr{M}$ için $l_\eta = l_{\tilde{\eta}}$ ve $\pi_\eta z = \pi_{\tilde{\eta}} z$ için

$$A_x(\delta;\eta) := \left\{z \in \mathscr{M} : \rho\left(x, \pi_\eta z\right) < \delta\right\}$$

ve

$$A_y\left(l_\eta - \delta;\tilde{\eta}\right) := \left\{z \in \mathscr{M} : \rho\left(y, \pi_{\tilde{\eta}} z\right) < l_\eta - \delta\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Ayrıca $z_0 \in A_x(\delta;\eta) \cap A_y\left(l_\eta - \delta;\tilde{\eta}\right)$ olarak alınsın. Bu durumda $\rho\left(x, \pi_\eta z_0\right) < \delta$ ve $\rho\left(y, \pi_{\tilde{\eta}} z_0\right) < l_\eta - \delta$ olduğundan

$$l_\eta = \rho(x,y) \leqslant \rho\left(x, \pi_\eta z_0\right) + \rho\left(y, \pi_\eta z_0\right) = \rho\left(x, \pi_\eta z_0\right) + \rho\left(y, \pi_{\tilde{\eta}} z_0\right) < l_\eta$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle $A_x(\delta;\eta)\cap A_y\left(l_\eta-\delta;\tilde{\eta}\right)=\emptyset$'dır.
Şimdi, $A,B\in\tau_w$ alalım öyle ki $x\in A\subseteq A_x(\delta;\eta)$ ve $y\in B\subseteq A_y\left(l_\eta-\delta;\eta\right)$'dır. Dolayısıyla $A\cap B\subseteq A_x(\delta;\eta)\cap A_y\left(l_\eta-\delta;\tilde{\eta}\right)=\emptyset$ elde edilir. ■

3.1.2 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Konveks Kümeler ve Zayıf Kompaktlık

Tanım 3.3. Bir $C\subseteq\mathscr{M}$ kümesi τ_w'ye göre kapalıysa bu kümeye zayıf kapalı denir. Zayıf kapalı bir kümenin kapalı olduğu açıktır.

Teorem 3.4. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. Bu takdirde her kapalı konveks küme zayıf kapalıdır.*

İspat. $y\in\mathscr{M}\backslash C$ olsun. O zaman $\pi_C y$ vardır ve tektir. $\eta:[0,1]\to H$ fonksiyonu, $\eta(0)=y$ ve $\eta(1)=\pi_C y$ olacak şekilde y ile $\pi_C y$'yi birleştiren jeodezik olsun. $l(\eta):=\rho\left(y,\pi_C y\right)$'nın η jeodeziğinin uzunluğu $\delta\in(0,l(\eta))$ olduğundan $A_y(\delta;\eta)$ zayıf açık kümesini düşünelim. $A_y(\delta;\eta)\cap C=\emptyset$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $x\in C$ olsun ve $z=\pi_\eta(x)$, x'in η'ya iz düşümü olsun. $z\in\eta$ olduğundan, Teorem 3.1'den $\pi_C z=\pi_C y$ olur. Hem C hem de η kapalı ve konveks olduğundan, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilmektedir:

$$\rho(z,x)^p\geqslant k_{\mathscr{M}}\rho\left(x,\pi_C z\right)^p+\rho\left(\pi_C z,z\right)^p$$

$$\rho\left(x,\pi_C y\right)^p\geqslant\rho\left(x,\pi_\eta x\right)^p+k_{\mathscr{M}}\rho\left(\pi_\eta x,\pi_C y\right)^p.$$

Bu durumda $z=\pi_\eta x$ ve $\pi_C z=\pi_C y$ değerleri kullanılarak $\pi_\eta x=\pi_C y$ sonucuna ulaşılır. Özellikle $\rho\left(y,\pi_\eta x\right)=\rho\left(y,\pi_C y\right)>\delta$ olduğundan tüm $x\in C$ için $A_y(\delta;\eta)\cap C=\emptyset$ elde edilir. ■

Teorem 3.5 (*P*-Düzgün Konveks Uzayları İçin Mazur Lemması). *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay, $\{x_n\}\subseteq\mathscr{M}$ bir dizi $x\in\mathscr{M}$ olsun. Eğer $x_n\xrightarrow{w}x$ ise, bu takdirde $y_n\in\mathrm{co}\left(\left\{x_1,x_2,\ldots,x_{f(n)}\right\}\right)$ ve $y_n\to x$ koşulu sağlanacak şekilde bir $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ fonksiyonu ve bir $\{y_n\}\subseteq\mathscr{M}$ dizisi vardır.*

İspat. Teorem 3.3 ve $x_n\xrightarrow{w}x$ olduğundan $x_n\xrightarrow{\tau_w}x$ elde edilir. Dolayısıyla $x\in\overline{\{x_1,x_2,\ldots\}}_w$, $\{x_1,x_2,\ldots\}$'ın zayıf kapanışıdır. Ayrıca $\{x_1,x_2,\ldots\}\subseteq\mathrm{co}\{x_1,x_2,\ldots\}$ olduğundan $\overline{\{x_1,x_2,\ldots\}}_w\subseteq\overline{\mathrm{co}\{x_1,x_2,\ldots\}}_w$ olur. Dolayısıyla $x\in\overline{\mathrm{co}\{x_1,x_2,\ldots\}}_w$'dır. Şimdi $\mathrm{co}\{x_1,x_2,\ldots\}$ kuvvetli kapanışı yani $\overline{\mathrm{co}\{x_1,x_2,\ldots\}}$ konveks olduğunu gösterelim. Bunun için $u,v\in\overline{\{x_1,x_2,\ldots\}}$ ve $\{v_n\}$,$\{u_n\}$) dizileri $\{x_1,x_2,\ldots\}$ kümesinde $u_n\to u$, $v_n\to v$ olacak şekilde seçelim. u ile v'yi birleştiren jeodeziği η ve u_n ile v_n'yi birleştiren jeodeziği η_n olarak alalım. Bu takdirde, (2.1) eşitsizliğinden her

$t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}\rho\left(\eta(t),\eta_n(t)\right)^p \leq & (1-t)\rho\left(v,\eta_n(t)\right)^p + t\rho\left(v,\eta_n(t)\right)^p - c_{\mathscr{M}}\, t(1-t)\rho(v,w)^p \\ \leq & (1-t)\left((1-t)\rho\left(v,v_n\right)^p + t\rho\left(v,w_n\right)^p - c_{\mathscr{M}}\, t(1-t)\rho\left(v_n,w_n\right)^p\right) \\ & + t\left((1-t)\rho\left(w,v_n\right)^p + t\rho\left(w,w_n\right)^p - c_{\mathscr{M}}\, t(1-t)\rho\left(v_n,w_n\right)^p\right) \\ & - c_{\mathscr{M}}\, t(1-t)\rho(v,w)^p\end{aligned}$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\rho\left(\eta(t),\eta_n(t)\right) \to 0$ elde edilir. Buna göre $\operatorname{co}\{x_1,x_2,\ldots\}$ konveks bir kümedir. Teorem 3.4"den $\operatorname{co}\{x_1,x_2,\ldots\}$ zayıf kapalıdır. Buradan

$$x \in \operatorname{co}\{x_1,x_2,\ldots\} \subseteq \overline{\operatorname{co}\{x_1,x_2,\ldots\}}$$

elde edilir. Bu takdirde, $y_n \to x$ olacak şekilde $(y_n) \subseteq \operatorname{co}(\{x_1,x_2,\ldots\})$ şeklinde bir dizi vardır. ■

Son olarak, p-düzgün konveks uzaylarının Kadec–Klee özelliğini sağladığını ispatlayalım.

Teorem 3.6. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $x_n \xrightarrow{w} x$ ve bazı $v \in \mathscr{M}$ için $\lim \rho(x_n,v) = \rho(x,v)$ ise bu takdirde $\{x_n\}$ dizisi x noktasına kuvvetli yakınsaktır.*

İspat. Teorem 3.5'den $y_n \to x$ koşulu sağlanacak şekilde bir $(y_n) \subseteq \operatorname{co}(\{x_1,x_2,\ldots\})$ dizisi vardır. Buradan $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ olmak üzere $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ şeklinde yazılabilir. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho\left(y_n,v\right)^p = \rho\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k, v\right)^{\rho} &\leq \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\rho\left(x_k,v\right)^p - \frac{C_M}{2}\Big(\prod_{k,J=1}^{n}\alpha_k\alpha_J\Big)\sum_{J,k=1}^{n}\rho\left(x_k,k_J\right)^p \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\rho\left(x,v\right)^p - \frac{C_M}{2}\Big(\prod_{k,J=1}^{n}\alpha_k\alpha_J\Big)\sum_{J,k=1}^{n}\rho\left(x_k,k_J\right)^p \\ &\leq \rho\left(x,v\right)^p - \frac{C_M}{2}\Big(\prod_{k,J=1}^{n}\alpha_k\alpha_J\Big)\sum_{J,k=1}^{n}\rho\left(x_k,k_J\right)^p\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\rho(x,v)^p \leq \rho(x,v)^p - c_M\big(\prod_{k,J=1}^{\infty}\alpha_k\alpha_J\big)\sum_{J,k=1}^{\infty}\rho\left(x_k,k_J\right)^p$ bulunur. Buradan $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Teoremin hipotezi gereği $\{x_n\}$ dizisi x noktasına kuvvetli yakınsaktır. Böylece ispat tamamlanır. ■

4
GENELLEŞTİRİLMİŞ *CAT(0)* UZAYLARINDA Δ-YAKINSAMA

Bu bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş $CAT(0)$ uzayları tanımlanarak bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca genelleştirilmiş $CAT(0)$ uzaylarında CN^* eşitsizliği tanımlanarak, bu eşitsizlik yardımıyla S-iterasyonunun genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına kuvvetli yakınsaklığı ve Δ-yakınsaması gösterilecektir.

$CAT(0)$ uzayı, $CAT(0)$ üçgenleri ve Öklid düzlem üçgenleri ile karşılaştırıldığında Öklid dışı uzaylar arasında en zengin uzaydır. Bu genelleştirilmiş uzaylar, Hilbert uzaylarının paralelkenar kuralı, orta nokta kuralı ve metrik iz düşümün tekliği gibi bazı önemli özelliklere sahiptir. Ayrıca Hilbert uzayı, Banach uzayları arasında $CAT(0)$ uzaylarının koşullarını sağlayan tek uzaydır. Bu düşünceden esinlenerek, Khamsi [88] karşılaştırma üçgenini daha genel bir Banach uzayı haline getirerek $CAT(0)$ uzaylarının bir genellemesini yapmıştır. Diğer taraftan, $CAT(0)$ uzaylarında sabit nokta teorisi ilk olarak Kirk [14, 23] tarafından araştırılmıştır. Tam bir $CAT(0)$ uzayının sınırlı, kapalı, konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlanan her genişlemeyen dönüşümün her zaman bir sabit noktası olduğunu göstermiştir.

Tanım 4.1 (**Genelleştirilmiş *CAT(0)* Uzayı**)**.** $(\mathscr{M}, \rho)$ bir jeodezik metrik uzay ve $(\mathbb{V}, \|k\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun. $\mathscr{M}$ jeodezik uzayında herhangi bir $\Delta(x, y, z)$ üçgeni ve $\mathbb{V}$ uzayında bu üçgenin karşılaştırma üçgeni $\Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ olarak tanımlansın. Eğer her $u, v \in \Delta(x, y, z)$ ve bu iki noktanın karşılaştırma noktaları $\bar{u}, \bar{v} \in \Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ için

$$\rho(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

koşulu sağlanıyorsa bu uzaya genelleştirilmiş $CAT(0)$ uzayı denir [88].

$(\mathbb{V}, \|k\|)$ normlu vektör uzayının genelleştirilmiş bir $CAT(0)$ uzayı olduğunu görmek açıktır. Bazı $\kappa \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{V}$'nin bir $CAT(\kappa)$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathbb{V}, \|k\|)$'nın bir pre-Hilbert uzay olmasıdır. Bizim çalışmamızda, özel olarak, $\mathbb{V} = \ell_p$ uzayı alınarak $CAT(0)$ metrik uzayından daha geniş olan bir uzay tanımı verilecektir.

Tanım 4.2 (***CAT$_p$(0)* Uzayı).** $(\mathscr{M},\rho)$ bir jeodezik metrik uzay ve bazı $p>2$ için $\mathbb{V}=\ell_p$ vektör uzayı olsun. $\mathscr{M}$ jeodezik uzayında herhangi bir $\Delta(x,y,z)$ üçgeni ve ℓ_p uzayında bu üçgenin karşılaştırma üçgeni $\Delta(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ olsun. Eğer her $u,v\in\Delta(x,y,z)$ ve bu iki noktanın karşılaştırma noktaları $\bar{u},\bar{v}\in\Delta(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ için

$$\rho(x,y)\leq\|\bar{x}-\bar{y}\|_p$$

koşulu sağlanıyorsa bu uzaya $CAT_p(0)$ uzayı denir [88].

$p>2$ için ℓ_p uzayının $CAT_p(0)$ uzayı olduğu açıktır. Şimdi $CAT_p(0)$ metrik uzaylarına ait bazı özellikler verilecektir.

Lemma 4.1. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay olsun. Bu takdirde her $x,y,z\in\mathscr{M}$ ve $t\in[0,1]$ için*

$$\rho((1-t)x\oplus ty,z)\leq(1-t)\rho(x,y)+t\rho(x,z)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır [89].

Teorem 4.1. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay olsun. Bu takdirde her $x,y_1,y_2\in\mathscr{M}$ için*

$$\rho^p(x,\frac{y_1\oplus y_2}{2})\leq\frac{1}{2}\rho^p(x,y_1)+\frac{1}{2}\rho^p(x,y_2)-\frac{1}{2^p}\rho^p(y_1,y_2)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Bu eşitsizlik (CN_p) ile gösterilir [88].

Tanım 4.3. $(\mathscr{M},\rho)$ bir jeodezik metrik uzay olsun. Eğer her $r>0$ ve her $\varepsilon>0$ için

$$\Delta(r,\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{1}{r}\rho\left(\frac{1}{2}x\otimes\frac{1}{2}y,a\right)\mid\rho(x,a)\leq r,\rho(y,a)\leq r,\rho(x,y)\geq r\varepsilon\right\}>0$$

ise $\mathscr{M}$ uzayına düzgün konveks uzay denir [88].

Teorem 4.2. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay olsun. Bu takdirde $(\mathscr{M},\rho)$ düzgün konveks metrik uzaydır. Ayrıca her $r>0$ ve her $\varepsilon>0$ için*

$$\Delta(r,\varepsilon)\geq(1-\frac{\varepsilon^p}{2^p})^{1/p}$$

sağlanmaktadır [88].

Bir $CAT_p(0)$ uzayı üzerinde genişlemeyen dönüşümün sabit noktasının varlığı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.3. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p \geq 2)$ metrik uzay olsun. C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks ve sınırlı bir alt kümesi ve $\mathscr{S} : C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu takdirde $\mathscr{S}$'nin bir sabit noktası vardır [88].*

4.1 $CAT_p(0)$ Uzaylarında Δ-Yakınsaklık

Şimdi, birçok iterasyonun yakınsaklığını göstermek için kullanılan aşağıdaki eşitsizliği ispatlayacağız.

Lemma 4.2. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p \geq 2)$ metrik uzay olsun. Bu takdirde her $x,y,z \in \mathscr{M}$ ve her $t \in [0,1]$ için*

$$\rho((1-t)x \oplus ty,z)^p \leq (1-t)\rho(x,z)^p + t\rho(y,z)^p - \frac{t(1-t^{p-1})}{2^{p-1}-1}\rho(x,y)^p \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

İspat. Bu ispatta tümevarım yöntemi kullanılacaktır. Öncelikli olarak $k,n \in \mathbb{N}$ ve $k \leq 2^n$ olmak üzere $t = \frac{k}{2^n}$ için (4.1) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$n = 0$ ise $\frac{k}{2^n} = k$ ve $k \in \{0,1\}$ olur. $k = 0$ ise

$$\rho(1x \oplus 0y,z)^p \leq \rho(x,z)^p \Leftrightarrow \rho(x,z) \leq \rho(x,z)$$

elde edilir. $k = 1$ ise

$$\rho(0.x \oplus 1.y,z)^p \leq \rho(y,z)^p \Leftrightarrow \rho(y,z) \leq \rho(y,z)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.1) eşitsizliği $n = 0$ için doğrulanır.

Kabul edelim ki; (4.1) eşitsizliği $t = \frac{k}{2^n}$ için doğrulanmış olsun. Yani $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2^n$ ve $x,y,z \in \mathscr{M}$ için

$$\rho\left((1-\frac{k}{2^n})x \oplus \frac{k}{2^n}y,z\right)^p \leq (1-\frac{k}{2^n})\rho(x,z)^p \frac{k}{2^n}\rho(y,z)^p - \frac{\frac{k}{2^n}(1-(\frac{k}{2^n})^{p-1})}{2^{p-1}-1}\rho(x,y)^p \tag{4.2}$$

sağlanmaktadır.

Şimdi $k \in N$, $k \leq 2^{n+1}$ için $t = \frac{k}{2^{n+1}}$ için (4.1) eşitsizliğini ispatlayalım. Kabul edelim ki; $w := (1-\frac{k}{2^{n+1}})x \oplus (\frac{k}{2^{n+1}})y$ olsun. Bu takdirde;

$$\rho(w,z)^p \leq (1-\frac{k}{2^{n+1}})\rho(x,z)^p + \frac{k}{2^{n+1}}\rho(y,z)^p - \frac{\frac{k}{2^{n+1}}(1-(\frac{k}{2^{n+1}})^{p-1})}{2^{p-1}-1}\rho(x,y)^p \tag{4.3}$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerekmektedir. İlk olarak, $\frac{k}{2^n} \in [0,1]$ olmak üzere, $k \leq 2^n$ için (4.3) eşitsizliğini yeniden düzenleyelim.

$$\alpha := (1-\frac{k}{2^n})x \oplus (\frac{k}{2^n})y, \quad \beta := \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}\alpha$$

olarak tanımlanırsa

$$\rho(x,\beta) = \frac{1}{2}\rho(x,\alpha) = \frac{k}{2^{n+1}}\rho(x,y) = \rho(x,w) \tag{4.4}$$

elde edilir. $\alpha \in [x,y]$ ve $\beta \in [x,\alpha]$ olduğundan $\beta \in [x,y]$'dir. Ayrıca $w \in [x,y]$, $\rho(x,\beta) = \rho(x,w)$ olduğundan $w = \beta$'dir. (4.4) ile verilen (4.1) eşitsizliği uygulanırsa ve tümevarım tekniği kullanıldığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}
\rho(w,z)^p &= \rho\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}\alpha, z\right)^p \\
&\leq \frac{1}{2}\rho(x,z)^p + \frac{1}{2}\rho(\alpha,z)^2 - \frac{1}{2^p}\rho(x,\alpha)^p \\
&\leq \frac{1}{2}\rho(x,z)^p + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\rho(x,z)^p + \frac{k}{2^n}\rho(u,z)^p - \frac{\frac{k}{2^n}\left(1-\left(\frac{k}{2^n}\right)^{p-1}\right)}{2^{p-1}-1}\rho(x,y)^p\right] \\
&- \frac{1}{2^p}\left[\frac{k}{2^n}\rho(x,y)\right]^p \\
&= \left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)\rho(x,z)^p + \frac{k}{2^{n+1}}\rho(y,z)^p - \frac{\frac{k}{2^{n+1}}\left(1-\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)^{p-1}\right)}{2^{p-1}-1}\rho(x,y)^p.
\end{aligned}$$

$2^n < k \leq 2^{n+1}$ olsun ve $q := 2^{n+1} - k$ olarak alalım. Dolayısıyla $q \leq 2^n$ olur. (4.2) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\rho(w,z)^p = \rho\left(\frac{q}{2^{n+1}}x \oplus \left(1-\frac{q}{2^{n+1}}\right)y, z\right)^p \\
&= \rho\left(\left(1-\frac{q}{2^{n+1}}\right)y \oplus \frac{q}{2^{n+1}}x, z\right)^p \\
&\leq \left(1-\frac{q}{2^{n+1}}\right)\rho(w,z)^p + \frac{q}{2^{n+1}}\rho(x,z)^p - \frac{q}{2^{n+1}}\left(1-\left(\frac{q}{2^{n+1}}\right)^{p-1}\right)\rho(x,y)^p \\
&= \left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)\rho(x,z)^p + \frac{k}{2^{n+1}}\rho(y,z)^p - \frac{k}{2^{n+1}}\left(1-\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)^{p-1}\right)\rho(x,y)^p
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $D := \{k/2^n : k,n \in N, k \leq 2^n\}$ kümesi $[0,1]$ aralığında yoğun küme olduğundan her $t \in [0,1]$ için $\lim_{k\to\infty} t_k = t$ olacak şekilde D içinde bir $\{t_k\}$ dizisi vardır ve

$$\rho((1-t_k)x \oplus t_k y, z)^p \leq (1-t_k)\rho(x,z)^p + t_k\rho(y,z)^p - \frac{t(1-t^{p-1})}{2^{p-1}-1}\rho(x,y)^p$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. ρ metriği sürekli olduğunda ve $k \to \infty$ için (4.1) eşitsizliği

elde edilmektedir.

