$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\delta_1\frac{\partial x}{\partial z}+\delta_2\frac{\partial y}{\partial z}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

yani,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

($\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|\leq 1$ ve $\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|\leq 1$ ise $\Delta z=0$ için sıfıra gider.)

2.ÖRNEK : $f: z \to |z|^2$ fonksiyonunun analitik olup olmadığını araştırınız.

ÇÖZÜM:

$f(z)=|z|^2=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2$ olur. $u(x,y)=x^2+y^2$ ve $v(x,y)=0$ bulunur.

$$u_x=2x,\ u_y=2y$$
$$v_x=0,\ v_y=0$$

yazılır.

$$u_x=v_y \text{ ve } u_y=-v_x$$

denklemleri ancak (0,0) noktasında sağlanırlar .O halde bu fonksiyonun sadece (0,0) noktasında türevi vardır. C de analitik değildir.

2.3. Harmonik Fonksiyonlar

$S\subset C$ olmak üzere $f:S\to C$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. f,S de analitik olduğundan $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ ifadesindeki u ve v nin her mertebeden kısmi türevleri vardır ve bunlar süreklidirler. Cauchy-Riemann denklemleri de dikkate alınırsa,

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlere Laplace denklemleri denir.

2.TANIM : (Harmonik Fonksiyonlar) : Laplace denklemini sağlayan fonksiyonlara harmonik (Potansiyel)fonksiyonlar denir.

Böylece analitik bir f fonksiyonunun reel ve sanal kısımları harmonik fonksiyonlardır.

3.TANIM : (Harmonik Eşlenik Fonksiyonlar) : u ve v gibi harmonik iki fonksiyon verilsin. Bu fonksiyonlar Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorlarsa bu fonksiyonlara harmonik eşlenik fonksiyonlar adı verilir.

Böylece analitik bir fonksiyonun reel ve sanal kısımlarını oluşturan harmonik fonksiyonlardan biri diğerinin harmonik eşleniğidir. Reel ve sanal kısımlarından biri verildiğinde integral yolu ile diğer kısım bulunur. Ancak genellikle $v = v(x,y)$ tek değerli olmadığından dv notasyonunu kullanmamak gerekir.

$$u = u(x,y)$$

$$v = v(x,y)$$

fonksiyonlarından,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

eşitliği yazılır ve

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + \text{sabit}$$

ile, u nun eşleniği olan v bulunur ve $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik fonksiyonu teşkil edilir.

3. ÖRNEK : $u=u(x,y) = y^3-3x^2y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun harmonik olup olmadığını araştırınız. Eğer harmonikse eşleniğini bularak f(z) analitik fonksiyonunu belirtiniz.

ÇÖZÜM : $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Laplace denklemine bakalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy \; , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \; , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

dir.

Bu değerler Laplace denkleminde yerine yazılırsa $\Delta u = 6y - 6y = 0$ olur. O halde u(x,y) fonksiyonu harmoniktir. Şimdi Cauchy-Riemann denklemlerinden faydalanarak v(x,y) yi bulalım,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \quad v(x,y) = -3xy^2 + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + \varphi'(x)$$

bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

denkleminden,

$$-(3y^2 - 3x^2) = -3y^2 + \varphi'(x)$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\varphi(x) = x^3 + c$$

bulunur. Bu değeri v(x,y) de yerine yazarsak,

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + c$$

harmonik eşlenik fonksiyonu bulunur.

Analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları birbirinin harmonik eşleniği olduğundan,

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

denkleminde u ve v fonksiyonları yerine yazılırsa,

$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(-3xy^2 + x^3 + c)$$

$$= i(z^3 + c)$$

analitik fonksiyonu teşkil edilir.

u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonları harmonik eşlenik ise,

$$u(x,y) = c_1$$

$$v(x,y) = c_2$$

ifadeleri ortogonal iki eğri ailesi teşkil ederler. Çünkü $u(x,y)= c_1$ ailesinin diferensiyel denklemini yazarsak,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

bulunur. Buradan ortogonallık şartını kullanırsak,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{(-\frac{dy}{dx})} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

olur. Şimdi Cauchy-Riemann şartlarını göz önüne alırsak,

$$\frac{\partial v}{\partial y}\left(-\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

yazılır ki bu da $v(x,y) = c_2$ ailesinin diferansiyel denklemidir.

4.ÖRNEK : $f(z) = |z|$ fonksiyonu $z = 0$ noktasında türevlimidir ?

ÇÖZÜM : $f(z) = |z| = (x^2+y^2)^{1/2}$ olur. Buradan,

$$u(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2} \text{ ve } v(x,y) = 0$$

bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$x = y = 0$ için, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ elde edilir. Fakat kısmi türevler $z=0$ noktasında süreksizdir. Yani,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olduğunu biliyoruz.Önce OX ekseni yönünde türev alalım,(bu eksen boyunca y = 0 dır)

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{|z| - 0}{z} = 1 \quad , \lim_{z \to 0^-} \frac{|z| - 0}{z} = \lim_{z \to 0^-} - \frac{x}{x} = -1$$

sonra,OY ekseni boyunca (0,0) noktasına yaklaşalım.

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{|z| - 0}{z} = \lim_{y \to 0^+} \frac{|iy|}{iy} = -i \quad , \quad \lim_{z \to 0^-} \frac{|z| - 0}{z} = \lim_{y \to 0^-} \frac{|-iy|}{iy} = i$$

dır.O halde kısmi türevleri süreksizdir.Yani bu fonksiyonun z = 0 noktasında türevi yoktur.

