T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL DELİK İÇEREN ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN OLUŞAN ŞERİT PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

Mehmet Can ATASAYANLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Danışman

Doç. Dr. Ülkü YEŞİL

Ağustos, 2021

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL DELİK İÇEREN ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN OLUŞAN ŞERİT PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

Mehmet Can ATASAYANLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Danışman

Doç. Dr. Ülkü YEŞİL

Ağustos, 2021

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL DELİK İÇEREN ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN OLUŞAN ŞERİT PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

Mehmet Can ATASAYANLAR tarafından hazırlanan tez çalışması 27/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ülkü YEŞİL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç.Dr.Ülkü YEŞİL, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof.Dr. Nihal ERATLI, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

PROF.Dr. Reşat KÖŞKER, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Başta anneme

ve

bana yürekten inanlara...

TEŞEKKÜR

Bu akademik tez çalışmasının hazırlanması sürecinde bilgi ve tecrübesinden yararlandığım, ve desteğini bir an olsun üzerimden çekmeyen danışman hocam Doç.Dr. Ülkü BABUŞCU YEŞİL'e sonsuz teşekkür ederim.

Yaptığımız hemen her çalışmamızda bilgi ve tecrübesiyle yolumuzu aydınlatan değerli hocam Prof.Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU'na teşekkür ederim.

Son olarak hayatının hemen her anında benim daha iyi yerlere gelmem için hiçbir fedakarlıktan çekinmeyen sevgili anneme ve benim başarabileceğime benden çok inanmış dostlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Mehmet Can ATASAYANLAR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vi
KISALTMA LİSTESİ vii
ŞEKİL LİSTESİ viii
TABLO LİSTESİ xxi
ÖZET xxiii
ABSTRACT xxvi
1 GİRİŞ 1
1.1 Literatür Özeti....1
1.2 Tezin Amacı....6
1.3 Orijinal Katkı....8
2 LİNEERİZE EDİLMİŞ ELASTİSİTE TEORİSİ 9
2.1 Giriş....9
2.2 Nonlineer Alan Denklemlerinin Lineerleştirilmesi....11
3 FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ SÜREKSİZLİK İÇERMEYEN ŞERİT-PLAKLARIN STATİK ANALİZİ 17
3.1 Basınç/ Çekme Kuvveti Etkisindeki Şerit-Plak Problemi 17
3.1.1 Matematiksel Modelleme....17
3.1.2 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu....20
3.1.3 Sonlu Elemanlar Modellemesi....20
3.1.4 Sayısal Sonuçlar....26
3.2 Öngerilmeli Şerit-Plağın Eğilmesi Problemi 42
3.2.1 Matematiksel Modelleme....42
3.2.2 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu....45
3.2.3 Sonlu Elemanlar Modellemesi....46
3.2.4 Sayısal Sonuçlar....47
4 FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ DAİRESEL DELİK İÇEREN ŞERİT-PLAKLARIN STATİK ANALİZİ 64
4.1 Basınç/ Çekme Kuvveti Etkisindeki Dairesel Delik İçeren Şerit-Plak Problemi 64
4.1.1 Matematiksel Modelleme....64
4.1.2 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu....68
4.1.3 Sonlu Elemanlar Modellemesi....68
4.1.4 Sayısal Sonuçlar....74

4.2 Öngerilmeli Dairesel Delik İçeren Şerit-Plağın Eğilmesi Problemi.....99
4.2.1 Matematiksel Modelleme.....99
4.2.2 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu.....103
4.2.3 Sonlu Elemanlar Modellemesi.....104
4.2.4 Sayısal Sonuçlar.....105
5 SONUÇ VE ÖNERİLER **144**

KAYNAKÇA **156**
A ERASMUS **162**
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **164**

SİMGE LİSTESİ

h_M	Dairesel Delik Çapı
h_L	Dairesel Delik ile Plağın Alt Yüzeyi Arasındaki Mesafe
h_U	Dairesel Delik ile Plağın Üst Yüzeyi Arasındaki Mesafe
Ω	Dairesel Boşluk İçermeyen Dikdörtgen Plak Bölgesi
Ω_h	Dairesel Boşluk Çözüm Bölgesi
a	Dairesel Delik Yarıçapı
N_i	Dikdörtgen Plağın i. nodunda Tanımlı Şekil Fonksiyonu
Ω'	Dikdörtgenin Çözüm Bölgesi ile Dairesel Deliğin Çözüm Bölgesi Arasındaki Fark
h	Ox_2 Doğrultusundaki Plak Uzunluğu
ℓ	Ox_1 Doğrultusundaki Plak Uzunluğu
δ_i^j	Kronecker Sembol
λ, μ	Lame Sabitleri
$\sigma_{ij}^{(m)}$	m. Yaklaşımdaki Gerilme Tansörü Bileşeni
$\varepsilon_{ij}^{(m)}$	m. Yaklaşımdaki Şekil Değiştirme Tansörü Bileşeni
U	Nodlarda Bilinmeyenleri İçeren Matris
p	Plağın Üst Yüzeyinden Etki Eden Düzgün Yayılı Basınç Yükünün Yoğunluğu
q	Plağın $x_1 = 0; \ell_1$ Kenarlarından Etki Eden Öngerilme Kuvvetinin Yoğunluğu
υ_k	Poisson Oranı
K	Rijitlik Matrisi
F	Sağ Taraf veya Kuvvet Matrisi

KISALTMA LİSTESİ

FEM	Finite Element Method
FDM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
FGM	Functionally Graded Material
LEÜBET	Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi
NDOF	Number Degree of Freedom (Serbestlik Derecesi)
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi
TDLTE	Three-Dimensional Linearized Theory of Elasticity

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 Çözüm bölgesi ve yükleme durumu..... 17

Şekil 3.2 (a)Malzeme özelliği Ox_1 ekseni boyunca değişen FD şerit-plak
(b)Malzeme özelliği Ox_2 ekseni boyunca değişen FD şerit-plak 19

Şekil 3.3 Örnek sonlu eleman ve düğüm noktaları..... 21

Şekil 3.4 σ_{11}/q gerilme değerlerine $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ için $x_2 = h$ kesitinde $q / E_0 = 0.005$ ve $E_1 / E_0 = 5$ durumunda (a) M parametresi değişiminin etkisi (b) N parametresi değişiminin etkisi..... 27

Şekil 3.5 σ_{11}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde ve $E_1 / E_0 = 5$ durumunda $|q / E_0|$ değişiminin etkisi..... 28

Şekil 3.6 τ_{12}/q kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h/2$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde ve $E_1 / E_0 = 5$ durumunda $|q / E_0|$ değişiminin etkisi..... 29

Şekil 3.7 σ_{22}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde ve $E_1 / E_0 = 5$ durumunda $|q / E_0|$ değişiminin etkisi..... 29

Şekil 3.8 u_1 yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde ve $E_1 / E_0 = 5$ durumunda $|q / E_0|$ değişiminin etkisi..... 30

Şekil 3.9 u_2 yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde ve $E_1 / E_0 = 5$ durumunda $|q / E_0|$ değişiminin etkisi..... 31

Şekil 3.10 σ_{11}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde $E_1 / E_0 = 5$ ve $E_1 / E_0 = 1$ durumlarında q / E_0 değişiminin etkisi..... 31

Şekil 3.11 τ_{12}/q kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h/2$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $E_1/E_0 = 1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi..... 32

Şekil 3.12 σ_{22}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $E_1/E_0 = 1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi..... 33

Şekil 3.13 u_1 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $E_1/E_0 = 1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi..... 34

Şekil 3.14 u_2 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $E_1/E_0 = 1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi..... 34

Şekil 3.15 σ_{11}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 35

Şekil 3.16 τ_{12}/q kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h/2$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 35

Şekil 3.17 σ_{22}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 36

Şekil 3.18 u_1 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 37

Şekil 3.19 u_2 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 37

Şekil 3.20 σ_{11}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 38

Şekil 3.21 τ_{12}/q kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 39

Şekil 3.22 σ_{22}/q gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 39

Şekil 3.23 u_1 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 40

Şekil 3.24 u_2 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 41

Şekil 3.25 Çözüm bölgesi ve yükleme durumu..... 42

Şekil 3.26 Öngerilmesiz şerit-plakta $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) Problem 3 $\left(\mathrm{E}(\mathrm{x}_1)=\mathrm{E}_0\left(\mathrm{ax}_1+\mathrm{b}\right)^2\right)$ (b) Problem 4 $\left(\mathrm{E}(\mathrm{x}_2)=\mathrm{E}_0\left(\mathrm{cx}_2+\mathrm{d}\right)^2\right)$ için sırasıyla $\mathrm{x}_2=\mathrm{h}$ ve $\mathrm{x}_1=\ell/4$ kesitlerinde E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 49

Şekil 3.27 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 49

Şekil 3.28 $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 50

Şekil 3.29 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 51

Şekil 3.30 $u_1^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 51

Şekil 3.31 $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 52

Şekil 3.32 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi..... 53

Şekil 3.33 $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi..... 54

Şekil 3.34 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında öngerilmenin etkisi..... 54

Şekil 3.35 $u_1^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında öngerilmenin etkisi..... 55

Şekil 3.36 $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında öngerilmenin etkisi..... 56

Şekil 3.37 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ iken $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 57

Şekil 3.38 $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ iken $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 57

Şekil 3.39 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ iken $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 58

Şekil 3.40 $u_1^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ iken $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 59

Şekil 3.41 $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ iken $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 59

Şekil 3.42 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 60

Şekil 3.43 $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 61

Şekil 3.44 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 61

Şekil 3.45 $u_1^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde $q / E_0 = 0.005$ ve $q / E_0 = 0$ durumlarında E_1 / E_0 değişiminin etkisi..... 62

Şekil 3.46 $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h/2$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde $q / E_0 = 0.005$ ve $q / E_0 = 0$ durumlarında E_1 / E_0 değişiminin etkisi..... 63

Şekil 4.1 Dairesel delik içeren şerit-plağa ait çözüm bölgesi ve yükleme durumu..... 65

Şekil 4.2 (a)Malzeme özelliği Ox_1 ekseni boyunca değişen dairesel delik içeren FD şerit-plağın ½ lik kısmı (b) Malzeme özelliği Ox_2 ekseni boyunca değişen daireseldelik içeren FD şerit-plağın ½ lik kısmı..... 66

Şekil 4.3 a) Diresel delik içeren şerit-plağa ait sonlu eleman ağı, b) Ele alınan bazı sonlu elmanlar ve nodların konumu..... 68

Şekil 4.4 Seçilen üçgen sonlu elemanın a)Geometrisi, b)Sayısal integral bölgeleri..... ..72

Şekil 4.5 $\sigma_{\theta\theta}/\mathrm{q}$ gerilme değerlerine $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$ için dairesel delik civarında $\mathrm{q} / \mathrm{E}_0 = 0.005$, $\mathrm{E}_1 / \mathrm{E}_0 = 5$ $\mathrm{h_u} / \mathrm{a} = \mathrm{h_L} / \mathrm{a} = 5$, $\mathrm{a} / \ell = 0.0125$ durumunda (a1) M parametresi değişiminin etkisi (b1) N parametresi değişiminin etkisi.....76

Şekil 4.6 $\sigma_{\theta\theta}/\mathrm{q}$ gerilme değerlerine (a) $\mathrm{E}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{E}_0\left(\mathrm{ax}_1 + \mathrm{b}\right)^2$ (b) $\mathrm{E}(\mathrm{x}_2) = \mathrm{E}_0\left(\mathrm{cx}_2 + \mathrm{d}\right)^2$ için $\mathrm{h_u} / \mathrm{a} = \mathrm{h_L} / \mathrm{a} = 5$, $\mathrm{a} / \ell = 0.0125$, $\mathrm{h} / \ell = 0.15$ ve $\mathrm{E}_1 / \mathrm{E}_0 = 5$ durumlarında $\left|q / E_0\right|$ değişimin etkisi.....78

Şekil 4.7 $\tau_{\mathrm{r}\theta}/\mathrm{q}$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $\mathrm{E}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{E}_0\left(\mathrm{ax}_1 + \mathrm{b}\right)^2$

(b) $\mathrm{E}(\mathrm{x}_2) = \mathrm{E}_0\left(\mathrm{cx}_2 + \mathrm{d}\right)^2$ için $\mathrm{h_u} / \mathrm{a} = \mathrm{h_L} / \mathrm{a} = 5$, $\mathrm{a} / \ell = 0.0125$, $\mathrm{h} / \ell = 0.15$ ve $\mathrm{E}_1 / \mathrm{E}_0 = 5$ durumlarında $\left|q / E_0\right|$ değişimin etkisi..... .79

Şekil 4.8 $\sigma_{\mathrm{rr}}/\mathrm{q}$ gerilme değerlerine (a) $\mathrm{E}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{E}_0\left(\mathrm{ax}_1 + \mathrm{b}\right)^2$ (b) $\mathrm{E}(\mathrm{x}_2) = \mathrm{E}_0\left(\mathrm{cx}_2 + \mathrm{d}\right)^2$ için $\mathrm{h_u} / \mathrm{a} = \mathrm{h_L} / \mathrm{a} = 5$, $\mathrm{a} / \ell = 0.0125$, $\mathrm{h} / \ell = 0.15$ ve $\mathrm{E}_1 / \mathrm{E}_0 = 5$ durumlarında $\left|q / E_0\right|$ değişimin etkisi..... 79

Şekil 4.9 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $\mathrm{E}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{E}_0\left(\mathrm{ax}_1 + \mathrm{b}\right)^2$

(b) $\mathrm{E}(\mathrm{x}_2) = \mathrm{E}_0\left(\mathrm{cx}_2 + \mathrm{d}\right)^2$ için $\mathrm{h_u} / \mathrm{a} = \mathrm{h_L} / \mathrm{a} = 5$, $\mathrm{a} / \ell = 0.0125$, $\mathrm{h} / \ell = 0.15$ ve $\mathrm{E}_1 / \mathrm{E}_0 = 5$ durumlarında $\left|q / E_0\right|$ değişimin etkisi..... 80

Şekil 4.10 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında $|q/E_0|$ değişimin etkisi..... 81

Şekil 4.11 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,$ $h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi..... .82

Şekil 4.12 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi..... 82

Şekil 4.13 σ_{rr}/q gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,$ $h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi..... 83

Şekil 4.14 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi..... 84

Şekil 4.15 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi..... 84

Şekil 4.16 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi..... 85

Şekil 4.17 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi..... .86

Şekil 4.18 σ_{rr}/q gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi..... 86

Şekil 4.19 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h/ℓ değişimin etkisi..... 87

Şekil 4.20 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h/ℓ değişimin etkisi..... 88

Şekil 4.21 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5,\ h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi..... 89

Şekil 4.22 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5,\ h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi..... 89

Şekil 4.23 σ_{rr}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5,\ h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi..... 90

Şekil 4.24 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5,\ h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi..... 91

Şekil 4.25 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5,\ h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi..... 91

Şekil 4.26 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5,\ h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 92

Şekil 4.27 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5,\ h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 93

Şekil 4.28 σ_{rr}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5,\ h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 93

Şekil 4.29 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 94

Şekil 4.30 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 95

Şekil 4.31 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 96

Şekil 4.32 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 96

Şekil 4.33 σ_{rr}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 97

Şekil 4.34 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 98

Şekil 4.35 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 98

Şekil 4.36 Dairesel delik içeren şerit-plağa ait çözüm bölgesi ve yükleme durumu..... 99

Şekil 4.37 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 106

Şekil 4.38 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 107

Şekil 4.39 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 107

Şekil 4.40 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 108

Şekil 4.41 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi..... 109

Şekil 4.42 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi..... 110

Şekil 4.43 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi..... 110

Şekil 4.44 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi..... 111

Şekil 4.45 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi..... 112

Şekil 4.46 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi..... 112

Şekil 4.47 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi..... 113

Şekil 4.48 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi..... 114

Şekil 4.49 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi..... 114

Şekil 4.50 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi..... 115

Şekil 4.51 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi..... 116

Şekil 4.52 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişiminin etkisi..... 117

Şekil 4.53 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişiminin etkisi..... 117

Şekil 4.54 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişiminin etkisi..... 118

Şekil 4.55 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişiminin etkisi..... 119

Şekil 4.56 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$, ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi..... 119

Şekil 4.57 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 120

Şekil 4.58 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 121

Şekil 4.59 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 121

Şekil 4.60 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 122

Şekil 4.61 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi..... 123

Şekil 4.62 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$, $q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 124

Şekil 4.63 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$, $q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 124

Şekil 4.64 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$, $q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 125

Şekil 4.65 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$, $q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 126

Şekil 4.66 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$, $q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi..... 126

TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1 Dairesel delik içeren izotrop şerit-plakta farklı delik boyutları için $\sigma_{\theta\theta}/\mathbf{q}$ 'nun bazı noktalardaki değerleri..... 77

Tablo 4.2 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli$(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz$(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri..... 129

Tablo 4.3 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli$(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz$(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri..... 130

Tablo 4.4 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli$(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz$(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri..... 132

Tablo 4.5 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli$(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz$(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri..... 133

Tablo 4.6 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli$(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz$(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri..... 136

Tablo 4.7 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli$(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz$(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri..... 137

Tablo 4.8 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli$(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz$(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $u_{\theta}^{(1)}$ gerilme değerleri..... 139

Tablo 4.9 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz $(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $u_\theta^{(1)}$ gerilme değerleri..... 140

Tablo 4.10 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz $(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $u_r^{(1)}$ gerilme değerleri..... 142

Tablo 4.11 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilmesiz $(q/E_0 = 0)$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $u_r^{(1)}$ gerilme değerleri..... 143

ÖZET

Dairesel Delik İçeren Öngerilmeli Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden Oluşan Şerit Plakların Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Statik Analizi

Mehmet Can ATASAYANLAR

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ülkü YEŞİL

Bu tez kapsamında fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) malzemeden yapılmış, karşılıklı iki kenarından basit mesnetli şerit-plağın yapısında dairesel formda delik içermesi ve/veya içermemesi durumları ile yapı elemanı malzemesinin öngerilme içermesi ve/veya öngerilme içermemesi durumlarında farklı dış yükler altında yapısında oluşan gerilme ve yer değiştirme değerleri, düzlem şekil değiştirme kabulü altında incelenmiştir. İncelemelerde FD şerit-plak malzemesine ait Young Modülünün koordinat eksenleri doğrultusunda değişimi polinom fonksiyon olarak seçilmiş ancak, Poisson oranı ile malzeme yoğunluğunun sabit olduğu kabul edilmiştir. Young modülünün koordinata bağlı değişimi, tek serbestlik dereceli olacak şekilde seçilerek, farklı fonksiyonlar için farklı problemler incelenmiştir. Yapı elemanının öngerilmesiz olması durumuna ait matematiksel modelleme Lineer Elastisite Teorisi'nin kesin denklemleri yardımıyla; öngerilmeli olması durumuna ait matematiksel modelleme Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) yardımıyla modellenmiştir. Ele alınan sınır değer problemlerinin çözümü, Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak sayısal olarak yapılmıştır.

Tez beş bölüm ve kaynaklardan oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, matematiksel modellemede kullanılan Lineerize edilmiş 3 boyutlu elastisite teorisi hakkında bilgilendirme yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış süreksizlik içermeyen şerit-plakların statik analizi incelenmiştir. Bu bölümün ilk kısmında çekme kuvveti altında şerit-plak problemi ele alınmış, FDM özellikleri farklı 2 eksen (Ox_1 ve Ox_2 eksenleri) boyunca değişen 2 problem incelenmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi problemi ele alınmış, yine FDM özellikleri farklı 2 eksen (Ox_1 ve Ox_2 eksenleri) boyunca değişen 2 problem incelenmiştir. Ele alınan plağın, esas yükleme yapılmadan önce, yapısında öngerilmelerin olduğu ve bu öngerilmelerin, plağın karşılıklı iki kenarından etki eden düzgün yayılı eksenel kuvvet etkisinde, şerit-plağın yapısında oluştuğu kabul edilmektedir. Ele alınan öngerilmeli FD plağın üst yüzeyinde etki eden normal basınç kuvveti etkisiyle eğilmesi durumunda, plak yapısında oluşan gerilme ve yer değiştirme değerleri belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış içerisinde dairesel en kesitli boşluk içeren şerit-plakların statik analizi incelenmiştir. Bu bölümün ilk kısmında, karşılıklı iki kenarından etki eden eksenel çekme kuvveti altında dairesel delik içeren şerit-plak problemi ele alınmış, FDM özellikleri farklı 2 eksen (Ox_1 ve Ox_2 eksenleri) boyunca değişen 2 problem incelenmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında dairesel formda delik içeren öngerilmeli şerit-plağın, üst yüzeyine etki eden normal basınç kuvveti etkisiyle eğilmesi problemi ele alınmış, FDM özellikleri farklı 2 eksen (Ox_1 ve Ox_2 eksenleri) boyunca değişen 2 problem incelenmiştir. Ele alınan plağın, esas yükleme yapılmadan önce, yapısında öngerilmelerin olduğu ve bu öngerilmelerin, plağın karşılıklı iki kenarından etki eden düzgün yayılı eksenel kuvvet etkisinde yapıda oluştuğu kabul edilmektedir. Ele alınan öngerilmeli FD plağın üst yüzeyinde etki eden normal basınç yükü tesiriyle eğilmesi durumunda, dairesel delik civarında oluşan kutupsal gerilme ve yer değiştirme değerleri belirlenmiştir.

Beşinci bölümünde, tez çerçevesinde yapılan çalışmaların değerlendirilmesi, sonuç ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, öngerilme, dairesel delik, statik analiz, sonlu elemanlar yöntemi

ABSTRACT

Static Anaysis Of Fgm Pre-Stressed Plate-Strip Contained Circular Hole With Fem

Mehmet Can ATASAYANLAR

Department of Mathematical Engineering

Master Thesis

Advisor: Assc. Prof. Dr. Ulku YESIL

Within the scope of this thesis, the stress and displacement distributions of plate-strip which is simply supported on two opposite ends, made from functionally graded (FG) material, contains and/or does not contain a circular hole in its structure, and in cases where the structural element material contains pre-stress and/or does not contain pre-stress under different external loads under the plane strain state assumption are investigated. In the investigations, the variation of the Young's Modulus of the FDM plate-strip in the direction of the coordinate axes is chosen as a polynomial function, but the Poisson ratio and the material density have been assumed to be constant. Different problems are investigated for different functions by choosing the coordinate dependent variation of Young's modulus with a degree of freedom. The mathematical modeling of the problem without pre-stressed state is modeled with the help of the exact equations of the Linear Elasticity Theory and the mathematical modeling of the pre-stressed state is modeled with the help of the Linearized Three-Dimensional Theory of Elasticity (TDLTE). The solution of the considered boundary value problems are obtained numerically by using the Finite Element Method.

The thesis consists of five chapters and references. In the first chapter, the literature summary and the aim of the thesis are given.

In the second chapter, information is given about the Linearized 3D elasticity theory which is used for the mathematical modeling of the considered problems.

In the third chapter, the static analysis of FGM plate-strip without any discontunity is examined. In the first part of this chapter, the plate-strip problem under tensile force is discussed, and 2 problems with FGM properties varying along 2 axes (Ox_1 and Ox_2 axes) are examined. In the second part of this chapter, pre-stressed plate-strip problem under bending is discussed, and 2 problems with FGM properties varying along 2 axes (Ox_1 and Ox_2 axes) are examined. It is assumed that there are pre-stresses in the structure before the main loading and these pre-stresses are formed in the structure of the plate-strip under the effect of a uniformly distributed axial force acting on the two opposite sides of the plate. The stress and displacement distributions of the pre-stressed FG plate structure have been determined under the influence of the normal pressure force acting on its upper surface.

In the fourth chapter, the static analysis of the plate-strip made of functionally graded material containing a circular cross-sectional cavity is examined. In the first part of this section, the plate-strip problem contains a circular hole under the axial tensile force acting on its two opposite sides is discussed, and 2 problems with FGM properties varying along 2 axes (Ox_1 and Ox_2 axes) are examined. In the second part of this section, bending problem of the pre-stressed plate-strip with a circular hole under the influence of the normal pressure force acting on its upper surface is discussed, and 2 problems with different FGM properties along 2 axes (Ox_1 and Ox_2 axes) are examined. It is assumed that there are pre-stresses in the structure before the main loading, and these pre-stresses occur in the structure under the influence of a uniformly distributed axial force acting from the two opposite sides of the plate. The polar stress and displacement distributions around the circular hole are determined under the bending of the pre-stressed FG plate-strip.

When the considered prestressed FG plate is bent by the effect of normal pressure load acting on its upper surface, the polar stress and displacement propagations that occur around the circular hole are determined.

In the fifth chapter, the evaluation of the studies carried out within the framework of the thesis, the results and suggestions are presented.

Keywords: functionally graded material, pre-stress, circular hole, static analysis, finite element method

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeler (FDM) yüksek aşınıma göstermiş oldukları dayanıklılık, yüzey gerilmelerini azaltmaları ve yüksek sıcaklık değişimlerine karşı göstermiş oldukları mukavemet gibi birçok nedenlerle günümüzde pek çok mühendislik alanında yaygın bir biçimde kullanım alanına sahiptirler. Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeler derecelendirmeyi sağlayan fonksiyonun konuma bağlı olması sebebiyle, konum değiştikçe malzeme özelliklerinin bir noktadan diğer bir noktaya göre kademeli/dereceli değiştiği, homojen özellik göstermeyen kompozit yapılardır.

FDM'ler ilk olarak 1984 yılında bir uzay aracı projesinde Japonya'da kullanılmıştır [1-2]. Bu tarihten itibaren FDM'lerin mekaniği üzerine araştırmacıların ilgisi giderek artmış ve özellikle son 25 yılda teorik, sayısal ve deneysel pek çok çalışma yapılmıştır. Literatürde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış farklı geometrik form (kiriş/plak/kabuki/silindir) ve boyutlarda (2/3 boyutlu, sonlu/sonsuz ortam) yapısal elemanlar, farklı yaklaşımlarla incelenmiştir. [3]'de çeşitli yöntemlerle FDM'den yapılmış plaklar için kapsamlı bir derleme araştırması yapılmıştır. [4]'de farklı sınır koşullarında FDM'den yapılmış plakların bazı düzlem elastisite problemleri ile bu problemlerin analitik çözümleri verilmiştir. [5]'de eksenel asimetrik eğilme altındaki fonksiyonel olarak derecelendirilmiş silindirik ve dairesel formda plakların gerilme analizi, Mindlin plak teorisi kullanılarak incelenmiştir. Homojen olmayan malzemelerin davranışını modellemek için [6]'da doğrusal interpolasyon fonksiyonları yardımıyla [7]'de genelleştirilmiş bir izoparametrik formülasyon kullanılarak dereceli sonlu elemanlar formüle edilmiştir. [8]'de FDM plakların seri çözümlerinin teorik formülasyonları türetilmiş, [9]'da bu teorik formülasyonların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile MARC programı kullanılarak sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yang v.d. tarafından

düzgün yayılı yük etkisinde fonksiyonel derecelendirilmiş halka plakların elastisite çözümleri incelenmiştir [10].

FDM'nin kapsamlı bir incelemesi [11]'de yapılmıştır. FDM'den yapılmış düzlemsel kiriş ve çerçeve yapıların geometrik olarak nonlineer analizi [12]'de sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. [13]'de FDM plaklar için yüksek mertebeli kayma deformasyon teorisi önerimiştir. [14]'da FDM kirişlerin, kayma deformasyon analizi için Gateaux diferansiyel yöntemi kullanılarak alternatif bir çözüm prosedürü incelenmiştir. [15]'de 3D Saint-Venant teorisi kullanılarak FDM kirişlerin statik davranışı incelenmiştir. [16]'da FDM kare bir sandviç plağın statik analizi, dört değişkenli plak teorisi kulanılarak incelenmiştir. İmalat ve işleme tekniklerindeki önemli ilerlemeler, bilgisayarlı imalat teknikleri kullanılarak karmaşık özelliklere ve şekillere sahip FDM'lerin üretilmesini mümkün kılmıştır [17]. Yapılan bu araştırmalar içinde FDM'lerin statik ve dinamik hareketi üzerine yapılan çalışmalar içinde, kapalı formdaki analitik çözümlerin önemli bir kısmını; özel olarak seçilen sınır koşullarını sağlayan basit mesnetli sınır şartlarıyla formüle edilmiş Navier tipi çözümlerin oluşturduğunu söyleyebiliriz. Bu çözümlerde genel olarak malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca üstel değişecek şekilde seçildiğini belirtebiliriz [18].

Modern mühendislikte yapı elemanları oluşturlurken daha güvenli yapılara ve yüksek dayanımlı malzeme kullanımına ulaşmak ve esas yükleme esnasında avantaj sağlayabilmek için ya da montaj kusurları veya çeşitli teknolojik uyumsuzluklar nedeniyle istemeden yapı elemanında ön gerilme adı verilen iç gerilmeler oluşabilmektedir. Yapılan teorik ve deneysel çalışmalara göre yapı elemanının içerdiği bu öngerilmeler kullanım esnasında yapı elemanının davranışını önemli ölçüde etkilemektedirler. Örneğin; öngerilmelerin değerinin belirli bir değerden fazla kalması, esas yükleme yapılmadan önce yapı elemanlarında ezilme, kopma gibi istenmeyen hasarların oluşmasına neden olabilmektedir. Bu nedenlerle öngerilmelerin belirlenmesi önem taşımaktadır.

Çeşitli yüklemeler etkisinde yapı elemanlarının içerdiği delik, boşuk gibi süreksizlikler, gerilme üretici gibi davranarak yapı içersinde gerilme yığılmalarına neden olmaktadırlar. Malzemelerin dayanımlarının belirlenebilmesi için yapıdaki

bu gerilmelerin belirlenmesi oldukça önemlidir. Bu nedenle yapı elemanlarının içerdiği bu delikler civarında gerilme değerlerinin belirlenmesi elastisite teorisinin temel problemlerindendir. Literatürdeki mevcut deneysel ve teorik çalışmalar incelendiğinde, bu çalışmaların belirli açılardan sınıflandırılması yapılabilir. Örneğin; modellemede kullanılan teorilere (kesin teori/yaklaşık plak teorileri vb.) göre, yapı elemanının malzemesine (izotrop, anizotrop, FDM) göre, yapı elemanının geometrik boyutlarına (3 boyutlu/2 boyutlu, sonsuz/sonlu vb.) göre, boşluğun/deliğin geometrik formuna (eliptik/dairesel/dikdörtgen vb.) göre ve yapı elemanının doğal durumundaki mevcut ön etkilerin (öngerilme) ele alınmasına göre gruplandırmalar yapılabilir. Mevcut teorik ve deneysel çalışmalar, ele alınan problemler hakkındaki bilgi birikimine çok önemli katkılar yapmışlardır.

Çeşitli geometrik formdaki delikler civarında oluşan gerilme yığılmalarının belirlenmesine ait ilk çalışmalar Savin [19] tarafından sonsuz izotrop ortamda incelenmiştir. Bu çalışmada sonsuz boyutlu plağa sonsuzda etkiyen dış kuvvet etkisinde delikler civarındaki gerime değerlerinin belirlenmesi için konform dönüşümler ve kompleks fonksiyonlar teorisi kullanılarak analitik çözümler verilmiştir. Daha sonraları çeşitli formda delikler civarındaki gerilme yığılmaları, karmaşık geometri ve sınır koşulları ile çeşitli anizotropi özelliklerinin göz önüne alınabilmesi durumları için analitik çözümlerin yerini sayısal çözüm yöntemleri almaya başlamıştır.

Bu konuda yapılmış bazı lisansüstü tezleri Kaltakçı [20], Dündar [21], Yücel [22], Yeşil [23,24] örnek olarak verilebilir. Bu tezlerde çeşitli formlarda delik içeren kompozit plaklarda ele alınan yükleme durumunda çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri ile çeşitli mesnet koşullarının, dış yükleme etkisinde yapıdaki boşluk civarında oluşan gerilme yığılmalarına etkileri sayısal olarak araştırılmıştır. Ayrıca [24]'de anizotrop silindirik boşluk içeren plağın öngerilmeli olması durumunda bazı statik ve dinamik analizleri üç boyutlu nonlineer elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde modellenmiştir. Çeşitli formdaki delik veya delikler içeren plaklar için yapılan diğer bazı çalışmalar, Hu vd. [25], Xu vd. [26], Ukadgaonker ve Rao [27], Engels vd. [28], Pan vd. [29], Wu ve Mu [30], Pandita vd. [31], Temizvd. [32], Suemasu vd. [33], Toubal vd. [34], Ukadgaonker ve Kakhandki

[35], Jain ve Mittal [36], Yang vd. [37], Zheng vd. [38], Lie vd. [39], Yang [40], Yang vd. [41], Rao vd. [42], Sharma [43] ve Nagpal vd. [44] olarak verilebilir.

Yapı elemanının başlangıçta sahip olduğu ön etkilerin (öngerilme vb.) göz önüne alındığı, gerilme yığılması problemlerine ait çalışmalardan bazıları Akbarov vd. [45]-[47], Khoma ve Kondratenko [48], Yahnioğlu ve Yeşil [49], Yeşil [50-51] olarak verilebilir.