■

Lemma 4.3. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay olsun. Bu takdirde*

(i) $\mathscr{M}$ uzayında her sınırlı dizinin bir Δ-yakınsak alt dizisi vardır.

(ii) C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi ve eğer $\{x_n\}$, C kümesinde sınırlı bir dizi ise, bu takdirde $\{x_n\}$ dizisinin asimptotik merkezi C'dedir [88].

Lemma 4.4. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay olsun. C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $\mathscr{S}: C\to\mathscr{M}$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Eğer $x_n \xrightarrow{\Delta} x$ ve $\rho(x_n,\mathscr{S}x_n)\to 0$ ise $x\in C$ ve $f(x)=x$'dir [88].*

Lemma 4.5. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay, $\{x_n\}$ bu uzayda sınırlı bir dizi ve $\{v_n\}$, $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi olsun. Eğer $A(\{x_n\})=x$, $A(\{v_n\})=\{v\}$ ve $\{\rho(x_n,v)\}$ dizisi yakınsak ise $x=v$ bulunur.*

İspat. Kabul edelim ki; $x\neq v$ olsun. Asimptotik merkezlerin tekliğinden

$$\begin{aligned}\limsup_n \rho(v_n,v) &< \limsup_n \rho(v_n,x)\\ &\leq \limsup_n \rho(x_n,x)\\ &< \limsup_n \rho(x_n,v)\\ &= \limsup_n \rho(v_n,v)\end{aligned}$$

olduğundan çelişki edilir ve dolayısıyla $x=v$ bulunur. ■

4.2 $CAT_p(0)$ Uzaylarında S-İterasyon Yönteminin Yakınsaklığı

Bu bölümdeki amacımız $CAT_p(0)$ uzaylarında S-iterasyonunun kuvvetli yakınsaklığı ve Δ-yakınsaklığı üzerine bazı sonuçlar elde etmektir.

$CAT_p(0)$ uzaylarında S-iterasyon yöntemi [81] aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 4.4. $(\mathscr{M},\rho)$ bir jeodezik uzay, C, $\mathscr{M}$'nin boştan farklı konveks bir alt kümesi ve $\mathscr{S}: C\to C$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_1\in C,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n\oplus\beta_n\mathscr{S}x_n,\\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n\oplus\alpha_n\mathscr{S}y_n\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine S- iterasyon yöntemi denir [81].

Lemma 4.6. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi, $\mathscr{S}: C\to C$ genişlemeyen bir dönüşüm, $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ olmak üzere S-iterasyon yöntemiyle tanımlanan $\{x_n\}$ dizisini alalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanmaktadır:*

(i) Her $q\in F(\mathscr{S})$ için $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,q)$ vardır.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\mathscr{S}x_n)=0$.

İspat. (i)'nin ispatı için hipotezde verilen $q\in F(\mathscr{S})$ olarak alalım. Lemma 4.1'den

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},q)&=\rho((1-\alpha_n)\mathscr{S}x_n\oplus\alpha_n\mathscr{S}y_n,q)\\&\leq(1-\alpha_n)\rho(x_n,q)+\alpha_n\rho(y_n,q)\\&\leq(1-\alpha_n)\rho(\mathscr{S}x_n,q)+\alpha_n\rho(\mathscr{S}y_n,q)\end{aligned}\tag{4.5}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho(y_n,q)&=\rho((1-\beta_n)x_n\oplus\alpha_n\mathscr{S}x_n,q)\\&\leq(1-\beta_n)\rho(x_n,q)+\beta_n\rho(\mathscr{S}x_n,q)\\&\leq\rho(x_n,q)\end{aligned}\tag{4.6}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6)'dan

$$\rho(x_{n+1},q)\leq\rho(x_n,q)\tag{4.7}$$

olur. (4.7)'den $\{\rho(x_n,q)\}$ dizisi azalandır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,q)=c$ elde edilir.

(ii)'yi göstermek için öncelikle $\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,q)=c$ olduğunu ispatlamalıyız. (4.5) eşitsizliğinden

$$\rho(x_{n+1},q)\leq(1-\alpha_n)\rho(x_n,q)+\alpha_n\rho(y_n,q)$$

bulunur. Buradan

$$\alpha_n\rho(x_n,q)\leq\rho(x_n,q)+\alpha_n\rho(y_n,q)-\rho(x_{n+1},q)$$

elde edilir. Yani

$$\begin{aligned}\rho(x_n,q)&\leq\rho(y_n,q)+\frac{1}{\alpha_n}[\rho(x_n,q)-\rho(x_{n+1},q)]\\&\leq\rho(y_n,q)+\frac{1}{\alpha}[\rho(x_n,q)-\rho(x_{n+1},q)]\end{aligned}\tag{4.8}$$

olur. (4.8) denkleminin her iki tarafı için liminf alınırsa

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(x_n,q)\leq\liminf_{n\to\infty}\rho(y_n,q)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}[\rho(x_n,q)-\rho(x_{n+1},q)]$$

olur. Böylece

$$C\leq\liminf_{n\to\infty}\rho(y_n,q) \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7)'den

$$\limsup_{n\to\infty}\rho(y_n,q)\leq C$$

ve (4.9)'dan

$$C\leq\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,q)=c \tag{4.10}$$

elde edilir. Lemma 4.1'den

$$\begin{aligned}\rho\left(y_n,q\right)^p=&\rho\left(\left(1-\beta_n\right)x_n\oplus\beta_n\mathscr{S}x_n,q\right)^p\\&\leq\left(1-\beta_n\right)\rho\left(x_n,q\right)^p+\beta_n\rho\left(\mathscr{S}x_n,q\right)^p-\frac{\beta_n\left(1-\beta_n^{p-1}\right)}{2^{p-1}-1}\rho\left(x_n,\mathscr{S}x_n\right)^p\\&\leq\rho\left(x_n,q\right)^p-\frac{\beta_n\left(1-\beta_n^{p-1}\right)}{2^{p-1}-1}\rho\left(x_n,\mathscr{S}x_n\right)^p\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\beta_n(1-\beta_n^{p-1})}{2^{p-1}-1}\rho(x_n,\mathscr{S}x_n)^p\leq\rho(x_n,q)^p-\rho(y_n,q)^p$$

bulunur, buradan

$$\begin{aligned}\rho(x_n,\mathscr{S}x_n)^p&\leq\frac{2^{p-1}-1}{\beta_n(1-\beta_n^{p-1}))}[\rho(x_n,q)^p-\rho(y_n,q)^p]\\&\leq\frac{2^{p-1}}{a(1-\beta^{p-1})}[\rho(x_n,q)^p-\rho(y_n,q)^p]\end{aligned}$$

elde edilmektedir. (4.7) ve (4.9) eşitsizlikleri kullanılarak $\limsup\rho(x_n,\mathscr{S}x_n)\leq 0$ bulunur ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,\mathscr{S}x_n)\leq 0 \tag{4.11}$$

elde edilir. Yani $\{x_n\}$, $\mathscr{S}$ dönüşümünün bir sabit noktasına Δ-yakınsaktır. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi, $\mathscr{S}:C\to C$ genişlemeyen bir dönüşüm, $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ olmak üzere S-iterasyon yöntemiyle tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}$ dizisi*

$\mathscr{S}$ dönüşümünün bir sabit noktasına Δ-yakınsaktır.

İspat. Lemma 4.6'dan her $q \in F(\mathscr{S})$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, q)$ vardır ve $\lim_{n\to\infty} \rho(\mathscr{S}x_n, x_n) = 0$'dır. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır. İlk olarak, $\omega_\Delta(x_n) \subseteq F(\mathscr{S})$ olduğunu gösterelim. $u \in \omega_\Delta(x_n)$ olsun. Bu durumda, Lemma 4.2'den, $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{u_n\}$ alt dizisi vardır; öyle ki $A(\{u_n\}) = \{u\}$'dır. Lemma 4.2'den $\{u_n\}$'nın bir $\{v_n\}$ alt dizisi ve bir $v \in C$ vardır; öyle ki $\Delta - \lim_n v_n = v$ olmaktadır. Lemma 4.3'den $v \in F(\mathscr{S})$ ve Lemma 4.5'den $\rho(x_n, v)$ vardır. Şimdi $u = v$ olduğunu ispatlayalım. Aksine, $u \neq v$ olduğunu varsayalım. Öyleyse, asimptotik merkezlerin tekliğinden aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\limsup_n \rho(v_n, v) &< \limsup_{n\to\infty} \rho(v_n, u) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \rho(u_n, u) \\
&< \limsup_{n\to\infty} \rho(u_n, v) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, v) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \rho(v_n, v).
\end{aligned}$$

Buradan çelişki elde edilir. Dolayısıyla $u = v \in F(\mathscr{S})$ ve buradan $\omega_\Delta(x_n) \subseteq F(\mathscr{S})$ bulunur.

$\{x_n\}$ dizisinin, $\mathscr{S}$'nin bir sabit noktasına Δ-yakınsadığını göstermek için, $\omega_\Delta(x_n)$'nin tek bir noktadan oluştuğunu göstermeliyiz. $\{u_n\}$, $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi olsun. Lemma 4.2'den $\{u_n\}$ dizisinin bir $\{v_n\}$ alt dizisi vardır öyle ki bazı $v \in C$ için $\Delta - \lim_n v_n = v$ elde edilir. $A(\{u_n\}) = \{u\}$ ve $A(\{x_n\}) = \{x\}$ olsun. $u = v$ ve $v \in F(\mathscr{S})$ olduğunu yukarıda göstermiştik.

Son olarak, $x = v$ olduğunu gösterelim. Tersine, asimptotik merkezlerin tekliğinden

$$\begin{aligned}
\limsup_n \rho(v_n, v) &< \limsup_{n\to\infty} \rho(v_n, x) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, x) \\
&< \limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, v)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan çelişki elde edilir ve $x = v \in F(\mathscr{S})$'dir. Dolayısıyla $\omega_\Delta(x_n) = x$ bulunur. ■

Teorem 4.5. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ ($p \geq 2$) metrik uzay ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi, $\mathscr{S} : C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [\alpha, \beta] \subset$*

$[0,1]$ *olmak üzere S-iterasyon yöntemiyle tanımlanan* $\{x_n\}$ *dizisi olsun. Bu takdirde* $\{x_n\}$ *dizisinin* $\mathscr{S}$*'nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter koşul* $\liminf_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S})) = 0$ *olmasıdır.*

İspat. Gereklilik açıktır. Tersine, $\liminf_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S})) = 0$ olsun. (4.8)'den $p \in F(\mathscr{S})$'dir. Dolayısıyla

$$\rho(x_{n+1}, F(\mathscr{S})) \leq \rho(x_n, F(\mathscr{S}))$$

bulunur ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S}))$ yakınsamaktadır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S})) = 0$ şeklindedir.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin C kümesinde bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayalım. $\epsilon > 0$ olsun.

$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S})) = 0$ olduğundan $k \in N$ vardır; öyle ki her $n \geq k$ için

$$\rho(x_n, F(\mathscr{S})) < \frac{\epsilon}{4}$$

olur. Özellikle, $\inf\{\rho(x_k, p) : p \in F(\mathscr{S})\} < \frac{\epsilon}{4}$'dir. Böylece

$$\rho(x_k, q) < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde $q \in F(\mathscr{S})$ vardır. Herhangi bir $m, n \geq k$ için

$$\rho(x_{n+m}, x_n) \leq \rho(x_{n+m}, q) + \rho(q, x_n).$$

$$\leq 2\rho(x_k, q)$$

$$< 2.\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$, C'de bir Cauchy dizisidir. Uzayın tamlığı ile $\{x_n\}$, C'de bir r noktasına yakınsar. $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S})) = 0$ olduğundan $\rho(r, F(\mathscr{S})) = 0$ olur ve r, $F(\mathscr{S})$ içinde olmalıdır. Çünkü $F(\mathscr{S})$ kapalı bir alt kümedir. ■

Şimdi, kompaktlıktan daha zayıf bir koşul tanımlayalım.

Tanım 4.5. $\mathscr{S} : C \to C$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$, $f(0) = 0$ ve $r > 0$ için $f(r) > 0$ olmak üzere $\rho(x, \mathscr{S}x) \geq f(\rho(x, F(\mathscr{S}))$ olacak şekilde $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ azalan olmayan bir fonksiyon var ise $\mathscr{S}$'ye (I) koşulunu sağlıyor denir [90].

Teorem 4.6. $(\mathscr{M}, \rho)$ *bir tam* $CAT_p(0)$ *(*$p \geq 2$*) metrik uzay ve C,* $\mathscr{M}$*'nin kapalı konveks bir alt kümesi,* $\mathscr{S} : C \to C$ *dönüşümü (I) koşulunu sağlayan genişlemeyen bir dönüşüm,* $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [\alpha, \beta] \subset [0,1]$ *olmak üzere S-iterasyon yöntemiyle tanımlanan* $\{x_n\}$ *dizisi olsun. Bu takdirde* $\{x_n\}$*,* $\mathscr{S}$*'nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsaktır.*

İspat. Lemma 4.5'den her $x^* \in F(\mathscr{S})$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x^*)$ vardır. Bu limit c $(c \geq 0)$ olsun. Eğer $c = 0$ ise ispat aşikardır. $c > 0$ olduğunu varsayalım. $\rho(x_{n+1}, x^*) \leq \rho(x_n, x^*)$ eşitsizliğinden

$$\inf_{x^*\in F} \rho(x_{n+1}, x^*) \leq \inf_{x^*\in F} \rho(x_n, x^*)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\rho(x_{n+1}, F(\mathscr{S})) \leq \rho(x_n, F(\mathscr{S}))$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S}))$ mevcut demektir. Tanım 4.5'de verilen (I) koşulundan

$$\lim_{n\to\infty} f(\rho(x_n, F(\mathscr{S}))) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, \mathscr{S}x_n) = 0$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} f(\rho(x_n, F(\mathscr{S}))) = 0$$

elde edilir. f azalan olmayan bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} f(\rho(x_n, F(\mathscr{S}))) = 0$$

elde edilir. ■

4.3 $CAT_p(0)$ Uzaylarında Optimizasyon Problemleri ve Uygulamaları

Bu alt bölümde, bir minimum problemini çözmek için S-iterasyon yöntemi [81] uygulanarak ortalama ve medyan hesabı yapılmıştır. Ayrıca, yöntemin uygulanışını göstermek için, biri $CAT(0)$ uzayı olmayan bir $CAT_p(0)$ uzayında ve diğeri Hilbert olmayan bir CAT(0) uzayında olmak üzere iki sayısal örnek verilmiştir.

$h : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in (0,1)$ ve her $u, v \in C$ için

$$h(tu \oplus (1-t)v) \leq th(u) + (1-t)h(v)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise h'ye konvekstir denir. Eğer $D(h) := \{u \in C : h(u) < +\infty\} \neq \emptyset$ ise h fonksiyonuna uygun (proper) fonksiyonu denir. $\lambda > 0$ için, h'nin λ-resolvent operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$J_\lambda^h(u) = \arg\min_{v\in C} \left[h(v) + \frac{1}{2\lambda}\rho^2(u, v) \right]. \tag{4.12}$$

Her $v \in C$ için $h(u) \leq h(v)$ sağlayan bir $u \in C$ bulmak doğrusal olmayan analiz ve optimizasyonda önemli bir problemdir. Ariza ve ark. [65] $CAT(0)$ metrik uzaylarında C üzerinde konveks uygun alttan yarı-sürekli bir h dönüşümü (4.12) probleminin

çözüm kümesinin $F\left(J_\lambda^h\right)$ sabit noktalar kümesi ile çakıştığını göstermiştir. Jost [15] J_λ^h dönüşümünün $CAT(0)$ metrik uzaylarında genişlemeyen olduğunu ispatlamıştır.

Tanım 4.6 (**Dik Jeodezikler**). $(\mathscr{M},\rho)$ bir jeodezik uzay ve ζ ve τ da q noktasından geçen iki jeodezik olsun. Eğer her $x\in\zeta$ ve $y\in\tau$ için

$$\rho(x,q)\leq\rho(x,y)$$

ise bu takdirde, ζ,τ'ya q noktasında diktir denir ve $\zeta\perp_q\tau$ ile gösterilir [57].

Tanım 4.7 (**Simetrik Dik Uzay**). $(\mathscr{M},\rho)$ bir jeodezik uzay ve ortak noktası q olan ζ ve τ bu uzayda herhangi iki jeodezik olsun. Eğer

$$\zeta\perp_q\tau\Leftrightarrow\tau\perp_q\zeta$$

ise $\mathscr{M}$ uzayına simetrik dik denir [57].

Teorem 4.7. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay olsun. Bu takdirde $\mathscr{M}$ uzayı simetrik dik uzaydır.*

İspat. $\zeta\perp_{q_0}\tau$ olsun. Bu takdirde her $x\in\zeta$ ve her $y\in\tau$ için $\rho(x,q_0)\leq\rho(x,y)$ olur. Ayrıca $q_0=P_\tau(x)$. $a:=\rho(x,q_0),b=\rho(q_0,y),c=\rho(x,y)$ olmak üzere $\bar{\Delta}(o,\bar{x},\bar{y})$, ℓ_p uzayında karşılaştırma üçgeni olsun. Bu takdirde $a^p+b^p\leq c^p$ olarak bulunur ve buradan $\rho(q_0,y)=b\leq c=\rho(x,y)$ olup $\tau\perp_{q_0}\zeta$ elde edilir. ■

Teorem 4.8. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay olsun. Bu takdirde, her $\mu>0$ için J_μ^f resolventin kümesi sadece tek noktadan oluşur.*

İspat. Önce tekliği ispatlayalım. Kabul edelim ki; J_μ^f resolventin kümesi tek noktadan oluşmasın. Yani

$$u_1,u_2\in Argmin_{u\in\mathscr{M}}\left\{f(v)+\frac{1}{2\lambda}\rho(v,u)^p\right\}$$

olsun. f fonksiyonunun konveksliğinden

$$f\left(\frac{1}{2}u_1\oplus\frac{1}{2}u_2\right)\leqslant\frac{1}{2}f(u_1)+\frac{1}{2}f(u_2)$$

elde edilir. (2.1) eşitsizliğinden her $x\in\mathscr{M}$ için

$$\rho\left(\frac{1}{2}u_1\oplus\frac{1}{2}u_2,x\right)^p<\frac{1}{2}\rho(u_1,x)^p+\frac{1}{2}\rho(u_2,x)^p \tag{4.13}$$

sağlanır ve buradan

$$f(\left(\frac{1}{2}u_1\oplus\frac{1}{2}u_2\right)+\frac{1}{2\lambda}\rho\left(\frac{1}{2}u_1\oplus\frac{1}{2}u_2,x\right)^p<f(u_1)+\frac{1}{2\lambda}\rho(u_1,x)^p=f(u_2)+\frac{1}{2\lambda}\rho(u_2,x)^p$$

elde edilir. Bu da u_1 minimumu ile çelişir.

Bir minimuma sahip $\{c_n\} \subset \mathscr{M}$ dizisini alalım, yani,

$$f(v) + \frac{1}{2\lambda}\rho(v, c_n)^p \to \inf_{u\in\mathscr{M}} \left\{ f(v) + \frac{1}{2\lambda}\rho(v,u)^p \right\}.$$

$c_{mn} := \frac{1}{2}c_m + \frac{1}{2}c_n$ olsun. Bu takdirde, C konveks olduğundan $c_{mn} \in C$'dir ve (2.1) eşitsizliğinden

$$\rho(w, c_{mn})^p \leq \frac{1}{2}\rho(w, c_m)^p + \frac{1}{2}\rho(x, c_n)^p - \frac{k}{4}\rho(c_m, c_n)^2$$

ya da

$$\frac{c_M}{2}\rho(c_m, c_n)^p \leq \frac{1}{2}\rho(u, c_m)^p + \frac{1}{2}\rho(u, c_n)^p - \rho(u, c_{mn})^p$$

şeklinde elde edilmektedir. Buradan ve f fonksiyonunun konveksliğinden $\{c_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Limit noktası açıkça bir minimum noktasıdır ve C içinde yer almaktadır. ■

Lemma 4.7. *Her $\mu > 0$ için J_μ^f resolventin sabit noktalarının kümesi* $\operatorname*{Argmin}_{u\in\mathscr{M}} f(u)$ *minimize eden kümesi ile eşittir.*

İspat. $x^* \in \operatorname*{Argmin}_{v\in\mathscr{M}} f(v)$ alalım, bu takdirde

$$f(x^*) + \frac{1}{2\lambda}\rho(x^*, v) \leqslant f(v) + \frac{1}{2\lambda}\rho(x^*, v)^p$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$x^* \in \operatorname*{Argmin}_{v\in\mathscr{M}} \left\{ f(v) + \frac{1}{2\lambda}\rho(x^p, u) \right\}$$

elde edilir. J_λ'nın tanımı gereği; $J_\lambda(x^*) = x^*$ olur. Kabul edelim ki; $J_\lambda(x^*) = x^*$ olsun. Bu durumda her $v \in \mathscr{M}$ için $f(x^*) \leqslant f(v) + \frac{1}{2\lambda}\rho(v, x^*)^p$ sağlanır. Eğer $\eta : [0,1] \to \mathscr{M}$, x^* noktasından başlayan bir jeodezik olarak alınırsa

$$\frac{f(\eta(t)) - f(x^*)}{t} \geqslant \frac{\rho(x^*, \eta(t))}{\mu t} = -\frac{t^{p-1}}{\mu}$$

olur ve sonuç olarak $D_\mu f(x^*) > 0$ elde edilir. Teorem 2.1'den $f(x^*) \leq f(v)$ ve $x^* \in \operatorname*{Argmin}_{v\in\mathscr{M}} f(v)$ bulunur.