5.ÖRNEK : Cauchy-Riemann denklemlerinin kutupsal koordinatlarda ,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad , \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

olduğunu gösteriniz. $f'(z_0) = \lim_{z_0} f(z) - f($

ÇÖZÜM : Cauchy-Riemann şartlarının,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

olduğunu biliyoruz. f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y) ve

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ olsun.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\cos\theta + \frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}(-\sin\theta) \quad ...(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}.\sin\theta + \frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}(\cos\theta) \quad ...(2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}.\cos\theta + \frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta}(-\sin\theta) \quad ...(3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}.\sin\theta + \frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta}(\cos\theta) \quad ...(4)$$

olarak elde edilir.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ Cauchy-Riemann denkleminden, (1) ve (4) denklemleri

kullanılarak

$$\frac{\partial u}{\partial r}.\cos\theta - \frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}(\sin\theta) = \frac{\partial v}{\partial r}.\sin\theta + \frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta}(\cos\theta)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta=\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}\right)\sin\theta \qquad ...(5)$$

bulunur.

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ C-R denkleminden, (2) ve (3) denklemleri kullanılarak

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial r}.\sin\theta+\frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}(\cos\theta)\right)=\frac{\partial v}{\partial r}.\cos\theta-\frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta}(\sin\theta)$$

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}.\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\sin\theta=\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{r}.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\cos\theta \qquad ...(6)$$

bulunur.

(5) denklemi sinθ ve (6) denklemi cosθ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

bulunur.

Benzer şekilde (5) denklemi - sinθ ve (6) denklemi cosθ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

elde edilir.

6.ÖRNEK : $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$ fonksiyonunun analitik olduğu cümleyi bulunuz.

ÇÖZÜM : $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$ fonksiyonunun analitik olduğu noktalar $z \neq 1$ noktalarıdır.

Yani, $A = \mathbb{C}\setminus\{1\}$ cümlesidir.

7. ÖRNEK : $f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\bar{z})^2}{z} & , z\neq 0\\ 0 & , z=0\end{cases}$ ise, olarak tanımlanan fonksiyonun z=0 noktasında, Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığı halde analitik olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM : $f(x,y) = u+iv,$

$$f(0) = 0 = u(0,0)+iv(0,0)$$

olacağından,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

olur. O halde,

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-0}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{(\bar{z})^2}{z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{(\bar{z})^2}{z^2} = \lim_{y\to 0} \frac{(-iy)^2}{(iy)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{-y^2} = 1$$

bulunur. Bir de, $y=x \to 0$ doğrusu boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-ix)^2}{(x+ix)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-i)^2}{x^2(1+i)^2} = -1$$

olur. Bu sonuca göre limit yoktur. O halde analitik değildir.

8.ÖRNEK : $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & , z \neq 0 \\ 0 & , z=0 \end{cases}$ ise,

$z = r.e^{i\theta}$
$\frac{z^5}{|z|^4} = \frac{r^5.e^{5i\theta}}{r^4} = re^{5i\theta}$

olarak tanımlanan fonksiyon için,

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$$

limitinin olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM : $z = re^{i\theta}$ alalım. Buradan,

$$f(z) = \frac{r^5 e^{5i\theta}}{r^4} = re^{5i\theta}$$

dir. $z \neq 0$ için,

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{re^{5i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{4i\theta}$$

olduğundan sıfır noktasına $\theta=0$ ışını boyunca yaklaşalım.

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{\theta\to 0} e^{4i\theta}=1$$

olur. $\theta=\frac{\pi}{4}$ ışını boyunca yaklaşılırsa,

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{\theta\to\pi/4} e^{4i\theta}=-1$$

bulunur. Buradan,

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$$

değerinin olmadığı görülür.O halde f fonksiyonu z=0 noktasında analitik değildir.

9.ÖRNEK : $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & ,\ z\neq 0 \quad \text{ise}\\ 0 & ,\ z=0 \quad \text{ise}\end{cases}$

fonksiyonunun, z=0 noktasında türevli olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM : z =0 noktasına y=mx doğrusu boyunca yaklaşalım. Bu halde,

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^3}{x^2(1+m^4x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2}=0$$

Bir de, $x=y^2$ eğrisi üzerinden z=0 noktasına yaklaşalım.

$$\lim_{z\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}$$

olduğundan limit yoktur. Yani, f(z) fonksiyonu z=0 noktasında türevli değildir. Ayrıca $z\neq 0$ noktalarında Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmadığından verilen fonksiyon hiç bir noktada analitik değildir.

10.ÖRNEK : $f(z)=\begin{cases}e^{-z^{-4}} & ,\ z\neq 0 \quad \text{ise}\\ 0 & ,\ z=0 \quad \text{ise}\end{cases}$

fonksiyonu z=0 noktasında türevlenebilir mi ?

ÇÖZÜM : $z=re^{\pi i/4}$ alalım. Buna göre,

$$e^{-z^{-4}}=e^{-(re^{\pi i/4})^{-4}}=e^{(-r^{-4}.e^{-i\pi})}=e^{r^{-4}}=e^{1/r^4}$$

olur. Böylece

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} e^{1/r^4} = \infty$$

bulunur. Öyleyse , $\lim_{z\to 0} f(z)$ yoktur. Yani f(z) fonksiyonu z=0 noktasında türevli değildir.

11.ÖRNEK : u=xy fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz. Harmonik eşleniğini ve f(z) fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

olduğundan u=xy fonksiyonu harmoniktir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x=y=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \frac{1}{2} y^2+\varphi(x)$$

ve

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x$$

bulunur. Buradan,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} x^2+c$$

elde edilir. O halde,

$$v = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c$$

harmonik eşlenik fonksiyonu bulunur. Buradan f(z) fonksiyonu,

$$f(z) = xy - \frac{i}{2} (x^2-y^2) + ic$$

ve c=0 alınırsa,

$$f(z) = -\frac{i}{2} z^2$$

biçiminde yazılır.