Dairesel boşluk içeren plaklarda fonksiyonel derecelendirme işlemi için derecelendirme farklı fonksiyonlarla tanımlanmıştır. Mohammadi vd. [52] değişen Poisson oranının ve Young modülünün radyal yönde üstel değişken olduğunu varsayarak, homojen çift eksenli gerilmeye ve saf kesmeye maruz bırakılan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir malzemeden yapılmış sonsuz bir plaktaki dairesel delikte gerilme yayılım faktörleri üzerindeki etkisini analiz etmişlerdir. Karahalil [53] iki boyutlu dairesel ve eliptik formda boşluk içeren plakların fonksiyonel olarak derecelendirilerek plak üzerinde gerilme yığılmalarını incelemiştir. Yine fonksiyonel derelendirilmiş dairesel formda delik içeren plaklar için nümerik analiz içeren pek çok çalışma yapılmıştır. Kubair ve Bhanu-Chandar [54] farklı dereceli (potansiyel ve üstel) yasalar kullanarak işlevsel olarak derecelendirilmiş bir paneldeki dairesel bir delik nedeniyle radyal doğrultuda malzeme homojenliğinin gerilme yayılım faktörü üzerindeki etkisini isoparametrik sonlu eleman formülasyonunu kullanarak sayısal olarak incelemişlerdir. Ayrıca fonksiyonel formu ve malzeme özellik derecesinin yönünü değiştirerek tek eksenli gerilme altında dairesel delikli fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plaklar üzerinde parametrik bir çalışma gerçekleştirmiş ve Young modülünün delikten uzaklaştıkça gerilme yayılım faktörünün azaldığını göstermişlerdir. Yang vd. [55], dairesel delik içeren kademeli olarak derecelendirilmiş bir plağın çeşitli sabit yükler altında iki boyutlu gerilme yayılımını parça-bazlı homojen tabakalar yöntemi kullanarak analiz etmiş ve çözüm karmaşık değişken fonksiyonlar vasıtasıyla elde edilmiştir. Keyfi sabit yükler altında dairesel delikli sonlu bir FD malzemeden yapılmış iki boyutlu plağın gerilme yayılımını hesaplamak için karmaşık değişken yöntemiyle birleştirilen en küçük kare sınır sıralama tekniği kullanılmıştır [56]. Sburlati vd. [57] farklı yüklemeler altında dairesel delik içeren

plaklarda deliğin etrafındaki radyal olarak heterojen bir tabakanın gerilme yığılmaları üzerindeki etkisini incelemiştir ve Poisson oranının değişikliğinin gerilme yayılım faktörünün azalmasını daha az etkilediğini ve elastisite modülünün delik çeperinden plak dışına doğru artmasıyla delik civarındaki gerilme değerinin düştüğü görülmüştür. Kubair [58, 59], anti-düzlem kesme yüklemesine tabi tutulan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plaklardaki dairesel deliklerin etkisini analiz etmiş ve bir kapalı form çözümü elde etmiştir. Huang vd. [60], daha fazla mukavemet sağlamak için bir delik etrafındaki eksenel simetrik elastik modül dağılımlarının optimizasyon analizini gerçekleştirmişlerdir.

Literatürde, FDM için yapısal elemandaki ön gerilimler gibi ön etkiler üzerine araştırma çalışmaları bulunmamaktadır. [61, 62]'de bu tez çalışması çerçevesinde yapısında süreksizlik içermeyen öngerilmeli fonksiyonel derecelendirilmiş şerit-plaklarda yerdeğiştirme ve gerilme analizleri incelenmiştir. [63]'de ise yine bu tez çerçevesinde tarafımızdan yayınlanan dairesel formda delik içeren öngerilmeli fonksiyonel derecelendirilmiş şerit-plaklarda delik çeperinde yerdeğiştirme ve gerilme analizi incelenmiştir. Bu çalışmalar yapı elemanının statik karakteristiklerine çeşitli geometrik ve malzeme özellikleri ile sınır koşullarının etkisinin belirlenmesi problemlerinin kesin teori çerçevesinde incelenmesi ve özellikle yapı elemanının öngerilmeli olması durumunda belirtilen karakteristiklerin öğrenilmesinde önemli katkılar yapabileceği öngörülmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışması kapsamında yapılan araştırmaların amaçları aşağıda özetlenmiştir.

1. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış ve yapısında öngerilme olmaması (Kısım 3.1) veya yapısında öngerilme olması (Kısım 3.2) durumları için ele alınan şerit-plağa ait bazı statik problemlerin matematiksel modelinin kurulması, bu matematiksel modelin sayısal çözümünün gerektirdiği sonlu eleman formülasyonu ile algoritma ve programların oluşturulması,
2. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış ve yapısında öngerilmenin olmaması (Kısım 4.1) veya yapıda öngerilme olması (Kısım 4.2) durumları için ele alınan dairesel formda delik içeren sonlu şerit-plağa ait bazı statik problemlerin matematiksel modelinin kurulması, bu matematiksel modelin sayısal çözümünün gerektirdiği sonlu eleman formülasyonu ile algoritma ve programların oluşturulması ,
3. Yapı elemanının yapısında öngerilme olmaması durumuna ait matematiksel modelleme, Lineer Elastisite Teorisi'nin kesin denklemleri yardımıyla; yapısında öngerilme olması durumuna ait matematiksel modelleme, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) yardımıyla modellenmesi,
4. Ele alınan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış şerit-plağa ait Young Modül fonksiyonunun, tek serbestlik derecesine sahip ve çeşitli polinom fonksiyonlar seçilmesi durumlarında, ele alınan çeşitli sınır değer problemleri çerçevesinde yapıda oluşan yer değiştirme ve gerilme değerlerine, seçilen bu fonksiyonlardaki parametrelerin etkisinin incelenmesi;
5. Ele alınan şerit-plağa ait sonlu eleman ayrıklaştırmasında, yapıda dairesel delik olmadığı durum için tüm bölgede 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar; yapıda dairesel delik olması durumunda, dairesel delik civarında eğrisel kenarlı ve altı nodlu sonlu elemanlar, geriye kalan bölgede 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar birlikte kullanılmıştır. Eğrisel kenarlara sahip 6 nodlu sonlu elemanlar ile 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar üzerinde sayısal işlemlerin yapılabilmesi için gerekli algoritma ve programların geliştirilmesi,

6. Tarafımızdan oluşturulan algoritma ve programlardan elde edilen sayısal sonuçların, literatürdeki uygun sonuçlarla test edilmesi,
7. Tez çerçevesinde incelenen problemlerde şerit-plak malzemesinin farklı fonksiyonel derecelendirilme doğrultusunun, verilen dış yükleme etkisinde yapıda oluşan yer değiştirme ve gerilme değerlerine etkisinin belirlenmesi,
8. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış yapı elemanlarında öngerilmenin statik analize etkilerinin belirlenmesi,
9. Ele alınan her bir problem için verilen dış yükler etkisinde, farklı malzeme ve geometrik parametre değişimlerinin; süreksizlik olmaması durumunda yapı elemanının belirli kesitlerinde, süreksizlik olması durumunda ise süreksizliği içeren dairesel delik civarında gerilme ve yer değiştirme değerlerine olan etkisinin belirlenmesi,
10. Elde edilen sayısal sonuçların değerlendirilmesi

1.3 Orijinal Katkı

Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Malzemeler, pek çok etkiye göstermiş oldukları dayanıklılıkları nedeniyle mekanik alanda önemli bir yere sahiptirler ve her gün bu önemini daha da attırmaktadırlar. Bu kapsamda yapılan pek çok deneysel ve teorik çalışma mevcuttur. Deneysel çalışmaların üretim zorluğu ve uygulanabilirliği araştırmacıları teorik çalışmalara yönlendirmiştir.

Ele aldığımız bu tez kapsamında FDM malzemeden yapılmış dairesel delik formunda süreksizlik içeren ve süreksizlik içermeyen şerit plak problemleri Lineer Elastiste Teorisinin kesin denklemleri yardımıyla modellenmiş ve modellenen bu sınır değer problemleri sonlu elemanlar formülasyonu yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür.

Ayrıca bu tez kapsamında ele aldığımız problemlere öngerilmenin etkisi incelenmiştir. Yani, esas yükleme yapılmadan önce, yapı elemanında iç gerilmelerin mevcut olması durumu ele alınmıştır. Literatürde FDM malzemeden yapılmış yapı elemanlarında öngerilmenin etkisini araştıran teorik araştırmalar oldukça sınırlı sayıdadır. Öngerilmelerin ilave yüklemeden dolayı yapıda oluşan gerilme yayılımına etkisi, her bir yüklemenin yapı içerisinde tek başına oluşturduğu etkilerin süperpozisyonu ile elde edilemez. Bu nedenle öngerilmenin gözönüne alınabilmesi için bu problemler Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi yardımıyla modellenmiştir. Sayısal çözümlerin gerektirdiği bütün algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır. Bu anlamda ele alınan tez çalışması öngerilmeli/öngerilmesiz, süreksizlik içeren/içermeyen FDM malzemeden yapılmış plakların analizinde kesin teoriler çerçevesinde mekaniğinin öğrenilmesi açısından önemli katkılar sağlayacaktır.

2
LİNEERİZE EDİLMİŞ ÜÇ BOYUTLU ELASTİSİTE PROBLEMİ

Bu bölümde, tez kapsamında ele alınan öngerilmeli yapı elemanlarının matematiksel modellemesinde kullanılan, Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi (LEET) denklemleri verilecektir.

2.1 Giriş

Kompozit malzemelerden yapılmış yapı elemanlarına ait sınır değer problemlerinin matematiksel modellemesi, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) yardımıyla yapılmaktadır. Şekil değiştiren cisimler mekaniğinin, lineer olmayan denklem ve bağıntılarının lineerize edilmesi ile LEÜBET denklem ve bağıntıları elde edilir. Bu teori kapsamında, ele alınan sınır değer problemlerinin sonuçları en kesin sonuçlar olduğundan, yaklaşık teoriler yardımıyla bulunan sonuçların karşılaştırılmasında ve kesinlik mertebesinin belirlenmesinde önemli bir kaynak olarak değerlendirilmektedir.

LEÜBET'nin oluşturulması 20. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır ve bu alandaki ilk çalışma, Southwell tarafından 1913'te yapılan ve fiziksel yaklaşım yardımıyla elde edilen, stabilite kaybı öncesi gerilme yayılımının homojen olması durumları için geçerli olan çalışmadır [64]. Daha sonra LEÜBET denklemleri Biezeno ve Hencky tarafından 1929 yılında, yine fiziksel yaklaşım yardımıyla, stabilite kaybı öncesi gerilme yayılımının homojen olmaması durumları için geliştirilmiştir [65]. Biot, 1934 ve 1939'da ön kritik deformasyon altında LEÜBET'si denklemlerini, elastisite teorisinin lineer olmayan kesin denklemlerinden lineerleştirme işlemleri ile türetmiştir [66-67]. Yukarıdaki belirtilen çalışmalar, deforme olmamış durumda kartezyen koordinatlar ile çakışan Lagrange koordinatları yardımıyla verilmiştir. Yapılan bu çalışmalarda, lineerize işlemleri çerçevesinde, yer değiştirme, gerilme ve şekil değiştirmelerin pertürbasyonlarının küçük olduğu kabulu altında, ilgili denklem ve bağıntılarda bu büyüklüklerin kareleri ve daha yüksek dereceli

kuvvetlerini içeren terimlerin ihmal edilebileceği kabul edilmiştir. Biot'un yukarıda bahsedilen ve diğer pek çok makalesinde verilen sonuçlar, kendi monografında özetlenmiştir [68]. Bununla birlikte, yukarıda bahsedilen monografide, LEÜBET yerine "Artan Deformasyon Mekaniği" başlığı kullanılmıştır.

Neuber'in 1943'teki çalışmasında, LEÜBET denklemlerini tensör analizi kullanarak, eğrisel koordinatlarda elde etmiştir. Aynı zamanda, kritik durum öncesi gerilme-şekil değiştirme yayılımının homojen olduğu durumlarda, bu denklemlerin entegrasyonu için bazı yöntemler önermiştir [69].

Trefftz'in 1931 ve 1933 yıllarındaki çalışmalarında, küçük ön kritik deformasyonlar için LEÜBET denklemleri varyasyon prensibi kullanılarak elde edilmiş ayrıca, yeterli stabilite koşulları da verilmiştir [70-71]. Kappus'un 1939'daki makalesinde Lagrange koordinatları ile verilen büyük deformasyonlar altında elastisite teorisinin hareket denklemleri, deformasyonlardan önceki kartezyen koordinat takımındaki ifadeleri ile çakışmaktadır [72]. Ayrıca, Kappus'un başka bir makalesinde, LEÜBET denklemleri sonlu (büyük) kritik deformasyon altında türetilmiştir. Bu denklemler daha sonra elastik gerilme-şekil değiştirme bağıntılarının özel durumu için küçük ön-kritik deformasyon teorisine geçişi sağlamıştır [73].

Elastik izotrop malzeme için keyfi elastik potansiyele sahip sonlu ön kritik deformasyonlar altında LEÜBET denklemlerinin en genel hali, tansörel formda Green ve arkadaşları tarafından 1952 'de verilmiştir [74].

20. yüzyılın ikinci yarısında bu konudaki (LEÜBET üzerine) çalışmalar, varyasyonlar ilkesi, özel bazı problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği ile çözümlerin bulunması gibi genel konular üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu alandaki çalışmaların pek çoğu Guz tarafından yapılmıştır. LEÜBET denklem ve bağıntıları Guz'un çalışmasında detaylı şekilde verilmiştir [75].

LEÜBET kapsamında yukarıdaki çalışmalarda ve diğer birçok araştırmada, ele alınan problemler, zamandan bağımsızdır. Zamana bağlı problemler için LEÜBET denklem ve bağıntılarının elde edilmesi, Akbarov ve öğrencileri tarafından incelenmiş ve pek çok mühendislik problemine uygulanmıştır. Akbarov ve

öğrencileri tarafından LEÜBET denklem ve bağıntılarının elde edilmesinde 'Sınır Formu Pertürbasyon yöntemi' kullanılmıştır [76]. Bu yöntem Kısım 2.2.'de ele alınacaktır.

2.2 Non-Lineer Alan Denklemlerinin Lineerleştirilmesi

Bu kısımda, tez kapsamında ele alınan süreksizlik içermeyen öngerilmeli malzemeden yapılmış, eğilme etkisi altındaki homojen izotrop yapı elemanlarının matematiksel modellemesi, LEÜBET denklemleri çerçevesinde verilmiştir.

Tüm yanal kenarlarından basit mesnetle tutturulmuş, öngerilmeli malzemeden yapılan plağın, üst yüzeyine yoğunluğu p olan düzgün yayılı ilave yük etkisinde, yapıda oluşan yer değiştirme ve gerilme yayılımlarının belirlenmesine ait sınır değer probleminin matematiksel modellemesi LEÜBET kapsamında ele alınmıştır. Plaktaki öngerilmelerin iki yanal yüzeyden etki eden yoğunluğu q olan düzgün yayılı eksenel yükten kaynaklandığı kabul edilmektedir. Cismin başlangıçtaki gerilme-şekil değiştirme durumuna, ilave yüklemeden oluşan gerilme-şekil değiştirme durumu yani pertürbasyonlar göz önüne alınarak, ele alınan yapı elemanına ait bileşik gerilme-şekil değiştirme durumu elde edilmiş olunur. Bu durumda; cismin başlangıçtaki gerilme-şekil değiştirme durumu, öngerilmeli hal olarak; pertürbasyonlar ise, yapı elemanına uygulanan ilave yükleme nedeniyle yapıda oluşan ve önceki gerilme-şekil değiştirme durumundaki değişimler olarak ifade edilecektir. Belirtelim ki, ilave yüklemeden dolayı oluşan gerilme-şekil değiştirme durumu, yapıdaki öngerilme durumuna bağlı olarak bulunmaktadır. Yani, yapı elemanının her iki yükleme durumu için ayrı ayrı oluşturacakları gerilme- şekil değiştirme durumlarının süperpozisyonuyla elde edilemez. Bu problemin LEÜBET çerçevesinde matematiksel modellemesi $p \ll q$ kabulu çerçevesinde yapılacaktır. Genel olarak, dış kuvvetler etkisindeki düzlemsel yapı elemanı için nonlineer denklem ve bağıntılar;

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{jn}(\delta_i^n + u_{i,n})\right] = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{n,i}u_{n,j}),$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad , u_2\Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0$$

$$\left[\sigma_{1n}(\delta_1^n+u_{1,n})\right]\Big|_{x_1=0;\ell_1}=q\delta_1^n,\left[\sigma_{1n}(\delta_2^n+u_{2,n})\Big|_{x_1=0;\ell_1}\right]=0,$$

$$\left[\sigma_{2n}(\delta_i^n+u_{i,n})\right]\Big|_{x_2=h}=p\delta_n^2;\ \left[\sigma_{2n}(\delta_i^n+u_{i,n})\right]\Big|_{x_2=0}=0,\quad i=1,2$$

$$(x_1,x_2)\in\Omega\ ,\quad \Omega=\{0\le x_1\le \ell_1, 0\le x_2\le h\} \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilebilir [24]. (2.1)'de $\delta_i^j=\delta_{ij}$ Kronecker sembolünü, $(\bullet)_{,i}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\bullet)$ ve x_i 'ler Lagrange koordinatlarını ifade etmektedir.

Belirtelim ki, cismin pertürbasyon sonrası son halini ifade eden büyüklükler üst indissiz, pertürbasyonlar üst indis (1) ve öngerilme durumuna ait büyüklükler üst indis (0) ile temsil edilecektir. Akbarov [76] yaklaşımına göre sınır tipli pertürbasyon yöntemiyle,

$p << q$ için

$$\sigma_{ij}^{(1)}<<\sigma_{ij}^{(0)},\varepsilon_{ij}^{(1)}<<\varepsilon_{ij}^{(0)},u_i^{(1)}<<u_i^{(0)} \tag{2.2}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı kabulü altında, incelenen problemin matematiksel formülasyonundan elde edilebilecek küçük bir ε parametresi göz önüne alınır. Bu küçük parametrenin seçimi

$$\varepsilon=p/q\ \text{veya}\ p=\varepsilon q\ \text{ve}\ 0\le\varepsilon<1 \tag{2.3}$$

olarak alınabilir. (2.1) ile verilen denklem ve bağıntılarda yer alan gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme büyüklükleri, ε parametresine göre kuvvet serisi şeklinde,

$$\{\sigma_{ij};\varepsilon_{ij};u_i\}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m\{\sigma_{ij}^{(m)};\varepsilon_{ij}^{(m)};u_i^{(m)}\} \tag{2.4}$$

aranır. (2.4) ifadeleri (2.1)' de yerine yazılır, ε parametresinin farklı kuvvetlerine göre gruplaştırma yapılır ve aynı dereceden ε^m'lerin katsayıları sıfıra eşitlenirse, her ε^m (m=0,1,...,m,..) için kapalı denklemler takımı (seri-sınır değer problemleri) elde edilir. Basitlik açısından elde edilen seri-sınır değer problemleri, ε^m'deki

m'nin değerine göre isimlendirilmektedir örneğin, m=0 için "sıfırıncı yaklaşım" veya sıfırıncı sınır değer problemi; m=1 için "birinci yaklaşım" veya birinci sınır değer problemi vb. olarak isimlendirilmektedir. Her bir sınır değer problemi, kendisinden önceki tüm yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. Böylece Akbarov yaklaşımı ile (2.1) non-lineer sınır değer probleminin lineerleştirilmesi ile elde edilmiş olan seri-sınır değer problemlerine ait bazı yaklaşımlar aşağıda verilmiştir.

Sıfırıncı Yaklaşım:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[\sigma_{jn}^{(0)}(\delta_i^n+\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_n})]=0,\quad \sigma_{ij}^{(0)}=\lambda\varepsilon_{kk}^{(0)}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}^{(0)},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_i}\frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_j}),\qquad i,j,n=1,2.$$

$$u_2^{(0)}(0,x_2)=u_2^{(0)}(\ell_1,x_2)=0,$$

$$[\sigma_{1n}^{(0)}(\delta_1^n+u_{1,n}^{(0)})]\Big|_{x_1=0;\ell_1}=q,\quad [\sigma_{1n}^{(0)}(\delta_2^n+u_{2,n}^{(0)})]\Big|_{x_1=0;\ell_1}=0,$$

$$[\sigma_{2n}^{(0)}(\delta_i^n+u_{i,n}^{(0)})]\Big|_{x_2=h}=p;\quad [\sigma_{2n}^{(0)}(\delta_i^n+u_{i,n}^{(0)})]\Big|_{x_2=0}=0,$$

(2.5)

Birinci Yaklaşım:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^{(1)} = 0, \quad T_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} (\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i}) + \sigma_{jn}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} (\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_i}) \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\delta_j^n + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_j}) \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial x_i},$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \lambda \varepsilon_{kk}^{(1)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(1)},$$

$$u_2^{(1)}\Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0, \quad T_{11}^{(1)}\Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0,$$

$$T_{i2}^{(1)}\Big|_{x_2=0} = 0, \quad T_{i2}^{(1)}\Big|_{x_2=h} = q, \quad T_{21}^{(1)}\Big|_{x_2=0,h} = 0,$$

(2.6)

bulunur. Benzer şekilde diğer yaklaşımlara ait sınır değer problemleri de belirlenebilir. Belirtelim ki (2.5) denklemleriyle verilen sıfırıncı yaklaşıma ait sınır değer problemi non-lineerdir. Ancak burada verilmemekle birlikte, birinci (2.6) ve daha yüksek dereceden yaklaşımlara ait sınır değer problemleri lineer problemler olarak elde edilmektedir. (2.5) denklemlerinde bazı fiziksel ve mekaniksel görüşler doğrultusunda $\delta_i^n + u_{i,n}^{(0)} \approx \delta_i^n$ alınır ve küçük mertebeden büyüklüklerin yanında, daha küçük mertebeden büyüklükler ihmal edilirse (1. Mertebe teorisi), sıfırıncı yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar lineer hale getirilmiş olunur. Dolayısıyla;

Sıfırıncı Yaklaşım:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j}=0,\quad \sigma_{ij}^{(0)}=\lambda\varepsilon_{kk}^{(0)}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}^{(0)},\quad \varepsilon_{ij}^{(0)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}\right),$$

$$u_2^{(0)}\Big|_{x_1=0;\ell_1}=0;\quad \sigma_{11}^{(0)}\Big|_{x_1=0}=\sigma_{11}^{(0)}\Big|_{x_1=\ell_1}=q,$$

$$\sigma_{12}^{(0)}\Big|_{x_1=0;\ell_1}=0;\quad \sigma_{12}^{(0)}\Big|_{x_2=0;h}=0,\quad i=1,2.$$

(2.7)

Birinci Yaklaşım:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ji}^{(1)}+\sigma_{in}^{(0)}u_{i,n}^{(1)}\right]=0,\quad \sigma_{ij}^{(1)}=\lambda\varepsilon_{kk}^{(1)}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}^{(1)},\quad \varepsilon_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i}\right),$$

$$u_2^{(1)}\Big|_{x_1=0;\ell_1}=0;\quad \left[\sigma_{11}^{(1)}+\sigma_{1n}^{(0)}u_{1,n}^{(1)}\right]\Big|_{x_1=\ell_1}=0,$$

$$\left[\sigma_{2i}^{(1)}+\sigma_{2n}^{(0)}u_{2,n}^{(1)}\right]\Big|_{x_2=h}=p\delta_i^2;\left[\sigma_{2i}^{(1)}+\sigma_{2n}^{(0)}u_{2,n}^{(1)}\right]\Big|_{x_2=0}=0,\quad i=1,2.$$

(2.8)

olarak elde edilir.

2. ve daha yüksek mertebeden yaklaşımlara ait sınır değer problemleri genel olarak aşağıdaki gibi verilebilir [76].

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^{(m)} = \Psi_{iq}(T_{ij}^{(1)},....,T_{ij}^{(m-1)}), \quad T_{ij}^{(m)} = (\delta_i^n + \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i})\sigma_{jn}^{(m)} + \sigma_{jn}^{(n)} \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_n},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2}(\delta_i^n + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_i})\frac{\partial u_n^{(m)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2}(\delta_j^n + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_j})\frac{\partial u_n^{(m)}}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{m-1} \frac{\partial u_n^{(m-r)}}{\partial x_i}\frac{\partial u_n^{(r)}}{\partial x_j},$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \lambda \varepsilon_{kk}^{(m)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(m)},$$

$$T_{i2}^{(m)}\Big|_{(x_1, \mp h, x_3)} = \Phi_{iq}(T_{ij}^{(1)},....,T_{ij}^{(m-1)}, \sigma_{ij}^{(0)}, u_i^{(0)}, f)\Big|_{(x_1, \mp h, x_3)},$$

$$u_2^{(m)}\Big|_{x_1=0,\ell_1} = 0, \quad u_2^{(m)}\Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0, \quad T_{33}^{(m)}\Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0, \quad u_2^{(m)}\Big|_{x_3=0,\ell_3} = 0 \qquad (2.9)$$

(2.9)' daki Ψ_{iq} ve Φ_{iq} fonksiyonlarının açılımları büyük olduğundan ve tez çerçevesinde ilk iki yaklaşım alınarak çözüm yapılacağından burada verilmemiştir.

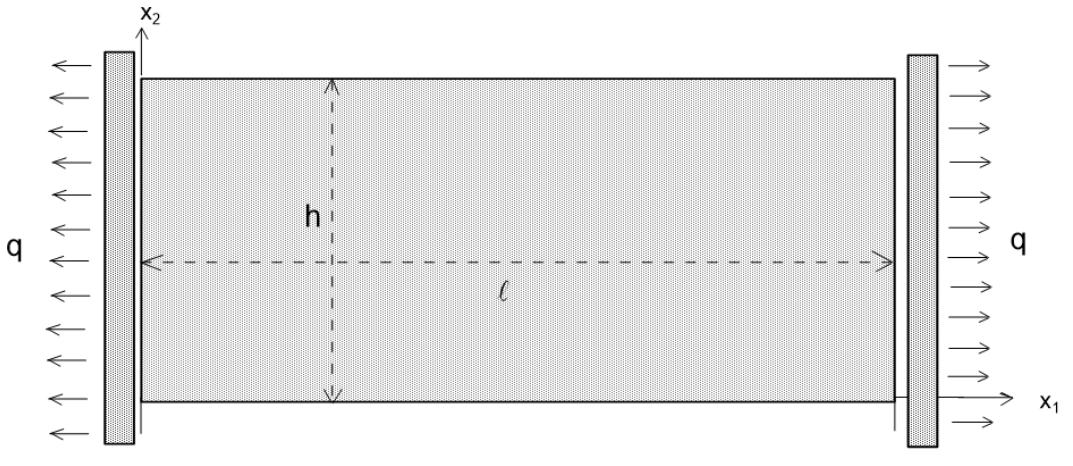
3
FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ SÜREKSİZLİK İÇERMEYEN ŞERİT-PLAKLARIN STATİK ANALİZİ

3.1 Basınç/Çekme Kuvveti Etkisindeki Şerit-Plak Problemi

Bu kısımda, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış yapısında süreksizlik içermeyen şerit-plakların verilen sınır ve yükleme koşulları altında, yapısında oluşan yer değiştirme ve gerilme değerlerinin belirlenmesine ait sınır değer problemlerinin matematiksel modellemesi, Elastisite Teorisi'nin kesin denklemleri ve düzlem şekil değiştirme varsayımı çerçevesinde incelenecektir.

3.1.1 Matematiksel Modelleme

Dikdörtgen şerit-plağın karşılıklı iki kenarından düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde tutturulduğu (basit mesnet) ve bu kenarlarından $(x_1 = 0, \ell)$ etkiyen ve birim yoğunluğu q olan düzgün yayılı eksenel normal kuvvet etkisinde olduğu kabul edilmektedir. Şerit-plağa bağlı Ox_1x_2 koordinat takımı, şerit-plağın geometrik boyutları ve yükleme durumu Şekil 3.1'de gösterilmektedir.



Şekil 3.1 Çözüm bölgesi ve yükleme durumu

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi;

$$\Omega = \left\{ 0 \le x_1 \le \ell;\ 0 \le x_2 \le h; -\infty \le x_3 \le +\infty \right\} \tag{3.1}$$

dir.

Ele alınan şerit-plak malzemesi, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme olarak seçilmiş olduğundan, malzeme özelliklerini temsil eden büyüklükler artık sabit değil, koordinatlara bağlı fonksiyonlar olarak seçilecektir. Ele alınan FDM şerit-plakta Poisson oranı sabit ancak, Young Modülü koordinatlara bağlı fonksiyon olarak alınmıştır. Young Modül fonksiyonu sırasıyla, plağın enine (Ox_1 ekseni) ve boyuna (Ox_2 ekseni) bağlı tek serbestlik dereceli fonksiyon olarak seçilmesi durumları için iki farklı problem ele alınacaktır. Young Modülü'nün enine göre değişimi ($E = E(x_1)$) için ele alınan problem: Problem 1 olarak; boyuna göre değişimi ($E = E(x_2)$) için ele alınan problem: Problem 2 olarak isimlendirilecektir. Bu durumda FDM malzeme için

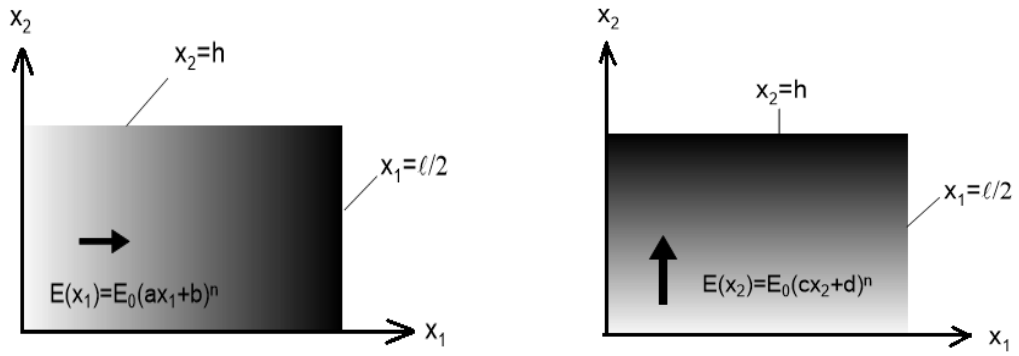
Problem 1: $E(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = E(\mathrm{x}_1) = E_0 \left(a x_1 + b\right)^n$ (3.2)

Problem2: $E(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = E(\mathrm{x}_2) = E_0 \left(c x_2 + d\right)^n, E_0, a, b, c, d, n \in R$ (3.3)

olarak seçilecektir.

Problemlerimiz sınır değer problemi olduğundan: Problem 1 için ; orijinde $E = E_0$, $x_1 = \ell / 2$ de $E = E_1$ değerini almaktadır. Problem 2 için ise orijinde $E = E_0$, $x_2 = h$ de $E = E_1$ değerini almaktadır. a, b, c, d sabitleri sınır değerlerinden elde edilebilmektedirler.

Ele alınan plağın geometrisi, bağlı koordinat takımı ve malzeme özelliği değişimi denklem (3.2) (Şekil 3.2.a) ve denklem (3.3) (Şekil 3.2.b) için Şekil 3.2' de verilmiştir.



(a) (b)

Şekil 3.2 (a)Malzeme özelliği Ox_1 ekseni boyunca değişen FD şerit-plak

(b) Malzeme özelliği Ox_2 ekseni boyunca değişen FD şerit-plak

Klasik düzlem elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde matematik modelleme yapılacaktır. Buna göre çözüm bölgesinde sağlanan denge denklemleri;

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1,2 \tag{3.4}$$

Bünye denklemleri ;

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(x_i)\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.5}$$

Belirtelim ki, denklem (3.5)' de Problem 1 için i=1, Problem 2 için i=2 alınmalıdır. (3.5)'de

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\right]^T \text{ ve } \varepsilon = \left[\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\right]^T \tag{3.6}$$

şeklindedir. Yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1,2 \tag{3.7}$$

ve sınır koşulları;

$$u_2\big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in 0,h}} = 0\,,\ \boldsymbol{\sigma}_{11}\big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in 0,h}} = q\,,\ \boldsymbol{\sigma}_{12}\big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in 0,h}} = 0\,,\ \boldsymbol{\sigma}_{ij}\big|_{\substack{x_1=0;h \\ x_1 \in 0,\ell}} = 0\,,\ i=1,2 \tag{3.8}$$

şeklindedir[77].

Dolayısıyla, FDM şerit-plağın yapısında süreksizlik içermemesi durumunda, ele alınan sınır değer probleminin matematiksel modeli Problem 1 için (3.3) hariç (3.1)-(3.8) denklemleri ile, Problem 2 için (3.2) hariç (3.1)-(3.8) denklemleri ile verilebilir. Bu kısımda matematik modeli verilen sınır değer problemleri değişken katsayılı, kısmı türevli sistem denklemlerinin, verilen sınır koşulları ve yükleme durumunda çözümünü gerektirmektedir.