■

Teorem 4.9. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam $CAT_p(0)$ $(p\geq 2)$ metrik uzay olsun. Bu takdirde, her $\mu>0$ için J_μ^f resolventi yarı genişlemeyen dönüşümdür, yani her $x\in\mathscr{M}$ ve her $x^*\in F(J_\mu^f)$ için*

$$\rho(J_\mu^f(x),J_\mu^f(x^*))<\rho(x,x^*)$$

sağlanır.

İspat. $y=J_\mu^f(x)$ olsun. Şimdi x noktasının $[y,x^*]$ jeodeziğinin üzerindeki iz düşümünün y olduğunu ispatlayalım, yani $\pi_{[x^*,y]}(x)=y$ olması gerekmektedir. Aksi takdirde, $\pi_{[x^*,y]}(x)\neq y$ olur. Bu durumda $\pi_{[x^*,y]}(x)=(1-t)y+tx^*$ olacak şekilde $t\in[0,1]$ vardır. Dolayısıyla $\rho((1-t)y+tx^*)<\rho(y,x^*)$ olur. f fonksiyonunun konveksliğinden

$$f((1-t)y+tx^*)\leq(1-t)f(y)+tf(x^*)\leq f(y)$$

elde edilir. Buradan

$$f\left((1-t)y\oplus tx^*\right)+\frac{1}{2\lambda}\rho\left((1-t)y\oplus tx^*,x\right)^p<f\left(y\right)+\frac{1}{2\lambda}\rho\left(y,x\right)^p$$

olur ve $y=J_\mu^f(x)$ ile çelişir. Dolayısıyla $\pi_{[x^*,y]}(x)=y$ elde edilir. Özel olarak $[x,y]\perp_y[x^*,y]$ olur ve Teorem 4.7'den $[x^*,y]\perp_y[x,y]$ bulunur. Yani $\rho(x^*,y)<\rho(x^*,x)$'dır. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho(x^*,y)^p=\rho\left(x^*,\pi_{[x,y]}(x^*)\right)^p&\leqslant\rho\left(x^*,\frac{1}{2}x\oplus\frac{1}{2}y\right)^p\\&\leqslant\frac{1}{2}\rho\left(x^*,x\right)^p+\frac{1}{2}\rho(x^*,y)^p-\frac{c_M}{2}\frac{1}{4}\rho(x,y)^p\\&\leqslant\rho\left(x^*,x\right)^p-\frac{c_M}{2}\frac{1}{4}\rho(x,y)^p\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\rho(x^*,y)<\rho(x^*,y)$ bulunur ve J_μ^f dönüşümü kesin yarı genişlemeyendir. ■

Teorem 4.10. *$h:C\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ konveks, düzgün ve alttan yarı-sürekli bir fonksiyon olsun. $u_1\in C$ için, $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ olmak üzere S-proximal dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\begin{cases}w_n=(1-\alpha_n)u_n\oplus\alpha_nJ_\lambda^h(u_n),\\z_n=J_\lambda^h(w_n),\\u_{n+1}=J_\lambda^h\left((1-\beta_n)z_n\oplus\beta_nJ_\lambda^h(z_n)\right),n\geq 1.\end{cases}\tag{4.14}$$

Bu takdirde (4.14) ile tanımlanan dizi $F\left(J_\lambda^h\right)$ kümesinin bir noktasına Δ-yakınsaktır. Eğer C kompakt ise o zaman kuvvetli yakınsaktır.

İspat. Teoorem 4.9'dan $\left(J_\lambda^h\right)$ yarı genişlemeyen dönüşümdür. Dolayısıyla Teorem 4.4'den (4.14) ile tanımlanan dizi $F\left(J_\lambda^h\right)$ kümesinin bir noktasına Δ-yakınsaktır. Eğer C kompakt ise Teorem 4.6'dan (4.14) ile tanımlanan dizi $F\left(J_\lambda^h\right)$ kümesinin bir noktasına kuvvetli yakınsaktır. ■

5
P-DÜZGÜN KONVEKS METRİK UZAYLARDA GENİŞLEMEYEN TİPTEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA

5.1 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Belirli Operatör Sınıfları İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu alt bölümde, ilk olarak doğrusal olmayan Lebesgue uzaylarını Hadamard uzaylarından p-düzgün konveks metrik uzaylara genişlettik. Daha sonra, p-düzgün konveks metrik uzaylar yeni tanımlanan genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfları için bazı Δ-yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremlerini ispatladık. Ayrıca, bu sınıfın sabit noktalarına yaklaşmak için literatürde yeni tanımlanan JK-iterasyon yöntemini kullandık ve p-düzgün konveks metrik uzaylar bağlamında bu sınıfın yeni örneklerini oluşturduk. Son olarak, sonuçlarımızın sayısal doğruluğunu teyit etmek için, bu örneklerin JK-iterasyon yönteminin S [81] ve Thakur [82] iterasyon yöntemlerinden daha etkili olduğunu gösterdik.

5.1.1 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylara ait Yeni Örnekler

Şimdi Hadamard uzayı olmayan ($p > 2$ için) p-düzgün konveks metrik uzaylara ait somut bir örnek verelim.

Örnek 5.1. *$P(m)$ bir $m \times m$ pozitif tanımlı Hermit matrislerin uzayı olsun. $1 < p < \infty$ için, $P(m)$ içinde U ve V arasındaki jeodezik uzaklık (p-Schatten uzaklığı olarak da adlandırılır) $\rho_M : P(m) \times P(m) \to [0, \infty)$ şeklinde aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$\begin{aligned}\rho_M(U,V) &= \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to P(m) \text{ düzgün bir eğridir. } \gamma(0) = U \text{ and } \gamma(1) = V\} \\ &= \left\| \log\left(U^{-\frac{1}{2}} V U^{-\frac{1}{2}}\right) \right\|_p \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \log^p \lambda_i \left(U^{-1}V\right) \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Burada $\lambda_i\left(U^{-1}V\right)$*,* $U^{-1}V$*'nin özdeğerleridir ve*

$$\ell(\gamma) := \int_0^1 \left\| \gamma(t)^{-\frac{1}{2}} \gamma'(t) \gamma(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_p dt, \quad \|U\|_p := (\mathrm{IZ}\,|U|^p)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanır ve $((\mathrm{IZ}\,|U|^p)^{\frac{1}{p}})$*, A'nın normal iz düşüm fonksiyonelidir. Ayrıca* $|U| = \left(U^H A\right)^{\frac{1}{2}}$ *ve* U^H *eşlenik transpozudur. Bu takdirde, U ile V arasındaki jeodezi*

$$(1-t)U \oplus tV = U^{\frac{1}{2}} \left(U^{-\frac{1}{2}} V U^{-\frac{1}{2}}\right)^t U^{\frac{1}{2}}, 0 \le t \le 1$$

şeklinde tanımlanırsa $(P(m), \rho_M)$ *uzayı bir p-düzgün konveks uzaydır [57].*

Örnek 5.2. $\mathscr{L}(H)$ *operatör normu ile tanımlanmış ayrılabilir bir H Hilbert uzayı üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin Banach uzayı,* $\mathscr{L}(H)_{sa}$ *kümesi* $\mathscr{L}(H)$ *içindeki tüm öz-eşlenik elemanların kümesi ve* $\mathscr{P}$*,* $\mathscr{L}(H)_{sa}$ *içindeki tüm pozitif ters çevrilebilir elemanların kümesi olsun.* $1 \le p < \infty$ *için* $\mathscr{L}(H)$*'nin* $\mathscr{S}_p(H)$ *p-Schatten sınıfı şu şekilde tanımlansın:*

$$\mathscr{S}_p(H) := \{U \in \mathscr{L}(H) \mid U \text{ kompakt operatör}$$
$$|U|_p := \left(\sum_k [s_k(U)]^p\right)^{1/p} = (\mathrm{IZ}\,|U|^p)^{1/p} < \infty\}.$$

Burada $s_k(U)$ *azalan U tekil değerleri dizisidir,* $|u| = (U^*U)^{1/2}$ *ve* IZ*,* $\mathscr{L}(H)$ *üzerindeki olağan izdir.*

$\mathscr{S}_p(H)$*, p-Schatten sınıfı üzerinde ve* $\mathscr{P}$ *içinde b ile ilişkili* $\|\cdot\|_{p,V}$ *normu aşağıdaki şekilde tanımlansın. Her* $U \in \mathscr{S}_p(H)$ *için*

$$\|U\|_{p,V} = \left\|V^{-1/2} U V^{-1/2}\right\|_p.$$

$\mathscr{S}_{p,V}$ *normu ile tanımlanmış* $\mathscr{S}_p(H)$ *p-Schatten sınıfı* $\mathscr{S}_{p,V}$ *ile gösterilsin, yani* $\mathscr{S}_{p,V} = \left(\mathscr{S}_p(H), \|\cdot\|_{p,V}\right)$*'dır.* $1 < p < \infty$ *için* $\Omega_p := \left\{I + U \in \mathscr{P} \mid U \in \mathscr{S}_{p,V}\right\}$*, kompakt p-Schatten sınıfı operatörlerin idealine birimin bitişik olmasıyla elde edilen operatör cebirinin pozitif konisi olsun.* $x, y \in \Omega_p$ *noktaları arasındaki* $\rho_p(U,V)$ *jeodezik uzaklık aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:*

$$\begin{aligned}\rho_p(U,V) &= \inf\left\{L(\eta) \mid \eta : [0,1] \to \Omega_p \text{türevlenebilir eğri}, \eta(0) = U, \eta(1) = V\right\} \\ &= \left\|\log\left(U^{-1/2} V U^{-1/2}\right)\right\|_p.\end{aligned}$$

Burada $L(\eta) = \int_0^1 \|\eta'(t)\|_{p,\eta(t)}\, dt = \int_0^1 \left\|\eta(t)^{-1/2} \eta'(t) \eta(t)^{-1/2}\right\|_p dt$*'dir.*

$1 < p \le 2$ *için* $U, V \in \Omega_p$ *olsun. O zaman,* Ω_p *içinde U ile V'yi birleştiren herhangi bir*

$\eta : [0,1] \to \Omega_p$ *jeodeziği için*

$$\rho_p(\omega, \eta(t))^2 \leq (1-t)d_p(\omega, U)^2 + t\rho_p(\omega, V)^2 - t(1-t)c_p\rho_p(U, V)^2$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Burada, $c_p = p - 1$ *şeklindedir . Bu nedenle,* $\left(\Omega_p, \rho_p\right)$*,* $1 < p \leq 2$ *için* c_p *parametresine sahip bir 2-düzgün konveks metrik uzaydır [91].*

Şimdi, Hadamard uzaylarının bazı örneklerini p-düzgün konveks metrik uzaylarına genişletmemize yardımcı olacak bazı lemmalar verilecektir.

Lemma 5.1. $\gamma, \beta \in [0,1]$ *ve* $\gamma + \beta = 1$ *olmak üzere her* $x, y \in \ell_p$ *için*

$$\|\gamma x + \beta y\|^p + \frac{\gamma\beta}{2^{p-1}}\|x - y\|^p \leq \gamma\|x\|^p + \beta\|y\|^p$$

eşitsizliği sağlanmaktadır [68].

Lemma 5.2. $(\mathscr{M}, \rho)$ *bir tam p-düzgün konveks metrik uzay ve* $x : [0,1] \to \mathscr{M}$ *bir jeodezik olsun. Bu takdirde, her* $t \in [0,1]$ *için* $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ *noktası sürekli olarak* x_0 *ve* x_1 *uç noktalarına bağlıdır.*

İspat. Kabul edelim ki; $y : [0,1] \to \mathscr{M}$ bir jeodezik olsun. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho(x_t, y_t)^p \leq & (1-t)\rho(x_0, y_t)^p + t\rho(x_1, y_t)^p - c_{\mathscr{M}}t(1-t)\rho(x_0, x_1)^p \\ \leq & (1-t)^2\rho(x_0, y_0)^p + t^2\rho(x_1, y_1)^p \\ & + t(1-t)[\rho(x_0, y_1)^p + \rho(x_1, y_0)^p - c_{\mathscr{M}}\rho(x_0, x_1)^p - c_{\mathscr{M}}\rho(y_0, y_1)^p]\end{aligned} \tag{5.1}$$

elde edilir. $y_0 \to x_0$ ve $y_1 \to x_1$ ise (5.1) denkleminin sağ tarafı sıfıra yakınsamaktadır. ■

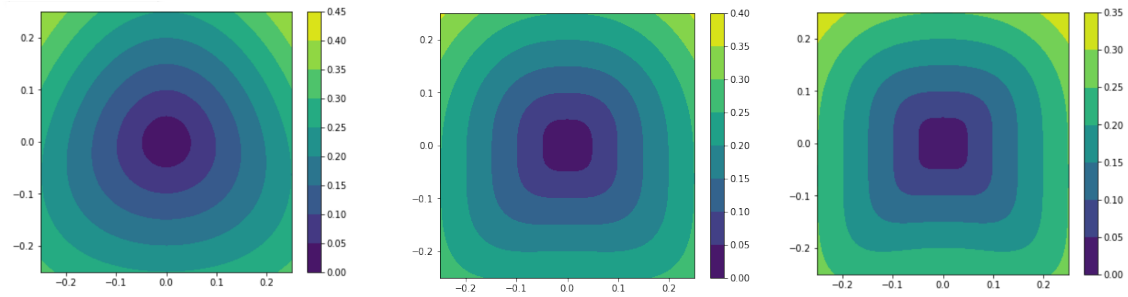
Örnek 5.3. $\mathscr{M} = \mathbb{R}^2$ *uzayı üzerinde* $\rho_{\mathscr{M}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ *metriği tanımlansın.* $x, y \in \mathscr{M}$ *için x ile y'yi birleştiren jeodezik*

$$(1-t)x \oplus ty = ((1-t)x_1 + ty_1, ((1-t)x_1 + ty_1)^p - (1-t)(x_1^p - x_2) - t(y_1^p - y_2))$$

olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}^2$ *için*

$$\rho_X(x, y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + |x_1^p - x_2 - y_1^p + y_2|^p}$$

elde edilir. Bu takdirde, $\left(\mathbb{R}^2, \rho_{\mathscr{M}}\right)$*,* $c = \frac{1}{2^{p-1}}$ *parametresine sahip bir tam p-düzgün konveks metrik uzaydır. Şekil 5.1'de* $p = 2, 3$ *ve* 4 *için* $\mathscr{M}$ *uzayının sıfır merkezli yuvarları gösterilmiştir.*



Şekil 5.1 p-düzgün konveks metrik uzaylarda sıfır merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvarlar

İspat. $\mathscr{M}$ uzayının her eleman çiftinin orta nokta özelliğini sağladığını kolayca görebiliriz. Lemma 2.1'den $\mathscr{M}$ jeodezik bir metrik uzaydır. Lemma 5.1'den her $\beta \in [0,1]$ ve $x, y, z \in \ell_p$ için

$$\|\beta x + (1-\beta)y\|^p + \frac{\beta(1-\beta)}{2^{p-1}}\|x-y\|^p \leq \beta\|x\|^p + (1-\beta)\|y\|^p$$

yazılabilir ve buradan

$$\|\beta(x-z) + (1-\beta)(y-z)\|^p + \frac{\beta(1-\beta)}{2^{p-1}}\|x-y\|^p \leq \beta\|x-z\|^p + (1-\beta)\|y-z\|^p$$

elde edilir. x yerine $(x_1, x_1^p - x_2)$, y yerine $(y_1, y_1^p - y_2)$ ve z yerine $(z_1, z_1^p - z_2)$ alınırsa

$$\rho^p(z, \beta x + (1-\beta)y) \leq \beta\rho^p(z,x) + (1-\beta)\rho^p(y,z) - \frac{\beta(\beta-1)}{2^{p-1}}\rho^p(x,y)$$

elde edilir. Dolayısıyla $(\mathscr{M}, d_{\mathscr{M}})$, $c = \frac{1}{2^{p-1}}$ parametresi ile bir p-düzgün konveks metrik uzaydır. ■

Teorem 5.1 (**Lineer Olmayan Lebesgue Uzayları**). *$\mathscr{S}$, Ω kümesi üzerinde bir σ-cebir ve μ bir olasılık ölçüsü olmak üzere $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ bir olasılık uzayı ve $(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks uzay olsun. $\mathscr{M}$ üzerinde σ-Borel cebirini ele alalım. $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ uzayından $\mathscr{M}$ uzayına ölçülebilir dönüşümler uzayı tanımlansın. Herhangi iki ölçülebilir dönüşüm için*

$$\rho_p(h,g) := \begin{cases} \left[\int_\Omega \rho(h(\theta), g(\theta))^p \, \rho\mu(\theta)\right]^{\frac{1}{p}}, & \text{eğer } p \in [1,\infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{\theta\in\Omega} \rho(h(\theta), g(\theta)), & \text{eğer } p = \infty \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{M})$ bir p-düzgün konveks metrik uzaydır.

İspat. İlk olarak, ρ_p, $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{M})$ üzerinde bir tam metrik tanımlanır [92]. $h_0, h_1 \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{M})$ ve $t \mapsto h_t(\theta)$, $h_0(\theta)$ ve $h_1(\theta)$'yi birleştiren jeodezik olsun. Dolayısıyla her

$s,t \in [0,1]$ için

$$\rho\left(f_s(\theta), h_t(\theta)\right) = |t-s|\rho\left(h_0(\theta), h_1(\theta)\right) \tag{5.2}$$

olur. Lemma 5.2'den $h_t(\theta)$ jeodeziği $h_0(\theta)$ ve $h_1(\theta)$ uç noktalarına sürekli olarak bağlıdır. (5.2) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\rho_p\left(h_t, h_s\right) = |t-s|\rho_p\left(h_0, h_1\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $h_t(\theta) \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{M})$'dir. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho\left(g(\theta), h_t(\theta)\right)^p \leq (1-t)\rho\left(g(\theta), h_0(\theta)\right)^p + t\rho\left(g(\theta), h_1(\theta)\right)^p \\ - c_{\mathscr{M}}\rho\left(h_0(\theta), h_1(\theta)\right)^p\end{aligned} \tag{5.3}$$

bulunur. (5.3) denkleminin integrali alınırsa

$$\rho_p\left(g, h_t\right)^p \leq (1-t)\rho_p\left(g, h_0\right)^p + t\rho_p\left(g, h_1\right)^p - c_{\mathscr{M}}\rho_p\left(h_0, h_1\right)^p$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

5.1.2 Bazı Özel Operatörler için *JK* İterasyon Yönteminin Yakınsaklık Analizi

Bu alt bölümde, (D) koşulunu sağlayan dönüşümler için bazı kuvvetli ve Δ-yakınsaklık teoremlerini inceledik. (D) koşulunu sağlayan dönüşümlerle ilgili bazı temel lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 5.3. *$\mathscr{S} : A \to A$ (D) koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu takdirde*

i. *Her $x \in A$ için $\rho(\mathscr{S}^2x, \mathscr{S}x) \leq \rho(\mathscr{S}x, x)$'dır.*

ii. *Her $x, y \in A$ için $\rho(\mathscr{S}^2x, \mathscr{S}y) \leq \rho(\mathscr{S}x, y)$, $\rho(\mathscr{S}^2y, \mathscr{S}x) \leq \rho(\mathscr{S}y, x)$ olarak verilen eşitsizliklerden en az biri sağlanmaktadır.*

iii. *Her $x, y \in A$ için $\rho(\mathscr{S}x, x) \leq \rho(\mathscr{S}y, y)$ ise $\rho(x, \mathscr{S}y) \leq 3\rho(\mathscr{S}x, x) + \rho(x, y)$'dır.*

iv. *Her $x, y \in A$ için $\rho(\mathscr{S}x, \mathscr{S}y) \leq 2min\{\rho(\mathscr{S}x, x), \rho(\mathscr{S}y, y)\} + \rho(x, y)$'dır.*

v. *Her $x, y \in A$ için $\rho(x, \mathscr{S}y) \leq 3\rho(\mathscr{S}x, x) + \rho(x, y)$'dır.*

İspat. i. $\rho(\mathscr{S}x, x) \leq \rho(\mathscr{S}x, x)$ olduğundan $\mathscr{S}$ dönüşümünün tanımı gereği $\mathscr{S}x \in C(\mathscr{S}, x)$'dır. Dolayısıyla $\rho(\mathscr{S}^2x, \mathscr{S}x) \leq \rho(\mathscr{S}x, x)$ elde edilir.

ii. $\rho(\mathscr{S}x, x) \leq \rho(\mathscr{S}y, y)$ ise $\mathscr{S}x \in C(\mathscr{S}, y)$ olur. $\mathscr{S}$ dönüşümünün tanımı gereği $\rho(\mathscr{S}^2x, \mathscr{S}y) \leq \rho(\mathscr{S}x, y)$'dır. Aksi takdirde $\rho(\mathscr{S}y, y) < \rho(\mathscr{S}x, x)$ olup

$\mathscr{S}y \in C(\mathscr{S},x)$ olur. Ayrıca $\mathscr{S}$ dönüşümünün tanımı gereği $\rho(\mathscr{S}^2y,\mathscr{S}x) \leq \rho(\mathscr{S}y,x)$'dır.

iii. Metriğin tanımı gereği ve (i) ve (ii)'de belirtilen eşitsizliklerden her $x,y \in A$ için

$$\begin{aligned}\rho(x,\mathscr{S}y) &\leq \rho(x,\mathscr{S}x)+\rho(\mathscr{S}^2x,\mathscr{S}x)+\rho(\mathscr{S}^2x,\mathscr{S}y)\\ &\leq \rho(x,\mathscr{S}x)+\rho(x,\mathscr{S}x)+\rho(\mathscr{S}x,y)\\ &\leq 3\rho(\mathscr{S}x,x)+\rho(x,y)\end{aligned}$$

elde edilir.

iv. $\rho(\mathscr{S}x,x) \leq \rho(\mathscr{S}y,y)$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\rho(\mathscr{S}x,\mathscr{S}y) &\leq \rho(\mathscr{S}^2x,\mathscr{S}x)+\rho(\mathscr{S}^2x,\mathscr{S}y)\\ &\leq \rho(\mathscr{S}y,x)+\rho(\mathscr{S}y,y)\\ &\leq 2\rho(\mathscr{S}y,x)+\rho(x,y)\\ &= 2min\{\rho(\mathscr{S}y,x),\rho(\mathscr{S}y,y)\}+\rho(x,y)\end{aligned}$$

elde edilir. $\rho(\mathscr{S}y,y) < \rho(\mathscr{S}x,x)$ olduğunda da eşitsizliğin sağlandığı görülür. Dolayısıyla, eşitsizlik her (x,y) çifti için geçerli olmaktadır.

■

Lemma 5.4. *$\mathscr{S} : A \to A$, (D) koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu takdirde her $x,y \in A$*

$$\rho(x,\mathscr{S}y) \leq 3\rho(\mathscr{S}x,x)+\rho(x,y)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

İspat. Metriğin tanımı gereği ve Lemma 5.3'den

$$\begin{aligned}\rho(x,\mathscr{S}y) &\leq \rho(x,\mathscr{S}x)+\rho(\mathscr{S}x,\mathscr{S}y)\\ &\leq \rho(x,\mathscr{S}x)+2\min\{\rho(\mathscr{S}x,x),\rho(\mathscr{S}y,y)\}+\rho(x,y)\\ &\leq \rho(x,\mathscr{S}x)+2\rho(x,\mathscr{S}x)+\rho(x,y)\\ &= 3\rho(\mathscr{S}x,x)+\rho(x,y)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. ■

Şimdi (D) koşulunu sağlayan dönüşümler için Yarı Kapalılık Prensibini ispatlayalım.

Teorem 5.2. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam p-düzgün konveks uzay ve A, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $\mathscr{S}:A\to A$, (D) koşulu sağlayan bir dönüşüm ve $\{x_n\}\subseteq A$ bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}\xrightarrow{\Delta} q\in A$ ve $\lim_{n\to+\infty}\rho(\mathscr{S}x_n,x_n)=0$ ise $\mathscr{S}q=q$'dır.*

İspat. $\{x_n\}$, q'ya Δ-yakınsadığından $\{x_n\}$ sınırlı bir dizidir. Lemma 5.3'den

$$\begin{aligned} r(\mathscr{S}q,\{x_n\}) &= \limsup_{n\to\infty}\rho(x_n,\mathscr{S}q)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(3\rho(\mathscr{S}x_n,x_n)+\rho(x_n,p))\\ &= \limsup_{n\to\infty}\rho(x_n,q)\\ &= r(q,\{x_n\}) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathscr{S}q\in A(\{x_n\})$'dir. Lemma 3.1'den $A(\{x_n\})$ tek elemanlıdır. Yani $Tq=q$'dır. ■

Tanım 5.1. $(\mathscr{M},\rho)$ bir p -düzgün konveks metrik uzay olsun ve A, $\mathscr{M}$'nin boş olmayan bir konveks alt kümesi olsun. $\mathscr{S}:A\to A$ bir dönüşüm olsun. JK-iterasyon yöntemi

$$\begin{cases} y_n=(1-\alpha_n)x_n\oplus\alpha_n\mathscr{S}x_n,\\ z_n=\mathscr{S}y_n,\\ x_{n+1}=\mathscr{S}\left((1-\beta_n)z_n\oplus\beta_n\mathscr{S}z_n\right), n\geq 1 \end{cases} \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Teorem 5.3. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam p-düzgün konveks uzay ve A, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $\mathscr{S}:A\to A$, (D) koşulunu sağlayan bir dönüşüm, $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ olmak üzere $\{x_n\}$, JK-iterasyon yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde her $q\in F(\mathscr{S})$ için $\lim\rho(x_n,q)$ vardır ve $\lim\rho(\mathscr{S}x_n,x_n)=0$'dır.*

İspat. $q\in F(\mathscr{S})$ ve $z\in A$ olsun. $\mathscr{S}$, (D) koşulunu sağlayan bir dönüşüm olduğu için $\mathscr{S}$ yarı-genişlemeyendir. Dolayısıyla (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \rho^p(y_n,q) &= \rho^p((1-\beta_n)x_n\oplus\beta_n\mathscr{S}x_n,q)\\ &\leq (1-\beta_n)\rho^p(x_n,q)+\beta_n\rho^p(\mathscr{S}x_n,q)-C\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n,\mathscr{S}x_n)\\ &\leq (1-\beta_n)\rho^p(x_n,q)+\beta_n\rho^p(x_n,q)-C\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n,\mathscr{S}x_n)\\ &= \rho^p(x_n,q)-C\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n,\mathscr{S}x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\rho^p(z_n,q)=\rho^p(\mathscr{S}y_n,q)&\leq\rho^p(y_n,q)\\&\leq\rho^p(x_n,q)-C\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n,\mathscr{S}x_n)\end{aligned}$$

bulunur. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho^p(x_{n+1},q)&=\rho^p((1-\alpha_n)z_n\oplus\alpha_n\mathscr{S}z_n,q)\\&\leq(1-\alpha_n)\rho^p(z_n,q)+\alpha_n\rho^p(\mathscr{S}z_n,q)-C\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(z_n,\mathscr{S}z_n)\\&\leq\rho^p(x_n,q)-C\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n,\mathscr{S}x_n)-C\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(z_n,\mathscr{S}z_n)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\rho(x_{n+1},q)\leq\rho(x_n,q)$'dır ve dolayısıyla $\{x_n\}$, $F(\mathscr{S})$'e göre bir Fejér dizisidir. Dolayısıyla $\lim_n\rho^p(x_n,q)$ mevcuttur ve $\Sigma_n\alpha_n\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n,\mathscr{S}x_n)<\infty$ elde edilir, buradan $\Sigma_n\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(z_n,\mathscr{S}z_n)<\infty$'dır. $\alpha_n,\beta_n\in[a,b]\subseteq[0,1]$ olduğundan $\Sigma_n\rho^p(x_n,\mathscr{S}x_n)<\infty$ ve $\lim_n\rho(x_n,\mathscr{S}x_n)=0$ olarak elde edilir.

■

Teorem 5.4. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam p-düzgün konveks uzay ve A, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $\mathscr{S}:A\to A$, (D) koşulu sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu takdirde $F(\mathscr{S})\neq\phi$'dır.*

İspat. $\{x_n\}$ dizisi JK-iterasyon yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Teorem 5.3'den $\{x_n\}$ sınırlı ve $\lim\rho(\mathscr{S}_n,x_n)=0$'dır. Lemma 3.1'den $A(C,\{x_n\})\neq\phi$ elde edilir. $p\in A(C,\{x_n\})$ olsun. Lemma 5.4'den

$$\begin{aligned}r(\mathscr{S}p,\{x_n\})&=\limsup_{n\to\infty}\rho(x_n,\mathscr{S}p)\\&\leq\limsup_{n\to\infty}(3\rho(\mathscr{S}x_n,x_n)+\rho(x_n,p))\\&=\limsup_{n\to\infty}\rho(x_n,p)\\&=r(p,\{x_n\})\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathscr{S}q\in A(\{x_n\})$'dir. Lemma 3.1'den $A(\{x_n\})$ tek elemanlıdır. Yani $Tp=p$ 'dır. ■

$\{x_n\}$ sınırlı bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bütün alt dizilerinin asimptotik merkezlerinin kümesi $\omega_\Delta(x_n)$ ile gösterilmektedir.

Teorem 5.5. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam p-düzgün konveks uzay ve A, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $\mathscr{S}:A\to A$, (D) koşulu sağlayan bir dönüşüm, $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset$*

$[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ *olmak üzere* $\{x_n\}$*, JK-iterasyon yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde* $x_n \xrightarrow{\Delta} x \in F(\mathcal{S})$*'dir.*

İspat. Teorem 5.3'den her $q^* \in F(\mathcal{S})$ için $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,q^*)$ vardır. Buradan $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır. $q\in\omega_\Delta(x_n)$ olsun. Dolayısıyla $x_{n_k}\xrightarrow{\Delta} q$ olacak şekilde $\{x_n\}$'nin bir alt dizisi vardır. Teorem 5.3'den $\lim_k \rho\left(x_{n_k},\mathcal{S}x_{n_k}\right)=0$'dır. Teorem 5.2'den $q\in F(\mathcal{S})$ olarak bulunur. Ayrıca, Teorem 5.3'den $\lim_n \rho(x_n,q)$ vardır ve Lemma 2.2'den $x_n\xrightarrow{\Delta} q$ elde edilir. ■

Son olarak, kuvvetli yakınsama teoremini ispatlayalım.

Teorem 5.6. $(\mathcal{M},\rho)$ *bir tam p-düzgün konveks uzay ve A,* $\mathcal{M}$*'nin kapalı konveks bir alt kümesidir,* $\mathcal{S}: A\to A$*,* (D) *koşulu sağlayan bir dönüşüm,* $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\subset[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ *olmak üzere* $\{x_n\}$*, JK-iterasyon yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde* $x_n\to x\in F(\mathcal{S})$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\liminf_{n\to\infty}\rho(x_n,F(\mathcal{S}))$ *olmasıdır.*

İspat. Teoremin gereklilik koşulu aşikar olduğundan yeterlilik şartı ispatlanacaktır. Bunun için ilk olarak $F(\mathcal{S})$'nin kapalı olduğunu gösterelim. Bunu görmek için $\{y_n\}$ $F(\mathcal{S})$ içinde bir dizi ve $y_n\to y\in\mathcal{M}$ olsun. $\rho(\mathcal{S}y,y_n)\le\rho(y,y_n)$ olduğundan $\lim_n y_n=\mathcal{S}y$'dır. Dolayısıyla $y=\mathcal{S}y$ ve $\mathcal{S}y\in F(\mathcal{S})$'dır. Dolayısıyla $F(\mathcal{S})$ kapalıdır. Teorem 5.3'den her $q\in F(\mathcal{S})$ için $\rho(x_{n+1},q)\le\rho(x_n,q)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,F(\mathcal{S}))$ vardır. Teoremin hipotezi gereği $\liminf_{n\to\infty}\rho(x_n,F(\mathcal{S}))=0$ ve buradan $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,F(\mathcal{S}))=0$'dır.

$\epsilon>0$ keyfi bir sayı olsun. Bu takdirde her $n\ge n_0$ için

$$\rho(x_n,F(\mathcal{S}))<\frac{\epsilon}{4}$$

olacak şekilde bir n_0 vardır. Özel olarak, $\inf\left\{\rho\left(x_{n_0},q^*\right):q^*\in F(\mathcal{S})\right\}<\frac{\epsilon}{4}$ olarak seçelim. Dolayısıyla

$$\rho\left(x_{n_0},q^{**}\right)<\frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $q^{**}\in F(\mathcal{S})$ vardır. Her $m,n\ge n_0$ için

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+m},x_n)&\le\rho(x_{n+m},q^{**})+\rho(q^{**},x_n)\\&\le 2\rho\left(x_{n_0},q^{**}\right)\\&\le 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)=\epsilon\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Buradan $\{x_n\}$ A içinde bir Cauchy dizisidir. $\mathcal{M}$ uzayının tamlığından $\{x_n\}$ kuvvetli yakınsaktır. $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,F(\mathcal{S}))=0$ olduğundan $\rho(q^*,F(\mathcal{S}))=0$ elde edilir. $F(\mathcal{S})$ 'nin kapalılığından $q^*\in F(\mathcal{S})$'dır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Aşağıda, yukarıda verilen teoremlerle ilgili örnekler verilmiştir.

ilk olarak, Örnek 5.3'te oluşturduğumuz uzayda genişlemeyen bir operatör örneği verilecektir.

Örnek 5.4. *$(\mathscr{M},\rho)$ Örnek 5.3'te tanımlanan uzay olsun. $\mathscr{S}:\mathscr{M}\to\mathscr{M}$, $\mathscr{S}(x_1,x_2)=(x_1,2x_1^p-x_2)$ tarafından tanımlansın. Bu takdirde, $\mathscr{S}$ dönüşümü genişlemeyen ve sabit nokta kümesi $F(\mathscr{S})=\{(x,x^p)\}$'dır. ρ_X metriğinin tanımından*

$$\begin{aligned}\rho_X(\mathscr{S}x,\mathscr{S}y)&=\sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+|x_1^p-(2x_1^p-x_2)-y_1^2+(2y_1^p-y_2)|^p}\\&=\sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+|-x_1^p+x_2+y_1^p-y_2|^p}\\&=\sqrt[p]{|x_1-y_1|^p+|x_1^p-x_2-y_1^p+y_2|^p}\\&=\rho_X(x,y)\end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla $\mathscr{S}$ dönüşümü genişlemeyendir. Teorem 5.4'den $F(\mathscr{S})\neq\phi$'dır. Aynı zamanda

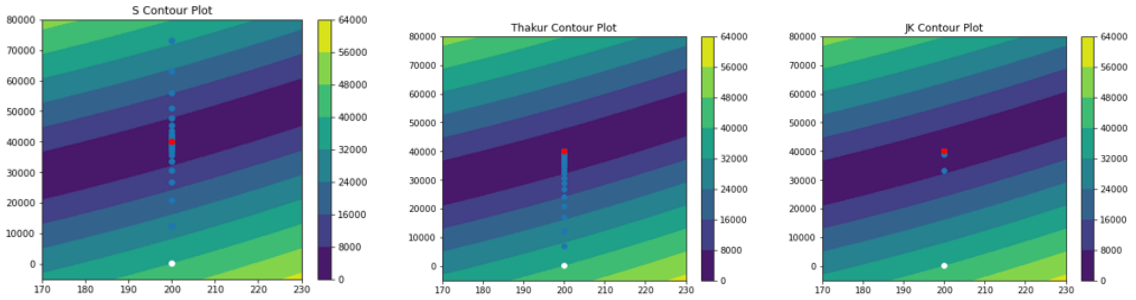
$$\begin{aligned}\mathscr{S}x=x&\Leftrightarrow\left(x_1,2x_1^p-x_2\right)=(x_1,x_2)\\&\Leftrightarrow x_1^P=x_2\end{aligned}$$

sağlanmaktadır. Dolayısıyla $F(\mathscr{S})=\{(x,x^p)\}$'dır. Diğer taraftan, klasik anlamda $\mathscr{S}$'nin genişlemeyen olmadığı ve $F(\mathscr{S})$'nin konveks olmadığı açık olarak görülmektedir.

Örneğin bundan sonraki kısmında, Python programı kullanılarak, farklı başlangıç noktaları alınarak $\mathscr{S}$ dönüşümünün sabit noktalarını elde etmek için JK iterasyonu [85], Thakur [82] ve S [81] iterasyonları ile tanımlanan diziler oluşturularak grafikleri çizilmiştir. $\alpha_n=\frac{n}{3n-1}$, $\beta_n=\frac{n}{4n+1}$ ve $\rho_{\mathscr{M}}(x_n,q)<10^{-6}$ şeklinde bir durdurma kriteri alınarak, $\mathscr{S}$'nin sabit bir noktasını elde etmek için gereken iterasyon sayısı incelenmiştir. Tablo 5.1 ve Şekil 5.2'de, JK iterasyonunun $\mathscr{S}$'nin sabit noktasına Thakur ve S iterasyonlarından daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir.

Tablo 5.1 S, Thakur ve JK-iterasyonlarının sabit noktalarını elde etmek için gerekli iterasyon sayısı

Başlangıç Noktası	S- iterasyonu	Thakur	JK-iterasyonu
(2,9)	90	90	10
(26,30)	117	117	13
(50,45)	136	124	14
(150,200)	139	139	15
(150,200)	139	139	15
(200,301)	136	136	16



Şekil 5.2 S, Thakur ve JK iterasyonlarının grafikleri

Aşağıda öncelikli olarak p-düzgün konveks metrik uzaylarda (D) koşulunu sağlayan dönüşümler için iki örnek verilecektir. Bunlardan ilki Örnek 5.3'de verilen uzayda ve ikincisi, 2-düzgün konveks metrik uzay R-ağaç (tree) olan uzaydan alınacaktır.

Örnek 5.5. *$(\mathscr{M},\rho)$ Örnek 5.3'te tanımlanan uzay olsun. B, $\mathscr{M}$'nin kapalı birim küresi ve $S(0,1)$, $\mathscr{M}$'nin birim küresi olsun. $\mathscr{S}: B \to B$ dönüşümü*

$$\mathscr{S}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}0, & x \in S(0,1) \\ 0, & x \notin S(0,1) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\mathscr{S}$ dönüşümü (D) koşulunu sağlamaktadır ancak (C) koşulunu [77] sağlamamaktadır.

İspat. $x = (0,1)$ ve $y = \left(0, \frac{2}{3}\right)$ olsun.

$$\frac{1}{2}\rho_X(x,\mathscr{S}x) = \frac{1}{2}\rho_X\left(0, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}0\right) = \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3} = \rho_X(x,y)$$
$$\rho_X(\mathscr{S}x,\mathscr{S}y) = \rho_X\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}0, 0\right) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \rho_X(x,y)$$

olduğundan $\mathscr{S}$ dönüşümü (C) koşulunu sağlamamaktadır. $\mathscr{S}$'nin (D) koşulunu sağladığını doğrulamak için aşağıdaki durumları göz önünde bulunduralım.

Durum I: $x \notin S(0,1)$ ve $y \in C(\mathscr{S},x)$ olsun. O zaman $y \notin S(0,1)$ ve

$$\rho(\mathscr{S}x,\mathscr{S}y) = 0 \leqslant \rho(x,y)$$

elde edilir.

Durum II: $x \in S(0,1)$ ve $y \in C(\mathscr{S},x)$ olsun. O halde, $y = Tp$ ve $\rho(Tp,p) \leq \rho(\mathscr{S},x)$ olacak şekilde $p \in B$ vardır. Ayrıca aşağıda verilen iki durum oluşmaktadır.

I. $p \in S(0,1)$. Bu durumda $y = \mathscr{S}p = \frac{1}{2}0 \oplus \frac{1}{2}p$ ve $\mathscr{S}y = 0$ olur. Dolayısıyla

$$\rho(\mathscr{S}x, \mathscr{S}y) = \rho\left(\frac{1}{2}0 \oplus \frac{1}{2}x, 0\right) = \frac{1}{2} = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = |\rho(x,0) - \rho(y,0)| \leq \rho(x,y)$$

elde edilir.