3.1.2 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu

Ele alınan problemlerin çözümü sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak yapılacaktır. Sonlu eleman ayrıklaştırmasında nodlarda bilinmeyen olarak sadece yer değiştirmeler seçilecektir yani, yer değiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Metodu kullanılacaktır [78]. Yapı elemanına etki eden dış kuvvetler sonucunda yapı elemanında oluşan toplam potansiyel enerji fonksiyoneli (Π) ve Ritz tekniği yardımıyla sonlu eleman formülasyonu yapılacaktır. Ele alınan yapı elemanında toplam potansiyel enerjiyi ifade eden fonksiyonel;

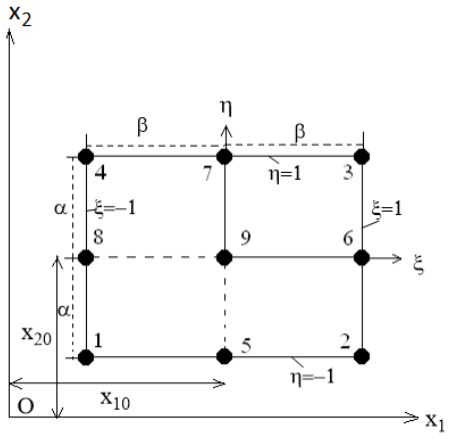
$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dx_1 dx_2 - \int_0^h q u_1 \Big|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^h q u_1 \Big|_{x_1=\ell} dx_2 \qquad (3.9)$$

olarak belirlenir. Fonksiyoneldeki Ω, (3.1) ile verilen çözüm bölgesidir. Belirtelim ki fonksiyonelin yer değiştirmelere göre birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden denge denklemleri, alan denklemleri ve gerilmelere göre verilen sınır koşulları elde edilir [78]. Yani verilen sınır değer problemleri (Problem 1: (3.1)-(3.2),(3.4)-(3.8) veya Problem 2: (3.1),(3.3)-(3.8)) Π fonksiyonelinin Euler denklemleridir.

3.1.3 Sonlu Eleman Modellemesi

Ele alınan sınır değer problemine ait çözüm bölgesi Ω (3.1) sonlu adet sonlu elemana yani, alt bölgeye (Ω_s, s=1,2,…,M) ayrıklaştırılır.

Sonlu elemanlar, 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar olarak seçilmiştir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3 Örnek sonlu eleman ve düğüm noktaları

Ele alınan dikdörtgen sonlu elemanların nodlarında tanımlanan ikinci dereceden standart Lagrange şekil fonksiyonlarının normalize edilmiş koordinatlardaki $(O'\xi\eta)$ ifadeleri [78];

Köşe nodlar için;

$$\mathbf{N_i} = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+\xi_\mathbf{i})(\eta+\eta_\mathbf{i}) \tag{3.10}$$

kenarların ortalarındaki nodlar için;

$$\begin{aligned} \xi_\mathbf{i} = 0 \Rightarrow \mathbf{N_i} &= \frac{1}{2}\eta\left(1-\xi^2\right)(\eta+\eta_\mathbf{i}) \\ \eta_\mathbf{i} = 0 \Rightarrow \mathbf{N_i} &= \frac{1}{2}\xi(\xi+\xi_\mathbf{i})\left(1-\eta^2\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

ve merkezdeki nod için;

$$\mathbf{N_i} = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right) \tag{3.12}$$

şeklindedir. Yerel $O'\xi\eta$ koordinat takımı ile genel Ox_1x_2 kartezyen koordinat takımı arasında dönüşümü sağlayan bağıntı;

$$\xi = \frac{2x_1-(x_{i+1}+x_i)_1}{(x_{i+1}-x_i)_1}, \qquad \eta = \frac{2x_2-(x_{i+1}+x_i)_2}{(x_{i+1}-x_i)_2} \tag{3.13}$$

dir. (3.13)'de $(x_{i+1}+x_i)_1$ $((x_{i+1}+x_i)_2)$, $Ox_1\,(Ox_2)$ doğrultusunda i. sonlu elemanın üst ve alt nodlarının koordinatları toplamı; $(x_{i+1}-x_i)_1$ $((x_{i+1}-x_i)_2), Ox_1$

(Ox_2) doğrultusunda i. sonlu elemanın üst ve alt nodlarının koordinatları farkını göstermektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi gereği, aranan fonksiyonlar polinom fonksiyonlar kümesinden seçilmektedir. Bu nedenle ele alınan sınır değer problemleri için her sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu, bilinmeyen katsayılara sahip polinom fonksiyonlar olarak temsil edilecek ve uygun işlemler ile bu polinomların katsayıları belirlenecektir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan şerit plağın ele alınan yükleme altında, her sonlu eleman için yer değiştirme fonksiyonları; N_i şekil fonksiyonu ve u_{ki} i.nci nodun k doğrultusundaki nodal yer değiştirmesi olmak üzere;

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i \begin{Bmatrix} u_{1i}^{(e)} \\ u_{2i}^{(e)} \end{Bmatrix}, \text{ e=1,2,...,M} \tag{3.14}$$

şeklinde seçilmiştir. Burada n, sonlu elemandaki toplam nod sayısını, M çözüm bölgesindeki toplam sonlu eleman adedini göstermektedir. (3.14) ifadesi, (3.9) fonksiyonelinde yerine yazılarak ve Ritz tekniği yardımıyla, problemin çözümü

$$\mathbf{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \tag{3.15}$$

denklem sisteminin çözümüne indirgenir. (3.15)' de K Rijitlik matrisi, u nodlarda bilinmeyenleri içeren matris ve F sağ taraf veya kuvvet matrisini temsil etmektedir. K matrisinin bileşenleri

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{M} \mathbf{K}^{(e)}, \ \mathbf{K}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{1n}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{2n}^{(e)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{K}_{n1}^{e} & \mathbf{K}_{n2}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{nn}^{e} \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

ve (3.16) da

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{B}_j^{(e)} \right)^T \boldsymbol{D}^{(e)} \boldsymbol{B}_j^{(e)} d\Omega_e \qquad \text{i,j=1,2,...,n; e=1,2,....,M} \tag{3.17}$$

şeklindedir. Burada n değeri her bir dikdörtgen sonlu elemandaki toplam nod sayısı olan 9'a eşittir. Ω_e ele alınan sonlu elemana ait bölgedir. **D** matrisinin

elemanları, ele alınan FD şerit-plak için fonksiyonlardan oluşmaktadır. Yani, $D_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}(\mathrm{x}_1)$ (Problem 1) ve $D_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}(\mathrm{x}_2)$ (Problem 2) olur. Bu durumda D matrisi elemanları

$$\mathbf{D}^{(\mathrm{k})} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{11} & \mathrm{D}_{12} & 0 \\ \mathrm{D}_{12} & \mathrm{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{D}_{66} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

olur ve Poisson oranı $\upsilon = sb.$ için,

$$D_{11} = D_{22} = \frac{(1-\upsilon)E(x_k)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)},\ D_{12} = D_{21} = \frac{\upsilon E(x_k)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)},\ D_{66} = \frac{E(x_k)}{2(1+\upsilon)} \tag{3.19}$$

olarak verilebilir. Burada k=1 ve 2 değerlerini almaktadır. (3.17) ifadesindeki B matrisi

$$\mathbf{B}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}}{\partial \mathrm{x}_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}}{\partial \mathrm{x}_2} \\ \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}}{\partial \mathrm{x}_2} & \dfrac{\partial \mathrm{N}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{e})}}{\partial \mathrm{x}_1} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

dir.

(3.17) integrallerinin hesaplanmasında sayısal integral alma yöntemlerinden Gauss karelemesi kullanılmıştır. İki katlı bir integralin Gauss karelemesi yardımıyla sayısal integrali $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ keyfi bir fonksiyon için,

$$\iint_{S} \boldsymbol{f}(x_1, x_2)\boldsymbol{dx}_1\boldsymbol{dx}_2 = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{f}(\xi,\eta)\boldsymbol{J}\boldsymbol{d}\xi\boldsymbol{d}\eta = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\xi_{\boldsymbol{i}},\eta_{\boldsymbol{j}})\boldsymbol{J}(\xi_{\boldsymbol{i}},\eta_{\boldsymbol{j}})\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{j}} \tag{3.21}$$

olarak belirlenir. (3.21)'de $\xi_{\mathbf{i}}$ ve $\eta_{\mathbf{j}}$ Gauss noktaları, $\mathbf{w_i}\,(\mathbf{w_j})$ ağırlık çarpanları ve $\mathbf{J}$ koordinat dönüşümünün jakobiyeni, n $(1 \le n \le 10)$ integrallemede kullanılan Gauss noktalarının sayısını göstermektedir. Gauss noktaları ve ağırlık fonksiyonları Ek.1'de verilmektedir.

(3.15) denkleminin çözülmesiyle her bir nodda aranan yer değiştirme değerleri bulunur. Bu değerler yardımıyla önce yer değiştirme fonksiyonları, daha sonra şekil değiştirme yer değiştirme bağıntıları ve bünye denklemleri yardımıyla her bir nodda gerilme değerleri;

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBa} \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.22)'den elde edilen gerilme fonksiyonları, sonlu eleman sınırlarında süreksiz olurlar. Tez kapsamında, yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar metodu kullanıldığından, bütün bölgede yer değiştirme fonksiyonları sürekli (C_0 sürekliliğine sahip) ancak, yer değiştirmelerin türevleri yardımıyla bulunan şekil değiştirme ve gerilme fonksiyonları sonlu eleman sınırlarında süreksiz olurlar. Tamamıyla sonlu eleman formülasyonunundan kaynaklanan bu durumu ortadan kaldırmak için yani, çözüm bölgesi üzerinde sürekli gerilme değerleri elde edebilmek için, varyasyonel iyileştirme formülasyonu kullanılmıştır. Bunun için sonlu eleman formülasyonunun birinci aşamasında, tüm bölgede sürekli yer değiştirme fonksiyonları bulunur. Daha sonra varyasyonel iyileştirmenin ikinci aşamasında; birinci aşamada bulunan yer değiştirmeler yardımıyla elde edilen süreksiz gerilme fonksiyonları ile nodlarda bilinmeyen olarak gerilmelerin alındığı ve her sonlu elemanda polinom fonksiyon olarak aranan sürekli gerilme fonksiyonları arasında en küçük kareler yaklaşımı yardımıyla fonksiyonel kurulur. Bu fonksiyonelden sürekli gerilmelerin bilinmeyen katsayılarına göre birinci mertebe kısmı türevlerinin sıfıra eşitliğinden nodlarda aranan gerilme değerleri elde edilir. Bu işlemler aşağıda detaylı olarak verilmiştir.

Nodlarda bilinmeyen olarak gerilmelerin seçilmesi ve her sonlu elemanda gerilmelerin polinom fonksiyon olacak şekilde temsil edilmesi,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\sigma}}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.23}$$

burada,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_1, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{M}}),\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11\mathbf{i}} \\ \bar{\sigma}_{22\mathbf{i}} \\ \bar{\sigma}_{12\mathbf{i}} \end{pmatrix},\ \mathbf{i=1,2,\ldots,n} \tag{3.24}$$

dır. (3.23) ifadesindeki $\mathbf{N_\sigma}$ şekil fonksiyonları matrisini, (3.24)'deki $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mathbf{i}$ vektörünün bileşenleri ise, nodlarda bilinmeyen gerilmeleri ve n toplam nod adedini göstermektedir. $\mathbf{N_\sigma}$ şekil fonksiyonları matrisi, yer değiştirmelerin bulunmasında kullanılan şekil fonksiyonları matrisiyle aynı alınmıştır. Ele alınan sonlu elemanlar için $\mathbf{N_\sigma}$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$N_\sigma = \left\{ N_\sigma^{(1)}, N_\sigma^{(2)}, ..., N_\sigma^{(M)} \right\}$$

$$\mathbf{N_\sigma^{(e)}} = \begin{pmatrix} N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & 0 & \dots & N_n^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & 0 & \dots & 0 & N_n^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(e)} & 0 & 0 & N_2^{(e)} & \dots & 0 & 0 & N_n^{(e)} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Burada n=9 dur. (3.22) ile elde edilen ve eleman sınırlarında süreksiz olan gerilme dağılımları $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ile gösterilirse, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mathbf{i}$ (3.23) yardımıyla *En Küçük Kareler Yöntemi* kullanılarak [78].

$$\tilde{Q} = \iint_\Omega (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 \, d\Omega \tag{3.26}$$

fonksiyoneli kurulur[78]. Bu fonksiyonelden bilinmeyenlere göre türev alınarak sıfıra eşitlenirse, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mathbf{i}$ vektörü bileşenleri için

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ijr}} = 0 \,, \ \text{i;j=1,2;} \ \text{r=1,2,...,n} \tag{3.27}$$

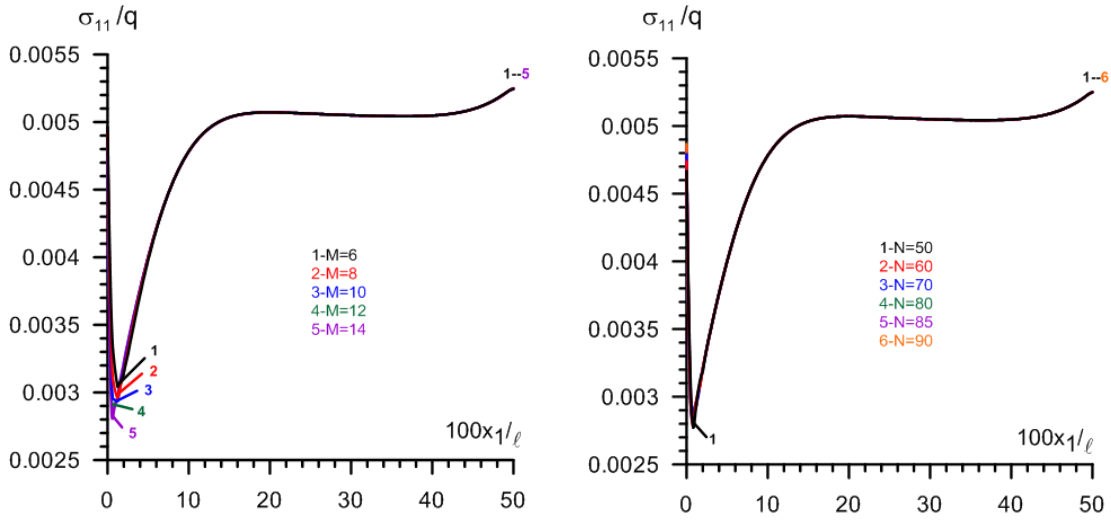
denklemler sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi daha açık olarak yazılırsa;

$$\left(\iint_\Omega N_\sigma^T N_\sigma \, d\Omega \right) \bar{\sigma} = \iint_\Omega (N_\sigma^T D \varepsilon) d\Omega \tag{3.28}$$

şeklinde olur. (3.27) ve (3.28) denklemlerinin her bir gerilme fonksiyonu için çözülmesi ile nodlardaki uygun gerilme değerleri ve (3.23) yardımıyla da bütün bölgede sürekli gerilme fonksiyonları elde edilir.

3.1.4 Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, yapısında süreksizlik içermeyen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) yapılmış sonlu şerit-levhanın kenarlarından Ox_1 eksenine paralel olacak şekilde düzgün yayılı yük etkisinde olması durumunda, yapı elemanında oluşan yer değiştirme ve gerilme değerlerine ait sayısal sonuçlar verilecektir. Ele alınan FDM şerit-plakta Poisson oranı sabit alınıp Young Modülü'nün plağın sırasıyla enine (Ox_1 ekseni) ve boyuna (Ox_2 ekseni) göre fonksiyonel değiştiği 2 farklı probleme ait sayısal sonuçlar incelenecektir. Young Modülü'nün en büyük değerlerini, plağın enine göre değişimde $\mathbf{x}_1 = \ell/2$ kesitinde ve boyuna göre değişimde $\mathbf{x}_2 = \mathbf{h}$ kesitinde aldığı kabul edilmiştir. Belirtelim ki, ele alınan problemin çözümü yapı elemanının geometrisi, sınır koşulları ve yüklemesinin $\mathbf{x}_1/\ell = 1/2$'ye göre simetrik olması özelliğinden yararlanılarak, sonlu eleman modellemesi, çözüm bölgesinin ½'lik kısmında yapılmıştır. Çözüm bölgesinin uygun sonlu eleman ağı ayrıklaştırması σ_{11}/q için Şekil 3.4'de hesaplanmıştır. Bu şekillerdeki N ve M parametreleri sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 eksenleri doğrultudundaki dikdörtgen sonlu eleman sayılarını göstermektedir. Buna göre bölge (Şekil 3.1) Ox_1 doğrultusunda N=80 ve Ox_2 doğrultusunda M=12 dikdörtgen sonlu eleman olacak şekilde toplam, 960 dikdörtgen sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır. Ele alınan durumda sonlu eleman ağı, 4025 düğüm noktası (nod) ve 8000 serbestlik derecesi içermektedir. Çözüm için kullanılan sonlu eleman ayrıklaştırması, pek çok sonlu eleman ayrıklaştırması için bulunan sayısal sonuçların, literatürdeki uygun sayısal sonuçlara en iyi yaklaşımın sağlandığı sonlu eleman ayrıklaştırması arasından seçilmiştir.

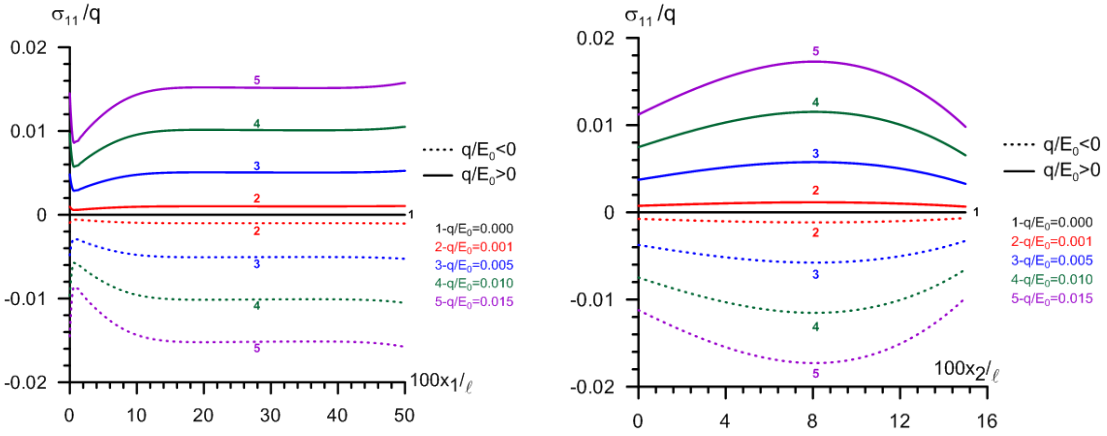


(a) (b)

Şekil 3.4 σ_{11}/q gerilme değerlerine $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ için $x_2 = h$ kesitinde $q / E_0 = 0.005$ ve $E_1 / E_0 = 5$ durumunda
(a) M parametresi değişiminin etkisi
(b) N parametresi değişiminin etkisi.

Belirtelim ki bu kısımda yer alan tüm şekillerde (a)'da verilen grafikler Problem 1'e ait, (b)'de verilen grafikler Problem 2'ye ait sayısal sonuçları içermektedir. Problem 1 için elde edilen sonuçlar Ox_1 eksenine göre, Problem 2 için elde edilen sonuçlar Ox_2 eksenine göre fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme durumları için verilmiştir. Belirtelim ki şekillerde yer alan grafikler, incelenen parametreler için yer değiştirme ve/veya gerilme değerleri üzerinde en fazla etkiye neden olduğu kesitlerde verilmiştir. Buna göre Problem 1 için τ_{12}/q kayma gerilmesi değerleri $x_2 = h/2$ kesitinde diğer tüm gerilme ve yer değiştirme değerleri $x_2 = h$ kesitinde verilmiştir. Problem 2 için tüm gerilme ve yer değiştirme değerleri $x_1 = \ell/4$ kesitinde verilmiştir. Belirtelim ki grafiklerde verilen u_1 ve u_2 yer değiştirme değerleri boyutsuz ifadeler olup bu ifadeler; u ve v sırasıyla x_1 ve x_2 yönünde ki yer değiştirmeler olmak üzere; $u_1 = uE_1/q\ell$, $u_2 = vE_1/q\ell$ şeklindedir. Tüm sayısal

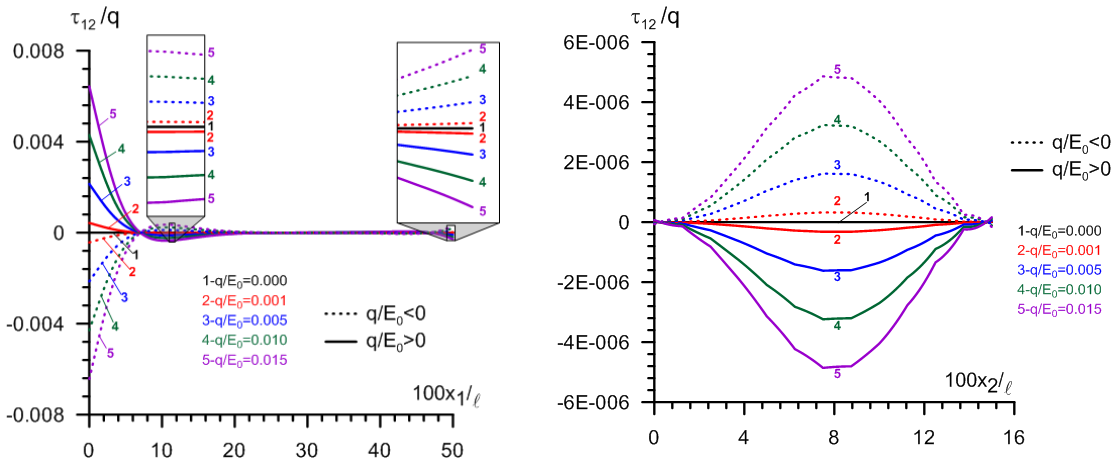
hesaplamalarda şerit-plak kalınlığı sabit $(\mathrm{h}/\ell = 0.15)$ alınmış, diğer parametre değerleri şekiller üzerinde verilmiştir.



(a) (b)

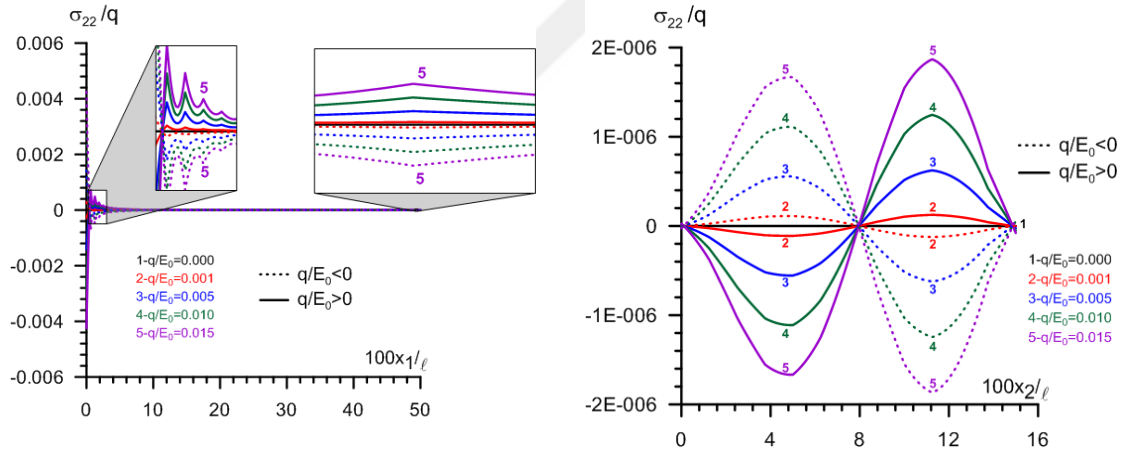
Şekil 3.5 σ_{11}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0(ax_1 + b)^2$, (b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0 = 5$ durumunda $|\mathrm{q}/\mathrm{E}_0|$ değişiminin etkisi.

Şekil 3.5-Şekil 3.7'de FD malzemeden $(E_1/E_0 = 5)$ yapılmış şerit-plağa karşılıklı iki kenarından uygulanan eksenel basınç $(q/E_0 < 0)$ veya eksenel çekme kuvveti $(q/E_0 > 0)$ değişiminin, n=2 (denklem (3.2) ve (3.3)) durumunda (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için sırasıyla σ_{11}/q, τ_{12}/q ve σ_{22}/q gerilme değerlerine etkisi incelenmiştir. Her iki problem için; $|q/E_0|$ değerinin artması tüm gerilme değerlerini mutlak değerce arttırmaktadır. Ayrıca, keyfi $|q/E_0|$=c=sb. için çekme kuvveti uygulanması $(q/E_0 = c > 0)$ durumunda yapıda elde edilen gerilme değerleri ile basınç kuvveti uygulanması $(q/E_0 = -c)$ durumunda yapıda elde edilen gerilme değerleri yatay eksene göre, birbiri ile simetriktirler



(a) (b)

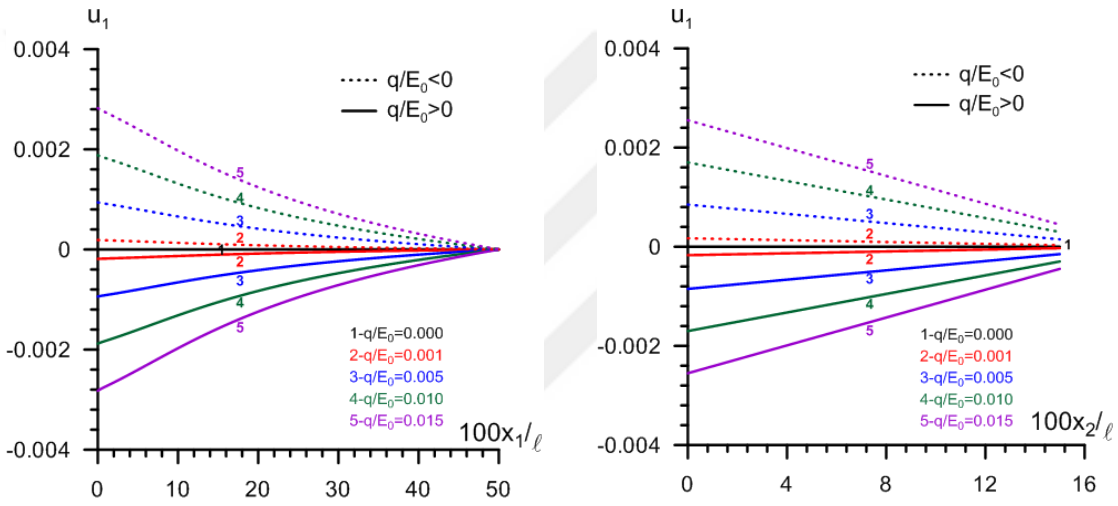
Şekil 3.6 τ_{12}/q kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda $\left|\mathrm{q}/\mathrm{E}_0\right|$ değişiminin etkisi.



(a) (b)

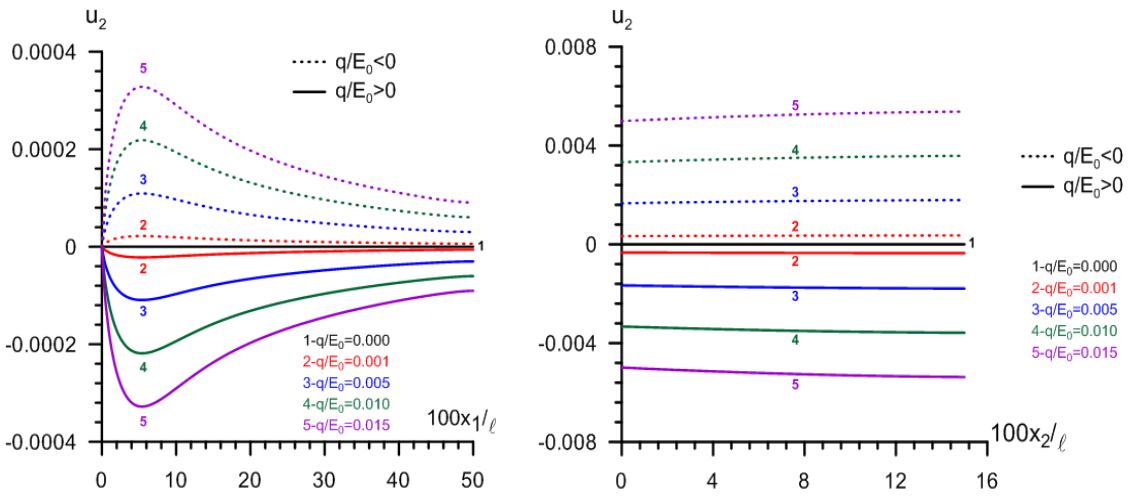
Şekil 3.7 σ_{22}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda $\left|\mathrm{q}/\mathrm{E}_0\right|$ değişiminin etkisi.

Şekil 3.8-Şekil 3.9'da FD malzemeden $\left(E_1 / E_0 = 5\right)$ yapılmış şerit-plağa kenarlarından uygulanan eksenel basınç $\left(q/E_0 < 0\right)$ veya eksenel çekme kuvveti $\left(q/E_0 > 0\right)$ değişiminin n=2 (denklem (3.2) ve (3.3)) durumunda (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için sırasıyla u_1 ve u_2 yer değiştirme değerlerine etkisi incelenmiştir. Her iki problem için; $\left|q/E_0\right|$ değerinin artması her iki yer değiştirme değerlerini mutlak değerce arttırmaktadır. Aynı şiddete sahip dış kuvvetin çekme $\left(q/E_0 > 0\right)$/basınç $\left(q/E_0 < 0\right)$kuvveti olarak seçilmesi durumlarında, elde edilen yer değiştirme değerlerini, birbiri ile, yatay eksene göre simetriktirler.



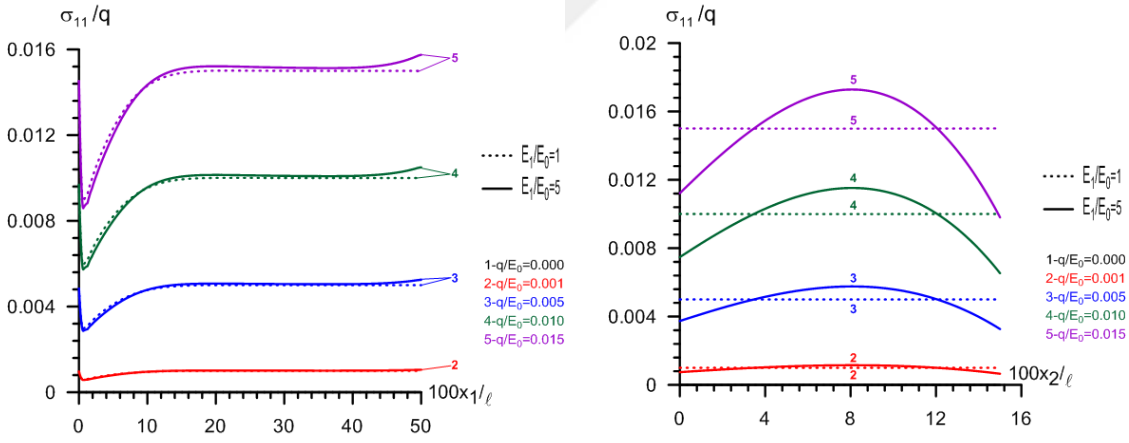
(a) (b)

Şekil 3.8 u_1 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde ve $E_1 / E_0 = 5$ durumunda $\left|\mathrm{q} / \mathrm{E}_0\right|$ değişiminin etkisi.



(a) (b)

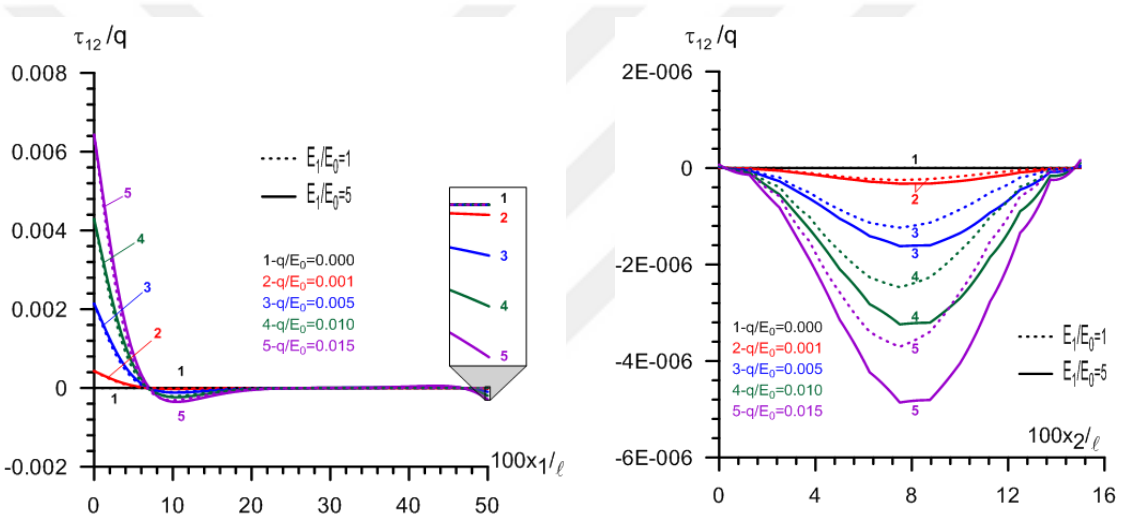
Şekil 3.9 u_2 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda $\left|\mathrm{q}/\mathrm{E}_0\right|$ değişiminin etkisi.