II. $p \notin S(0,1)$. Bu durumda $y = \mathscr{S}p = 0 = \mathscr{S}y$ olur. Dolayısıyla

$$\rho(\mathscr{S}x, \mathscr{S}y) = \rho\left(0, \frac{1}{2}0 \oplus \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2} \leqslant 1 = \rho(x,0) = \rho(x,y)$$

elde edilir ve $\mathscr{S}$ dönüşümü (D) koşulunu sağlar. ■

Örnek 5.6. *$\mathscr{M} = \mathbb{R}^2$ üzerinde $\rho_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ metriği tanımlansın.*

$$\rho_M(v,u) = \begin{cases} \|v-u\|_2, & \text{eğer } v = \mu u \quad \text{ise} \quad (\mu \in \mathbb{R}) \\ \|v\|_2 + \|u\|_2, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

$\left(\mathbb{R}^2, \rho\right)$'nin bir $\mathbb{R}$- ağaç metriği olduğu açıktır. Dolayısıyla $\left(\mathbb{R}^2, \rho\right)$ bir Hadamard uzayıdır [55].

A, (O) merkezli 2-yarıçaplı bir yuvar olsun. $\mathscr{S} : A \to A$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mathscr{S}x = \begin{cases} \frac{5}{8}x, & \rho(x,0) \geqslant 1 \\ \\ \frac{1}{2}x, & \rho(x,0) < 1. \end{cases}$$

$\mathscr{S}$ dönüşümü, (D) koşulunu sağlamaktadır ancak (C) koşulunu sağlamamaktadır.

İspat. Kabul edelim ki; $x = (\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}})$ ve $y = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ olsun. Bu durumda ρ_M metriğinin tanımından

$$\frac{1}{2}\rho_M(x, \mathscr{S}x) = \frac{1}{2}\rho_M\left((\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}), (\frac{2}{5\sqrt{2}}, \frac{2}{5\sqrt{2}})\right) = \frac{1}{5} = \rho_M(x,y)$$
$$\rho_M(\mathscr{S}x, \mathscr{S}y) = \rho_M\left((\frac{2}{5\sqrt{2}}, \frac{2}{5\sqrt{2}}), (\frac{5}{8\sqrt{2}}, \frac{5}{8\sqrt{2}})\right) = \frac{9}{40} > \frac{1}{5} = \rho_M(x,y)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\mathscr{S}$ dönüşümü (C) koşulunu sağlamaz. Şimdi $\mathscr{S}$ dönüşümünün (D) koşulunu sağladığını gösterelim. $x \neq \mu y$ için $\mathscr{M}$ üzerindeki ρ_M tanımına göre

$$\rho_M(\mathscr{S}x, \mathscr{S}y) \leq \rho_M(x,y)$$

sağlanmaktadır. $x = \mu y$ için, aşağıdaki durumlar oluşmaktadır.

Durum I: Kabul edelim ki; $\rho_M(x,0) \geqslant 1$, $y \in C(\mathscr{S},x)$ ve $\rho_M(y,0) \geqslant 1$ olsun. Bu takdirde

$$\rho_M(\mathscr{S}x,\mathscr{S}y) = \left\|\frac{5}{8}y - \frac{5}{8}x\right\| = \frac{5}{8}\|y-x\| \leqslant \|y-x\| = \rho_M(x,y)$$

elde edilir.

Durum II: $\rho_M(x,0) \geqslant 1$, $y \in C(\mathscr{S},x)$ ve $\rho_M(y,0) < 1$ olsun. Bu takdirde $y = \mathscr{S}p$ ve $\rho_M(\mathscr{S}p,p) \leq \rho_M(\mathscr{S}x,x)$ olacak şekilde $p \in A$ vardır. $\|p\| \geqslant 1$ olduğunda $\left\|\frac{3}{8}p\right\| \leq \left\|\frac{3}{8}x\right\|$ iken ve $\|p\| < 1$ olduğunda $\left\|\frac{p}{2}\right\| \leq \left\|\frac{3}{8}x\right\|$ olmaktadır. Dolayısıyla, Durum I ve Durum II'den aşağıdaki sonuç elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}\rho_M(\mathscr{S}y,\mathscr{S}x) = \|\mathscr{S}y - y + y - \mathscr{S}x\| &= \|\mathscr{S}y - y\| + \|y - \mathscr{S}x\| \\ &\leqslant \|\mathscr{S}x - x\| + \|y - \mathscr{S}x\| \\ &\leqslant \|x - y\|.\end{aligned}$$

Durum III: $\rho_M(x,0) \leq 1$ ve $y \in C(\mathscr{S},x)$ olsun. Bu takdirde, $p \in A$ vardır, öyle ki $y = \mathscr{S}p$ ve $\rho_M(\mathscr{S}p,p) \leq \rho_M(\mathscr{S}x,x)$ sağlanmaktadır. Bu da $\rho_M(y,0) \leq 1$ anlamına gelir. Dolayısıyla

$$\rho_M(\mathscr{S}x,\mathscr{S}y) = \left\|\frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right\| \leq \|x-y\| \leq \rho_M(x,y)$$

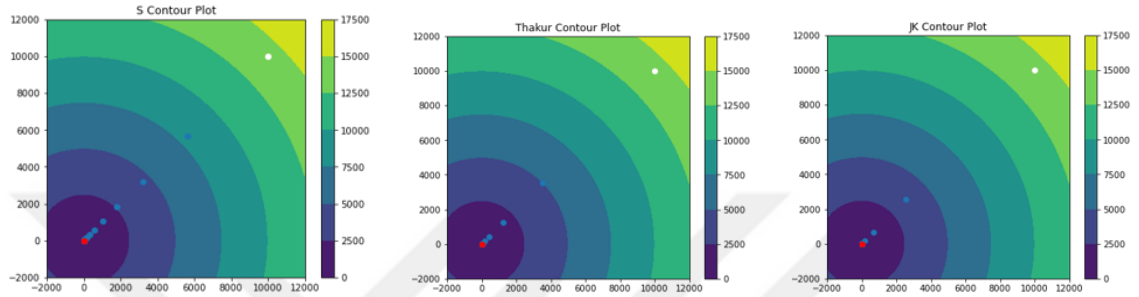
elde edilir. Bu nedenle, $\mathscr{S}$, (D) koşulunu sağlamaktadır. Aşağıda verilen tablo ve grafiklerde; Python programını kullanarak, farklı başlangıç noktaları için $\mathscr{S}$ sabit noktalarını elde etmek için JK iterasyonu, Thakur ve S iterasyonları ile tanımlanan dizileri oluşturup grafiğini çizdik. $\alpha_n = \frac{n}{7n-1}$, $\beta_n = \frac{n}{2n+1}$ ve $\rho_{\mathscr{M}}(x_n,q) < 10^{-6}$ bir durdurma kriteri alarak, $\mathscr{S}$ 'nin sabit bir noktasını elde etmek için gereken iterasyon sayısını inceledik. Tablo 5.2 ve Şekil 5.3, JK iterasyonunun $\mathscr{S}$ dönüşümünün sabit noktasına Thakur ve S iterasyonlarından daha hızlı yakınsadığını göstermektedir. ■

5.2 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Ortalama Genişlemeyen Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu alt bölümde, p-düzgün konveks metrik uzaylarda ortalama genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların varlığı incelenmiştir. Ayrıca, p-düzgün konveks metrik uzaylarda ortalama genişlemeyen dönüşümler için yarı kapalılık prensibi

Tablo 5.2 S, Thakur ve JK-iterasyonlarının sabit noktalarını elde etmek için gerekli iterasyon sayısı

Başlangıç Noktası	S- iterasyonu	Thakur	JK-iterasyonu
(1,1)	22	12	10
(5,5)	25	14	12
(10,10)	27	15	12
(100,100)	36	19	16
(1000,1000)	36	20	16
(10000,10000)	41	22	18



Şekil 5.3 S, Thakur ve JK iterasyonları ile tanımlanan diziler

elde edilmiştir. Daha sonra, p-düzgün konveks metrik uzaylarda uygun koşullar altında ortalama genişlemeyen dönüşümler için Karakaya iterasyon yönteminin Δ-yakınsaklık teoremi ve kuvvetli yakınsaklık teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca, p-düzgün konveks metrik uzaylarda bu sınıfın yeni örnekleri inşa edilmiştir. Son olarak, sonuçlarımızın sayısal doğruluğunu göstermek için, verilen örneklerde Karakaya iterasyon yönteminin S [81] ve Thakur iterasyon [82] yöntemlerinin her birinden daha etkili olduğu gösterilmiştir.

5.2.1 Ortalama Genişlemeyen Dönüşümlerin Sınıfı

Zhang [93] 1975 yılında yaptığı çalışmada, Banach uzaylarında ortalama genişlemeyen dönüşüm kavramını ortaya koyarak genişlemeyen dönüşüm kavramını genelleştirmiştir. Zhang [93] ayrıca normal yapıya sahip Banach uzaylarında bu tür dönüşümler için sabit noktaların varlığını ve tekliğini ortaya koymuştur. Daha sonra, Wu ve Zhang [94] ile Yang ve Cui'nin [95] çalışmalarında görüldüğü üzere, ortalama genişlemeyen dönüşümler yoğun bir çalışma konusu olmuştur. 2010 yılında Nakprasit [96] ortalama genişlemeyen ancak Suzuki-Genelleştirilmiş genişlemeyen olmayan bir dönüşüm örneği sunmuş ve artan ortalama genişlememenin Suzuki-Genelleştirilmiş genişlememeye yol açtığını göstermiştir.

Tanım 5.2. $(\mathscr{M},\rho)$ bir metrik uzay, A, $\mathscr{M}$'in boş olmayan bir alt kümesi ve $\mathscr{S} : A \to A$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in A$ için $a + b \leq 1$ şartını sağlayan negatif olmayan

a ve b reel sayıları var ise

$$\rho(\mathcal{S}x, \mathcal{S}y) \leq a\rho(x, y) + b\rho(x, \mathcal{S}y)$$

koşulunu sağlayan $\mathcal{S}$ dönüşümüne ortalama genişlemeyen (mean nonexpansive) dönüşüm denir [93].

Genişlemeyen dönüşümlerin ortalama genişlemeyen dönüşümler olduğu kolayca görülebilir. Ortalama genişlemeyen bir dönüşümün sürekli olması gerekmez. Dolayısıyla genişlemeyen dönüşüm olmayabilir. Aşağıda bu durumu açıklayan bir örnek verilmiştir.

Örnek 5.7. *$\mathcal{S} : [0, 5] \to [0, 2]$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.*

$$\mathcal{S}x = \begin{cases} 2, & x \in [0, 4], \\ 1, & x \in [4, 5], \\ 0, & x = 5. \end{cases}$$

Bu takdirde, $a = 1/2$, $b = 1/2$ olmak üzere $\mathcal{S}$ ortalama genişlemeyendir [96]. Ancak $\mathcal{S}$ dönüşümü $x = 4$ noktasında sürekli değildir. Dolayısıyla $\mathcal{S}$ genişlemeyen bir dönüşüm değildir. 2008'de Suzuki [77], genişlemeyen operatörlerin bir uzantısı olarak (C) dönüşümlerinin sınıfını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 5.3. $(\mathcal{M}, \rho)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{S} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ bir (C) operatörü olsun. Bu takdirde, her $x, y \in \mathcal{M}$ için

$$\frac{1}{2}\rho(x, \mathcal{S}x) \leq \rho(x, y) \Rightarrow \rho(\mathcal{S}x, \mathcal{S}y) \leq \rho(x, y)$$

sağlanmaktadır [77].

$x, y \in C$ olsun. Nakprasit [96]'deki çalışmasında, Örnek 5.7'de verilen dönüşümün ortalama genişlemeyen olduğunu ancak Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen olmadığını ve artan ortalama genişlemeyen dönüşümlerin Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler olduğunu göstermiştir.

5.2.2 Ortalama Genişlemeyen Dönüşümler için Sabit Noktaların Varlığı ve Yarı Kapalılık Prensibi

İlk olarak, p-düzgün konveks metrik uzaylarda ortalama genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların varlığını ele alalım.

Teorem 5.7. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir tam p-düzgün konveks metrik uzay olsun. C, $\mathscr{M}$'nin sınırlı, kapalı ve boş olmayan konveks bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $b<1$ olan herhangi bir ortalama genişlemeyen $\mathscr{S}: C\to C$ dönüşümünün bir sabit noktası vardır.*

İspat. Her $w\in C$ için aşağıdaki kümeyi tanımlayalım:

$$A(w)=\left\{b\in\mathbb{R}^{+}:\exists u\in C,\exists k\in\mathbb{N};\forall i>k:\rho\left(\mathscr{S}^{i}w,u\right)\leq b\right\}.$$

Burada $\operatorname{diam}(C)\in A(w)$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla $A(w)$ boş değildir. $\alpha_w:=\inf A(w)$ olsun. $\xi>0$ keyfi bir sayı olarak alalım. $b_\xi<\alpha_w+\xi$ olacak şekilde bir $b_\xi\in A(w)$ vardır. Dolayısıyla her $i\geq k$ için

$$\rho\left(\mathscr{S}^{i}w,u\right)\leq b_\xi<\alpha_w+\xi \tag{5.5}$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $u\in A$ ve $k\in\mathbb{N}$ vardır. $\alpha_w\geq 0$ olduğu aşikardır. Buradan iki durum oluşmaktadır.

Durum 1. $\alpha_w=0$. Bu durumda her $\varepsilon>0$ için $\xi=\varepsilon/2$ alalım. (5.5)'den bir $u\in C$ ve $k\in\mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\rho\left(\mathscr{S}^{m}w,\mathscr{S}^{n}w\right)\leq\rho\left(\mathscr{S}^{m}w,u\right)+\rho\left(\mathscr{S}^{n}w,u\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{\mathscr{S}^{n}w\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir ve bir $z\in C$ noktasına yakınsar. z, $\mathscr{S}$ dönüşümünün bir sabit noktası olduğu açık olarak görülmektedir.

Durum 2. $\alpha_w>0$. Her $n\geq 1$ için

$$D_n:=\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{i\geq k}\bar{U}\left(\mathscr{S}^{i}y,\alpha_w+\frac{1}{n}\right),\quad E_n:=\overline{D_n}\cap D$$

şeklinde tanımlayalım. (5.5) eşitsizliğinde $\xi=\frac{1}{n}$ alındığında her $k\geq 1$ için bir $x\in C$ vardır öyle ki

$$x\in\bigcap_{i\geq k}\bar{U}\left(\mathscr{S}^{i}v,\alpha_w+\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Bu nedenle E_n boş küme değildir. Ayrıca $\{E_n\}$ boş olmayan sınırlı kapalı konveks alt kümelerin azalan bir dizisidir. $\mathscr{M}$ uzayı düzgün konveks olduğundan $E:=\cap_{n\geq 1}E_n\neq\emptyset$'dır (bkz. [64]). Her $u\in E$ için

$$\lim_{m\to\infty}\rho\left(\mathscr{S}^{m}w,u\right)=\alpha_w$$

olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca her $u\in E$ için $\{\mathscr{S}^{n}u\}$ bir Cauchy dizisidir. Aksi

takdirde,

$$\rho\left(\mathscr{S}^i u, \mathscr{S}^j u\right) \geq \varepsilon_0, \quad \forall i, j \geq N_0 \quad i \neq j \tag{5.6}$$

sağlayan bir $\varepsilon_0 > 0$ ve $N_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (5.6)'da verilen ε_0 için öyle bir $\xi > 0$ vardır ki

$$\left(\alpha_y + \xi\right)^p < \alpha_w^p + \frac{c}{4}\varepsilon_0^p$$

sağlanmaktadır. (5.6)'dan her $i, j \geq N_0$, $i \neq j$ için bir $K \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\rho\left(\mathscr{S}^m w, u\right) < \alpha_v + \xi, \forall m \geq K \tag{5.7}$$

olur. (5.7)'den ve $\mathscr{S}$ ortalama genişlemeyen olduğundan $m > i + j$ için

$$\begin{aligned}
\rho\left(\mathscr{S}^i u, \mathscr{S}^m w\right) &\leq a\rho\left(\mathscr{S}^{i-1} u, \mathscr{S}^{m-1} w\right) + b\rho\left(\mathscr{S}^{i-1} u, \mathscr{S}^m w\right) \\
&\leq \sum_{r=0}^{i} C(i,r) a^{i-r} b^r \rho\left(u, \mathscr{S}^{m-i+r} w\right) \\
&\leq (a+b)^i \left(\alpha_v + \xi\right) \\
&\leq \alpha_w + \xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C(i,r)$ kombinasyon sayısını göstermektedir. Benzer şekilde, her $m > j + K$ için $\rho\left(\mathscr{S}^j u, \mathscr{S}^m w\right) \leq \alpha_w + \xi$ yazılabilir. (2.1), (5.7) ve (5.5)'den her $m > \max\{i, j\} + K$ için

$$\begin{aligned}
\rho\left(\mathscr{S}^m v, \frac{\mathscr{S}^i u \oplus \mathscr{S}^j u}{2}\right)^p &\leq \frac{1}{2}\rho\left(\mathscr{S}^m v, \mathscr{S}^i u\right)^p + \frac{1}{2}\rho\left(\mathscr{S}^m v, \mathscr{S}^j u\right)^p - \frac{1}{2^p}\rho\left(\mathscr{S}^i u, \mathscr{S}^j u\right)^p \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\alpha_v + \xi\right)^p + \frac{1}{2}\left(\alpha_v + \xi\right)^p - \frac{c}{4}\varepsilon_0^p \\
&\leq \alpha_w^p
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Kabul edelim ki; $z := \frac{\mathscr{S}^i u \oplus \mathscr{S}^j u}{2} \in C$ olsun. m yeterince büyük ise (5.7) eşitsizliği sağlanır. Ancak $\alpha_w = \inf A(w)$ olarak elde edilir ve çelişki bulunur. Bu nedenle, her $u \in D$ için $\{\mathscr{S}^n u\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir . $\mathscr{M}$ uzayının tamlığından $\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}^n u = v$ eşitliğini sağlayan bir $v \in C$ vardır. Ortalama genişlemeyen tanımı kullanılarak

$$\rho\left(\mathscr{S}^n u, \mathscr{S} v\right) \leq a\rho\left(\mathscr{S}^{n-1} u, v\right) + b\rho\left(\mathscr{S}^{n-1} u, \mathscr{S} v\right)$$

denklemi elde edilir. Her iki tarafın limiti alındığında $\rho(v, \mathscr{S} v) \leq b\rho(v, \mathscr{S} v)$ bulunur ve $b < 1$ olduğundan $v = \mathscr{S} v$ elde edilir. Böylece v, $\mathscr{S}$'nin sabit bir noktasıdır. ■

Şimdi p-düzgün konveks metrik uzaylarda ortalama genişlemeyen dönüşümün, Göhde [97] tarafından düzgün konveks Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşümler için belirtildiği gibi kapalılık prensibini kanıtlayalım.

$C \subset \mathscr{M}$ kapalı konveks bir alt küme olsun. $\{u_n\}$ dizisi C kümesinde sınırlı bir dizi olsun. $\theta(u) = \limsup_{n\to\infty} \rho(u_n, u)$ şeklinde tanımlayalım.

Teorem 5.8. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir tam p-düzgün konveks metrik uzay ve C, $\mathscr{M}$'nin sınırlı, kapalı, boş olmayan konveks bir alt kümesi olsun. $\mathscr{S} : C \to C$ ortalama genişlemeyen bir dönüşüm ve $\{u_n\}$, C içinde bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, \mathscr{S}u_n) = 0$ ve $u_n \xrightarrow{\Delta} v$ ise $\mathscr{S}(v) = v$'dir.*

İspat. $\{u_n\}$ yaklaşık bir sabit nokta dizisi olduğundan her $m \geq 1$ için

$$\theta(u) = \limsup_{n\to\infty} \rho(\mathscr{S}^m u_n, u) \tag{5.8}$$

sağlanır. Her $u \in C$ için $(\mathscr{S}^m u) \leq \theta(u)$ olduğunu ispatlayalım. Eğer $m = 1$ alınırsa ortalama genişlemeyen dönüşümün tanımı gereği ve ve (5.8)'den

$$\begin{aligned}\theta(\mathscr{S}u) &= \limsup_{n\to\infty} \rho(\mathscr{S}u_n, \mathscr{S}u) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} [a\rho(u_n, u) + b\rho(u_n, \mathscr{S}u)] \\ &= a\theta(u) + b\theta(\mathscr{S}u)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\theta(\mathscr{S}u) \leq \frac{a}{1-b}\theta(u)$ olur. $a + b \leq 1$ olduğundan $\theta(\mathscr{S}u) \leq \theta(u)$'dır. Şimdi her $k < m$ için $\theta(\mathscr{S}^m u) \leq \theta(u)$ sağladığını kabul edelim. O halde

$$\begin{aligned}\theta(\mathscr{S}^m u) &= \limsup_{n\to\infty} \rho(\mathscr{S}^m u_n, \mathscr{S}^m u) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{m} C(m,r) a^{m-r} b^r \rho\left(u_n, \mathscr{S}^{m-r} u\right) \\ &= \sum_{r=0}^{m} C(m,r) a^{m-r} b^r \theta\left(\mathscr{S}^{m-r} u\right) \\ &\leq \left(\sum_{r=0}^{m-1} C(m,r) a^{m-r} b^r \theta(u) + b^m \theta(\mathscr{S}^m u)\right) \\ &= [(a+b)^m - b^m]\theta(u) + b^m \theta(\mathscr{S}^m u)\end{aligned}$$

elde edilir ve burada $C(m,r)$ kombinasyon sayısını göstermektedir. $a + b \leq 1$ olduğundan $\theta(\mathscr{S}^m u) \leq \theta(u)$ bulunur. Buradan

$$\lim_{m\to\infty} \theta(\mathscr{S}^m v) \leq \theta(v) \tag{5.9}$$

elde edilir. $\{\mathscr{S}^m v\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Aksi takdirde her $n \neq m$ için

$$\rho(\mathscr{S}^n v, \mathscr{S}^m v) \geq \varepsilon_0$$

sağlayacak bir ε_0 sayısı vardır. Bunun için öyle bir $\xi > 0$ vardır ki

$$(\theta(v)+\xi)^p < \theta(v)^p + \frac{c\varepsilon_0^p}{4} \tag{5.10}$$

olur. $\theta(u)$ fonksiyonunun tanımından ve (5.9)'dan her $m \geq r$ ve her $n \geq s$ için

$$\rho\left(\mathscr{S}^m v, x_n\right) < \theta(v)+\xi \tag{5.11}$$

denklemini sağlayan bir $r,s \in \mathbb{N}$ vardır.

(2.1), (5.10) ve (5.11) denklemleri kullanılarak her $m_1, m_2 \geq r$ için

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\mathscr{S}^{m_1}v \oplus \mathscr{S}^{m_2}v}{2}, x_n\right)^p &\leq \frac{1}{2}\rho\left(\mathscr{S}^{m_1}v, x_n\right)^p + \frac{1}{2}\rho\left(\mathscr{S}^{m_2}v, x_n\right)^p - \frac{1}{2^p}\rho\left(\mathscr{S}^{m_1}v, \mathscr{S}^{m_2}v\right)^p \\ &\leq \frac{1}{2}(\theta(v)+\xi)^p + \frac{1}{2}(\theta(v)+\xi)^p - \frac{c}{4}\varepsilon_0^p \\ &< \theta(v)^p\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelim ki; $z = \frac{\mathscr{S}^{m_1}v \oplus \mathscr{S}^{m_2}v}{2}$ olsun. Bu takdirde $z \in C$ ve $z \neq v$ olur ve bu durum $\theta(v) = \inf_{x\in C}\theta(x)$ ile çelişir. Bu yüzden $\{\mathscr{S}^m v\}$ dizisinin yakınsak bir $\{\mathscr{S}^{m_i}v\}$ alt dizisi vardır. $\mathscr{S}^{m_i}v \to v'$ olsun. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty}\rho\left(v', x_n\right) = \limsup_{n\to\infty}\lim_{i\to\infty}\rho\left(\mathscr{S}^{m_i}v, x_n\right) = \lim_{i\to\infty}\theta\left(\mathscr{S}^{m_i}v\right) \leq \theta(v)$$

elde edilir. Ancak $\theta(v) = \inf_{u\in C}\theta(x)$ olduğundan $v' = v$'dir. Bu nedenle $\mathscr{S}^{m_i}v \to v$ yakınsar. Ortalama genişlemeyen dönüşümün tanımından

$$\rho\left(\mathscr{S}^{m_i}v, \mathscr{S}v\right) \leq a\rho\left(\mathscr{S}^{m_i-1}v, v\right) + b\rho\left(\mathscr{S}^{m_i-1}v, \mathscr{S}v\right)$$

yazılabilir. Her iki tarafin limiti alınırsa $\rho(v, \mathscr{S}v) \leq b\rho(v, \mathscr{S}v)$ elde edilir. Fakat $b < 1$ olduğundan $v = Tv$ elde edilir ve v, $\mathscr{S}$'nin sabit bir noktasıdır.

■

5.2.3 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Ortalama Dönüşümlerin Yakınsaklığı

Tanım 5.4. $(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay ve K, $\mathscr{M}$'nin boş olmayan konveks bir alt kümesi olsun. $\mathscr{S} : K \to K$ bir dönüşüm ve $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1]$

aralığında reel diziler olmak üzere Karakaya iterasyon yöntemi

$$\begin{cases} x_1 \in A \\ y_n = \mathscr{S}((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n \mathscr{S} x_n), \\ x_{n+1} = \mathscr{S}((1-\alpha_n)\mathscr{S} x_n \oplus \alpha_n \mathscr{S} y_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5.12}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [86].

Teorem 5.9. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir tam p-düzgün konveks uzay ve $\mathscr{S} : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ ortalama genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ reel dizileri aşağıda verilen koşullardan birini sağlasın:*

(a) $0 < \liminf_n \beta_n \leq \limsup_n \beta_n < 1$ *ve* $\liminf_n \alpha_n > 0$.

(b) $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$ *ve her* $n \geq 1$ *için* $\beta_n = 0$.

$\{x_n\}$ dizisi Karakaya iterasyon yöntemi ile tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde $x_n \xrightarrow{\Delta} q \in \mathrm{F}(\mathscr{S})$ *ve* $q = \lim_n \pi_{F(\mathscr{S})} x_n$ *olur.*

İspat. (2.1) eşitsizliğinden her $n > 1$ ve her $q \in \mathrm{F}(\mathscr{S})$ için

$$\begin{aligned} \rho^p(y_n, q) &= \rho^p(\mathscr{S}((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n \mathscr{S} x_n), q) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho^p(x_n, q) + \beta_n \rho^p(\mathscr{S} x_n, q) - C\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} x_n) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho^p(x_n, q) + \beta_n \rho^p(x_n, q) - C\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} x_n) \\ &= \rho^p(x_n, q) - C\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} x_n) \end{aligned}$$

elde edilir ve ayrıca

$$\begin{aligned} \rho^p(x_{n+1}, q) =& \rho^p(\mathscr{S}((1-\alpha_n)\mathscr{S} x_n \oplus \alpha_n \mathscr{S} y_n), q) \\ \leq& (1-\alpha_n)\rho^p(x_n, q) + \alpha_n \rho^p(\mathscr{S} y_n, q) - C\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} y_n) \\ \leq& (1-\alpha_n)\rho^p(x_n, q) + \alpha_n \rho^p(y_n, q) - C\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} y_n) \\ \leq& (1-\alpha_n)\rho^p(x_n, q) + \alpha_n \rho^p(x_n, q) - C\alpha_n\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} x_n) \\ & - C\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} y_n) \end{aligned} \tag{5.13}$$

olur. Buradan $\rho(x_{n+1}, q) \leq \rho(x_n, q)$ bulunur ve $\{x_n\}$, $\mathrm{F}(\mathscr{S})$'ye göre bir Fejér dizisidir. Dolayısıyla $\lim_n \rho^p(x_n, q)$ mevcuttur. Ayrıca $\Sigma_n \alpha_n \beta_n (1-\beta_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} x_n) < \infty$ ve $\Sigma_n \alpha_n (1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \mathscr{S} y_n) < \infty$ dır. (a) ya da (b) koşulundan $\Sigma_n \rho^p(x_n, \mathscr{S} x_n) < \infty$ elde edilir. Böylece $\lim_n \rho(x_n, \mathscr{S} x_n) = 0$ olur. Şimdi, $x_n \xrightarrow{\Delta} q \in \mathrm{F}(\mathscr{S})$ olduğunu ispatlayalım. (5.13) eşitsizliğinden her $q' \in \mathrm{F}(\mathscr{S})$ için $\lim_n \rho(x_n, q')$ mevcuttur.

$\omega_{\Delta}(\{x_n\}) \subset \mathrm{F}(\mathscr{S})$ olduğunu gösterelim. $q \in \mathscr{M}$ ve $\{x_{n_k}\}$ dizisi $x_{n_k} \xrightarrow{\Delta} q$ olmak üzere $\{x_n\}$'nin bir alt dizisi olsun. Teorem 5.8'den ve $\lim_n \rho(x_n, \mathscr{S}x_n) = 0$ 'dan $q \in \mathrm{F}(\mathscr{S})$ bulunur. Dolayısıyla Lemma 2.2'den $x_n \xrightarrow{\Delta} q$ yakınsamaktadır. Son olarak $\lim_n \pi_{F(\mathscr{S})} x_n = q$ olduğunu ispatlayalım. Teorem 5.6'dan $F(\mathscr{S})$ kapalı ve konvekstir. Buradan Teorem 3.1'den $\pi_{F(\mathscr{S})}$ iz düşümü ile iyi tanımlanmıştır. $u_n := \pi_{F(\mathscr{S})} x_n$ olsun. Teorem 5.6'dan $\{u_n\}$'nin $\mathrm{F}(\mathscr{S})$ içinde bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. Dolayısıyla bazı $u \in \mathrm{F}(\mathscr{S})$ için $\lim_n u_n = u$ olur. Ayrıca, Teorem 3.1'den

$$\rho^p(x_n, u_n) \leq \rho^p(x_n, u_n) + C\rho^p(u_n, q) \leq \rho^p(x_n, q)$$

denklemi sağlanır ve

$$\limsup_n \rho(x_n, u) \leq \limsup_n \rho(x_n, q)$$

elde edilir. $x_n \xrightarrow{\Delta} q$ olduğundan $\lim_n u_n = u = q$ bulunur ve ispat tamamlanır.

■

Teorem 5.10. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir tam p-düzgün konveks uzay ve $\mathscr{S} : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ ortalama genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ reel dizileri aşağıda verilen koşullardan birini sağlasın:*

(a) $0 < \liminf_n \beta_n \leq \limsup_n \beta_n < 1$ *ve* $\liminf_n \alpha_n > 0$

(b) $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$ *ve her* $n \geq 1$ *için* $\beta_n = 0$.

$\{x_n\}$, Karakaya iterasyon yöntemi ile tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde $x_n \to x \in F(\mathscr{S})$ olması için gerek ve yeter koşul $\liminf_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S}))$ *olmasıdır.*

İspat. Teoremin gereklilik koşulu aşikardır. Bu nedenle yeterlilik koşulu ispatlanacaktır. İlk olarak $F(\mathscr{S})$'nin kapalı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki; $\{y_n\}$, $F(\mathscr{S})$ içinde bir dizi ve $y_n \to y \in \mathscr{M}$ olsun. $\rho(\mathscr{S}y, y_n) \leq \rho(y, y_n)$ olduğundan $\lim_n y_n = \mathscr{S}y$'dır. Dolayısıyla $y = \mathscr{S}y$ ve $\mathscr{S}y \in F(\mathscr{S})$'dir ve $F(\mathscr{S})$ kapalıdır. Teorem 5.9'dan her $q \in F(\mathscr{S})$ için $\rho(x_{n+1}, q) \leq \rho(x_n, q)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S}))$ vardır. Teoremin hipotezi gereği; $\liminf_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S})) = 0$'dır. Buradan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, F(\mathscr{S})) = 0$'dır. $\epsilon > 0$ keyfi bir sayı olsun. Bu takdirde, her $n \geq n_0$

$$\rho(x_n, F(\mathscr{S})) < \frac{\epsilon}{4}$$

olacak şekilde bir n_0 vardır. Özel olarak, $\inf\{\rho(x_{n_0}, q^*) : q^* \in F(\mathscr{S})\} < \frac{\epsilon}{4}$ olarak alınırsa

$$\rho(x_{n_0}, q^{**}) < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $q^{**} \in F(\mathscr{S})$ vardır. Her $m, n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}\rho\left(x_{n+m}, x_n\right) &\leq \rho\left(x_{n+m}, q^{**}\right) + \rho\left(q^{**}, x_n\right) \\ &\leq 2\rho\left(x_{n_0}, q^{**}\right) \\ &\leq 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan $\{x_n\}$, K içinde bir Cauchy dizisidir. $\mathscr{M}$ uzayının tamlığından $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsaktır. $\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n, F(\mathscr{S})\right) = 0$ olduğundan $\rho\left(q^*, F(\mathscr{S})\right) = 0$'dır. $F(\mathscr{S})$ 'nin kapalılığından $q^* \in F(\mathscr{S})$'dır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 5.8. *$\mathscr{M} = \mathbb{R}^2$ üzerinde $\rho_{\mathscr{M}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ metriği tanımlansın.*

$$\rho_{\mathscr{M}}(v, \upsilon) = \begin{cases} \|v - \upsilon\|_2, & \text{eğer } v = \mu\upsilon \quad ise \quad (\mu \in \mathbb{R}) \\ \|v\|_2 + \|\upsilon\|_2, & \text{diğer durumda.} \end{cases}$$

$\left(\mathbb{R}^2, \rho\right)$'nin bir $\mathbb{R}$- ağaç metriği olduğu açıktır. Dolayısıyla $\left(\mathbb{R}^2, \rho\right)$ bir Hadamard uzayıdır [55].

K, (O) merkezli kapalı birim küre olsun. $\mathscr{S} : K \to K$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mathscr{S}u = \begin{cases} \dfrac{1}{5}u, & \rho(u, 0) \geqslant \dfrac{1}{500} \\ \\ 0, & \rho(u, 0) < \dfrac{1}{500}. \end{cases}$$

$a = 1/4 = b$ için aşağıdaki durumlar elde edilir.

(i) $0 \leq ||t||, ||\theta|| < 1/515$ olsun. Bu takdirde

$$\rho(\mathscr{S}t, \mathscr{S}s) = 0 \leq a||t - s|| + b||t - \mathscr{S}s||$$

sağlanmaktadır.

(ii) $1/515 \leq ||t||, ||s|| \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} a||t - s|| + b||t - \mathscr{S}s|| &= \frac{1}{4}||t - s|| + b||t - \frac{s}{5}|| \\ &\geq \frac{1}{4}||t - s|| \\ &\geq \frac{1}{5}||t - s|| \\ &= ||\mathscr{S}t - \mathscr{S}s|| \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $0 \leq ||s|| < 1/515$ ve $1/515 \leq ||r|| \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} a||r-s|| + b||r-\mathscr{S}s|| &= a||r-s|| + \frac{1}{4}||r-0|| \\ &\geq \frac{1}{4}||r|| \\ &\geq \frac{1}{5}||r|| \\ &= ||\mathscr{S}r - \mathscr{S}s|| \end{aligned}$$

ve

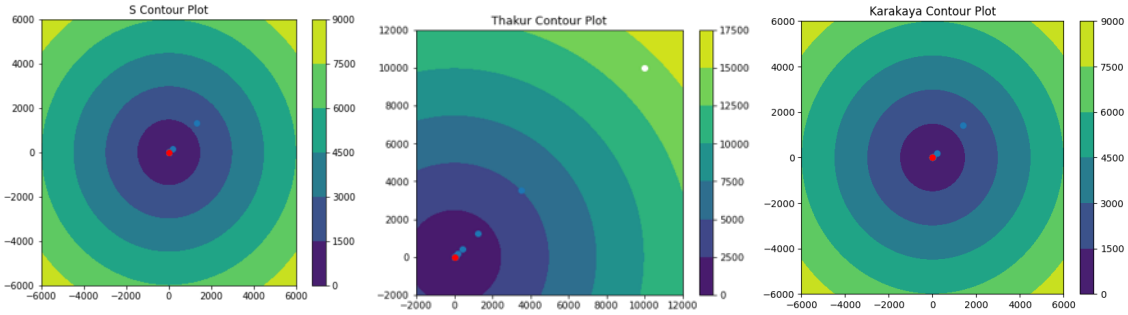
$$\begin{aligned} a||r-s|| + b|r-\mathscr{S}s| &= \frac{1}{4}||r-s|| + \frac{1}{4}||r-\frac{s}{5}|| \\ &\geq \frac{1}{4}||(r-s)-\left(r-\frac{s}{5}\right)|| \\ &= \frac{1}{4}||\frac{4s}{5}|| = \frac{1}{5}||s|| = ||\mathscr{S}r - \mathscr{S}s|| \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathscr{S}$ dönüşümü ortalama genişlemeyendir. Şimdi, Python programını kullanılarak farklı başlangıç noktaları için $\mathscr{S}$ sabit noktalarını elde etmek için S ve Ishikawa iterasyonları ile tanımlanan dizileri oluşturularak grafik gösterimleri verilecektir. $\alpha_n = \frac{n}{3n-1}$, $\beta_n = \frac{n}{4n+1}$ ve $d_{\mathscr{M}}(x_n, q) < 10^{-6}$ bir durdurma kriteri olarak alınarak, $\mathscr{S}$'nin sabit bir noktasını elde etmek için gereken iterasyon sayısı incelenmiştir.

Tablo 5.3 ve Şekil 5.4 Karakaya iterasyonunun S dönüşümünün sabit noktasına S ve Thakur iterasyonlarından daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir.

Tablo 5.3 S, Thakur ve Karakaya iterasyonlarının sabit noktalarını elde etmek için gerekli iterasyon sayısı

Başlangıç Noktası	**S- iterasyonu**	**Thakur**	**Karakaya iterasyonu**
(1,1)	22	12	10
(1,1)	22	12	10
(5,5)	25	13	12
(10,10)	27	14	13
(100,100)	36	20	16
(1000,1000)	36	22	20
(10000,10000)	41	27	25



Şekil 5.4 S, Thakur ve Karakaya iterasyonları ile tanımlanan diziler

6
P-DÜZGÜN KONVEKS METRİK UZAYLARDA AĞIRLIKLI ORTALAMA İZ DÜŞÜMLERİN YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde ilk olarak, p-düzgün konveks metrik uzaylarda ağırlıklı ortalama iz düşüm dizisi için bazı eşitsizlikler tanımlanmıştır. Bu eşitsizlikler kullanılarak, ağırlıklı ortalama iz düşüm dizisinin asimptotik düzenliliği ve Δ-yakınsaklığı ispatlanmıştır. Ayrıca, p-düzgün konveks metrik uzaylarda Ishikawa iz düşüm dizisi tanımlanarak belirli şartlar altında Δ- yakınsaklığı ve kuvvetli yakınsaklığı ispatlanmıştır.

6.1 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Konveks Fizibilite Problemi

Konveks Fizibilite Problemi, birkaç konveks kümenin kesişiminde yer alan bir noktanın bulunmasını içeren matematiksel bir optimizasyon problemidir. Başka bir deyişle, birden fazla konveks küme tarafından tanımlanan bir dizi kısıtlamayı karşılayan bir noktanın var olup olmadığını belirleme problemidir. Bu problem, en iyi yaklaşım teorisi, görüntü işleme ve optimizasyon algoritmaları gibi alanlarda geniş bir uygulama alanına sahiptir. Metrik uzaylarda konveks fizibilite problemi, uzaydaki bir konveks kümeler koleksiyonunun kesişiminde yer alan bir nokta bulmayı içerir. Problem matematiksel olarak, uzayda öyle bir x noktası bulmak şeklinde ifade edilebilir ki x, $C_1, C_2, ..., C_n$ konveks kümelerinin kesişiminde yer almaktadır; yani x aşağıdaki kısıtlar sisteminin

$$x \in C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n$$

bir çözümüdür. Bir jeodezik metrik uzayda, C_i kümelerinin jeodezik mesafeye göre konveks olması gerekmektedir. Yani, bir kümedeki herhangi iki nokta için, bu noktaları birleştiren jeodezik de küme içinde yer alması gerektiği anlamına gelir. Konveks Fizibilite Problemi, kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünün ilgi çekici olduğu optimizasyon, kontrol teorisi ve görüntü işleme gibi matematik ve mühendisliğin

çeşitli alanlarında kullanılmaktadır. Metrik uzaylarda Konveks Fizibilite Probleminin çözümü genellikle konveks kümelere iz düşümler, alternatif iz düşümler ve döngüsel iz düşümler gibi algoritmaların kullanımını içerir. Bu algoritmalar, konveks kümelerin kesişiminde yer alan bir noktayı iteratif olarak bulmak için tasarlanmıştır ve farklı alanlardaki çeşitli problemlere uygulanmıştır.