(a) (b)

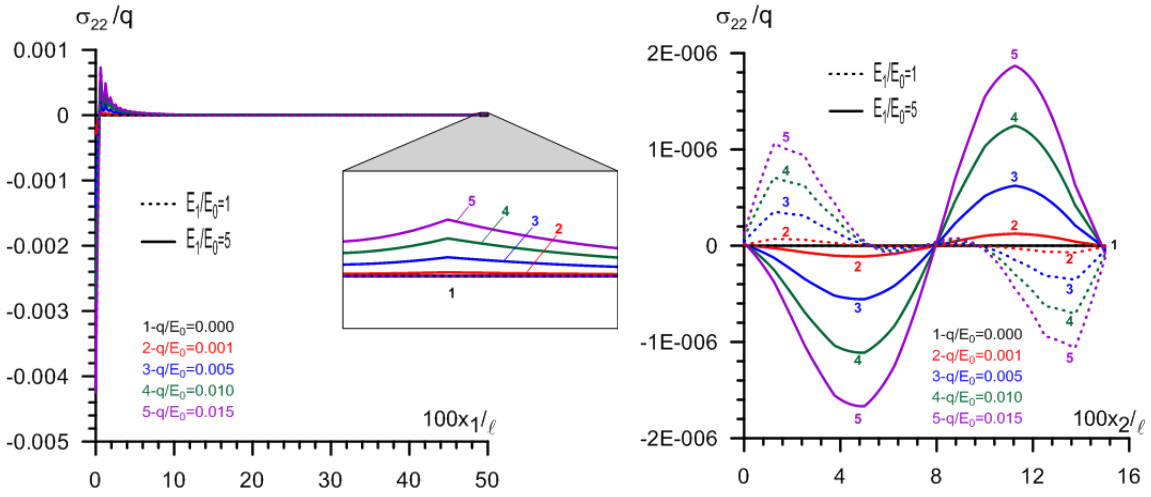
Şekil 3.10 σ_{11}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi.

Şekil 3.10-Şekil 3.12'de sırasıyla σ_{11}/q, τ_{12}/q ve σ_{22}/q gerilme değerleri, q/E_0 parametre değişimleri için n=2 (denklem (3.2) ve (3.3)) durumunda (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için $E_1/E_0=5$ (FD malzeme) ve $E_1/E_0=1$ (homojen izotrop) durumlarında verilmiştir. Her iki problem için de q/E_0 arttıkça tüm gerilme değerleri mutlak değerce artmakta, aynı zamanda, q/E_0 değeri arttıkça, $E_1/E_0=1$ ile $E_1/E_0=5$ durumları için belirlenen gerilme değerleri arasındaki fark da artmaktadır. Homojen-izotrop malzeme ile FD malzeme durumunda gerilme değerleri arasındaki fark Problem 2 için Problem 1'e göre daha fazladır.



(a) (b)

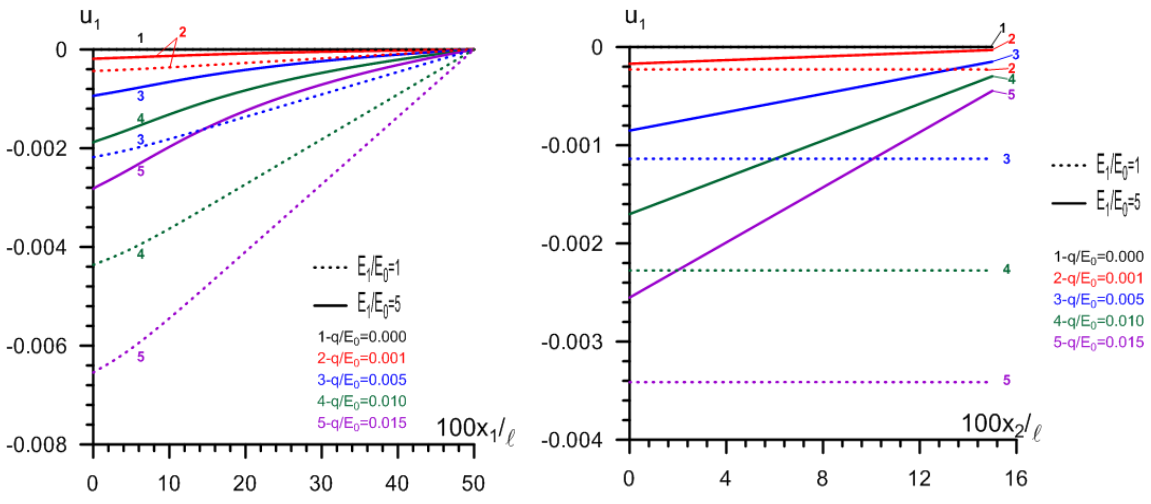
Şekil 3.11 τ_{12}/q kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

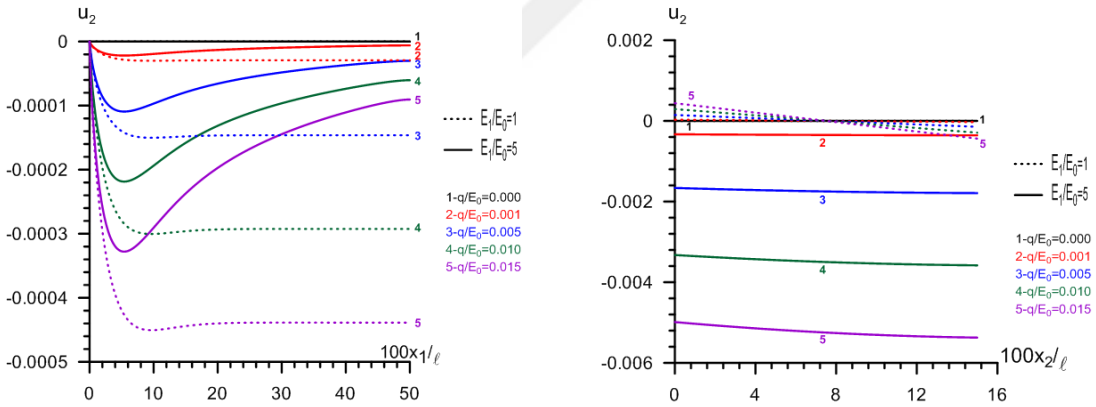
Şekil 3.12 σ_{22}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi.

Şekil 3.13 ve Şekil 3.14'de sırasıyla u_1 ve u_2 yer değiştirme değerleri, q/E_0 parametre değişimleri için n=2 durumunda (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için $E_1/E_0=5$ (FD malzeme) ve $E_1/E_0=1$ (homojen izotrop) durumlarında verilmiştir. Her iki problem için de q/E_0 arttıkça tüm yer değiştirme değerleri mutlak değerce artmakla birlikte, aynı q/E_0 parametre değerleri için $E_1/E_0=1$ ile $E_1/E_0=5$ için belirlenen yapıdaki gerilme değerleri arasındaki fark da artmaktadır.



(a) (b)

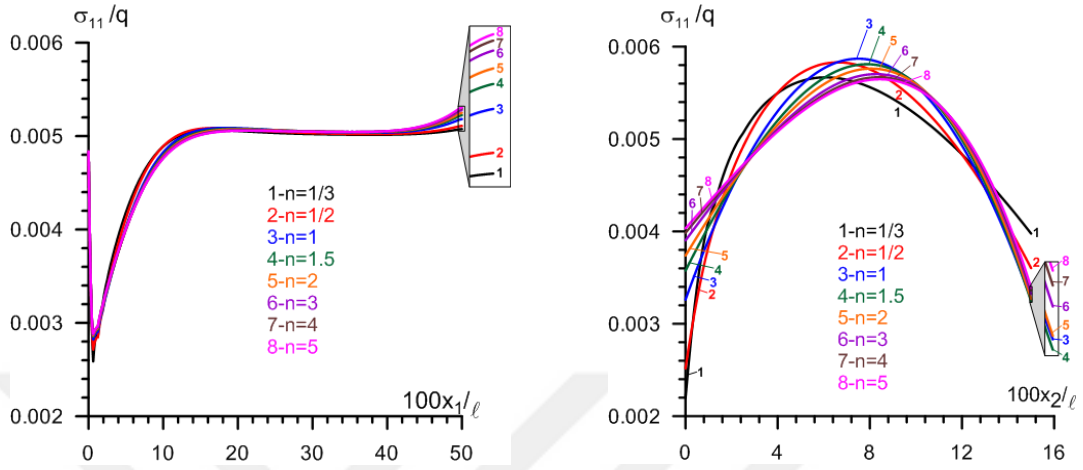
Şekil 3.13 u_1 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

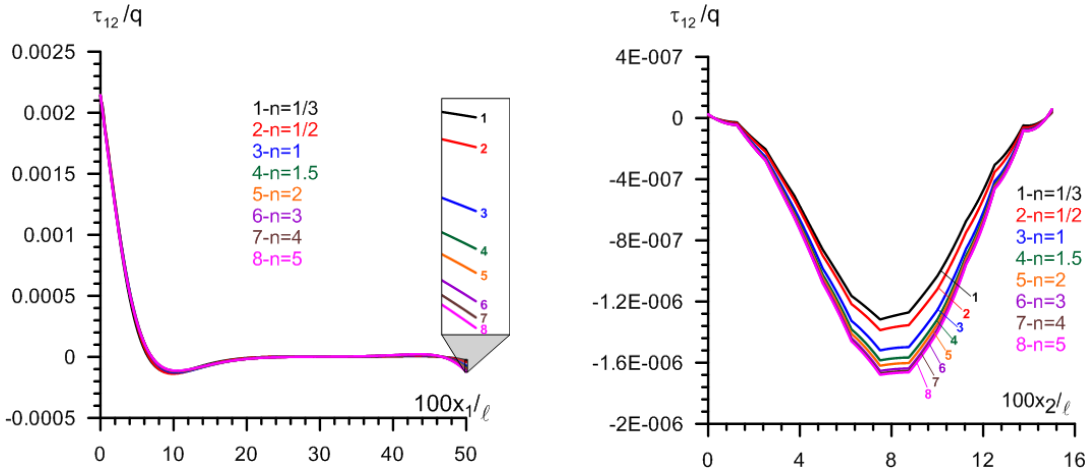
Şekil 3.14 u_2 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında q/E_0 değişiminin etkisi.

Şekil 3.15-Şekil 3.17'da sırasıyla σ_{11}/q, τ_{12}/q ve σ_{22}/q gerilme değerleri, denklem (3.1) ve (3.2)'de verilen n parametresi değişimine göre (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için $E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında verilmiştir. Problem 2'de gerilme değerleri n değişiminden daha fazla etkilenmektedir.



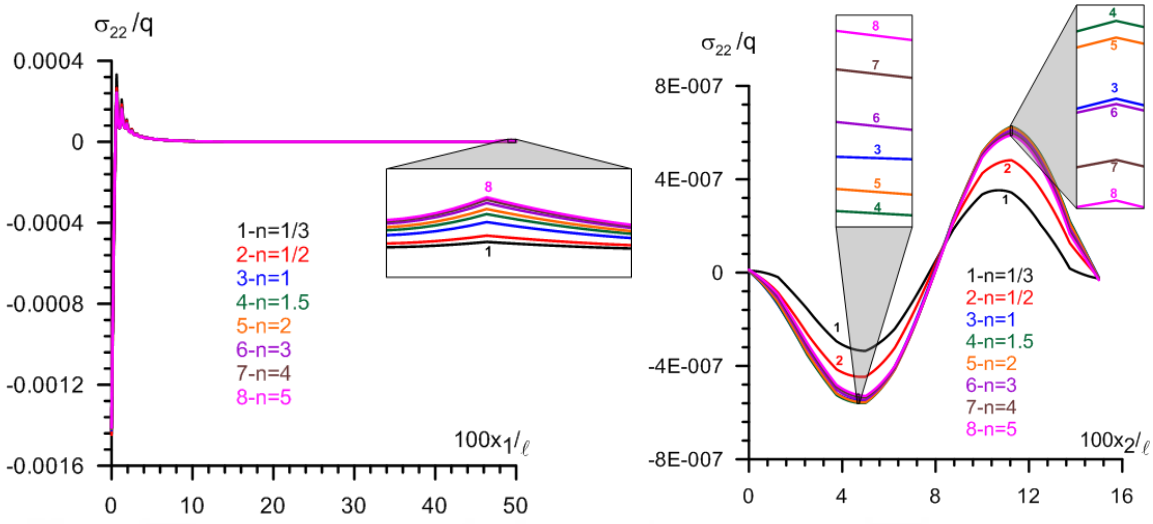
(a) (b)

Şekil 3.15 σ_{11}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

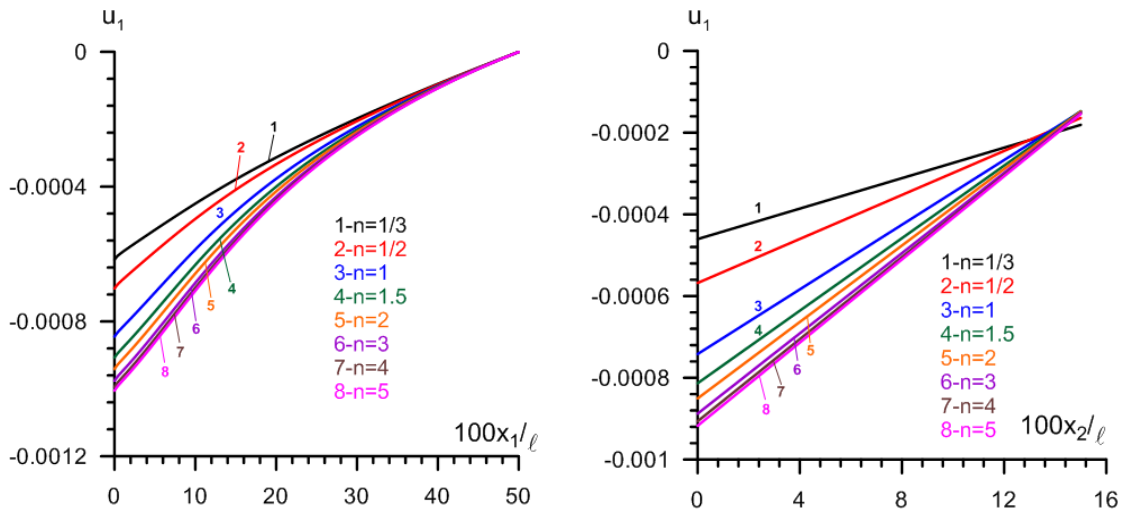
Şekil 3.16 τ_{12}/q kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

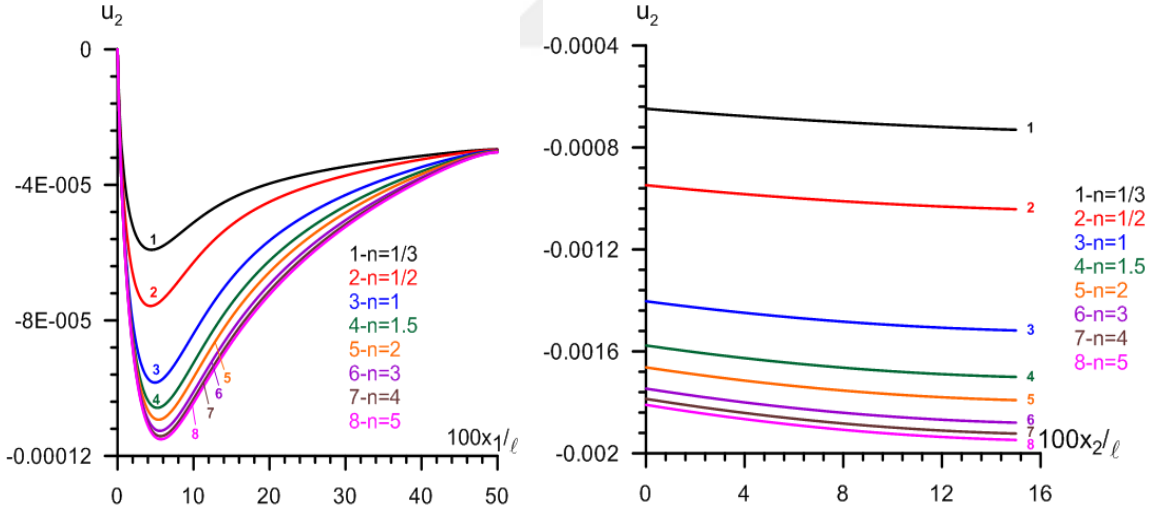
Şekil 3.17 σ_{22}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.

Şekil 3.18 ve Şekil 3.19'da sırasıyla u_1 ve u_2 yer değiştirme değerleri, denklem (3.1) ve (3.2)'de verilen n parametresi değişimine göre (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için $E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında verilmiştir. Her iki problem için n parametresi değerleri arttıkça yer değiştirme değerlerini mutlak değerce artmaktadır.



(a) (b)

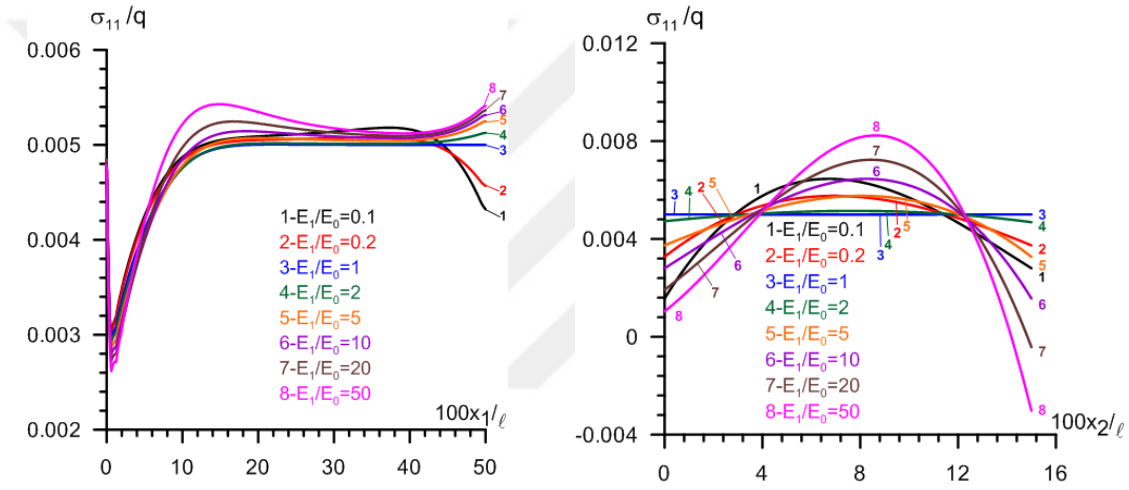
Şekil 3.18 u_1 yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$ (b) $E(x_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde $E_1 / E_0 = 5$ ve $q / E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

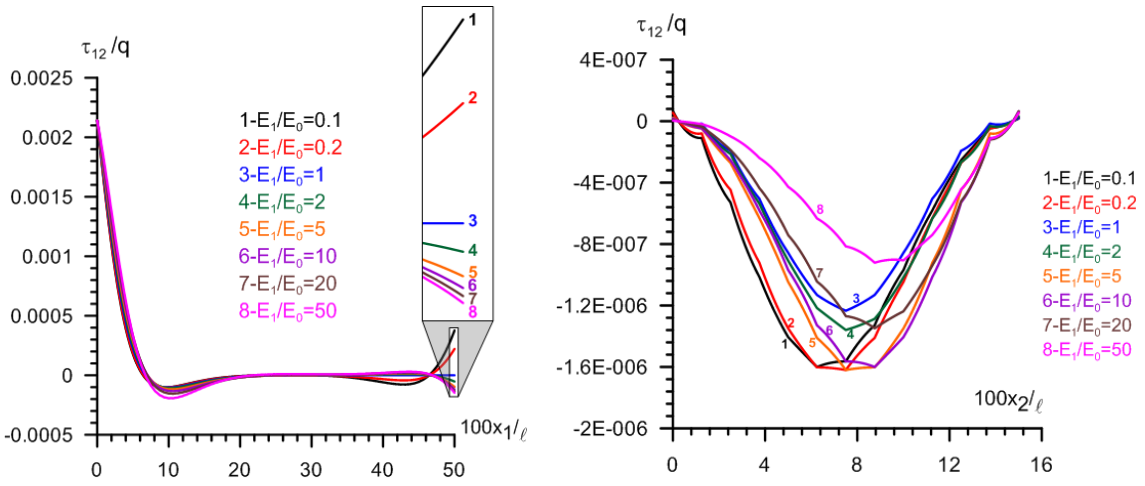
Şekil 3.19 u_2 yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$ (b) $E(x_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde $E_1 / E_0 = 5$ ve $q / E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.

Şekil 3.20-Şekil 3.22'de sırasıyla σ_{11}/q, τ_{12}/q ve σ_{22}/q gerilme değerlerine E_1/E_0 parametresi değişiminin etkisi n=2, $q/E_0 = 0.005$ durumlarında (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için verilmiştir. Tüm gerilme değerlerine, E_1/E_0 değişiminin etkisi Problem 2'de Problem 1'e göre daha fazladır.



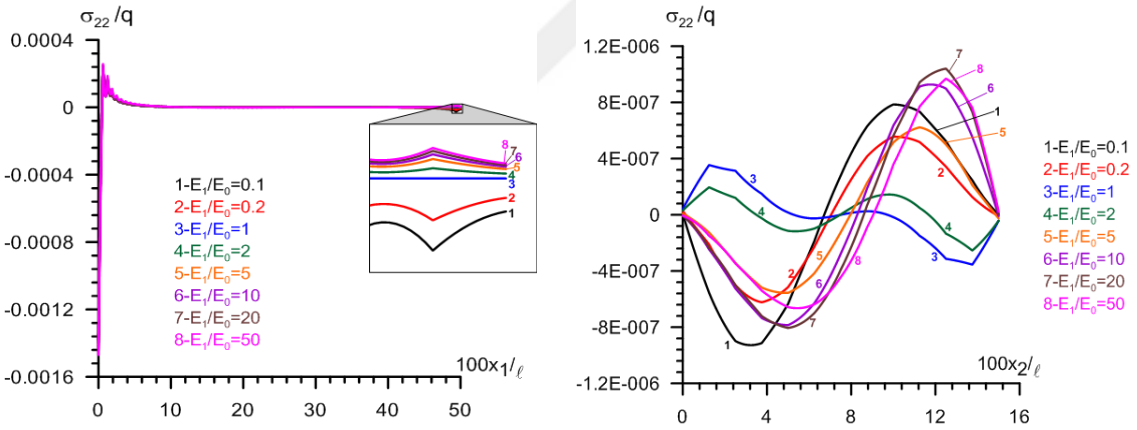
(a) (b)

Şekil 3.20 σ_{11}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $q/E_0 = 0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

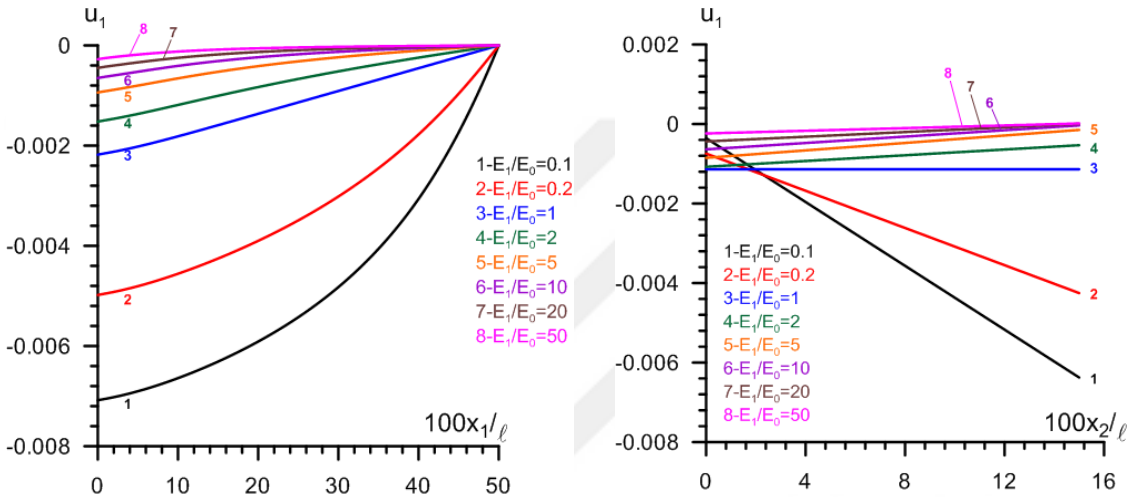
Şekil 3.21 τ_{12}/q kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

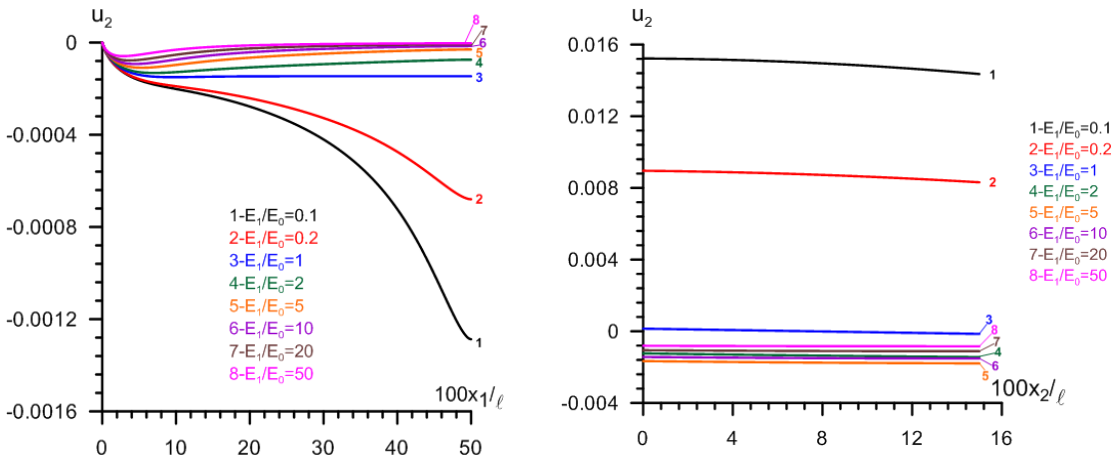
Şekil 3.22 σ_{22}/q gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi.

Şekil 3.23 ve Şekil 3.24'de sırasıyla u_1 ve u_2 yer değiştirme değerlerine E_1/E_0 parametresi değişiminin etkisi n=2, $q/E_0 = 0.005$ durumlarında (a) Problem 1 ve (b) Problem 2 için verilmiştir. E_1/E_0 değeri arttıkça, u_1 yer değiştirme değerleri her iki problem (Problem 1 ve problem 2) için mutlak değerce azalmaktadır. Fakat E_1/E_0 değeri arttıkça, u_2 yer değiştirme değerleri Problem 1 için önemli ölçüde düzgün azalmakla birlikte, Problem 2 için bu değişim düzgün olmamaktadır.



(a) (b)

Şekil 3.23 u_1 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $q/E_0 = 0.005$ durumunda E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

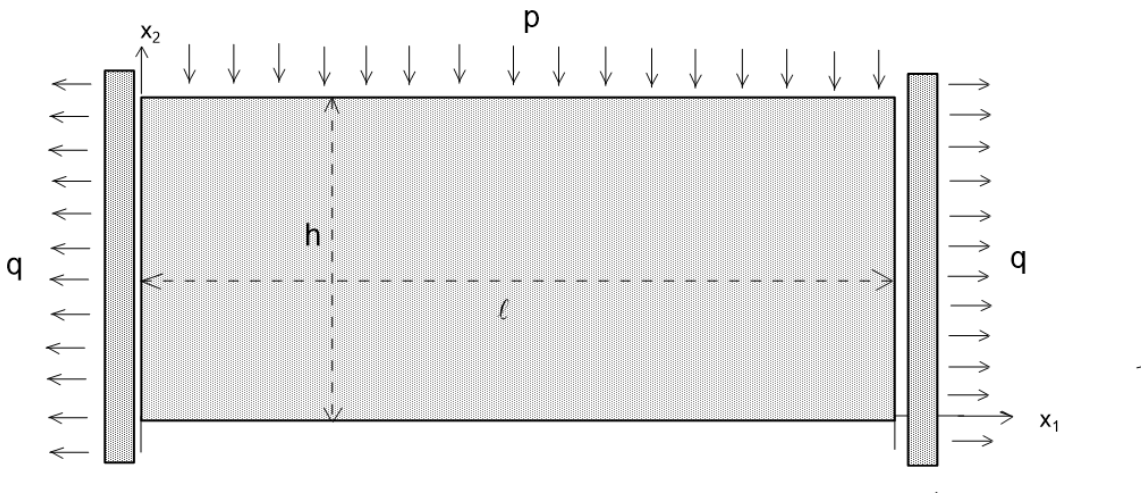
Şekil 3.24 u_2 yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(a x_1 + b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(c x_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde $q / E_0 = 0.005$ durumunda E_1 / E_0 değişiminin etkisi.

3.2 Öngerilmeli Şerit-Plağın Eğilmesi Problemi

Bu kısımda, öngerilmeli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış süreksizlik içermeyen bütün yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş şerit-plağın eğilmesi durumunda, yapıda oluşan yer değiştirme ve gerilme değerlerinin belirlenmesine ait sınır değer problemlerinin matematiksel modellemesi, düzlem şekil değiştirme kabulü altında Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) yardımıyla incelenecektir.

3.2.1 Matematiksel Modelleme

Ele alınan şerit-plağın yapısındaki öngerilmelerin esas yükleme yapılmadan önce, bu plağın karşılıklı iki kenarından etki eden -birim yoğunluğu q olan- düzgün yayılı eksenel normal kuvvet etkisinde oluştuğu ve daha sonra bu öngerilmeli FD plağın üst yüzeyine -birim yoğunluğu p olan ilave düzgün yayılı basınç kuvvetinin etki ettiği kabul edilmektedir. Ele alınan sınır değer problemine ait matematiksel formülasyon LEÜBET çerçevesinde incelenecektir. Şerit-plağa bağlı Ox_1x_2 koordinat takımı, şerit-plağın geometrik boyutları ve yükleme durumu Şekil 3.24'de gösterilmektedir.



Şekil 3.25 Çözüm bölgesi ve yükleme durumu

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi;

$$\Omega = \left\{0 \le x_1 \le \ell;\ 0 \le x_2 \le h; -\infty \le x_3 \le +\infty\right\} \tag{3.29}$$

dir.

Ele alınan şerit-plak malzemesi fonksiyonel derecelendirilmiş olduğundan, malzeme özellikleri koordinata bağlı fonksiyonlar olarak seçilecektir. Ele alınan FDM şerit-plakta Poisson oranının sabit olduğu ancak, Young Modülünün koordinatlara bağlı ve fakat tek serbestlik dereceli fonksiyon olduğu kabul edilecektir. Buna göre, Young modül fonksiyonunun plağın sırasıyla enine (Ox_1 ekseni) ve boyuna (Ox_2 ekseni) göre değiştiği 2 farklı problem ele alınacaktır. Young Modülü'nün enine göre değişimi Problem 3, boyuna göre değişimi Problem 4 olarak incelenecektir. Bu durumda FDM malzeme için

Problem 3. $E(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)=E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$ (3.30)

Problem4. $E(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)=E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n, E_0,a,b,c,d,n\in R$ (3.31)

olarak seçilecektir .

Problemlerimiz sınır değer problemi olduğundan: Problem 3 için ; orijinde $E=E_0$, $x_1=\ell/2$ de $E=E_1$ değerini almaktadır. Problem 4 için ise orijinde $E=E_0$, $x_2=h$ de $E=E_1$ değerini almaktadır. a,b,c,d sabitleri sınır değerlerinden elde edilebilmektedirler.

Plağa bağlı koordinat takımı ve malzeme özelliği değişimi (3.30) ve (3.31)' de verilen FD şerit-plağın geometrisi ve yükleme durumu Şekil 3.25'de verilmiştir.

FDM şerit-plağın öngerilmeli malzemeden oluştuğu kabul edildiğinden, LEÜBET teorisine göre ele alınan sınır değer problemi iki aşamada incelenecektir. İlk aşamada karşılıklı iki kenarından etki eden düzgün yayılı eksenel normal kuvvet etkisinde yapıda oluşan ön yer değiştirme ve ön gerilme değerleri belirlenecek daha sonra, bu ön etkilerin dahil olduğu LEÜBET denklemleri yardımıyla üst yüzeyinden etki eden ilave normal basınç kuvveti etkisinde yapıda oluşan yer değiştirme, gerilme değerleri belirlenecektir. Her bir aşamanın matematiksel formülasyonu aşağıda ayrı ayrı verilmiştir. Matematiksel formülasyonda, birinci aşamaya ait büyüklükler üst indis (0), ikinci aşamaya ait büyüklükler üst indis (1) ile gösterilecektir.