Alternatif iz düşüm yöntemi, konveks fizibilite problemlerini çözmek için kullanılan ünlü ve önemli algoritmik yöntemlerden biridir. Daha açık bir ifadeyle, $(\mathscr{M}, \rho)$ bir metrik uzay, B ve C, $\mathscr{M}$'nin iki kapalı konveks alt kümeleri olmak üzere π_B ve π_C, bu iki küme üzerinde iz düşüm dönüşümleri olsun. Bu takdirde, alternatif iz düşüm yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$x_{2n-1} = \pi_B(x_{2n-2}), x_{2n} = \pi_C(x_{2n-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

1933 yılında von Neumann, B ve C bir Hilbert uzayının kapalı alt uzayları olduğunda, (6.1)'deki gibi tanımlanan alternatif iz düşümlerin normda $\pi_{B\cap C}(x_0)$ 'a yakınsadığını ispatlamıştır [98]. 1965 yılında Brègman (6.1)'deki gibi tanımlanan alternatif iz düşümlerin, eğer kesişim boş değilse, bir Hilbert uzayının kapalı konveks kümelerinin kesişimindeki bir noktaya zayıf yakınsadığını göstermiştir [99]. 2004 yılında Hundal [100] zayıf yakınsayan ancak normda yakınsamayan bir alternatif iz düşümler dizisi vererek iki kapalı konveks küme üzerindeki alternatif iz düşümlerin her zaman normda yakınsamadığını ispatlamıştır. Daha sonra alternatif iz düşüm yöntemi, konveks fizibilite problemini çözmek için genel metrik uzaylara genişletilmiştir. 2012 yılında Bačák [101] $CAT(0)$ uzayında alternatif iz düşümler dizisini incelemiş ve $CAT(0)$ uzayının kapalı konveks alt kümelerinin kesişimindeki bir noktaya Δ-yakınsadığını ispatlamıştır.

Konveks fizibilite problemini çözmek için bir başka algoritmik yaklaşım, iz düşümlerin (orta nokta) ortalamalarını kullanmaktır. H bir Hilbert uzayı olsun. B ve C, H'nin iki alt kümesi olsun. Bu takdirde, iz düşümlerin ortalama algoritması aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$x_{n+1} = \frac{\pi_B(x_n) + \pi_C(x_n)}{2}. \tag{6.2}$$

1969 yılında Auslender [102] (6.2)'deki gibi verilen $\{x_n\}$ dizisinin $B \cap C$ 'deki bazı noktalara zayıf yakınsadığını kanıtlamıştır . 2004 yılında Bauschke [103] zayıf yakınsayan ancak normda yakınsamayan bir ortalama iz düşümler dizisi tanımlamıştır. 2014 yılında Bačák [4] jeodezikleri kullanarak $CAT(0)$ uzaylarında ortalama iz düşüm yöntemini tanımlamış ve dizinin kapalı konveks kümelerin kesişimindeki bir noktaya zayıf yakınsadığını ispatlamıştır.

6.2 *P*-Düzgün Konveks Metrik Uzaylarda Ağırlıklı Ortalama İz Düşümlerin Yakınsaklığı

Tanım 6.1 (**Düzenli İz Düşüm Özelliği**)**.** $(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. C boş olmayan kapalı konveks bir alt küme olsun. Eğer her $x\in\mathscr{M}$ ve her $t\in[0,1]$ için

$$\pi_C(tx\oplus(1-t)\pi_C(x))=\pi_C(x)$$

sağlanıyor ise $\mathscr{M}$'ye düzenli iz düşüm özelliğine sahiptir denir.

Örnek 6.1. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir $CAT(\kappa)$ $(\kappa\geq 0)$ uzayı olsun. Bu takdirde $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğine sahiptir [71].*

Lemma 6.1. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. B, $\mathscr{M}$'nin konveks kapalı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde her $x\in\mathscr{M}$ ve $a\in B$ için*

$$\rho(\pi_C(x),a)^p\leq\rho(x,a)^p-c_{\mathscr{M}}\rho(x,\pi_C(x))^p$$

eşitsizliği sağlanır. Özel olarak $\rho(\pi_C(x),a)\leq\rho(x,a)$ elde edilir.

İspat. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho(\pi_C(x),a)^p&=\rho(\pi_C((1-\alpha)x\oplus\alpha\pi_C(x)),a)^p\leq\rho((1-\alpha)x\oplus\alpha\pi_C(x),a)^p\\&\leq(1-\alpha)\rho(x,a)^p+\alpha\rho(\pi_C(x),a)^p-c_{\mathscr{M}}\alpha(1-\alpha)\rho(x,\pi_C(x))^p\end{aligned}$$

olduğundan

$$(1-\alpha)\rho(\pi_C(x),a)^p\leq(1-\alpha)\rho(x,a)^p-c_{\mathscr{M}}\alpha(1-\alpha)\rho(x,\pi_C(x))^p$$

elde edilir. Buradan

$$\rho(\pi_C(x),a)^p\leq\rho(x,a)^p-c_{\mathscr{M}}\alpha\rho(x,\pi_C(x))^p \tag{6.3}$$

bulunur. (6.3) eşitsizliğinin her iki tarafının $\alpha\to 1^-$ iken limiti alınırsa

$$\rho(\pi_C(x),a)^p\leq\rho(x,a)^p-c_{\mathscr{M}}\rho(x,\pi_C(x))^p$$

elde edilir. ■

Şimdi jeodezik uzaylarda bazı iz düşüm yöntemlerini tanımlayalım.

Tanım 6.2 (**Ortalama İz Düşüm Yöntemi**)**.** $(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. B ve C, $\mathscr{M}$'nin boş olmayan iki kapalı konveks alt kümeleri olsun. Bu takdirde ortalama iz düşüm yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x_{n+1}=\frac{\pi_B(x_n)\oplus\pi_C(x_n)}{2}. \tag{6.4}$$

Tanım 6.3 (**Mann İz Düşüm Yöntemi**)**.** $(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. B, $\mathscr{M}$'nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Bu takdirde Mann iz düşüm yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x_n=\alpha_n\pi_B(x_{n-1})\oplus(1-\alpha_{n-1})x_n. \tag{6.5}$$

Tanım 6.4 (**Ağırlıklı Ortalama İz Düşüm Yöntemi**)**.** $(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. B ve C, $\mathscr{M}$'nin boş olmayan iki kapalı konveks alt kümeleri olsun. Bu takdirde, ağırlıklı ortalama iz düşüm yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x_n=\alpha_n\pi_B(x_{n-1})\oplus(1-\alpha_{n-1})\pi_C(x_{n-1}). \tag{6.6}$$

Lemma 6.2. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. $B\cap C\neq\emptyset$ olmak üzere B ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks alt kümeleri olsun. $\{x_n\}$ ağırlıklı ortalama iz düşüm yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}$, $B\cap C$'ye göre Fejér monotondur.*

İspat. $v\in B\cap C$ alalım. Bu takdirde (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},v)^p&=\rho((1-\alpha_n)\pi_B(x_n)\oplus\alpha_n\pi_C(x_n),v)^p\\&\leq\alpha_n\rho(\pi_C(x_n),v)^p+(1-\alpha_n)\rho(\pi_B(x_n),v)^p\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 6.1'den

$$\rho(\pi_B(x_n),v)\leq\rho(x_n,v)$$

ve

$$\rho(\pi_C(x_n),v)\leq\rho(x_n,v)$$

bulunur. $v\in B\cap C$ olduğundan $x\in B$ ve $x\in C$'dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},v)^p&\leq\alpha_n\rho(\pi_C(x_n),v)^p+(1-\alpha_n)\rho(\pi_B(x_n),v)^p\\&\leq\alpha_n\rho(x_n,v)^p+(1-\alpha_n)\rho(x_n,v)^p=\rho(x_n,v)^p\end{aligned}$$

olarak elde edilir. ■

Teorem 6.1. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. $B\cap C\neq\emptyset$ olmak üzere B ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks iki alt kümesi olsun. $\{x_n\}$ ağırlıklı ortalama iz düşüm yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde, eğer $0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\alpha_n<1$ ise $\lim_{n\to\infty}\rho\left(\pi_A(x_n),x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\rho\left(\pi_B(x_n),x_n\right)=0$'dır.*

İspat. $v\in B\cap C$ alalım. Lemma 6.1'den

$$\rho\left(\pi_A(x),v\right)^p\leq\rho(x,v)^p-c_{\mathscr{M}}\rho\left(x,\pi_A(x)\right)^p$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}c_{\mathscr{M}}\rho\left(\pi_A(x_n),x_n\right)^p&\leq\left(\rho\left(x_n,v\right)^p-\rho\left(\pi_A(x_n),v\right)^p\right)\\&\leq\left(\rho\left(x_n,v\right)^p-\frac{1}{1-\alpha_n}\left(\rho\left(x_{n+1},v\right)^p-\alpha_n\rho\left(x_n,v\right)^p\right)\right)\\&=\frac{1}{(1-\alpha_n)}\left(\rho\left(x_n,v\right)^p-\rho\left(x_{n+1},v\right)^p\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}c_{\mathscr{M}}\rho\left(\pi_B(x_n),x_n\right)^p&\leq\left(\rho\left(x_n,v\right)^p-\rho\left(\pi_B(x_n),v\right)^p\right)\\&\leq\left(\rho\left(x_n,v\right)^p-\frac{1}{1-\alpha_n}\left(\rho\left(x_{n+1},v\right)^p-\alpha_n\rho\left(x_n,v\right)^p\right)\right)\\&=\frac{1}{(1-\alpha_n)}\left(\rho\left(x_n,v\right)^p-\rho\left(x_{n+1},v\right)^p\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 6.2'den $\{x_n\}$, $B\cap C$'ye Fejér monotondur. Ayrıca $\{\rho\left(x_n,v\right)^p\}$ sınırlı ve azalandır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}\rho\left(x_n,v\right)^p$ vardır. Teoremin hipotezi gereği; $0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\alpha_n<1$'dır. Böylece $\lim_{n\to\infty}\rho\left(\pi_A(x_n),x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\rho\left(\pi_B(x_n),x_n\right)=0$ olarak elde edilir. ■

Teorem 6.2. *$(\mathscr{M},\rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. $B\cap C\neq\emptyset$ olmak üzere B ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks iki alt kümesi olsun. $\{x_n\}$ ağırlıklı ortalama iz düşüm yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}$ dizisi $B\cap C$ içindeki bir noktaya Δ-yakınsaktır.*

İspat. Lemma 6.2'den $\{x_n\}$, $B\cap C$'ye Fejér monotondur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ sınırlı bir dizidir. Lemma 2.2'den $x_{n_k}\overset{\Delta}{\to}x$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin Δ- yakınsak bir $\left\{x_{n_k}\right\}$ alt dizisi vardır. Teorem 6.1'den $\lim_{n\to\infty}\rho\left(\pi_B\left(x_{n_k}\right),x_{n_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\rho\left(\pi_C\left(x_{n_k}\right),x_{n_k}\right)=0$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in B$ ve $x \in C$ yani $x \in B \cap C$'dir. Lemma 6.1' den $\{x_n\}$ $B \cap C$ içindeki bir noktaya Δ-yakınsaktır. ■

(6.6) denkleminde her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = \frac{1}{2}$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.3. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. $B \cap C \neq \emptyset$ olmak üzere B ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks iki alt kümesi olsun. $\{x_n\}$ ortalama iz düşüm yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}$ dizisi $B \cap C$ içindeki bir noktaya Δ-yakınsaktır.*

(6.6) denkleminde $C = \mathscr{M}$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.4. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. $B \cap C \neq \emptyset$ olmak üzere B ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks iki alt kümesi olsun. bu takdirde, $\{x_n\}$ Mann iz düşüm yöntemiyle tanımlanan bir dizi ise $\{x_n\}$, $B \cap C$ içindeki bir noktaya Δ-yakınsaktır.*

6.3 Ishikawa İz Düşüm Yöntemi

Tanım 6.5 (**Ishikawa İz Düşüm Yöntemi**)**.** $(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. B ve C, $\mathscr{M}$'nin boş olmayan kapalı konveks alt kümeleri olsun. Bu takdirde

$$\begin{cases} y_n = (1-\alpha_n)\, x_n \oplus \alpha_n \pi_B(x_n), \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)\, y_n \oplus \beta_n \pi_C(y_n) \end{cases} \tag{6.7}$$

şeklinde tanımlanan algoritmaya Ishikawa iz düşüm iterasyon yöntemi denir.

Lemma 6.3. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. $B \cap C \neq \emptyset$ olmak üzere B ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks iki alt kümesi olsun. $\{x_n\}$ Ishikawa iz düşüm yöntemiyle tanımlanan bir dizi ise bu takdirde $\{x_n\}$, $B \cap C$ 'ye göre Fejér monotondur.*

İspat. Keyfi olarak $v \in B \cap C$ alalım. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \rho\left(x_{n+1}, v\right)^p &= \rho\left((1-\alpha_n) y_n \oplus \alpha_n \pi_B\left(y_n\right), v\right)^p \\ &\leq \alpha_n \rho\left(y_n, v\right)^p + (1-\alpha_n)\, \rho\left(\pi_B\left(y_n\right), v\right)^p \end{aligned} \tag{6.8}$$

ve

$$\begin{aligned} \rho\left(y_n, v\right)^p &= \rho\left((1-\beta_n) y_n \oplus \beta_n \pi_C\left(y_n\right), v\right)^p \\ &\leq \beta_n \rho\left(y_n, v\right)^p + (1-\beta_n)\, \rho\left(\pi_B\left(y_n\right), v\right)^p \end{aligned} \tag{6.9}$$

elde edilir. $v \in B \cap C$ olduğundan $v \in B$ ve $v \in C$'dır. Dolayısıyla Lemma 6.1'den

$$\rho\left(\pi_B\left(y_n\right), v\right) \leq \rho\left(y_n, v\right)$$

ve

$$\rho\left(\pi_C\left(x_n\right), v\right) \leq \rho\left(x_n, v\right)$$

bulunur. (6.8)ve (6.9) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\rho\left(x_{n+1}, v\right)^p &\leq \alpha_n \rho\left(y_n, v\right)^p + \left(1-\alpha_n\right)\rho\left(y_n, v\right)^p \\ &\leq \rho\left(y_n, v\right)^p\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho\left(y_n, v\right)^p &\leq \beta_n \rho\left(x_n, v\right)^p + \left(1-\beta_n\right)\rho\left(x_n, v\right)^p \\ &\leq \rho\left(x_n, v\right)^p\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla $\rho\left(x_{n+1}, v\right)^p \leq \rho\left(x_n, v\right)^p$ elde edilir. ■

Teorem 6.5. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. $B \cap C \neq \emptyset$ olmak üzere B ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks iki alt kümesi olsun. $\{x_n\}$ Ishikawa iz düşüm yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Eğer $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \alpha_n < 1$ ve $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \beta_n < 1$ ise bu takdirde $\lim_{n\to\infty} \rho\left(\pi_B\left(x_n\right), x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(\pi_C\left(x_n\right), x_n\right) = 0$'dır.*

İspat. Keyfi olarak $v \in B \cap C$ alalım. (2.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho^p(y_n, q) &= \rho^p((1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n \pi_B x_n, q) \\ &\leq (1-\alpha_n)\rho^p(x_n, q) + \alpha_n \rho^p(\pi_B x_n, q) - c_{\mathscr{M}}\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \pi_B x_n) \\ &\leq (1-\alpha_n)\rho^p(x_n, q) + \alpha_n \rho^p(x_n, q) - c_{\mathscr{M}}\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \pi_B x_n) \\ &= \rho^p(x_n, q) - c_{\mathscr{M}}\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \pi_B x_n)\end{aligned} \tag{6.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\rho^p(x_{n+1}, q) &= \rho^p((1-\beta_n)y_n \oplus \beta_n \pi_C y_n, q) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho^p(y_n, q) + \beta_n \rho^p(\pi_C y_n, q) - c_{\mathscr{M}}\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(x_n, \pi_C y_n) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho^p(y_n, q) + \beta_n \rho^p(x_n, q) - c_{\mathscr{M}}\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(y_n, \pi_{yn}) \\ &= \rho^p(y_n, q) - C c_{\mathscr{M}}\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(y_n, \pi_C y_n)\end{aligned} \tag{6.11}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\rho^p(x_{n+1}, q) \leq \rho^p(x_n, q) - c_{\mathscr{M}}\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \pi_B x_n) - c_{\mathscr{M}}\beta_n(1-\beta_n)\rho^p(y_n, \pi_C y_n)$$

olur. Lemma 6.3'den $\{x_n\}$, $B \cap C$'e göre bir Fejér dizisidir. Dolayısıyla $\lim_n \rho^p(x_n, q)$ mevcuttur. $\Sigma_n \alpha_n(1-\alpha_n)\rho^p(x_n, \pi_B(x_n)) < \infty$ ve teoremin hipotezi gereği; $\Sigma_n \alpha_n(1-\beta_n)\rho^p(y_n, \pi_C(y_n)) < \infty$'dır. $\lim_n \rho(x_n, \pi_B(x_n)) = 0$ ve $\lim_n \rho(y_n, \pi_C(y_n)) = 0$ elde edilir. ■

Teorem 6.6. *$(\mathscr{M}, \rho)$ bir p-düzgün konveks metrik uzay olsun. $\mathscr{M}$ uzayı düzenli iz düşüm özelliğini sağlasın. $B \cap C \neq \emptyset$ olmak üzere B ve C, $\mathscr{M}$'nin kapalı konveks iki alt kümesi olsun. $\{x_n\}$ ağırlıklı ortalama iz düşüm yöntemiyle tanımlanan bir dizi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}$, $B \cap C$ içindeki bir noktaya Δ-yakınsaktır.*

İspat. Lemma 6.3'den $\{x_n\}$, $B \cap C$'ye Fejér monotondur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ sınırlı bir dizidir. Lemma 2.2'den $x_{n_k} \xrightarrow{\Delta} x$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin Δ- yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Teorem 6.5'den $\lim_{n\to\infty} \rho\left(\pi_B\left(x_{n_k}\right), x_{n_k}\right) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(\pi_C\left(x_{n_k}\right), x_{n_k}\right) =$ 0'dır. Dolayısıyla $x \in B$ ve $x \in C$ yani $x \in B \cap C$'dir. Lemma 6.1'den $\{x_n\}$ dizisi $B \cap C$ içindeki bir noktaya Δ-yakınsaktır. ■

Örnek 6.2. *$\mathbb{S}^2$ bir birim kürenin yüzeyi ve*

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} u & -v+iw \\ v+iw & u \end{bmatrix} \mid u, v, w \in \mathbb{R} \text{ ile } u^2+v^2+w^2 = 1 \right\}$$

olsun. Bu takdirde $R \subseteq SU(2)$ ile $\mathbb{S}^2$ dönüşümü π: $\mathbb{S}^2 \to R$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\pi(u, v, w) = \begin{bmatrix} u & -v+iw \\ v+iw & u \end{bmatrix}.$$

Aşağıda verilen altı elemanı göz önüne alalım:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix},$$
$$M_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & i\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ i\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, M_5 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}+i\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}+i\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, M_6 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}+i\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}+i\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Yukarıda verilen kümeler

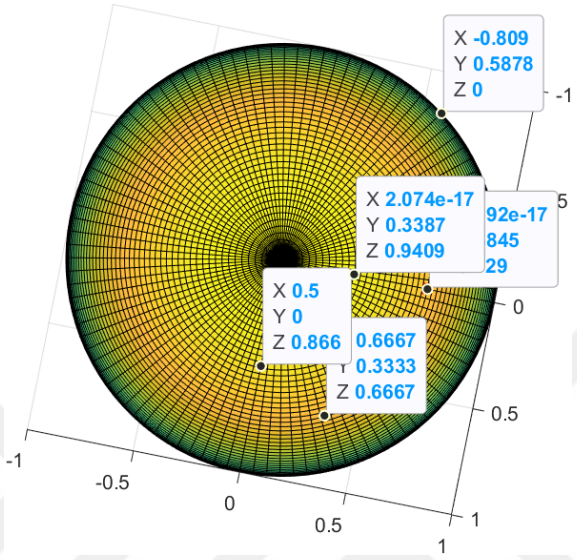
$$B = \overline{\text{Co}}\left\{(0,0,1), (1/\sqrt{10}, 0, 3/\sqrt{10}), (1/\sqrt{7}, 2/\sqrt{7}, 2/\sqrt{7}) \in \mathbb{S}^2\right\},$$
$$C = \overline{\text{Co}}\left\{(3/\sqrt{26}, 4/\sqrt{26}, 1/\sqrt{26}), (1/\sqrt{25}, 0, 5/\sqrt{26}), (1/\sqrt{7}, 2/\sqrt{7}, 2/\sqrt{7}) \in \mathbb{S}^2\right\}$$

alt kümeleri tarafından üretilen kapalı sınırlı konveks kümeler olarak düşünülebilir.

$$\widetilde{B} = \{M_1, M_2, M_3\} \text{ ve } \widetilde{C} = \left\{M_4, M_5, M_6\right\}$$

olarak alınırsa $S \subseteq SU(2)$ alt kümesi olduğu ve $(1/3, 0, 2\sqrt{2}/3)$ noktasının $(0,0,1)$

ve $(1/2, 0, \sqrt{3}/2)$ *noktalarını birleştiren jeodezikte olduğu görülmektedir ve dolayısıyla* $B \cap C \neq \emptyset$*'dir. 2-boyutlu küre* $\mathbb{S}^2$ *kompakt tam metrik uzay olduğundan,* B *ve* C $\mathbb{S}^2$ *içinde birer kompakt alt kümedir. Böylece, Teorem 6.2'den (6.1) denkleminde verilen* $\{x_n\}$ *dizisi* $B \cap C$ *içinde bir* $x \in \Phi(B) \cap \Phi(C)$ *noktasına yakınsar. Bu nedenle,* $\{\Phi(x_n)\} \subseteq SU(2)$ *dizisi bir* $CAT(1)$ *uzayı içinde bir* $\Phi(x)$ *noktasına yakınsamaktadır (Şekil 6.1).*



Şekil 6.1 $\mathbb{S}^2$ birim küre üzerindeki ortalama iz düşüm

7
SONUÇ

Bu tezde düzgün konveks metrik uzaylarda konveks geometri ve bazı optimizasyon kavramları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

İlk olarak, p-düzgün konveks metrik uzaylarda alışılmış metrik topolojiden daha zayıf olan, zayıf yakınsama sağlayan yeni bir topoloji inşa edilmiştir. Bu yeni zayıf topolojiyle Banach uzaylarındaki kompaklık kavramına benzer yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, p-düzgün konveks metrik uzayların kapalı konveks alt kümeleri üzerinde iz düşüm dönüşümleri incelenerek elde edillen uzaylarda Hilbert uzayları ve Banach uzaylarında var olan Opial, Mazur lemması ve Kadec Klee gibi geometrik özelliklerin benzer özellikleri elde edilmiştir.