Ele alınan FD şerit-plağın yapısında öngerilmelerin belirlenmesi (birinci aşama) klasik lineer elastisite teorisi çerçevesinde belirlenecektir. Bu aşamaya ait çözüm bölgesinde sağlanan denklem ve bağıntılar;

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = 0 \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{D}(\mathrm{x}_i)\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \tag{3.33}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \; i, j = 1,2 \tag{3.34}$$

ve sınır koşulları

$$\mathrm{u}_2\big|_{\substack{\mathrm{x}_1=0;\ell \\ \mathrm{x}_2\in[0,\mathrm{h}]}} = 0\,,\ \sigma_{11}\big|_{\substack{\mathrm{x}_1=0;\ell \\ \mathrm{x}_2\in[0,\mathrm{h}]}} = \mathrm{q}\,,\ \sigma_{12}\big|_{\substack{\mathrm{x}_1=0;\ell \\ \mathrm{x}_2\in[0,\mathrm{h}]}} = 0\,,\ \sigma_{\mathrm{ij}}\big|_{\substack{\mathrm{x}_2=0;\mathrm{h} \\ \mathrm{x}_1\in[0,\ell]}} = 0\,,\ \mathrm{i}=1,2 \tag{3.35}$$

dır. Belirtelim ki (3.33)'de **D** matrisinin elemanları, ele alınan FD şerit-plak için fonksiyonlardan oluşmaktadır. Yani, $D_{ij} = D_{ij}(\mathrm{x}_1)$ (Problem 3) ve $D_{ij} = D_{ij}(\mathrm{x}_2)$ (Problem 4) olur. Öngerilmeli FD şerit-plağın üst yüzeyinde etki eden düzgün yayılı basınç kuvveti etkisinde eğilmesine (ikinci aşama) ait problemin matematiksel modeli aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{j}}\left(\sigma_{\mathrm{ji}}^{(1)} + \sigma_{\mathrm{in}}^{(0)} \frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{i}^{(1)}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{n}} \right) = 0 \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \mathbf{D}\left(x_i\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \tag{3.37}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right), \; i, j = 1,2 \tag{3.38}$$

ve sınır koşulları;

$$u_2^{(1)}\Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2\in[0,h]}}=0,\ \left(\sigma_{j1}^{(1)}+\sigma_{1n}^{(0)}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_n}\right)n_j\Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2\in[0,h]}}=0,$$

$$\left(\sigma_{jk}^{(1)}+\sigma_{kn}^{(0)}\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_n}\right)n_j\Big|_{\substack{x_2=h \\ x_1\in[0,\ell]}}=p\delta_2^k,\ \left(\sigma_{ji}^{(1)}+\sigma_{in}^{(0)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n}\right)n_j\Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_1\in[0,\ell]}}=0,\ \text{i;j=1,2} \quad (3.39)$$

olarak verilebilir [62],[79].

Belirtelim ki, (3.32)-(3.39)'da üst indis (0), birinci aşamaya ait büyüklükleri; üst indis (1) ikinci aşamaya ait büyüklükleri temsil etmektedir. Eğer yapıda öngerilme ihmal edilirse yani, öngerilme içermeyen yapı elemanı için uygun sınır değer problemlerine ait matematiksel formülasyon; yukarıda verilen (3-32)-(3.35) sınır değer problemi (birinci aşama) gözardı edildiğinde ve (3.36)-(3.39) (ikinci aşama) sınır değer probleminde $\sigma_{in}^{(0)}=0$ olarak alındığında elde edilebilir.

3.2.2 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu

Ele alınan problemlerin çözümünde yer değiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Metodu (SEM) kullanılmıştır [78].

İlk aşama için

$$\Pi^{(0)}=\frac{1}{2}\iint_{\Omega'}\sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)}dx_1dx_2-\int_0^h qu_1^{(0)}\Big|_{x_1=0}dx_2+\int_0^h qu_1^{(0)}\Big|_{x_1=\ell}dx_2,\ \text{i;j=1,2} \quad (3.40)$$

fonksiyoneli, ikinci aşama için

$$\Pi^{(1)}=\frac{1}{2}\iint_{\Omega'}\left(T_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_1dx_2-\int_0^{\ell}pu_2^{(1)}\Big|_{x_2=h}dx_1 \quad (3.41)$$

(3.41)'de,

$$T_{ij}=\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(0)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \quad (3.42)$$

fonksiyonelleri ve Ritz tekniği yardımıyla sonlu eleman çözümü yapılacaktır.

3.2.3 Sonlu Eleman Modellemesi

Her iki aşamaya ait sınır değer problemlerinin çözümü, (3.40) ve (3.41)'de verilen fonksiyoneller ve Ritz tekniği yardımıyla, yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılacaktır. Yani, fonksiyonellerde aranan fonksiyon sadece yer değiştirme fonksiyonu olarak seçilecektir. Çözüm bölgesi, sonlu adet alt bölgeye yani, sonlu elemana $(\Omega_{(s)}$, s=1,2,...,M) ayrıklaştırılır. Sonlu elemanlar, 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar olarak seçilmiştir (Şekil 3.3).

Ele alınan dikdörtgen sonlu elemanların nodlarında tanımlanan, ikinci dereceden standart Lagrange şekil fonksiyonlarının, normalize edilmiş koordinatlardaki $(O'\xi\eta)$ ifadeleri (3.10-3.12) denklemlerinde verilmiştir.

Her iki aşamaya ait sınır değer problemlerinin sonlu eleman çözümünde aynı sonlu eleman ayrıklaştırması kullanılmıştır. Çözüm yöntemi gereği, her bir sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu polinom fonksiyon şeklinde seçilir. Seçilen bu polinom fonksiyonlar, birinci aşama için (3.40) fonksiyonelinde, ikinci aşama için (3.41) fonksiyonelinde yerine yazılır ve uygun işlemler çerçevesinde; 1. aşamaya ait problemin çözümü

$$\mathbf{K}^{(0)}\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{F}^{(0)} \tag{3.43}$$

denklem sisteminin çözümüne, 2. aşamaya ait problemin çözümü

$$\mathbf{K}^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{F}^{(1)} \tag{3.44}$$

denklem sisteminin çözümüne indirgenir. (3.43) ve (3.44) eşitliklerinde $\mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(1)}$ Rijidlik matrisi, $\boldsymbol{u}^{(0)}, \boldsymbol{u}^{(1)}$ nodlarda bilinmeyenleri içeren matris ve $\mathbf{F}^{(0)}, \mathbf{F}^{(1)}$ kuvvet veya sağ taraf matrisini göstermektedir [78],[79]. Örneğin $\mathbf{K}^{(0)}$ matrisi elemanları, seçilen e. sonlu eleman için

$$\mathbf{K}^{(0),\mathbf{e}} = \int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{B}^{(\mathbf{e})}\right)^T \boldsymbol{D}^{(\mathbf{e})}\boldsymbol{B}^{(\mathbf{e})} d\Omega_e \tag{3.45}$$

şeklindedir. (3.45)'te $\mathbf{D}^{(e)}$ matrisi elemanları, Problem 3 için x_1 ve Problem 4 için x_2'ye bağlıdır. Yani, $D_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}(x_1)$ (Problem 3) ve $D_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}(x_2)$ (Problem 4)

olur. (3.45) integrallerinin belirlenmesinde, sayısal integral alma yöntemlerinden Gauss karelemesi (10 Gauss noktası kullanılarak) yardımıya hesaplanmıştır (Kısım 3.1.3).

(3.43) ve (3.44) cebrik denklem sistemlerinin ardışık olarak çözümünden sırasıyla birinci ve ikinci aşamaya ait nodlarda yer değiştirme değerleri belirlenir. Ancak birinci aşamaya ait gerilme değerleri, ikinci aşamada problemin formülasyonuna ilave olduğundan, öncelikle birinci aşamada yapıda oluşan gerilme değerlerinin belirlenmesi gerekir. Gerilme değerlerinin bulunmasına ait formülasyon Kısım 3.1.3'de verilmiştir.

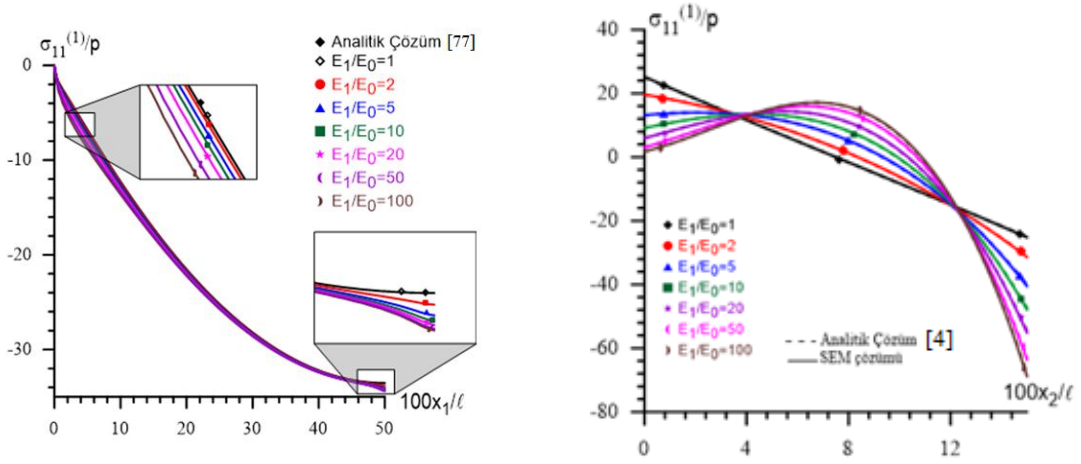
3.2.4 Sayısal Sonuçlar

Yapısında süreksizlik içermeyen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış öngerilmeli sonlu şerit-plağın eğilmesi durumunda, yapı elemanında oluşan yer değiştirme ve gerilme değerleri, çeşitli FD malzeme ve geometrik parametreler ile öngerilmenin etkisini gösteren sayısal sonuçlar verilecektir. Ele alınan öngerilmeli FDM şerit-plakta Poisson oranı sabit alınmış, plak malzemesinin sırasıyla enine (Ox_1 ekseni) (Problem 3) ve boyuna (Ox_2 ekseni) (Problem 4) göre fonksiyonel değişim göstermesi durumları için 2 farklı problem incelenmiştir. Young Modül fonksiyonunun en büyük değerini $\mathbf{x}_1 = \ell/2$ (Problem 3) kesitinde veya $\mathbf{x}_2 = \mathbf{h}$ (Problem 4) kesitinde aldığı kabul edilmektedir. Belirtelim ki, ele alınan problemlerin çözümü yapı elemanının geometrisi, sınır koşulları ve yüklemesinin $\mathbf{x}_1/\ell = 1/2$'ye göre simetrik olması özelliklerinden yararlanılarak, çözüm bölgesinin ½'lik kısmında yapılmıştır. Bu bölge (Şekil 3.25) Ox_1 doğrultusunda N=80 ve Ox_2 doğrultusunda M=12 dikdörtgen sonlu eleman olacak şekilde toplam, 960 dikdörtgen sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır. Ele alınan durumda sonlu eleman ağı, 4025 düğüm noktası (nod) ve 8000 serbestlik derecesi içermektedir. Çözüm için kullanılan sonlu eleman ayrıklaştırması, pek çok sonlu eleman ağı içerisinden, elde edilen sayısal sonuçların literatürdeki uygun sonuçlara en iyi yaklaşımın sağlandığı sonlu eleman ağı belirlenerek seçilmiştir.

Belirtelim ki, bu kısımda verilen tüm şekillerde (a)'da verilen grafikler Problem 3'e ait, (b)'de verilen grafikler Problem 4'e ait grafiklerdir. Problem 3 için elde edilen

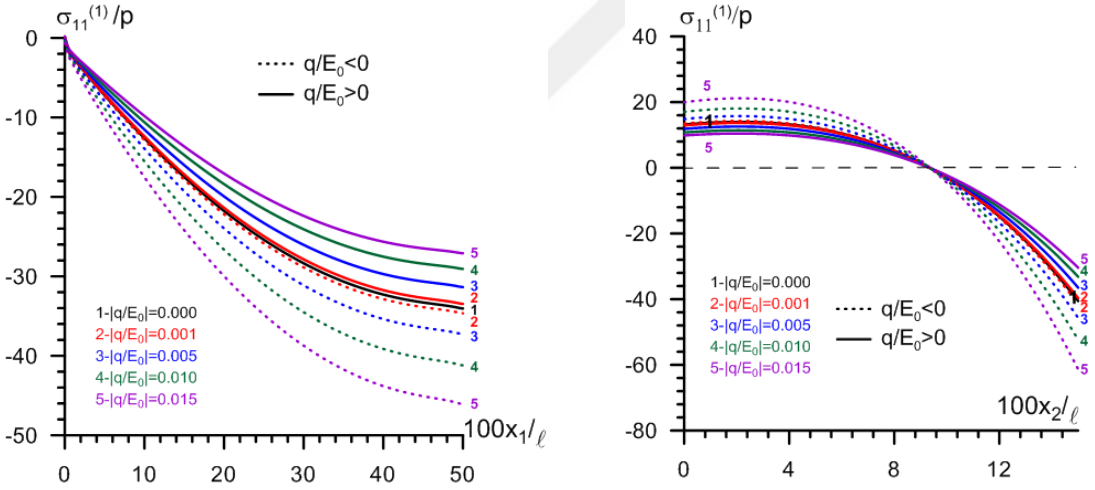
sonuçlar, ele alınan fonksiyonun Ox_1 eksenine göre değişimini; Problem 4 için elde edilen sonuçlar, ele alınan fonksiyonun Ox_2 eksenine göre değişimini göstermektedir. Ayrıca, ilgili fonksiyon için incelenen parametrenin etkisinin en fazla olduğu kesitlerde, grafikler verilmiştir. Buna göre Problem 3 için $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerleri ile $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerleri $x_2 = h/2$ kesitinde, diğer tüm gerilme ve yer değiştirme değerleri $x_2 = h$ kesitinde verilmiştir. Problem 4 için tüm gerilme ve yer değiştirme değerleri $x_1 = \ell/4$ kesitinde verilmiştir. Belirtelim ki grafiklerde verilen u_1 ve u_2 yer değiştirme değerleri boyutsuz ifadeler olup bu ifadeler; u ve v sırasıyla x_1 ve x_2 yönünde ki yer değiştirmeler olmak üzere; $u_1 = uE_1/q\ell$, $u_2 = vE_1/q\ell$ şeklindedir.

Şekil 3.26.a (Şekil 3.26.b)'da öngerilmesiz şerit-plağın üst yüzeyine etki eden kuvvet etkisinde eğilmesi durumunda Problem 3 (Problem 4) için $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerleri farklı E_1/E_0 değerleri için verilmektedir. Şekil 3.26.a'da (Şekil 3.26.b'de) verilen grafikler [77]([4]) kaynağında verilen analitik çözüm sonuçları ile tamamen üst üste çakışmaktadır. Bu sonuç aynı zamanda tarafımızdan yapılan sonlu eleman algoritma ve programlarının doğruluğu ve hassasiyet mertebesini de göstermektedir. Sayısal hesaplamalarda boyutsuz büyüklükler kullanıldığından E_1/E_0 oranı plaktaki en büyük Young modülü değişimini temsil etmektedir. $E_1/E_0 = 1$ seçilmesi, şerit-plak malzemesinin homojen izotrop malzeme olması durumuna karşı gelmektedir. Şekil 3.26.a'da şerit-plağın x_1 doğrultusunda FDM özelliğe sahip olması durumunda E_1/E_0 azaldıkça, elde edilen gerilme değerlerinin homojen durumda elde edilen gerilme değerlerine yaklaştığı ve $E_1/E_0 = 1$ için [77]'de verilen analitik çözümle elde edilen gerilme değerleri ile tarafımızdan elde edilen sayısal çözümün üst üste düştüğü görülmektedir. Ayrıca, Şekil 3.26.b'de verilen ve şerit-plağın x_2 doğrultusunda FDM özelliğe sahip olması durumunda tarafımızdan elde edilen gerilme değerleri, her bir E_1/E_0 değeri için [4]'de verilen ve analitik çözüm ile elde edilen uygun gerilme değerleri ile birebir örtüştüğü görülmektedir.



(a) (b)

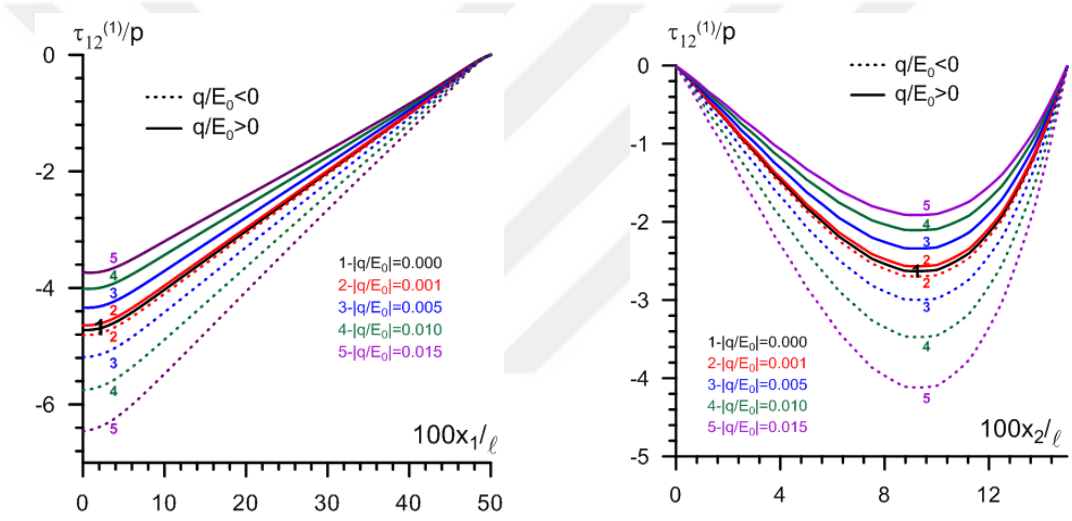
Şekil 3.26 Öngerilmesiz şerit-plağın $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerleri (a) Problem 3 $\left(E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2\right)$ (b) Problem 4 $\left(E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2\right)$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde E_1/E_0 değişiminin etkisi



(a) (b)

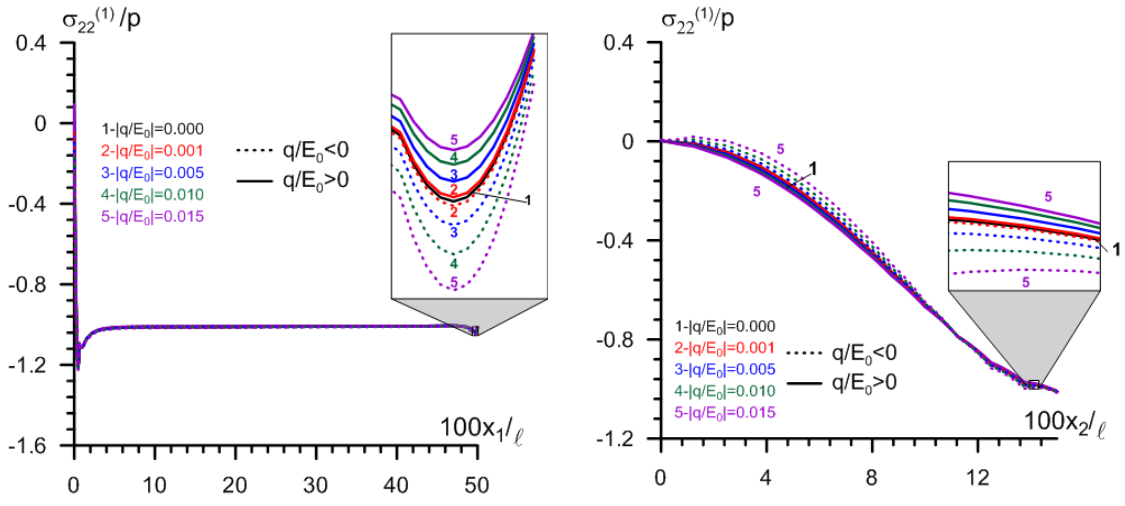
Şekil 3.27 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.

Şekil 3.27-Şekil 3.29'da verilen grafiklerde, eğilme etkisindeki öngerilmeli FD şerit-plakta, yapıdaki öngerilmenin değişiminin n=2 durumunda (a) Problem 3 ve (b) Problem 4 için sırasıyla $\sigma_{11}^{(1)}/\mathrm{q}$, $\tau_{12}^{(1)}/\mathrm{q}$ ve $\sigma_{22}^{(1)}/\mathrm{q}$ gerilme değerlerine etkisi verilmiştir. Her iki problem için (Problem 3 ve 4); yapıda basınç öngerilmesi $(\mathrm{q}/\mathrm{E}_0 < 0)$ olması, gerilme değerlerini mutlak değerce artırmakta, çekme öngerilmesi $(\mathrm{q}/\mathrm{E}_0 > 0)$ olması gerilme değerlerini mutlak değerce azaltmaktadır. Bununla beraber basınç öngerilmesi, çekme öngerilmesine göre yapıda oluşan gerilme değerlerine çok daha fazla etki göstermektedir.



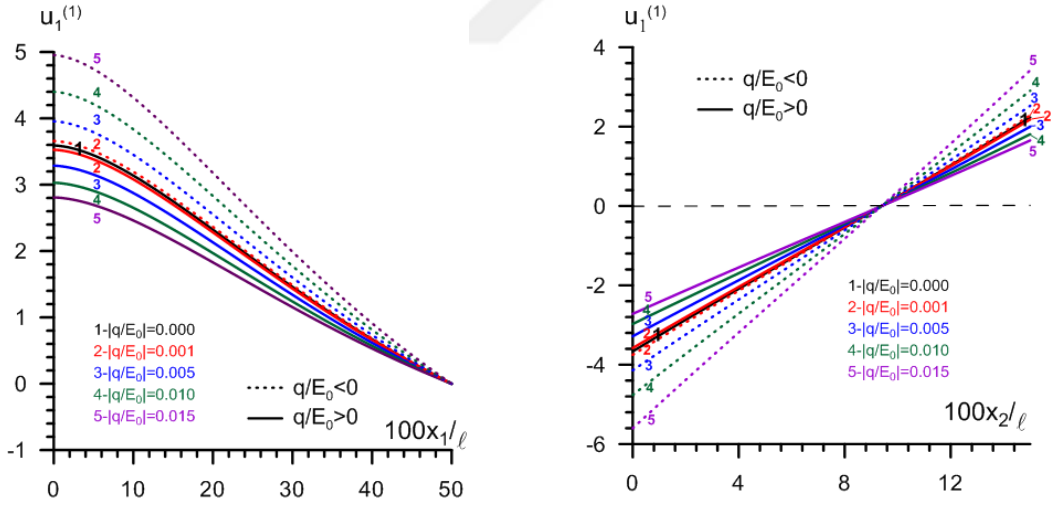
(a) (b)

Şekil 3.28 $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h/2$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0 = 5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.



(a) (b)

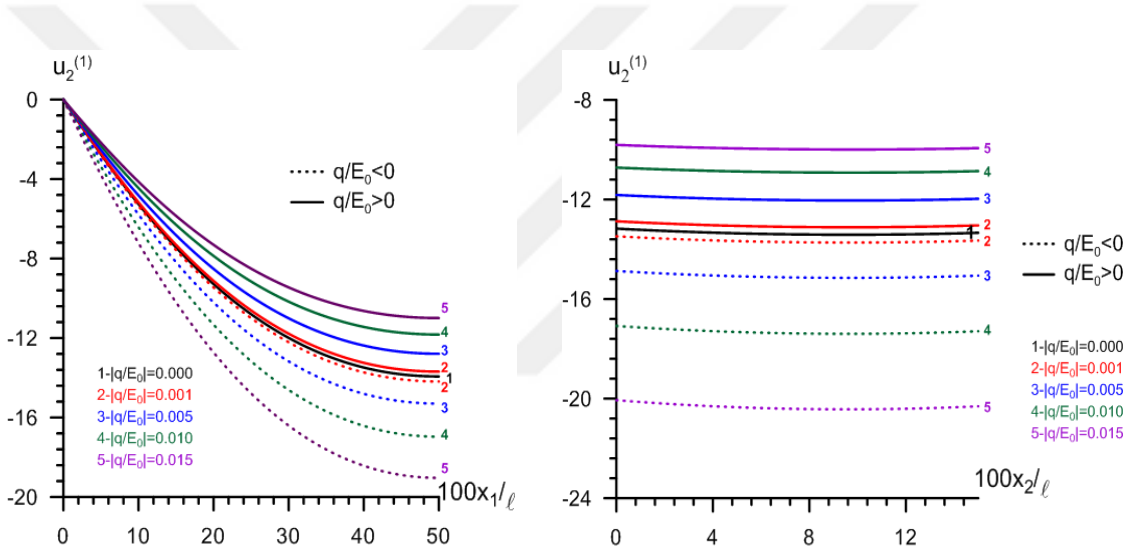
Şekil 3.29 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.



(a) (b)

Şekil 3.30 $u_1^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.

Şekil 3.30 (Şekil 3.31)'da, eğilme etkisindeki FD malzemeden $\left(E_1/E_0=5\right)$ yapılmış öngerilmeli şerit-plakta yapıdaki öngerilmenin değişiminin n=2 durumunda (a) Problem 3 ve (b) Problem 4 için $u_1^{(1)}$ $\left(u_2^{(1)}\right)$ yer değiştirme değerlerine etkisi incelenmiştir. Yapıda basınç öngerilmesi $\left(q/E_0<0\right)$ olması yer değiştirme değerlerini mutlak değerce artırmakta, çekme öngerilmesi $\left(q/E_0>0\right)$ olması yer değiştirme değerlerini mutlak değerce azaltmaktadır. Basınç öngerilmesi olması durumu yer değiştirmelerin değerlerini daha fazla etkilemektedir.

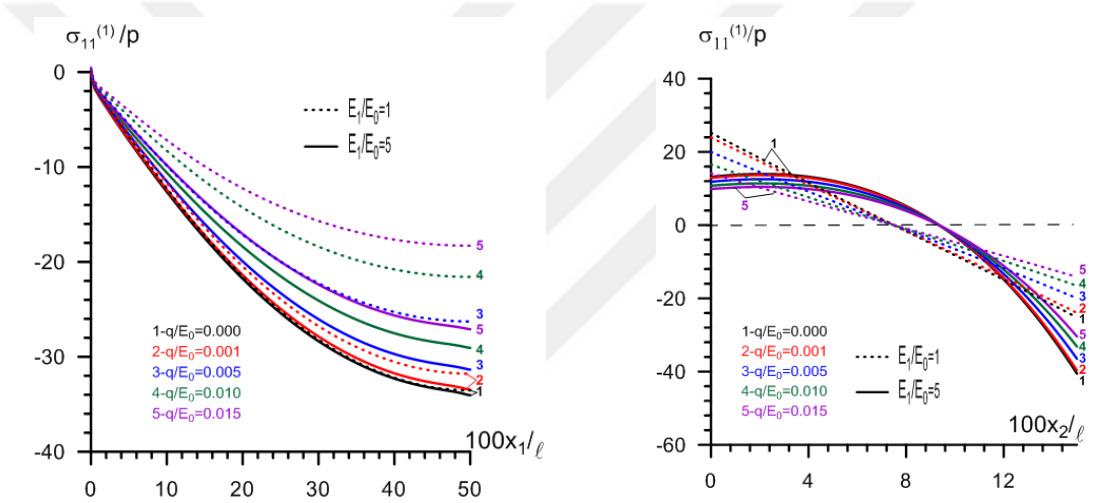


(a) (b)

Şekil 3.31 $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(x_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde ve $E_1/E_0=5$ durumunda basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.

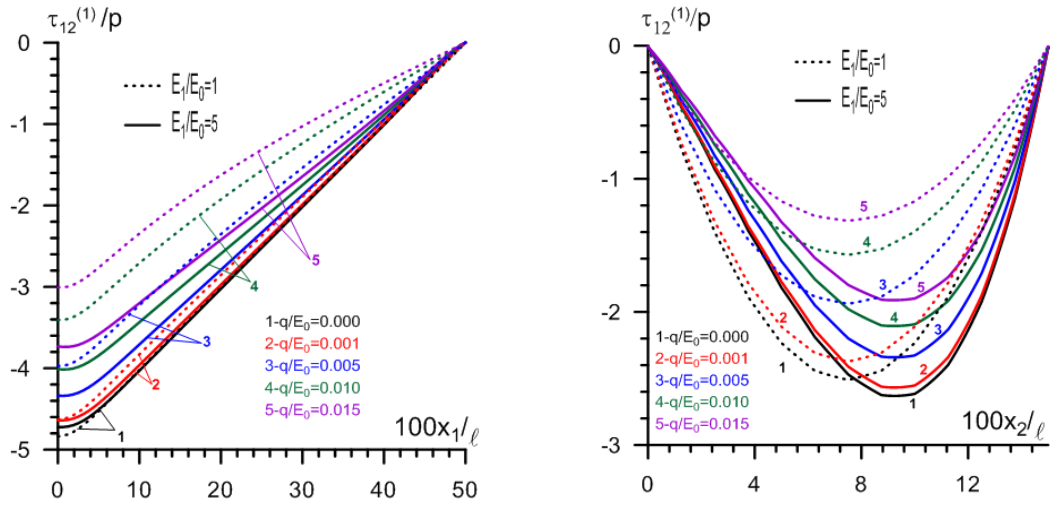
Şekil 3.32, Şekil 3.33 ve Şekil 3.34'de eğilme etkisindeki şerit-plakta, sırasıyla $\sigma_{11}^{(1)}/q$, $\tau_{12}^{(1)}/q$ ve $\sigma_{22}^{(1)}/q$ gerilme değerlerine, farklı çekme öngerilmesi (i.e.

$q/E_0 > 0$) değerlerinde n=2 durumunda (a) Problem 3 ve (b) Problem 4 için $E_1 / E_0 = 5$ (FD malzeme) ve $E_1 / E_0 = 1$ (homojen izotrop) durumlarında verilmiştir. Her iki problem için de (Problem 3 ve Problem 4), q/E_0 arttıkça, tüm gerilme değerleri mutlak değerce azalırken, aynı öngerilme için $E_1/E_0 = 1$ (homojen izotrop) için elde edilen gerilme değerleri ile $E_1/E_0 \neq 1$ (FDM) durumunda elde edilen gerilme değerleri arasındaki fark artmaktadır ve $E_1/E_0 \neq 1$ için elde edilen gerilme değerleri, homojen izotrop şerit-plak için elde edilen gerilme değerlerinden mutlak değerce daha büyüktür.



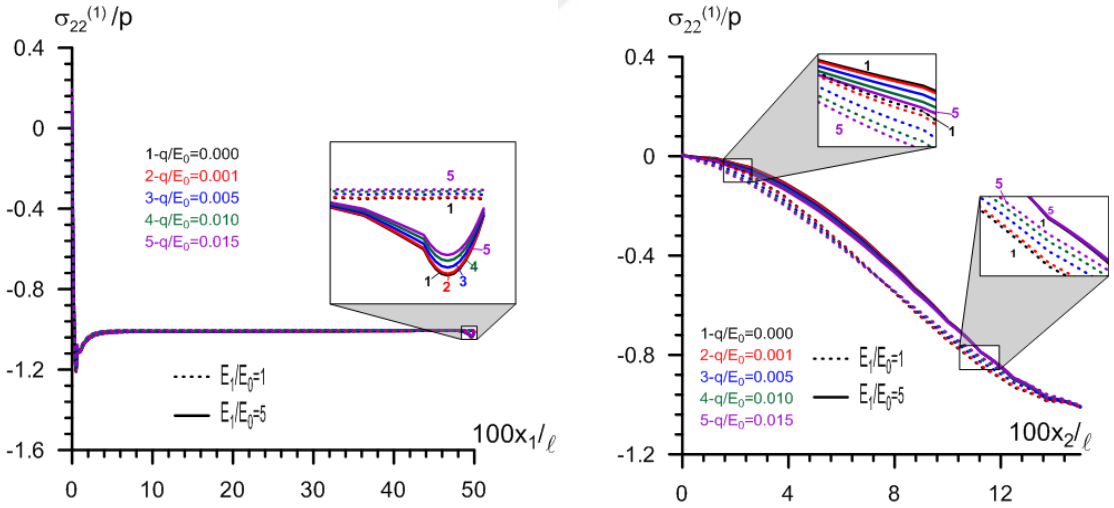
(a) (b)

Şekil 3.32 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0 = 5$ ve $E_1/E_0 = 1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi.



(a) (b)

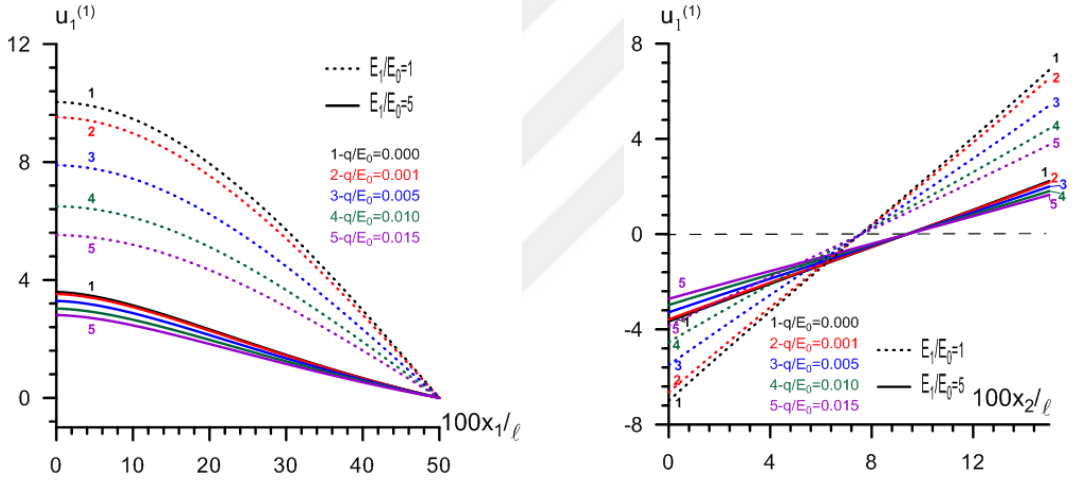
Şekil 3.33 $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi.



(a) (b)

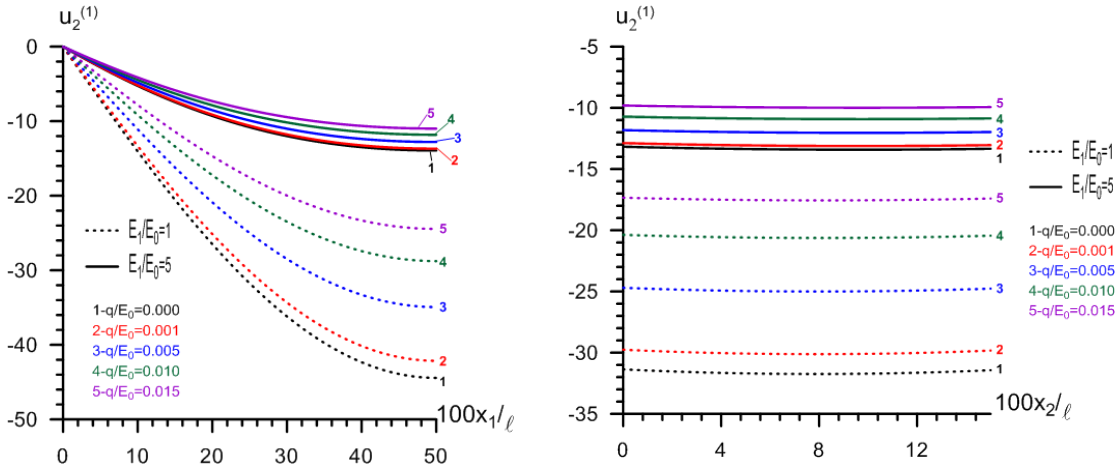
Şekil 3.34 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında öngerilmenin etkisi.

Şekil 3.35 (Şekil 3.36)'te eğilme etkisindeki şerit-plakta $u_1^{(1)}$ $\left(u_2^{(1)}\right)$ yer değiştirme değerlerinin (a) Problem 3 ve (b) Problem 4 için $E_1/E_0=1$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında n=2 için q/E_0 değişiminden nasıl etkilendiği verilen kesitlerde incelenmiştir. Her iki problem için q/E_0 değeri (öngerilme) arttıkça yer değiştirme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde azalmaktadır. q/E_0 değişiminin yer değiştirme değerlerine etkisi, $E_1/E_0=5$ (FD malzeme) için $E_1/E_0=1$ durumuna göre daha az olmaktadır.



(a) (b)

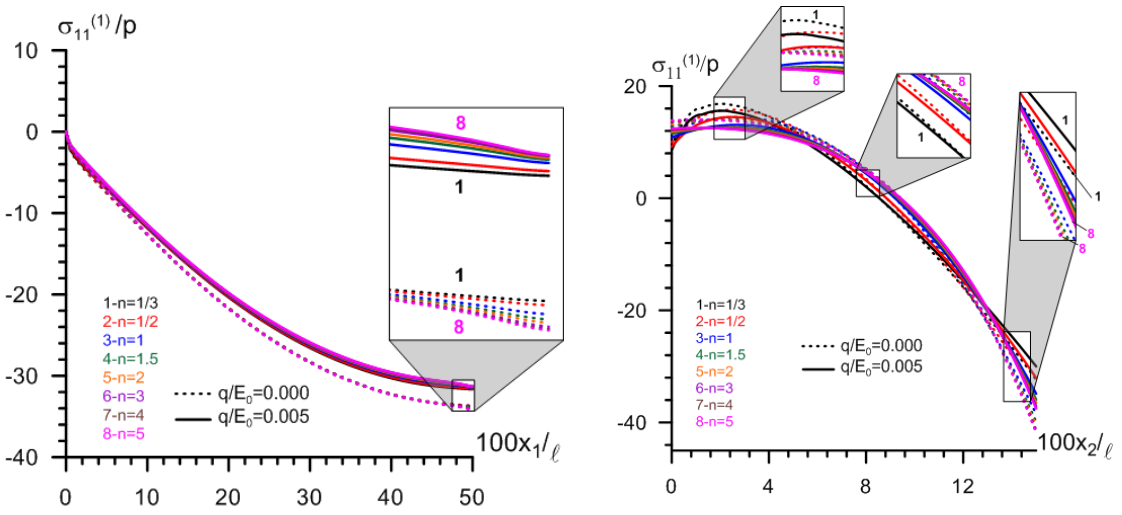
Şekil 3.35 $u_1^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(x_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında öngerilmenin etkisi.



(a) (b)

Şekil 3.36 $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında öngerilmenin etkisi.

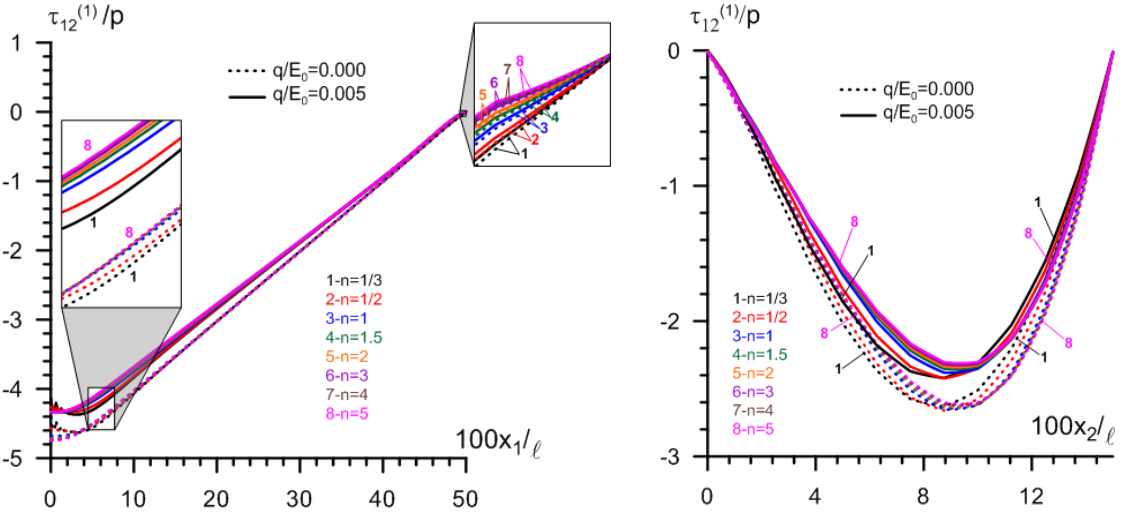
Şekil 3.37, Şekil 3.38 ve Şekil 3.39'da eğilme etkisindeki FD malzemeden $\left(\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_0=5\right)$ yapılmış şerit-plakta sırasıyla $\sigma_{11}^{(1)}/\mathrm{p}$, $\tau_{12}^{(1)}/\mathrm{p}$ ve $\sigma_{22}^{(1)}/\mathrm{p}$ gerilme değerlerine, denklem (3.30) ve (3.31)'de verilen n parametresi değişimine göre (a) Problem 3 ve (b) Problem 4 için $\mathrm{q}/\mathrm{E}_0=0.005$ ve $\mathrm{q}/\mathrm{E}_0=0$ durumlarında verilmiştir. Her iki problem için de n parametresinin değişimi, gerilme değerlerinde değişime neden olmakla birlikte, bu değişimler değerce küçük değişimlerlerden ibarettir.



(a) (b)

Şekil 3.37 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$

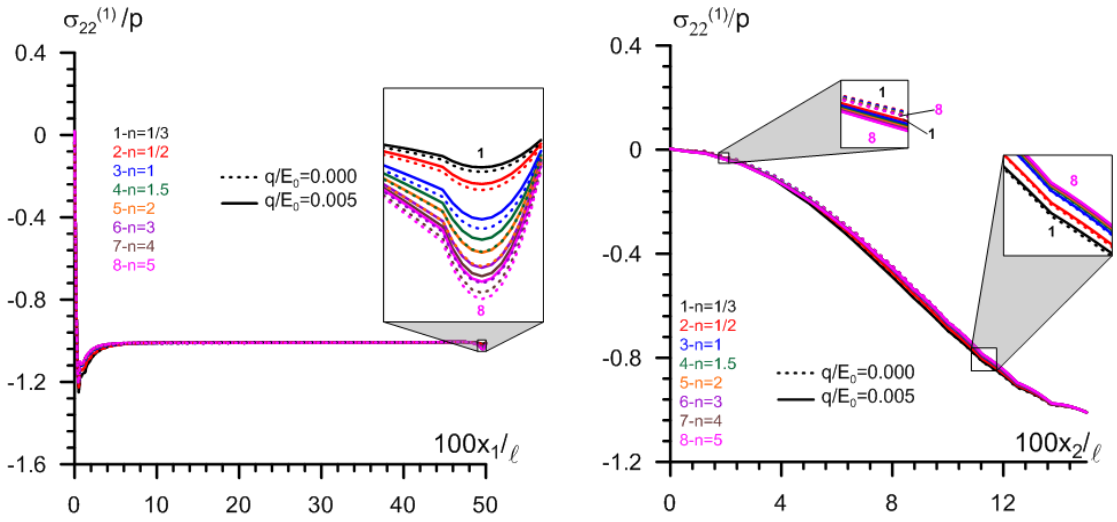
(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ iken $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 3.38 $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$

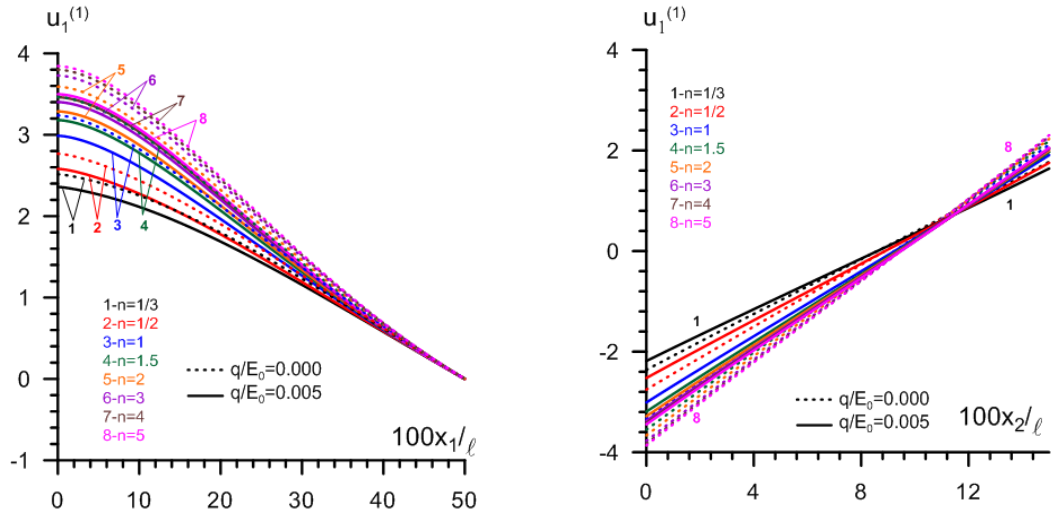
(b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ iken $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 3.39 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^n$ (b) $E(x_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^n$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $E_1/E_0=5$ iken $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi.

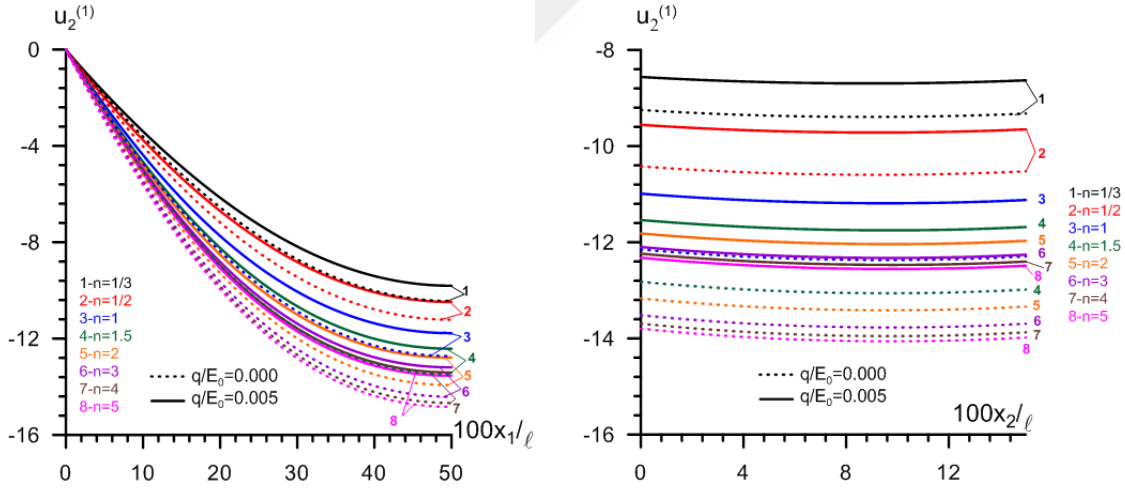
Şekil 3.40-Şekil 3.41'de eğilme etkisindeki FD malzemeden $(E_1/E_0=5)$ yapılmış şerit-plakta sırasıyla $u_1^{(1)}$ ve $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerleri, denklem (3.30) ve (3.31)'de verilen n parametresi değişimine göre (a) Problem 3 ve (b) Problem 4 için $q/E_0=0$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında verilmiştir. Her iki problem için n parametresi değerleri arttıkça, yer değiştirme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde artmaktadır.



(a) (b)

Şekil 3.40 $u_1^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde $E_1 / E_0 = 5$ iken $q / E_0 = 0.005$ ve $q / E_0 = 0$ durumlarında n değişiminin etkisi.

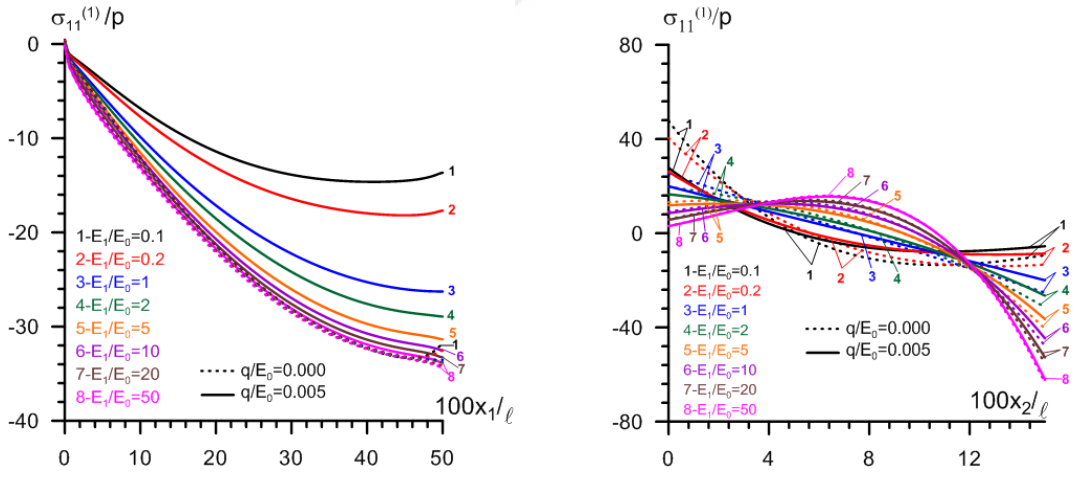


(a) (b)

Şekil 3.41 $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^n$

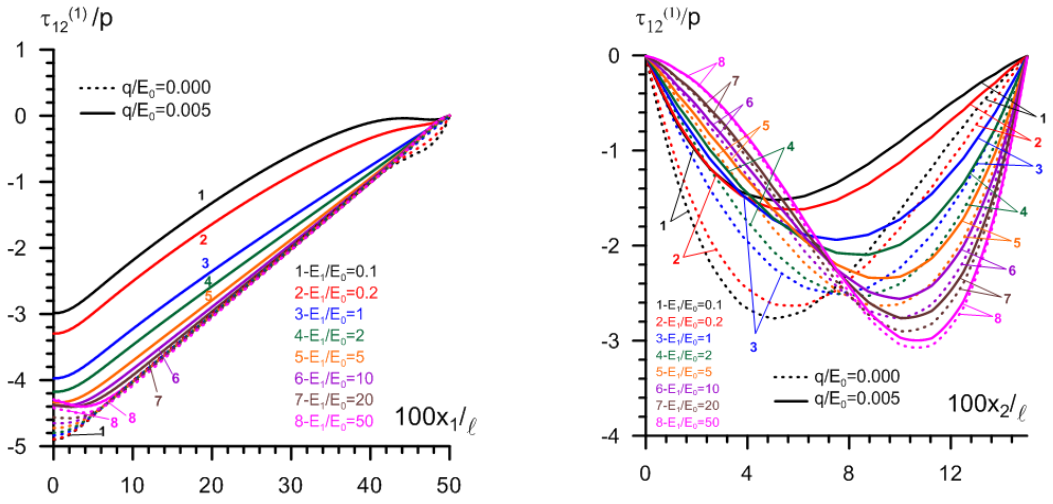
(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^n$ için sırasıyla $x_2 = h/2$ ve $x_1 = \ell / 4$ kesitlerinde $E_1 / E_0 = 5$ iken $q / E_0 = 0.005$ ve $q / E_0 = 0$ durumlarında n değişiminin etkisi.

Şekil 3.42, Şekil 3.43 ve Şekil 3.44'te eğilme etkisindeki FD malzemeden yapılmış şerit-plakta sırasıyla $\sigma_{11}^{(1)}/\mathrm{p}$, $\tau_{12}^{(1)}/\mathrm{p}$ ve $\sigma_{22}^{(1)}/\mathrm{p}$ gerilme değerleri, farklı $\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_0$ değerlerinde (a) Problem 3 ve (b) Problem 4 için $\mathrm{q}/\mathrm{E}_0=0.005$ ve $\mathrm{q}/\mathrm{E}_0=0$ durumlarında ve n=2 için verilmiştir. Her iki Problem için E_1/E_0 değeri arttıkça gerilme değerleri mutlak değerce artmaktadır. Şerit-plak öngerilmeli olduğu durumda E_1/E_0 değişiminden daha fazla etkilenmektedir. $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine, $\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_0$ değişiminin etkisi, daha önce Şekil 3.26'da yapıdaki öngerilme ihmal edilerek incelenmiş olup, burada verilen Şekil 3.42'de ise, yapıda öngerilmenin olması ve öngerilmenin olmaması durumlarına ait gerilme değerleri birlikte verilmiştir. Buna göre Problem 3 için verilen gerilme yayımlarında; yapıda öngerilme olmadığı durum için $\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_0$ değişimi gerilme değerlerine çok az etki ederken, yapıda öngerilme olması durumunda $\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_0$ değişiminin gerilme değerleri üzerine etkisi oldukça fazladır. $\tau_{12}^{(1)}/p$ ve $\sigma_{22}^{(1)}/\mathrm{p}$ gerilme değerlerine, $\mathrm{E}_1/\mathrm{E}_0$ değişiminin etkisi Problem 4'de, Problem 3'e göre daha fazladır.



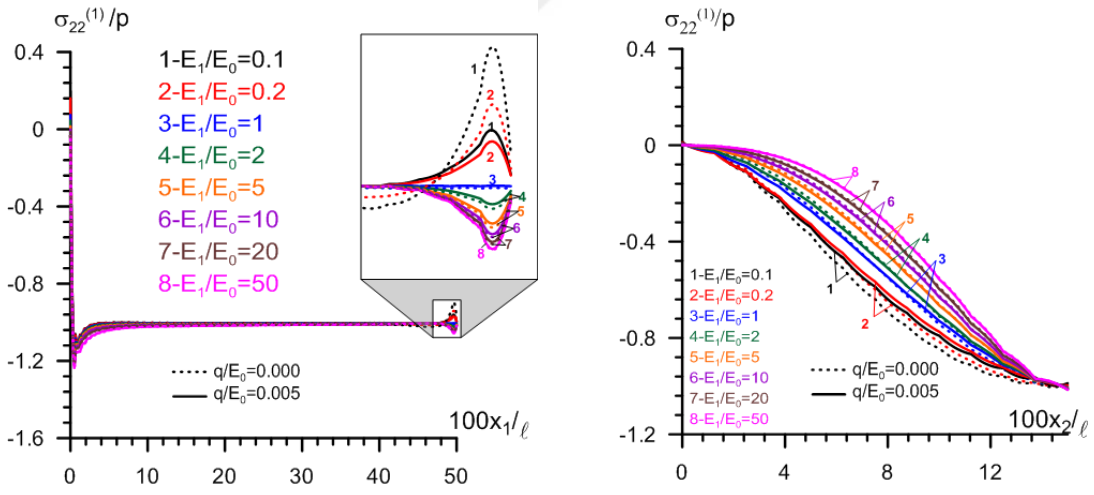
(a) (b)

Şekil 3.42 $\sigma_{11}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

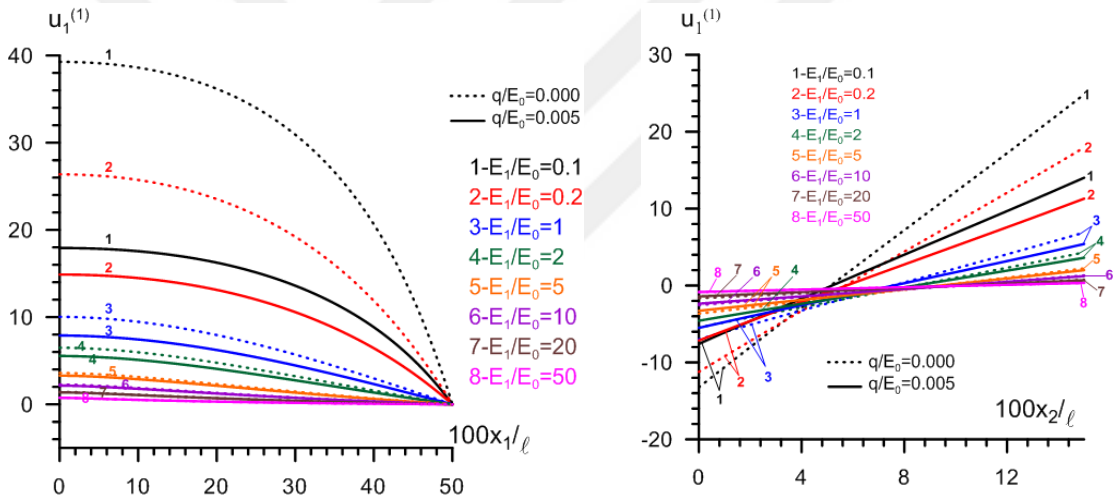
Şekil 3.43 $\tau_{12}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h/2$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 3.44 $\sigma_{22}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$ (b) $E(\mathrm{x}_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.

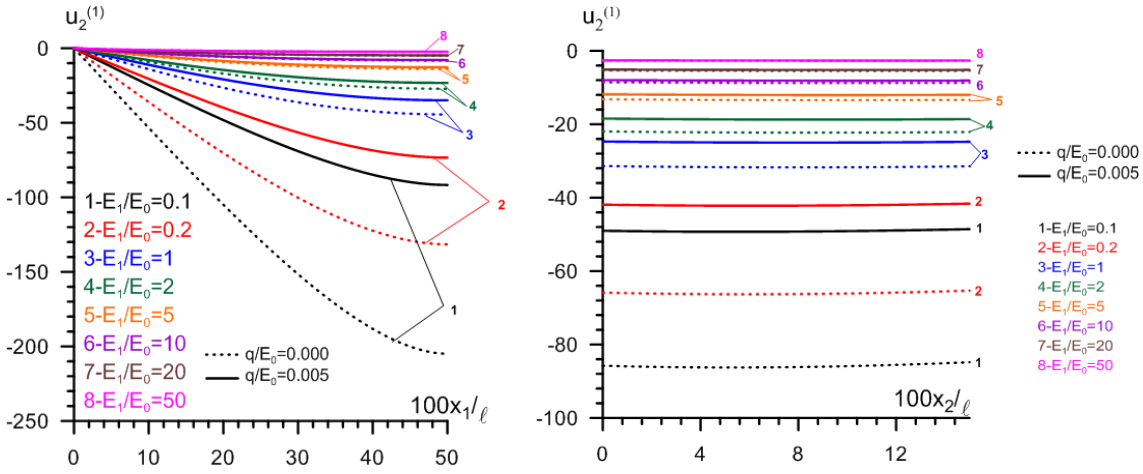
Şekil 3.45 (Şekil 3.46)'de eğilme etkisindeki FDM şerit-plakta $u_1^{(1)}$ $\left(u_2^{(1)}\right)$ yer değiştirme değerlerinin n=2 durumunda (a) Problem 3 ve (b) Problem 4 için $q/E_0=0$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminden nasıl etkilendiği incelenmiştir. Her iki problem için de E_1/E_0 değeri arttıkça $u_1^{(1)}$ $\left(u_2^{(1)}\right)$ yer değiştirme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde azalmaktadır. Her iki problem için de yapıda öngerilme olmadığı durumda $\left(q/E_0=0\right)$ elde edilen yer değiştirme değerleri, yapıda öngerilmenin olduğu $\left(q/E_0=0.005\right)$ durumda elde edilen yer değiştirme değerlerine göre mutlak değerce daha fazladır.



(a) (b)

Şekil 3.45 $u_1^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0\left(ax_1+b\right)^2$

(b) $E(x_2)=E_0\left(cx_2+d\right)^2$ için sırasıyla $x_2=h$ ve $x_1=\ell/4$ kesitlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 3.46 $u_2^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(\mathrm{x}_1) = E_0\left(ax_1 + b\right)^2$

(b) $E(\mathrm{x}_2) = E_0\left(cx_2 + d\right)^2$ için sırasıyla $x_2 = h/2$ ve $x_1 = \ell/4$ kesitlerinde $q/E_0 = 0.005$ ve $q/E_0 = 0$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi

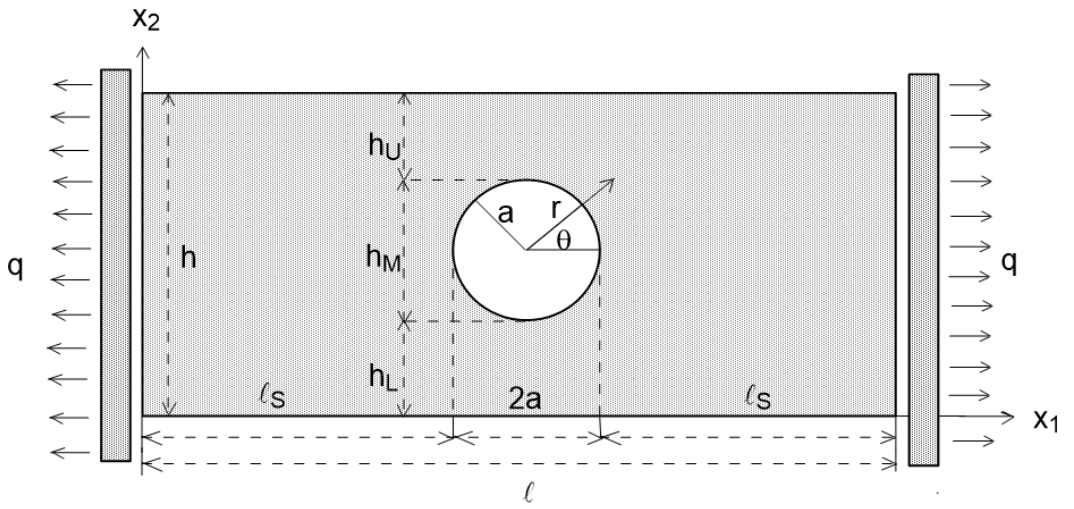
4
FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ DAİRESEL DELİK İÇEREN ŞERİT-PLAKLARIN STATİK ANALİZİ

4.1 Basınç/Çekme Kuvveti Etkisindeki Dairesel Delik İçeren Şerit-Plak Problemi

Bu kısımda fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dairesel formda delik içeren bütün yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş şerit-plağın, karşılıklı iki kenarından çekilmesi durumunda yapısında oluşan yer değiştirme ve gerilme değerlerinin belirlenmesine ait sınır değer problemleri ele alınacaktır. Bu problemlere ait matematiksel model, Elastisite Teorisi'nin kesin denklemleri ve düzlem şekil değiştirme durumu çerçevesinde yapılarak, kurulan bu matematiksel modellerin çözümü, sayısal olarak sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla yapılacaktır.

4.1.1 Matematiksel Modelleme

İçerisinde dairesel formda delik içeren fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen şerit-plağın karşılıklı iki kenarından düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde tutturulduğu (basit mesnet), aynı zamanda yine bu iki kenarından etkiyen ve birim yoğunluğu q olan düzgün yayılı normal kuvvet etkisinde olduğu kabul edilmektedir. Şerit-plağa bağlı Ox_1x_2 koordinat takımı, şerit-plağın geometrik boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.1'de gösterilmektedir.



Şekil 4.1 Dairesel delik içeren şerit-plağa ait çözüm bölgesi ve yükleme durumu

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi;

$$\Omega' = \Omega - \Omega_{\mathbf{h}}$$

$$\Omega = \left\{0 \le \mathbf{x}_1 \le \ell;\, 0 \le \mathbf{x}_2 \le \mathbf{h}\right\}$$

$$\Omega_{\mathbf{h}} = \left\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \middle| \left(\mathbf{x}_1 - (\ell_{\mathbf{s}} + \mathbf{a})\right)^2 + \left(\mathbf{x}_2 - \left(\mathbf{h}_{\mathbf{L}} + \mathbf{a}\right)\right)^2 \le \mathbf{a}^2 \right\} \tag{4.1}$$

dir.

Ele alınan şerit-plak malzemesi fonksiyonel derecelendirilmiş olduğundan, malzeme özellikleri koordinatların fonksiyonu olacak şekilde belirlenecektir. Ele alınan FDM şerit-plakta Poisson oranı sabit, ancak Young Modül fonksiyonunun sırasıyla x_1 ve x_2 koordinatlarına ayrı ayrı bağlı, tek serbest değişkenli fonksiyon olması durumları için 2 farklı problem ele alınacaktır. Dairesel formda delik içeren şerit-plakta Young Modülü'nün x_1'e göre değişimi Problem 5, x_2'ye göre değişimi Problem 6 olarak incelenecektir. Bu durumda FDM malzeme için

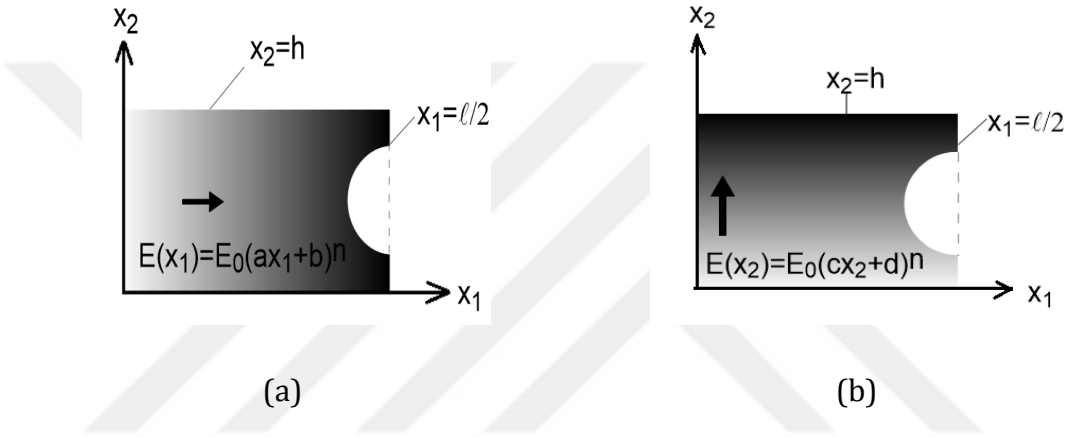
Problem 5: $E(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = E(\mathrm{x}_1) = E_0 \left(a x_1 + b\right)^n$ (4.2)

Problem6: $E(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = E(\mathrm{x}_2) = E_0 \left(c x_2 + d\right)^n, E_0, a, b, c, d, n \in R$ (4.3)

olarak seçilecektir.

Problemlerimiz sınır değer problemi olduğundan: Problem 5 için ; orijinde $E = E_0$, $x_1 = \ell / 2$ de $E = E_1$ değerini almaktadır. Problem 6 için ise orijinde $E = E_0$, $x_2 = h$ de $E = E_1$ değerini almaktadır. a, b, c, d sabitleri sınır değerlerinden elde edilebilmektedirler.

Ele alınan sınır değer probleminin geometrisi ve yükleme durumunun $x_1 = \ell/2$ eksenine göre simetrik olması özelliğinden yararlanılarak çözüm, bu bölgenin yarısı için yapılacaktır. Plağa bağlı koordinat takımı ve malzeme özelliği değişimi (4.2) ve (4.3)' de verilen FD şerit-plağın ½ lik kısmı için Şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2 (a)Malzeme özelliği Ox_1 ekseni boyunca değişen dairesel delik içeren FD şerit-plağın ½ lik kısmı

(b) Malzeme özelliği Ox_2 ekseni boyunca değişen dairesel delik içeren FD şerit-plağın ½ lik kısmı

Çözüm bölgesinde sağlanan denge denklemleri;

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \; i, j = 1,2 \tag{4.4}$$

Bünye denklemleri ;

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(x_i\right)\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.5}$$

(4.5)'de

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\right]^T \text{ ve } \varepsilon = \left[\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\right]^T \tag{4.6}$$

şeklindedir. Yer değiştirme-şekil değiştirme fonksiyonları

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \ i,j=1,2 \tag{4.7}$$

olarak elde edilir.