Daha sonra, genelleştirilmiş $CAT(0)$ uzaylarında CN^* eşitsizliği tanımlanarak, bu eşitsizlik yardımıyla S-iterasyonunun genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına kuvvetli yakınsaklığı ve Δ-yakınsaması gösterilmiştir.

Ayrıca, doğrusal olmayan Lebesgue uzayları, Hadamard uzaylarından p-düzgün konveks metrik uzaylara genişletilmiştir. Bununla birlikte, p-düzgün konveks metrik uzaylarda yeni tanımlanan genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm sınıfları için bazı Δ-yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık teoremleri ispatlanmış ve ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu sınıfın sabit noktalarına yaklaşmak için literatürde yeni tanımlanan JK-iterasyon yöntemi kullanılmış ve p-düzgün konveks metrik uzaylar bağlamında bu sınıfın yeni örnekleri oluşturulmuştur. Daha sonra, p-düzgün konveks metrik uzaylarda ortalama genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların varlığı incelenmiştir. İlave olarak, p-düzgün konveks metrik uzaylarda ortalama genişlemeyen dönüşümler için yarı kapalılık prensibi elde edilmiştir. Bu bağlamda, p-düzgün konveks metrik uzaylarda uygun koşullar altında ortalama genişlemeyen dönüşümler için Karakaya iterasyon yönteminin Δ-yakınsaklık teoremi ve kuvvetli yakınsaklık teoremi ispatlanmıştır.

Son olarak, p-düzgün konveks metrik uzaylarda ağırlıklı ortalama iz düşüm dizisinin Δ-yakınsaklığı ispatlanmıştır. Ayrıca, p-düzgün konveks metrik uzaylarda Ishikawa iz düşüm dizisi tanımlanarak belirli şartlar altında konveks fizibilite problemini çözmek için kullanılmıştır.

p-düzgün konveks metrik uzayların Lebesque, Hadamard gibi uzayları kapsıyor olmasından kaynaklı Lebesque ve Hadamard uzaylarında yapılan çalışmalar doğal olarak bu yeni uzaya genellenebilir. Ayrıca, Hilbert ve Banach uzaylarında tanımlanmış ve geniş bir literatüre sahip geometrik özellikler p-düzgün konveks metrik uzaylarda uygun formlarda tanımlanabilir. Bununla birlikte, sabit nokta teorinin bir çok iterasyon yöntemi bu yeni uzay üzerinde yakınsama, veri bağlılığı ve hız bakımından incelenmeye uygun araştırma problemleri olarak araştırmacıların ilgisine açıktır.

KAYNAKÇA

[1] J. A. Clarkson, "Uniformly convex spaces," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 40, no. 3, pp. 396–414, 1936.

[2] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 319.

[3] A. AD, "A theorem on triangles in a metric space and some applications," *Trudy Mat. Inst. Steklo*, vol. 38, pp. 5–23, 1951.

[4] M. Bacák, "Convex analysis and optimization in hadamard spaces," in *Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces*, de Gruyter, 2014.

[5] K. Goebel, R. Simeon, *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings*. Dekker, 1984.

[6] S. Reich, I. Shafrir, "Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 15, no. 6, pp. 537–558, 1990.

[7] M. Bacak, "Old and new challenges in hadamard spaces," *arXiv preprint arXiv:1807.01355*, 2018.

[8] M. Bacák, "Computing medians and means in hadamard spaces," *SIAM Journal On Optimization*, vol. 24, no. 3, pp. 1542–1566, 2014.

[9] M. Bačák, "The proximal point algorithm in metric spaces," *Israel Journal of Mathematics*, vol. 194, no. 2, pp. 689–701, 2013.

[10] A. Feragen, S. Hauberg, M. Nielsen, F. Lauze, "Means in spaces of tree-like shapes," in *2011 International Conference on Computer Vision*, IEEE, 2011, pp. 736–746.

[11] A. Feragen, P. Lo, M. de Bruijne, M. Nielsen, F. Lauze, "Toward a theory of statistical tree-shape analysis," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine İntelligence*, vol. 35, no. 8, pp. 2008–2021, 2012.

[12] M. Gromov, *Hyperbolic Groups*. Springer, New York, 1987.

[13] M. Gromov, M. Katz, P. Pansu, S. Semmes, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Springer, 1999, vol. 152.

[14] W. Kirk, "Geodesic geometry and fixed point theory ıı," *Fixed Point Theory and Applications*, 2004.

[15] J. Jost, *Nonpositive curvature: Geometric and Analytic Aspects*. Springer Science & Business Media, 1997.

[16] S. Reich, "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in banach spaces," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 67, no. 2, pp. 274–276, 1979.

[17] J. Jost, "Equilibrium maps between metric spaces," *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, vol. 2, no. 2, pp. 173–204, 1994.

[18] A. Naor, L. Silberman, "Poincaré inequalities, embeddings, and wild groups," *Compositio Mathematica*, vol. 147, no. 5, pp. 1546–1572, 2011.

[19] W. A. Kirk, "A fixed point theorem for mappings which do not increase distances," *The American Mathematical Monthly*, vol. 72, no. 9, pp. 1004–1006, 1965.

[20] F. E. Browder, "Nonexpansive nonlinear operators in a banach space," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 54, no. 4, pp. 1041–1044, 1965.

[21] R. B. Kellogg, "Uniqueness in the schauder fixed point theorem," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 60, no. 1, pp. 207–210, 1976.

[22] W. Kirk, "Caristi's fixed point theorem and metric convexity," in *Colloquium Mathematicum*, vol. 1, 1976, pp. 81–86.

[23] W. Kirk, "Geodesic geometry and fixed point theory, ın: Seminar of mathematical analysis: Proceedings, universities of malaga and seville (spain), september 2002-february 2003," vol. 64, pp. 195–210,

[24] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales," *Fund. Math*, vol. 3, no. 1, pp. 133–181, 1922.

[25] É. Picard, "Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives," *Journal De Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 6, pp. 145–210, 1890.

[26] C. Chidume, *Some Geometric Properties of Banach Spaces*. Springer, 2009.

[27] M. Imdad, S. Dashputre, "Fixed point approximation of picard normal s-iteration process for generalized nonexpansive mappings in hyperbolic spaces," *Mathematical Sciences*, vol. 10, no. 3, pp. 131–138, 2016.

[28] M. A. Krasnosel'skii, "Two comments on the method of successive approximations," *Usp. Math. Nauk*, vol. 10, pp. 123–127, 1955.

[29] C. Byrne, Y. Censor, A. Gibali, S. Reich, "The split common null point problem," *J. Nonlinear Convex Anal*, vol. 13, no. 4, pp. 759–775, 2012.

[30] F. Kohsaka, W. Takahashi, "Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in banach spaces," *Archiv der Mathematik*, vol. 91, no. 2, pp. 166–177, 2008.

[31] G. Marino, H.-K. Xu, "Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in hilbert spaces," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 329, no. 1, pp. 336–346, 2007.

[32] G. Marino, H.-K. Xu, "A general iterative method for nonexpansive mappings in hilbert spaces," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 318, no. 1, pp. 43–52, 2006.

[33] E. Al-Shemas, A. Hamdi, "Generalizations of variational inequalities," *International Journal of Optimizations: Theory, Methods and Applications*, vol. 1, no. 4, pp. 381–394, 2009.

[34] J. N. Ezeora, C. Izuchukwu, "Iterative approximation of solution of split variational inclusion problem," *Filomat*, vol. 32, no. 8, pp. 2921–2932, 2018.

[35] T. Jitpeera, P. Kumam, "Algorithms for solving the variational inequality problem over the triple hierarchical problem," in *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi, vol. 2012, 2012.

[36] S. Iemoto, K. Hishinuma, H. Iiduka, "Approximate solutions to variational inequality over the fixed point set of a strongly nonexpansive mapping," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2014, no. 1, pp. 1–14, 2014.

[37] H. Iiduka, "A new iterative algorithm for the variational inequality problem over the fixed point set of a firmly nonexpansive mapping," *Optimization*, vol. 59, no. 6, pp. 873–885, 2010.

[38] H. Iiduka, "Fixed point optimization algorithm and its application to power control in cdma data networks," *Mathematical Programming*, vol. 133, no. 1, pp. 227–242, 2012.

[39] I. Yamada, "The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings," *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications*, vol. 8, pp. 473–504, 2001.

[40] H. Attouch, J. Bolte, P. Redont, A. Soubeyran, "Proximal alternating minimization and projection methods for nonconvex problems: An approach based on the kurdyka-Łojasiewicz inequality," *Mathematics of Operations Research*, vol. 35, no. 2, pp. 438–457, 2010.

[41] N. Shioji, W. Takahashi, "Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in banach spaces," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 125, no. 12, pp. 3641–3645, 1997.

[42] W. Takahashi, K. Shimoji, "Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 32, no. 11-13, pp. 1463–1471, 2000.

[43] H.-K. Xu, "Iterative algorithms for nonlinear operators," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 66, no. 1, pp. 240–256, 2002.

[44] H. Attouch, P. Redont, A. Soubeyran, "A new class of alternating proximal minimization algorithms with costs-to-move," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 18, no. 3, pp. 1061–1081, 2007.

[45] C. Chidume, C. Chidume, "Iterative approximation of fixed points of nonexpansive mappings," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 318, no. 1, pp. 288–295, 2006.

[46] P. L. Combettes, S. A. Hirstoaga, *et al.*, "Equilibrium programming in hilbert spaces," *J. Nonlinear Convex Anal*, vol. 6, no. 1, pp. 117–136, 2005.

[47] C. Okeke, C. Izuchukwu, O. Mewomo, "Strong convergence results for convex minimization and monotone variational inclusion problems in hilbert space," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, vol. 69, no. 2, pp. 675–693, 2020.

[48] Y. Shehu, O. Mewomo, F. Ogbuisi, "Further investigation into approximation of a common solution of fixed point problems and split feasibility problems," *Acta Mathematica Scientia*, vol. 36, no. 3, pp. 913–930, 2016.

[49] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1991, vol. 17.

[50] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*. CUP Archive, 1988.

[51] B. Halpern, "Fixed points of nonexpanding maps," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, no. 6, pp. 957–961, 1967.

[52] B. Halpern, "Fixed points of nonexpanding maps," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, pp. 957–961, 1967.

[53] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, "A course in metric geometry, graduate study in mathematics 33," *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2001.

[54] J. Wang, C. Li, G. Lopez, J.-C. Yao, "Proximal point algorithms on hadamard manifolds: Linear convergence and finite termination," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 26, no. 4, pp. 2696–2729, 2016.

[55] A. G. Aksoy, S. Jin, "The apple doesn't fall far from the (metric) tree: The equivalence of definitions," *arXiv preprint arXiv:1306.6092*, 2013.

[56] B. J. Choi, U. C. Ji, "The proximal point algorithm in uniformly convex metric spaces," *Communications of the Korean Mathematical Society*, vol. 31, no. 4, pp. 845–855, 2016.

[57] K. Kuwae, "Jensen's inequality on convex spaces," *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, vol. 49, no. 3, pp. 1359–1378, 2014.

[58] A. Naor, L. Silberman, "Poincaré inequalities, embeddings, and wild groups," *Compositio Mathematica*, vol. 147, no. 5, pp. 1546–1572, 2011.

[59] S.-I. Ohta, "Regularity of harmonic functions in cheeger-type sobolev spaces," *Annals of Global Analysis and Geometry*, vol. 26, no. 4, pp. 397–410, 2004.

[60] S.-I. Ohta, "Markov type of alexandrov spaces of non-negative curvature shin-ıchi ohta," *Mathematika*, vol. 55, no. 1-2, pp. 177–189, 2009.

[61] S.-i. Ohta, "Uniform convexity and smoothness, and their applications in finsler geometry," *Mathematische Annalen*, vol. 343, no. 3, pp. 669–699, 2009.

[62] S.-i. Ohta, "Convexities of metric spaces," *Geometriae Dedicata*, vol. 125, no. 1, pp. 225–250, 2007.

[63] K. Ball, E. A. Carlen, E. H. Lieb, "Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms," in *Inequalities*, Springer, 2002, pp. 171–190.

[64] D. Ariza-Ruiz, G. López-Acedo, A. Nicolae, "The asymptotic behavior of the composition of firmly nonexpansive mappings," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 167, no. 2, pp. 409–429, 2015.

[65] D. Ariza-Ruiz, L. Leuştean, G. López-Acedo, "Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 366, no. 8, pp. 4299–4322, 2014.

[66] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, "Higher order smoothness," in *Banach Space Theory*, Springer, 2011, pp. 465–477.

[67] E. N. Sosov, "On analogues of weak convergence in a special metric space," *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, no. 5, pp. 84–89, 2004.

[68] T. C. Lim, "Remarks on some fixed point theorems," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 60, no. 1, pp. 179–182, 1976.

[69] W. Kirk, B. Panyanak, "A concept of convergence in geodesic spaces," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 68, no. 12, pp. 3689–3696, 2008.

[70] R. Espınola, A. Fernández-León, "Cat (k)-spaces, weak convergence and fixed points," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 353, no. 1, pp. 410–427, 2009.

[71] D. Ariza-Ruiz, G. López-Acedo, A. Nicolae, "The asymptotic behavior of the composition of firmly nonexpansive mappings," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 167, no. 2, pp. 409–429, 2015.

[72] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*. Academic press, 1966.

[73] B. Rhoades, "Some fixed point iteration procedures," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 14, no. 1, pp. 1–16, 1991.

[74] K. Aoyama, F. Kohsaka, "Fixed point theorem for α-nonexpansive mappings in banach spaces," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 74, no. 13, pp. 4387–4391, 2011.

[75] K. Goebel, W. Kirk, "A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 35, no. 1, pp. 171–174, 1972.

[76] S. Zhang, "About fixed point theory for mean nonexpansive mapping in banach spaces," *Journal of Sichuan University*, vol. 2, pp. 67–68, 1975.

[77] T. Suzuki, "Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 340, no. 2, pp. 1088–1095, 2008.

[78] C. Donghan, S. Jie, L. Weiyi, "Fixed point theorems and convergence theorems for a new generalized nonexpansive mapping," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 39, no. 16, pp. 1742–1754, 2018.

[79] A. Bejenaru, M. Postolache, "A unifying approach for some nonexpansiveness conditions on modular vector spaces," *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 25, no. 5, pp. 827–845, 2020.

[80] W. R. Mann, "Mean value methods in iteration," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 4, no. 3, pp. 506–510, 1953.

[81] R. Agarwal, D. O Regan, D. Sahu, "Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings," *Journal of Nonlinear and convex Analysis*, vol. 8, no. 1, p. 61, 2007.

[82] B. S. Thakur, D. Thakur, M. Postolache, "A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of suzuki's generalized nonexpansive mappings," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 275, pp. 147–155, 2016.

[83] V. Karakaya, K. Doğan, F. Gürsoy, M. Ertürk, "Fixed point of a new three-step iteration algorithm under contractive-like operators over normed spaces," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, 2013.

[84] M. A. Noor, "New approximation schemes for general variational inequalities," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 251, no. 1, pp. 217–229, 2000.

[85] J. Ahmad, K. Ullah, M. Arshad, Z. Ma, "A new iterative method for suzuki mappings in banach spaces," *Journal of Mathematics*, vol. 2021, 2021.

[86] V. Karakaya, Y. Atalan, K. Dogan, N. Bouzara, "Some fixed point results for a new three steps iteration process in banach spaces," *Fixed Point Theory*, vol. 18, no. 2, 2017.

[87] K. Kuwae, "Jensen's inequality on convex spaces," *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, vol. 49, no. 3, pp. 1359–1378, 2014.

[88] M. Khamsi, S. Shukri, "Generalized cat (0) spaces," *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, vol. 24, no. 3, pp. 417–426, 2017.

[89] K. Calderón, M. A. Khamsi, J. Martınez-Moreno, "Perturbed approximations of fixed points of nonexpansive mappings in cat p (0) spaces," *Carpathian Journal of Mathematics*, vol. 37, no. 1, pp. 65–79, 2021.

[90] H. Senter, W. Dotson, "Approximating fixed points of nonexpansive mappings," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 44, no. 2, pp. 375–380, 1974.

[91] K. Alyani, M. Congedo, M. Moakher, "Diagonality measures of hermitian positive-definite matrices with application to the approximate joint diagonalization problem," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 528, pp. 290–320, 2017.

[92] M. Bacák, "Convex analysis and optimization in hadamard spaces," in *Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces*, de Gruyter, 2014.

[93] S. Zhang, "About fixed point theory for mean nonexpansive mapping in banach spaces," *Journal of Sichuan University*, vol. 2, pp. 67–68, 1975.

[94] C.-x. Wu, L.-j. Zhang, "Fixed points for mean non-expansive mappings," *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, vol. 23, no. 3, pp. 489–494, 2007.

[95] Y. Yang, Y. Cui, "Viscosity approximation methods for mean non-expansive mappings in banach spaces," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 2, no. 13, pp. 627–638, 2008.

[96] K. Nakprasit, "Mean nonexpansive mappings and suzuki-generalized nonexpansive mappings," *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization: Theory & Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 93–96, 2010.

[97] D. Göhde, "Zum prinzip der kontraktiven abbildung," *Mathematische Nachrichten*, vol. 30, no. 3-4, pp. 251–258, 1965.

[98] J. Von Neumann, *Functional operators: The Geometry of Orthogonal Spaces*. Princeton University Press, 1951, vol. 2.

[99] L. M. Bregman, "Finding the common point of convex sets by the method of successive projection," in *Doklady Akademii Nauk*, Russian Academy of Sciences, vol. 162, 1965, pp. 487–490.

[100] H. S. Hundal, "An alternating projection that does not converge in norm," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 57, no. 1, pp. 35–61, 2004.

[101] M. Bačák, I. Searston, B. Sims, "Alternating projections in cat (0) spaces," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 385, no. 2, pp. 599–607, 2012.

[102] A. Auslender, *Méthodes numériques pour la résolution des problèmes d'optimisation avec contraintes*. Faculté des sciences, Université de Grenoble, 1969.

[103] H. H. Bauschke, E. Matoušková, S. Reich, "Projection and proximal point methods: Convergence results and counterexamples," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 56, no. 5, pp. 715–738, 2004.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. M. Knefati, V. Karakaya, “Fixed point theorems for operators with certain condition in p-uniformly convex metric spaces,” Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 43, no. 16, pp. 1884-1900. https://doi.org/10.1080/01630563.2022.2141256.

2. M. Knefati, V. Karakaya, "Approximating fixed points of mean nonexpansive mappings in p-uniformly convex spaces via some iteration algorithms," In Review.

Konferans Bildirisi

1. M. Knefati, V. Karakaya, “Δ-convergence and strong convergence in generalized $CAT(0)$ spaces,” International Conference On Analysis and its Applications (ICAA-2018), Kırsehir, Türkiye, September 11-14, 2018.

2. M. Knefati, V. Karakaya, “ A Not on properties that imply the fixed point property”. 2nd International Conference on Analysis and its Applications (ICAA-2016), Kırsehir, Türkiye, July 12-15, 2016.