Sınır koşulları;

$$u_2\big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2\in 0,h}} = 0\,,\ \sigma_{11}\big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2\in 0,h}} = q\,,\ \sigma_{12}\big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2\in 0,h}} = 0\,,\ \sigma_{ij}\big|_{\substack{x_1=0;h \\ x_2\in 0,\ell}} = 0\,,\ i=1,2$$

$$\sigma_{nn}\big|_{\ell_H} = 0,\ \ \sigma_{n\tau}\big|_{\ell_H} = 0 \tag{4.8}$$

şeklindedir. Burada

$$\ell_H = \left\{ x_1, x_2 \;\middle|\; x_1 - \ell_s + a \right\}^2 + \left(x_2 - h_L + a \right)^2 = a^2 \tag{4.9}$$

olarak verilebilir [23]. Belirtelim ki (4.5)'de verilen D matrisinin elemanları, ele alınan FD şerit-plak için fonksiyonlardan oluşmaktadır. Yani, $D_{ij} = D_{ij}(x_1)$ (Problem 5) veya $D_{ij} = D_{ij}(x_2)$ (Problem 6) olur ve

$$\mathbf{D}^{(k)} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2D_{66} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

olmak üzere, bu matrisin bileşenleri, Poisson oranı $\upsilon = sb.$ için,

$$D_{11} = D_{22} = \frac{(1-\upsilon)E(x_k)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)},\ \ D_{12} = D_{21} = \frac{\upsilon E(x_k)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)},\ D_{66} = \frac{E(x_k)}{2(1+\upsilon)} \tag{4.11}$$

olarak verilebilir. Burada $i=1$ (Problem 5 için) ve $i=2$ (Problem 6 için) değerlerini almaktadır.

Dolayısı ile dairesel formda delik içeren FDM şerit-plağa ait ele alınan sınır değer probleminin matematiksel modeli, Problem 5 için (4.3) hariç (4.1)-(4.8) denklemleri ile Problem 6 için (4.2) hariç (4.1)-(4.8) denklemleri ile verilebilir. Belirtelim ki, bu kısımda her iki sınır değer problemine ait matematiksel model, değişken katsayılı, kısmı türevli 8 bilinmeyen 8 denklemden oluşan sistem denklemlerinin verilen sınır koşulları çerçevesinde çözümünü gerektirmektedir.

4.1.2 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu

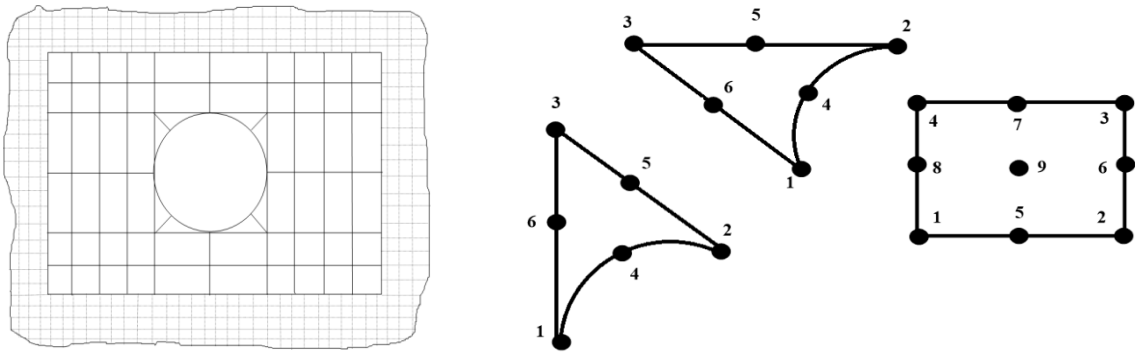
Ele alınan problemlerin çözümünde, sonlu eleman ayrıklaştırmasında nodlarda bilinmeyen olarak sadece yer değiştirme değerleri seçileceğinden, yer değiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Metodu kullanılmıştır [78]. Yapı elemanına etki eden toplam kuvvetler sonucunda, yapı elemanında biriken toplam potansiyel enerji fonksiyoneli Π ve Ritz tekniği yardımıyla, sonlu eleman formülasyonu yapılacaktır. Ele alınan yapı elemanında toplam potansiyel enerjiyi ifade eden fonksiyonel;

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_{\Omega'} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathbf{dx}_1\mathbf{dx}_2 - \int_0^{\mathbf{h}} \mathbf{qu}_1\Big|_{\mathbf{x}_1=0} \mathbf{dx}_2 + \int_0^{\mathbf{h}} \mathbf{qu}_1\Big|_{\mathbf{x}_1=\ell} \mathbf{dx}_2\,,\ \text{i;j=1,2} \qquad (4.12)$$

olarak belirlenir. Fonksiyoneldeki Ω', (4.1) ile verilen çözüm bölgesidir. Belirtelim ki, bu fonksiyonelin yer değiştirmelere göre birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden, denge denklemleri ve gerilmelere göre verilen sınır koşulları elde edilir [78]. Yani ele alınan sınır değer problemi, Π fonksiyonelinin Euler denklemleridir.

4.1.3 Sonlu Eleman Modellemesi

Ele alınan sınır değer problemine ait çözüm bölgesi, sonlu adet sonlu elemana yani alt bölgeye ($\Omega_{(s)}$, s=1,2,...,M) ayrıklaştırılır. Dairesel delik civarında eğri kenarlı üçgen elemanlar, geriye kalan kısımda dikdörtgen formda sonlu elemanlar kullanılmıştır (Şekil 4.3).



a) b)

Şekil 4.3 a) Dairesel delik içeren şerit-plağa ait sonlu eleman ağı,
b) Ele alınan bazı sonlu elemanlar ve nodların konumu.

Şekil 4.3'de sonlu eleman ağı her bir sonlu elemanda nodların konumu gösterilmektedir. Dikdörtgen sonlu elemanlar için 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar seçilmiş olup bu nodlara ait normalize edilmiş koordinatlardaki şekil fonksiyonları;

Köşe nodlar için;

$$\mathbf{N_i} = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi + \xi_\mathbf{i})(\eta + \eta_\mathbf{i}) \tag{4.13}$$

Kenarların ortalarındaki nodlar için;

$$\begin{aligned} \xi_\mathbf{i} = 0 \Rightarrow \mathbf{N_i} &= \frac{1}{2}\eta\left(1-\xi^2\right)(\eta + \eta_\mathbf{i}) \\ \eta_\mathbf{i} = 0 \Rightarrow \mathbf{N_i} &= \frac{1}{2}\xi(\xi + \xi_\mathbf{i})\left(1-\eta^2\right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Merkezdeki nod için;

$$\mathbf{N_i} = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right) \tag{4.15}$$

şeklindedir.

Yerel $O'\xi\eta$ koordinat takımı ile genel Ox_1x_2 kartezyen koordinat takımı arasında dönüşümü sağlayan bağıntı;

$$\xi = \frac{2x_1 - (x_{i+1} + x_i)_1}{(x_{i+1} - x_i)_1}, \qquad \eta = \frac{2x_2 - (x_{i+1} + x_i)_2}{(x_{i+1} - x_i)_2} \tag{4.16}$$

dır. (4.16)'da $(x_{i+1} + x_i)_1$ $((x_{i+1}+x_i)_2)$, Ox_1 (Ox_2) doğrultusunda i. sonlu elemanın üst (x_{i+1}) ve alt(x_i) nodlarının koordinatları toplamı; $(x_{i+1} - x_i)_1$ $((x_{i+1}-x_i)_2)$, Ox_1 (Ox_2) doğrultusunda i. sonlu elemanın üst ve alt nodlarının koordinatları farkı'dır.

Üçgen sonlu elemanlar için nodlarda tanımlı şekil fonksiyonlarının genel koordinatlardaki ifadesi [78];

$$N_i(x_1, x_2) = a_i + b_i x_1 + c_i x_1 + d_i x_1^2 + e_i x_1 x_2 + f_i x_2^2 \tag{4.17}$$

şeklindedir. (4.17) denklemindeki bilinmeyen katsayılar her sonlu elemana ait nod için;

$$N_i(x_{1j}, x_{2j}) = \delta_{ij} \tag{4.18}$$

eşitliğinden belirlenir. (4.18)'de (x_{1j}, x_{2j}), j. nodun Ox_1x_2 koordinat takımındaki koordinatları, δ_{ij} Kronecker sembolüdür.

Sonlu elemanlar yöntemi gereği, aranan yer değiştirme fonksiyonları polinom şeklinde kabul edilir. Buna göre her sonlu eleman için yer değiştirme fonksiyonları; N_i şekil fonksiyonu ve u_{ki} i.nci nodun k doğrultusundaki nodal yer değiştirmesi olmak üzere;

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i \begin{Bmatrix} u_{1i}^{(e)} \\ u_{2i}^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad e=1,2,\ldots,M \tag{4.19}$$

şeklindedir. Burada n elemandaki toplam nod sayısını, M bölgedeki toplam sonlu eleman adedini göstermektedir. (4.19) ifadesi, (4.12) fonksiyonelinde yerine yazılarak ve Ritz tekniği yardımıyla, problemin çözümü

$$\mathrm{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{4.20}$$

denklem sisteminin çözümüne indirgenir. (4.20)' de K Rijitlik matrisi, u nodlarda bilinmeyenleri içeren matris ve F sağ taraf veya kuvvet matrisini temsil etmektedir. K matrisinin bileşenleri

$$\mathrm{K} = \sum_{e=1}^{M} \mathrm{K}^{(e)}, \quad \mathrm{K}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathrm{K}_{11}^{(e)} & \mathrm{K}_{12}^{(e)} & \ldots & \mathrm{K}_{1n}^{(e)} \\ \mathrm{K}_{21}^{(e)} & \mathrm{K}_{22}^{(e)} & \ldots & \mathrm{K}_{2n}^{(e)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{K}_{n1}^{e} & \mathrm{K}_{n2}^{(e)} & \ldots & \mathrm{K}_{nn}^{e} \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

seçilen e. sonlu elemana ait $K^{(e)}$ eleman matrislerinin elemanları $K_{ij}^{(e)}$ ler

$$\mathrm{K}_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \left(B_j^{(e)}\right)^T D^{(e)} B_j^{(e)} d\Omega_e \qquad i,j=1,2,\ldots,n;\ e=1,2,\ldots,M \tag{4.22}$$

integralinden belirlenir. (4.22)'te $\mathrm{D}^{(e)}$ matrisinin elemanları, Problem 5 için x_1 ve Problem 6 için x_2'ye bağlı fonksiyonlardan oluşmaktadır. Yani, $D_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}(x_1)$ (Problem 5) ve $D_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}(x_2)$ (Problem 6) olur. Burada n değeri, sonlu elemandaki toplam nod sayısı olup, dikdörtgen sonlu eleman için 9 ve üçgen sonlu eleman için 6 değerini almaktadır. Ω_e ele alınan e. sonlu elemana ait bölgeyi göstermektedir.

(4.22) ifadesindeki B matrisi

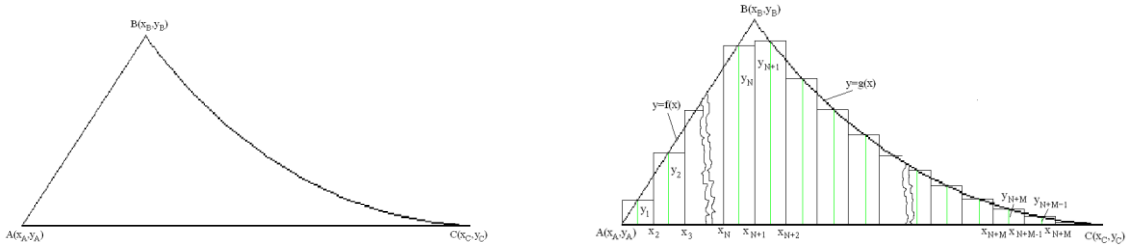
$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_1} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

dir.

Belirtelim ki, (4.22) integralleri sayısal olarak hesaplanmış; dikdörtgen sonlu elemanlar için Kısım 3.1.3 'de bahsedilen Gauss karelemesi kullanılmıştır. Fakat, eğrisel kenarlara sahip üçgen sonlu elemanlar için elde edilen integrallerin, integral sınırlarına fonksiyon geldiğinden, dairesel delik etrafındaki üçgen sonlu elemanlar (Şekil 4.3) üzerindeki integrallerin sayısal hesaplanmasında Gauss karelemesi doğrudan kullanılamaz. Bunun için eğrisel kenara sahip üçgen sonlu elemanlar üzerinde (4.22) integrallerinin hesaplanması, Şekil 4.4.b.'de verilen sonlu sayıdaki küçük dikdörtgen elemanlar üzerindeki integraller toplamına dönüştürülür. Eğrisel kenarlara sahip üçgen sonlu elemanlar üzerindeki sayısal integrali hesaplama tekniği, Şekil 4.4.a örneği çerçevesinde aşağıda detaylı olarak açıklanmaktadır. Ele alınan üçgen sonlu eleman üzerindeki belirli integral

$$\iint_{\Omega_{(e)}} F(x,y)\,d\Omega_{(e)} = \int_{x_A}^{x_B}\int_{y_A}^{f(x)} F(x,y)\,dxdy + \int_{x_B}^{x_C}\int_{y_A}^{g(x)} F(x,y)\,dxdy \tag{4.24}$$

için integral sınırına farklı fonksiyonlar geldiğinden dolayı, ele alınan bölge, B noktasından önce N adet, B noktasından sonra M adet olmak üzere toplam N+M tane dikdörtgen alt bölgeye ayrıklaştırılır (Şekil 4.4.b) [23]



(a) (b)

Şekil 4.4 Seçilen üçgen sonlu elemanın

a) Geometrisi, b) Sayısal integral bölgeleri.

Şekil 4.4.b'de

$$2\Delta x = x_{i+1} - x_i,\ y_i = f(x_i + \Delta x)\ \text{veya}\ y_i = g(x_i + \Delta x) \tag{4.25}$$

dir. (4.25)'de

$$f(x) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{(x_B - x_A)y_A - (y_B - y_A)x_A}{x_B - x_A}$$

$$g(x) = y_M - \sqrt{a^2 - (x - x_M)^2} \tag{4.26}$$

dir. (4.26)'da (x_M, y_M), dairesel deliğin merkezinin koordinatları ve a, dairesel deliğin yarıçapıdır. (4.24) integrali, Şekil 4.4b'deki her dikdörtgen alt bölge üzerindeki integraller cinsinden

$$\iint_{\Omega_{(e)}} F(x,y)d\Omega_{(e)} \approx \int_{x_A}^{x_2}\int_{y_A}^{y_1} F(x,y)dxdy + \int_{x_2}^{x_3}\int_{y_A}^{y_2} F(x,y)dxdy + \ldots$$

$$+ \int_{x_{N+M-1}}^{x_{N+M}}\int_{y_A}^{y_{N+M-1}} F(x,y)dxdy + \int_{x_{N+M}}^{x_C}\int_{y_A}^{y_{N+M}} F(x,y)dxdy \tag{4.27}$$

olur. (3.21) yardımıyla (4.27) eşitliğinin sağında bulunan bütün integrallerin her biri ayrı ayrı sayısal olarak integre edilebilir. (3.21)'deki $n_1 = n_2 = 10$ alınarak, Gauss Karelemesi için en çok noktada integrasyon değeri belirlenmiştir ve bütün üçgen sonlu elemanlar üzerindeki integrallerde N+M=500 olarak alınmıştır.

(4.20) denklemine sınır koşulları ilave edilerek elde edilen indirgenmiş sistemin çözülmesiyle, her bir noddaki yer değiştirme değerleri belirlenir. Bu değerler yardımıyla, yapı içerisinde gerilmelerin belirlenmesi, Kısım 3.1.3'de verildiği gibi yapılacaktır.

Dairesel delik civarında analiz yapılırken, kutupsal koordinatlardaki değerlerin kullanımı daha uygun olduğundan, kutupsal koordinatlardaki gerilme bileşenleri belirlenecektir. $\mathbf{Ox_1x_2}$ kartezyen koordinat sistemi ile merkezi dairesel deliğin merkezi olarak seçilmiş $Or\theta$ kutupsal koordinat sistemi arasındaki dönüşüm;

$$\mathbf{x_1 = r\cos\theta\,;\ x_2 = r\sin\theta} \tag{4.28}$$

veya

$$\mathbf{r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,;\ \theta = \arctan\frac{x_2}{x_1}} \tag{4.29}$$

olur. İki koordinat sistemi birim vektörleri arasında,

$$\vec{i} = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$$

$$\vec{j} = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta \tag{4.30}$$

veya

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \tag{4.31}$$

ilişkileri mevcuttur. Yer değiştirme vektörünün her iki koordinat sistemindeki bileşenleri;

$$u = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta \tag{4.32}$$

dir. (4.32)'de, (4.28)-(4.31) göz önüne alınırsa, yer değiştirme vektörü bileşenleri için

$$\mathbf{u_1 = \cos\theta\,u_r - \sin\theta\,u_\theta}$$

$$\mathbf{u_2 = \sin\theta\,u_r + \cos\theta\,u_\theta} \tag{4.33}$$

veya

$$u_r = \cos\theta u_1 + \sin\theta u_2$$

$$u_\theta = -\sin\theta u_1 + \cos\theta u_2 \tag{4.34}$$

olur. (4.33) ((4.34)) bağıntıları, kartezyen koordinatlarda (kutupsal koordinatlarda) yer değiştirme vektörü bileşenlerinin, kutupsal (kartezyen) koordinatlardaki bileşenleri ile ifadesini göstermektedir. Kutupsal koordinatlarda şekil değiştirme tansörü bileşenleri;

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) \tag{4.35}$$

ve gerilme tansörü bileşenleri;

$$\sigma_{rr} = \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$

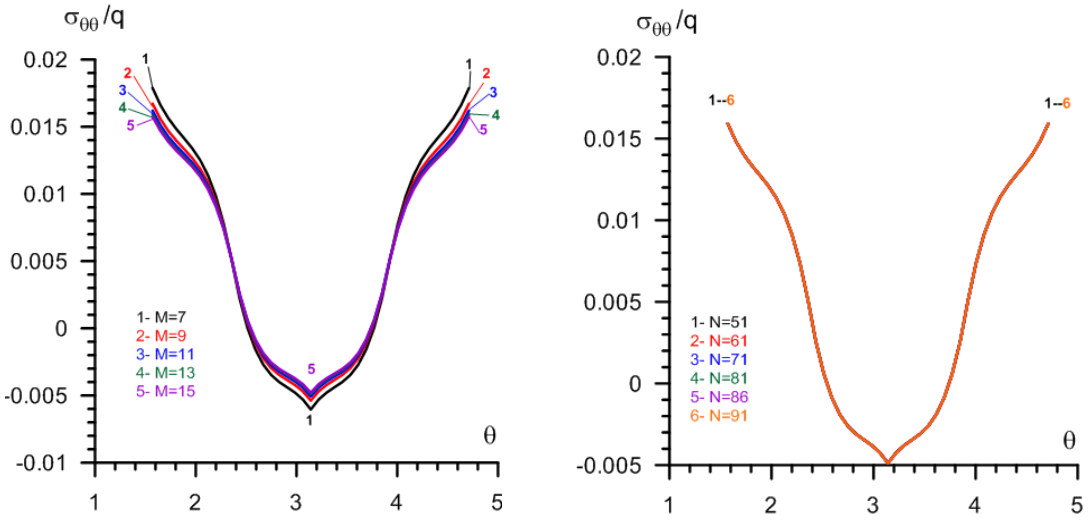
$$\tau_{r\theta} = \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin\theta\cos\theta \tag{4.36}$$

şeklinde elde edilir [24],[77].

4.1.4 Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, yapısında dairesel delik bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış sonlu şerit-plağın, kenarlarından Ox_1 eksenine paralel olacak şekilde düzgün yayılı eksenel yük ile çekilmesi durumunda, delik civarında oluşan yer değiştirme ve gerilme birikimlerine ait sayısal sonuçlar verilecektir. Ele alınan problem, izotrop malzemeden yapılmış sonsuz plaklar [19] ve sonlu ortamda dairesel formda delik içeren anizotrop şerit-plaklar [23] için daha önceleri incelenmiştir. Bu çalışma, ele alınan dairesel delik içeren şerit-levha malzemesinin fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme seçilmesi ve sonlu şerit-plak olması açılarından yenilikler içermektedir.

Ele alınan şerit-plak malzemesi için Poisson oranı sabit alınmış, ancak Young Modülü'nün x_1 (Problem 5) veya x_2 (Problem 6) koordinatlarından bağımlı tek serbestlik derecesine sahip fonksiyon olarak seçildiği, 2 farklı problem incelenmiştir. Young Modülü'nün maksimum değerlerini, $\mathbf{x}_1 = \ell/2$ kesitinde veya $\mathbf{x}_2 = \mathbf{h}$ kesitinde aldığı kabul edilecektir. Belirtelim ki, ele alınan problemin çözümü yapı elemanının geometrisi, sınır koşulları ve yüklemesinin $\mathbf{x}_1/\ell = 1/2$'ye göre simetrik olması özelliğinden yararlanılarak, çözüm bölgesinin ½ lik kısmında yapılmıştır. Çözüm bölgesinin uygun sonlu eleman ağı ayrıklaştırması $\sigma_{\theta\theta}/q$ için Şekil 4.5'de hesaplanmıştır. Bu şekillerdeki N ve M parametreleri sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 eksenleri doğrultudundaki dikdörtgen sonlu eleman sayılarını göstermektedir. Buna göre bu bölge (Şekil 4.1) Ox_1 doğrultusunda N=80 ve Ox_2 doğrultusunda M=12 dikdörtgen sonlu eleman, dairesel delik (1/2 lik kısmı) civarında 4 eğrisel kenara sahip üçgen sonlu eleman olmak üzere toplamda, 4 üçgen ve 958 dikdörtgen sonlu eleman, 4027 düğüm noktası (nod) ve 8004 serbestlik derecesi içermektedir. Çözüm için kullanılan sonlu eleman ayrıklaştırması, pek çok sonlu eleman ağı içerisinden, bulunan sayısal sonuçların literatürdeki uygun sayısal sonuçlara en iyi yaklaşımın sağlandığı sonlu eleman ağı belirlenerek seçilmiştir. Bunu farklı satır ve sütun değerleri için analizini sayısal olarak yaptığımız Şekil 4.5 'de de görmekteyiz.



(a1) (b1)

Şekil 4.5 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ için dairesel delik civarında $q/E_0 = 0.005$, $E_1/E_0 = 5$ $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$ durumunda
(a1) M parametresi değişiminin etkisi
(b1) N parametresi değişiminin etkisi.

Dairesel formda delik içeren düzlemsel izotrop plağın, karşılıklı kenarlarından sonsuzda düzgün yayılı çekme kuvveti etkisinde yapısında oluşan gerilme değerleri, dairesel deliğe yaklaştıkça artar ve en büyük değerini dairesel deliğin sınırında alır [19]. Bu durum için dairesel deliğin sınırında kutupsal koordinatlardaki gerilme fonksiyonlarının ifadeleri;

$$\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \mathbf{q}(1 - 2\cos 2\theta) \qquad (4.37)$$

olur. (4.37)'de q sonsuzda uygulanan düzgün yayılı çekme kuvvetinin yoğunluğudur. Düzlemde dairesel delik problemine ait (4.37) de verilen sayısal sonuçlara yaklaşmak amacıyla, bu tez kapsamında ele alınan şerit-plak için dairesel deliğin yarıçapı küçültülerek ve yapı elemanının malzemesi izotrop alındığında, elde edilen $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilmesine ait sayısal sonuçlar, $h/\ell = 0.15, h_L/\ell = h_L/\ell$, $a = r$ değerleri için Tablo 4.1'de verilmiştir [19],[46].

Tablo 4.1. Dairesel delik içeren izotrop şerit-plakta farklı delik boyutları için $\sigma_{\theta\theta}/\mathbf{q}$'nun bazı noktalardaki değerleri.

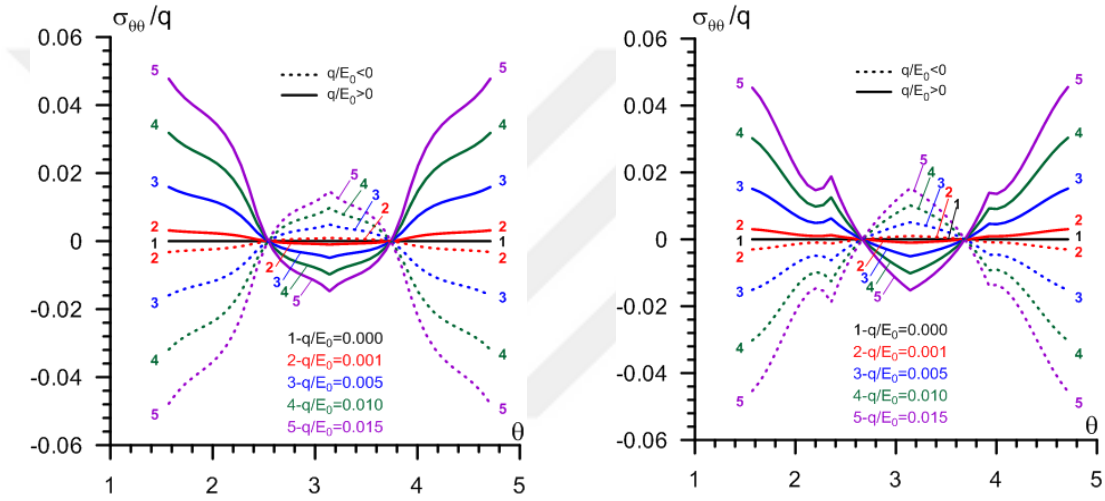
$\ell_s/\mathbf{a}$	$\mathbf{a}/\ell$	θ		
		$3\pi/4$	$\pi/2$	π
17.41	0.0140	1.0388	3.2156	–0.9513
18.75	0.0130	1.0319	3.1751	–0.9382
19.50	0.0125	1.0284	3.1538	–0.9317
20.31	0.0120	1.0247	3.1316	–0.9252
22.15	0.0110	1.0173	3.0339	–0.9122
24.37	0.0100	1.0099	3.0303	–0.8987
25.39	0.0096	1.0071	3.0068	–0.8931
∞	–	1.0	3.0	–1

Tablo 4.1'de görüldüğü gibi, elde edilen sayısal değerlerin dairesel deliğin yarıçapı azaldıkça, sonsuz ortamdaki ($\ell_s/a \to \infty$) uygun değerlere yaklaştığı görülmektedir. Dolayısıyla bu test problemi çerçevesinde, ele alınan problemlerin sayısal çözümleri için tarafımızdan oluşturulan algoritma ve programlara güven teyit edilmiştir.

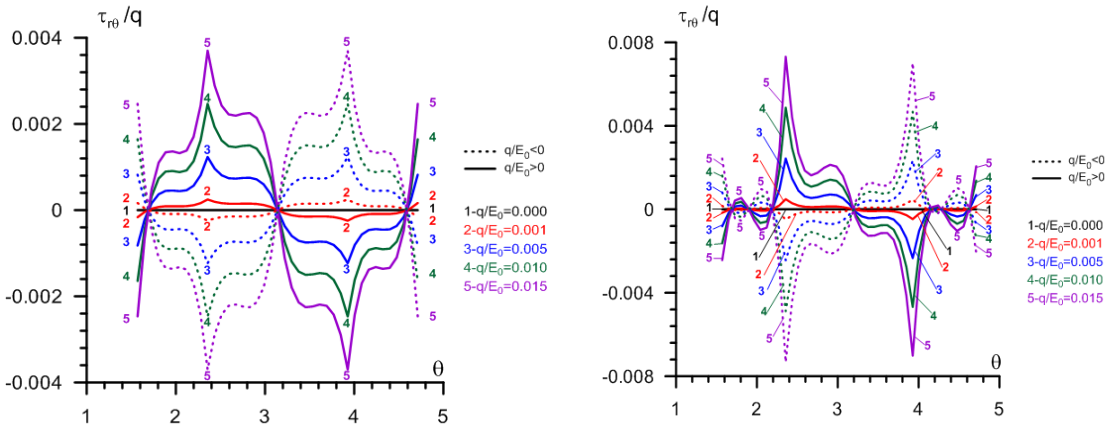
Bu kısımda verilen grafiklerde, kutupsal koordinatlardaki boyutsuz gerilme ve yer değiştirme değerleri verilmiştir. Belirtelim ki grafiklerde verilen u_θ ve u_r yer değiştirme değerleri boyutsuz ifadeler olup bu ifadeler; $\hat{u}_\theta$ ve $\hat{u}_r$ aynı yer değiştirmelerin boyutlu ifadeleri olmak üzere; $u_\theta = (\hat{u}_\theta / \ell)E_1/q\ell$, $u_r = (\hat{u}_r / \ell)E_1/q\ell$ şeklindedir. Belirtelim ki tüm şekillerde (a)'da verilen grafikler Problem 5'e ait, (b)'de verilen grafikler Problem 6'ya ait grafikleri içermektedir. Tüm grafikler dairesel deliğin $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ sınırında çizilmiştir.

Şekil 4.6, Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'de FD malzemeden $\left(E_1 / E_0 = 5\right)$ yapılmış dairesel formda delik içeren şerit-plakta, karşılıklı iki kenarından eksenel doğrultuda etki eden basınç $\left(q/E_0 < 0\right)$ veya çekme kuvveti $\left(q/E_0 > 0\right)$ etkisinde delik civarında oluşan gerilme yığılmaları sırasıyla, $\sigma_{\theta\theta}/q$, $\tau_{r\theta}/q$ ve σ_{rr}/q için n=2 durumunda (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için verilmiştir. Her iki problem (Problem 5 ve

Problem 6) için $|q/E_0|$ değerinin artması, delik civarında tüm gerilme değerlerini mutlak değerce arttırmaktadır. Aynı $|q/E_0|$ değerlerinde, $q/E_0 > 0$ için elde edilen gerilme değerleri ile $q/E_0 < 0$ için elde edilen gerilme değerleri, gerilmenin sıfır olduğu yatay eksene göre simetriktirler. Tüm grafiklerde uygulanan dış kuvvetin yoğunluğunun değişimi, delik civarında gerilmelerin ekstremal aldığı noktaları değiştirmemekte sadece şiddetini değiştirmektedir.



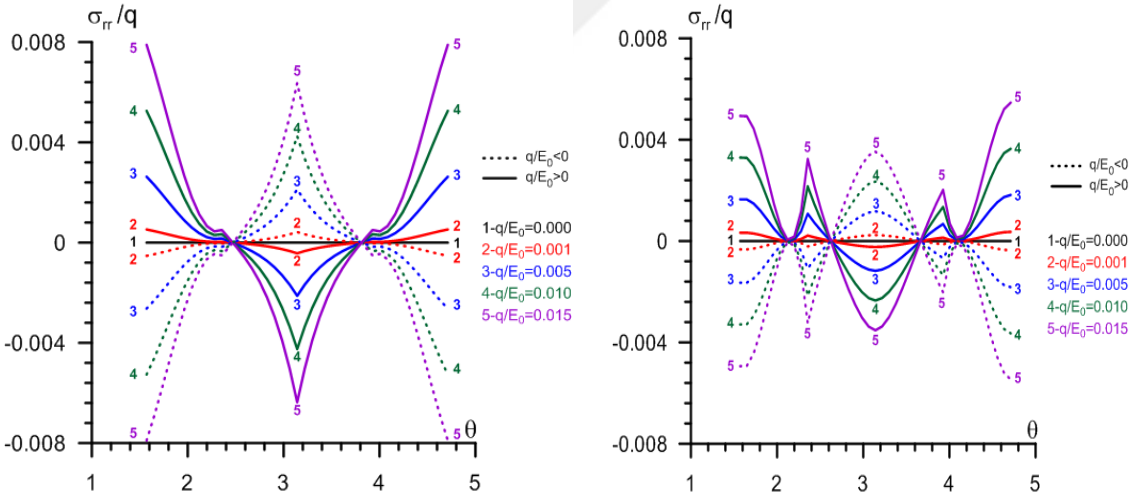
Şekil 4.6 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $h/\ell = 0.15$ ve $E_1/E_0 = 5$ durumlarında $|q/E_0|$ değişimin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.7 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında $|q/E_0|$ değişimin etkisi.

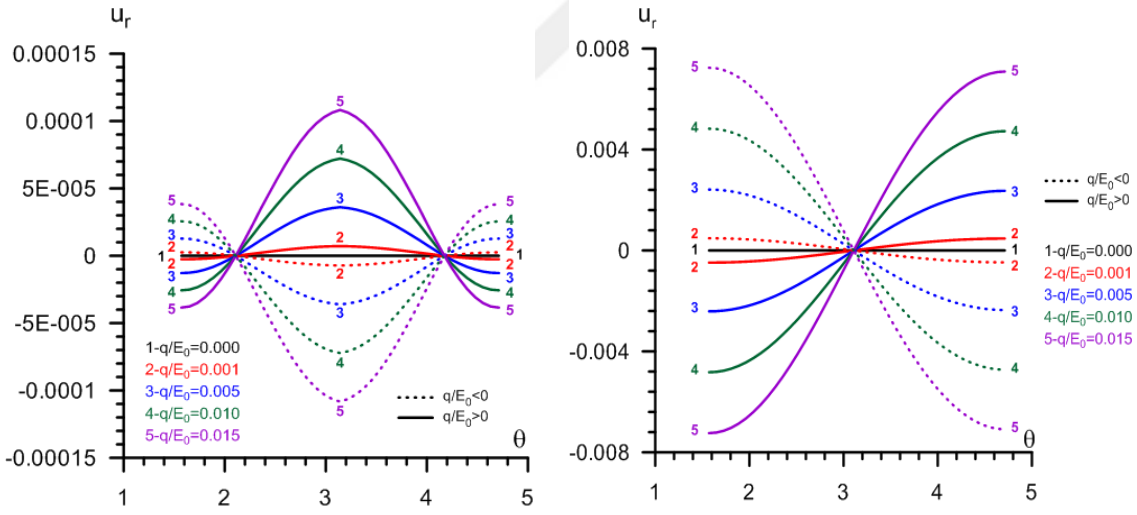


(a) (b)

Şekil 4.8 σ_{rr}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında $|q/E_0|$ değişimin etkisi.

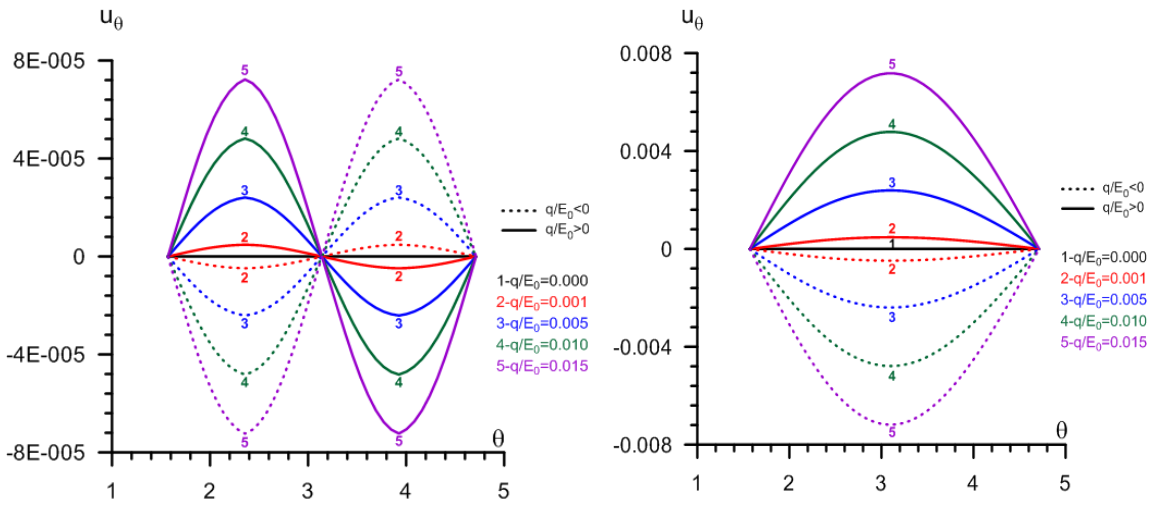
Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'da FD malzemeden $(E_1/E_0=5)$ yapılmış dairesel formda delik içeren şerit-plak için kenarlarından etki eden eksenel dış kuvvetin nitelik ve nicelik değişiminin (basınç $(q/E_0<0)$ veya çekme kuvveti $(q/E_0>0)$), n=2 durumunda (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için delik civarında oluşan u_r ve u_θ yer değiştirme değerlerine etkisi verilmiştir. Her iki problem (Problem 5 ve Problem 6) için; $|q/E_0|$ değerinin artması her iki yer değiştirme değerlerini mutlak değerce arttırmaktadır. Aynı $|q/E_0|$ değerlerinde $q/E_0>0$ için elde edilen yer değiştirme değerleri ile $q/E_0<0$ için elde edilen yer değiştirme değerleri, yer değiştirmenin sıfır olduğu eksene göre simetriktirler. Tüm grafiklerde $|q/E_0|$ parametresi değişimi, delik civarında yer değiştirmelerin ekstremal noktalarının yerini değiştirmemekte, sadece şiddetini değiştirmektedir. u_r yer değiştirmesi maksimum değerini, Problem 5 için $\theta=\pi$'de ve Problem 6 için $\theta=\mp\frac{\pi}{2}$ 'de almaktadır. u_θ yer değiştirmesi maksimum değerini, Problem 5 için $\theta=\mp\frac{3\pi}{4}$'de ve Problem 6 için $\theta=\pi$ 'de almaktadır.



(a) (b)

Şekil 4.9 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında $|q/E_0|$ değişimin etkisi.

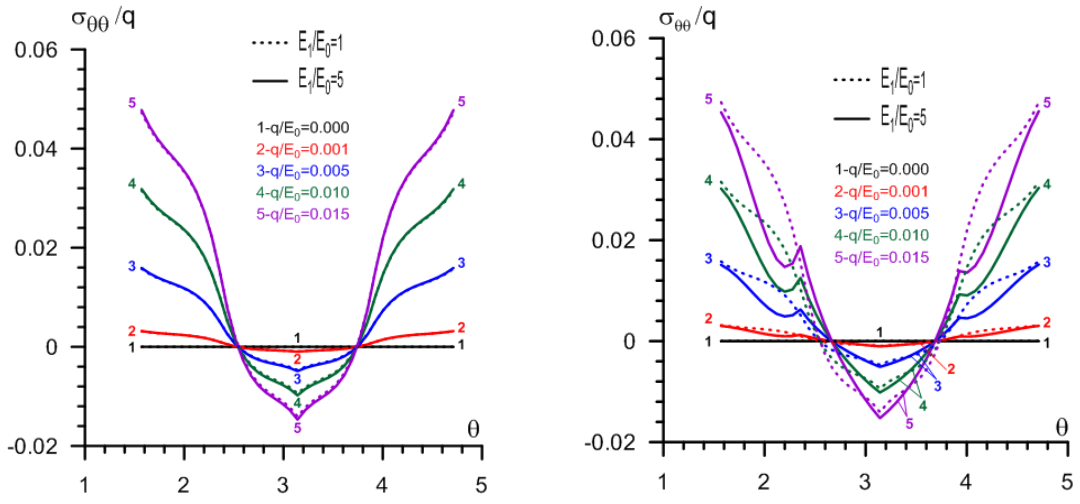


(a) (b)

Şekil 4.10 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında $|q/E_0|$ değişimin etkisi.

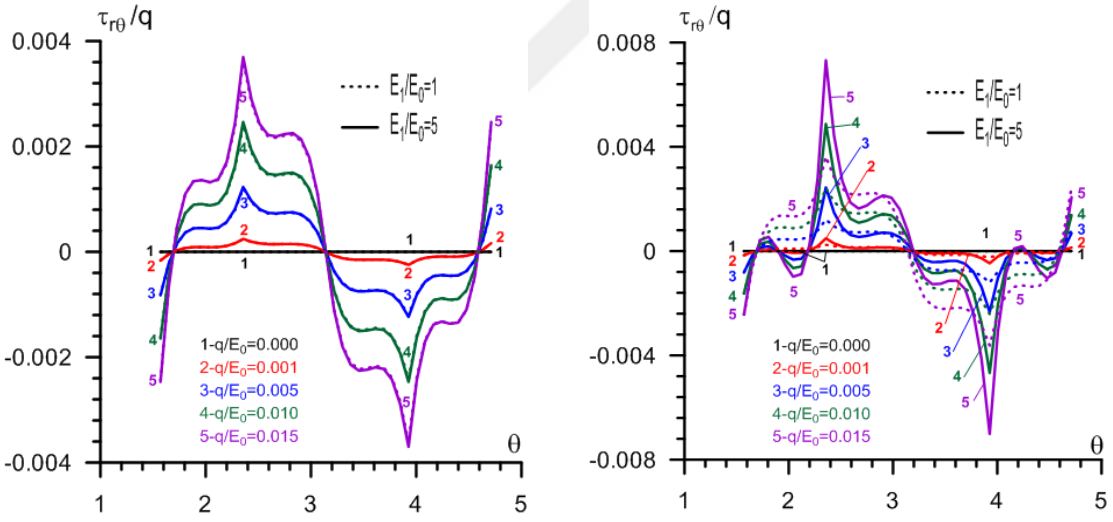
Şekil 4.11, Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'te sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}/q$, $\tau_{r\theta}/q$ ve σ_{rr}/q kutupsal gerilme değerleri, q/E_0 parametresi değişiminin gerilme yığılmaları üzerindeki etkisi, n=2 durumunda; (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için $E_1/E_0=5$ (FD malzeme) ve $E_1/E_0=1$ (homojen izotrop) için verilmiştir. Her iki problem için de q/E_0 arttıkça tüm gerilme değerleri mutlak değerce artmakla birlikte, şerit-plak malzemesinin homojen-izotrop veya FD malzeme alınmasının, Problem 5 için kutupsal gerilme değerlerini hemen hemen hiç değiştirmediği ancak, Problem 6 için gerilme değerlerinde değişime neden olduğu tespit edilmiştir. Problem 6 için q/E_0 parametre değerleri arttıkça, $E_1/E_0=1$ ile $E_1/E_0=5$ durumları için elde edilen kutupsal gerilme değerleri arasındaki fark artmaktadır. Problem 6'da homojen izotrop şerit-plak durumda elde edilen $\sigma_{\theta\theta}/q$ ve σ_{rr}/q gerilme değerleri ile FD şerit-plak durumunda elde edilen gerilme değerlerinden mutlak değerce daha büyük olmakla birlikte, $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi için tersi durum, yani homojen izotrop şerit-plak durumda elde edilen teğet gerilmeler mutlak değerce daha küçüktür.



(a) (b)

Şekil 4.11 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

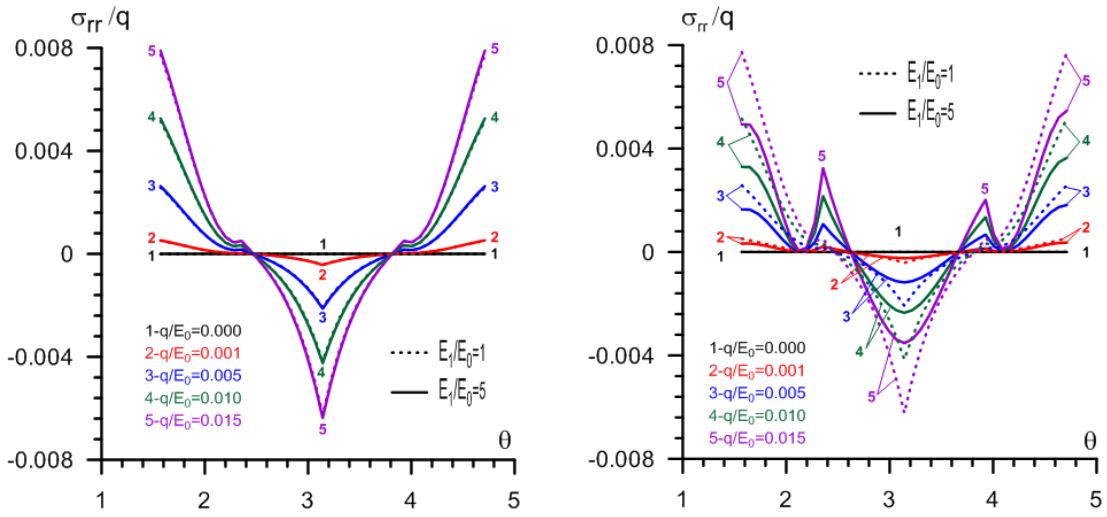
(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.12 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi.



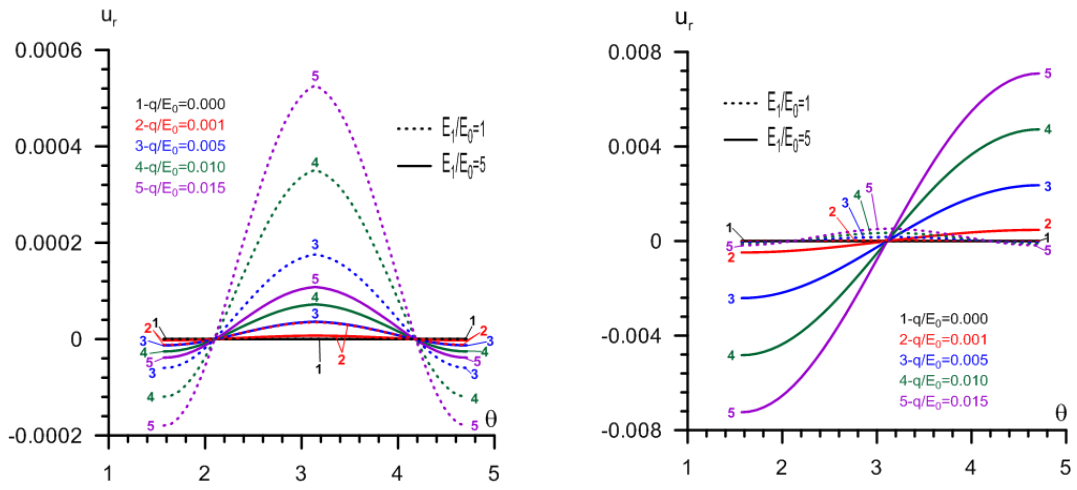
(a) (b)

Şekil 4.13 σ_{rr}/q gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında

$h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi.

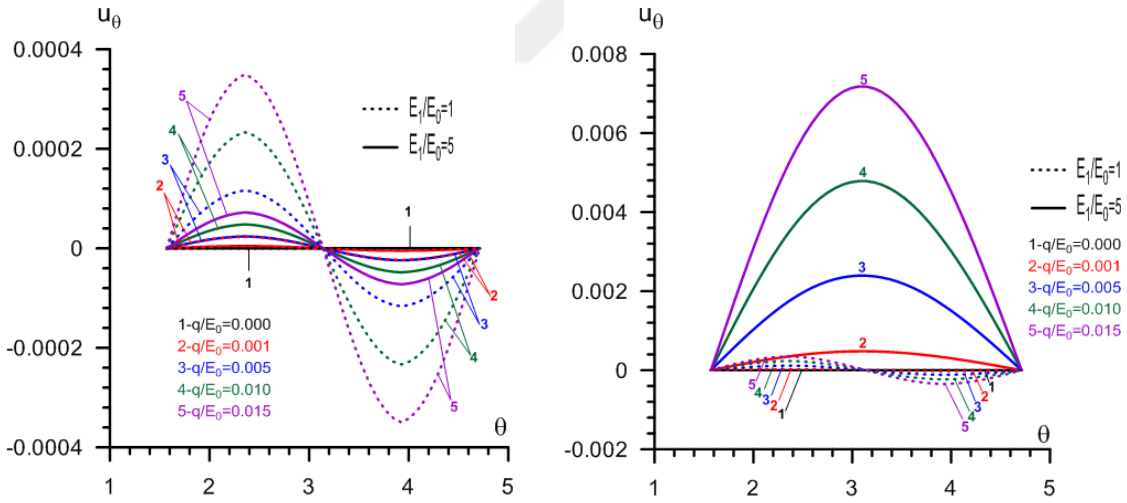
Şekil 4.14 ve Şekil 4.15'te q/E_0 parametresi değişimlerinin, dairesel delik civarında, sırasıyla oluşan u_r ve u_θ kutupsal yer değiştirme değerleri (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için $E_1/E_0=5$ (FD malzeme) ve $E_1/E_0=1$ (homojen izotrop) ile n=2 durumlarında etkisi verilmiştir. Her iki problem için de q/E_0 arttıkça tüm yer değiştirme değerleri mutlak değerce artmakla birlikte, aynı zamanda, bu parametrenin aynı değeri için $E_1/E_0=1$ ile $E_1/E_0=5$ durumlarında elde edilen yer değiştirme değerleri arasındaki fark, q/E_0 değeri arttıkça artmaktadır. Problem 5 (Problem 6) için $E_1/E_0=1$ ($E_1/E_0=5$) durumunda elde edilen kutupsal yer değiştirme değerleri, $E_1/E_0=5$ ($E_1/E_0=1$) durumunda elde edilen kutupsal yer değiştirme değerlerine göre mutlak değerce daha fazladır.



(a) (b)

Şekil 4.14 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi.



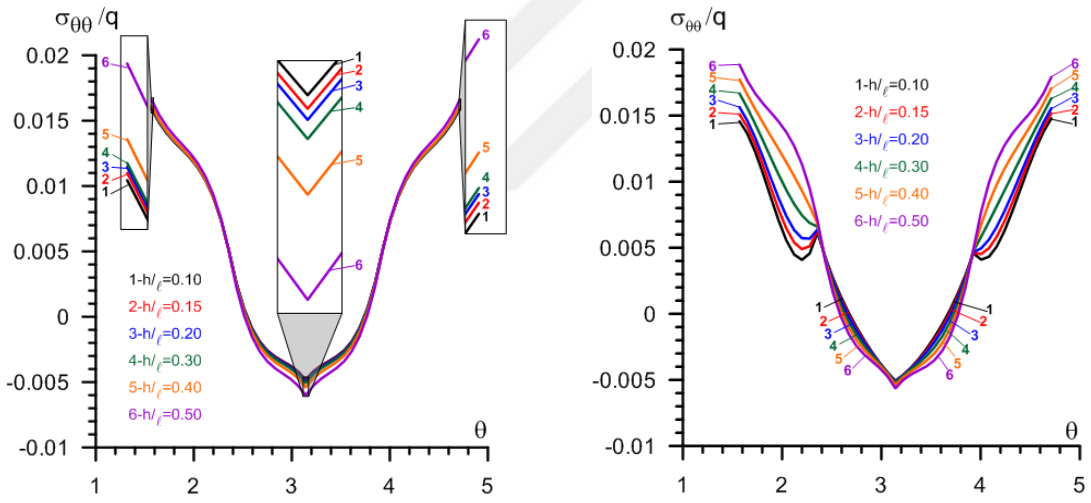
(a) (b)

Şekil 4.15 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ için q/E_0 değişiminin etkisi.

Şekil 4.16, Şekil 4.17 ve Şekil 4.18'de sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}/q$, $\tau_{r\theta}/q$ ve σ_{rr}/q kutupsal gerilme grafikleri, $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$, $q/E_0 = 0.005$ ve n=2 durumunda (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için h/ℓ parametre değişimi için verilmiştir. Dairesel deliğin boyutları değişmemesine karşın, h/ℓ parametresi arttıkça "deliğin alanı/plak alanı" oranı azalmaktadır.

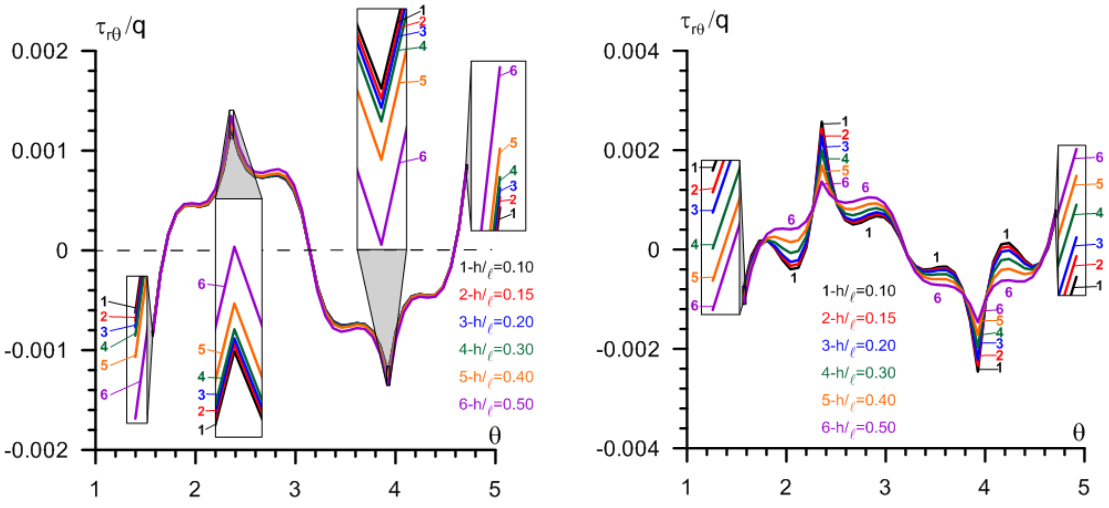
Ele alınan her iki problem için ((a) Problem 5 ve (b) Problem 6), h/ℓ oranı arttıkça dairesel delik civarına oluşan $\sigma_{\theta\theta}/q$ ve σ_{rr}/q gerilme değerleri mutlak değerce artmaktadır. $\tau_{r\theta}/q$ gerilme değerleri Problem 5 için h/ℓ oranı arttıkça artmakta, Problem 6 için bazı aralıklarda artarken bazı aralıklarda azalmaktadır.



(a) (b)

Şekil 4.16 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$

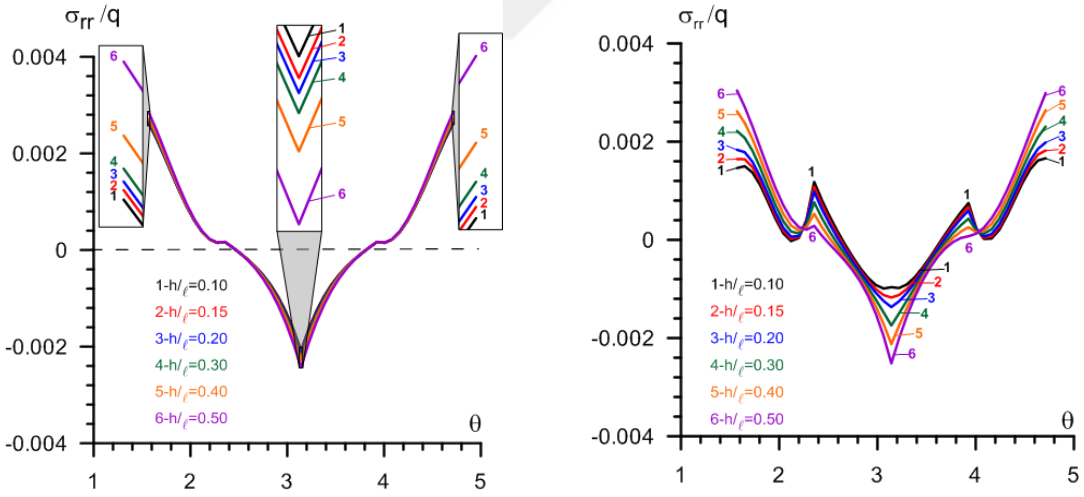
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.17 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi.

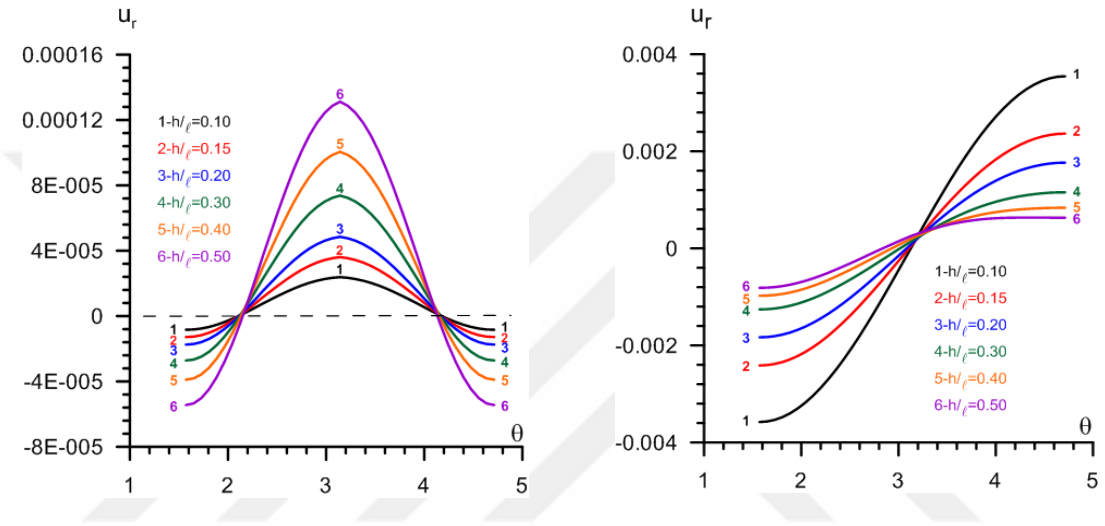


(a) (b)

Şekil 4.18 σ_{rr}/q gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi.

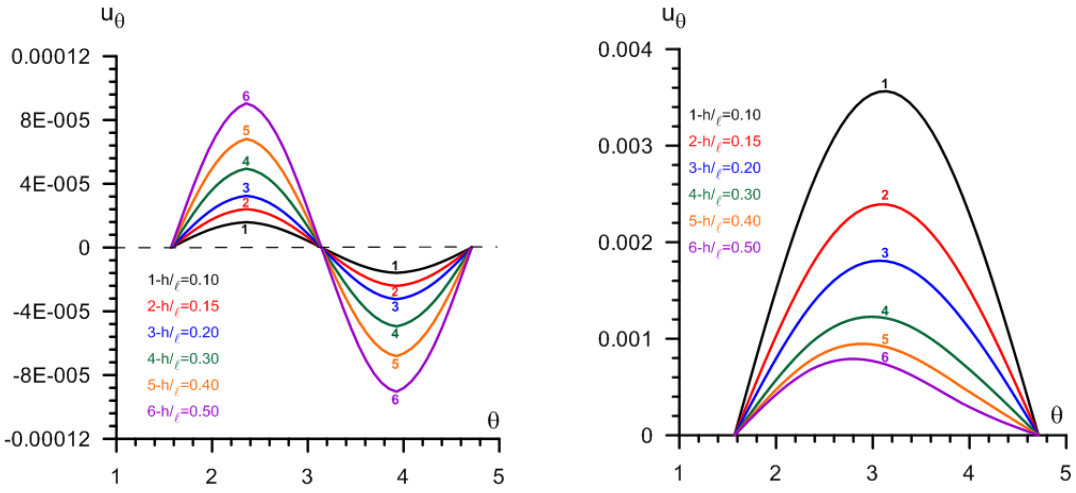
Şekil 4.19 ve Şekil 4.20'de dairesel delik civarında sırasıyla, u_r ve u_θ kutupsal yer değiştirme değerlerine ait grafikler, $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$ ve $q/E_0 = 0.005$ ile n=2 durumunda (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için h/ℓ parametre değişimi için verilmiştir. Kutupsal yer değiştirme değerleri, Problem 5 (Problem 6) için h/ℓ oranı arttıkça mutlak değerce artmakta (azalmakta) dır.



(a) (b)

Şekil 4.19 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$

(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında h/ℓ değişimin etkisi.



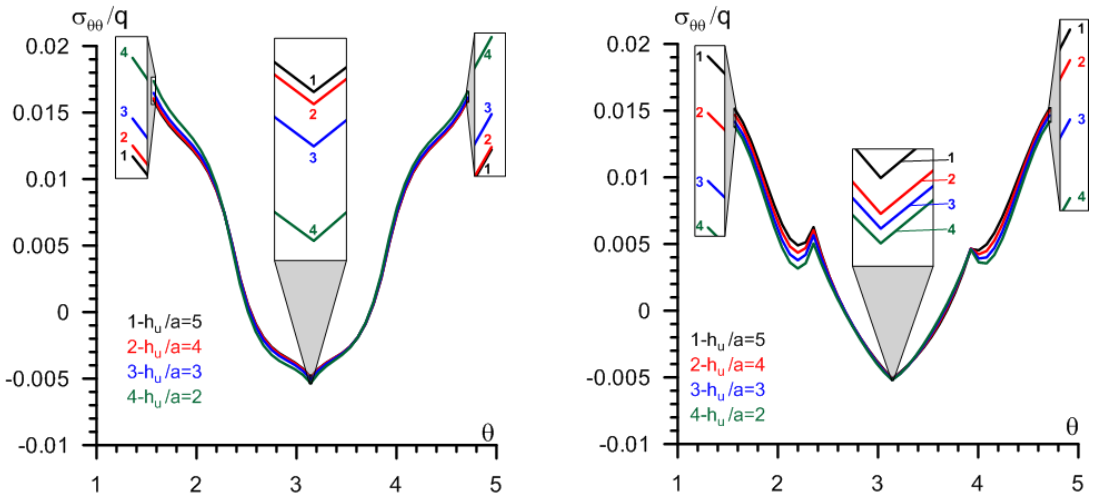
(a) (b)

Şekil 4.20 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h/ℓ değişimin etkisi.

Şekil 4.21, Şekil 4.22 ve Şekil 4.23'te $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$, $q/E_0=0.005$ ve n=2 malzeme parametre değerlerinde, yapıdaki dairesel deliğin mevcut konumuna paralel kalacak şekilde, bütünüyle plağın üst yüzeyine yaklaştırılmasının (h_u/a değerinin küçülmesi), sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}/q$, $\tau_{r\theta}/q$ ve σ_{rr}/q kutupsal gerilme değerlerine etkisi incelenmiştir.

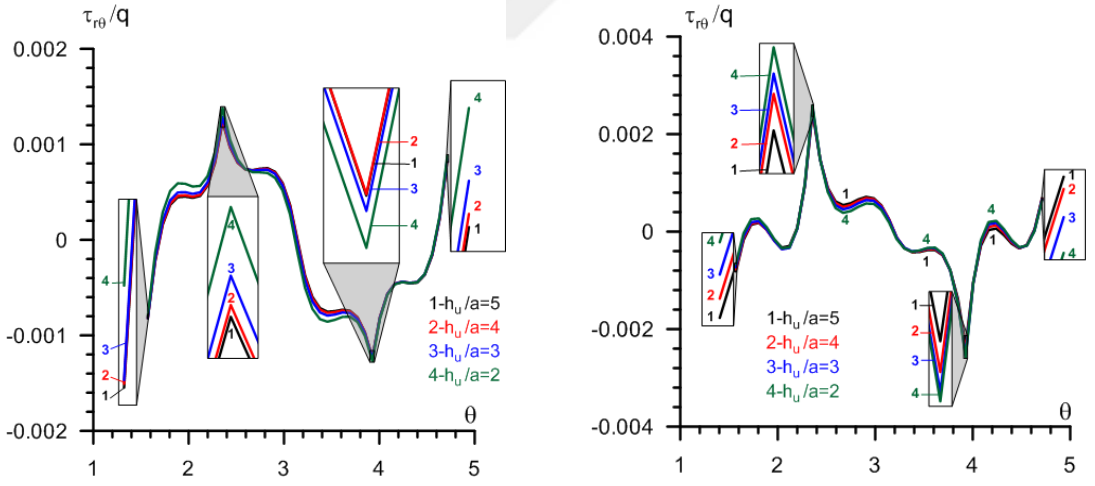
Problem 5 için tüm kutupsal gerilme değerleri h_u/a parametre değeri azaldıkça mutlak değerce artmaktadır. Problem 6 için σ_{rr}/q gerilme değeri $h_u/$ parametre değeri azaldıkça mutlak değerce azalmakta; fakat $\sigma_{\theta\theta}/q$ ($\tau_{r\theta}/q$) gerilme değeri h_u/a parametre değeri azaldıkça azalmakta (ilk kısımda (ilk çeyrekte) artarken yarıdan sonra (ikinci çeyrekte) azalmaktadır). Her iki problem için de h_u/a parametre değişiminin, dairesel delik civarında oluşan gerilme yığılmasına etkisi azdır.



(a) (b)

Şekil 4.21 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

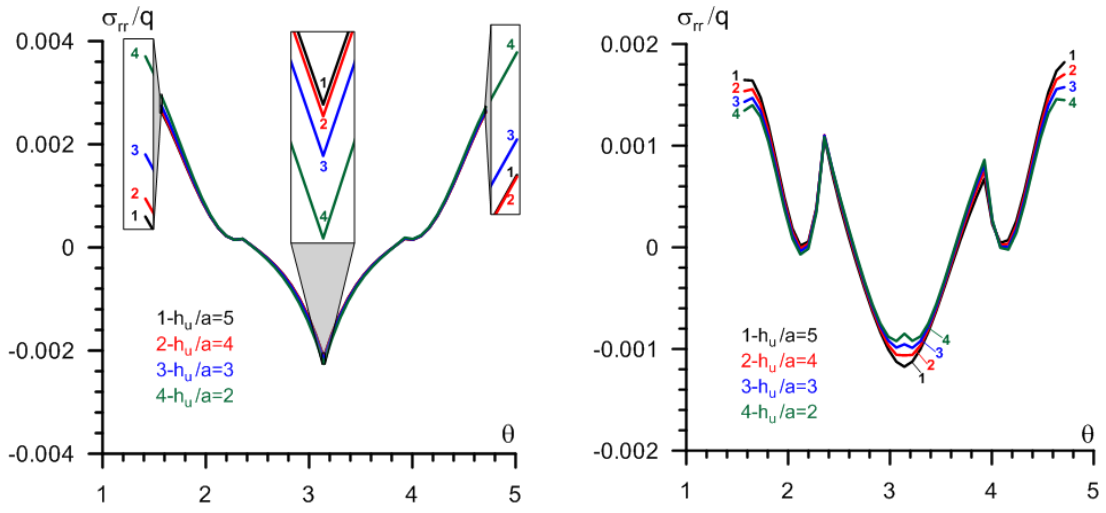
(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.22 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.

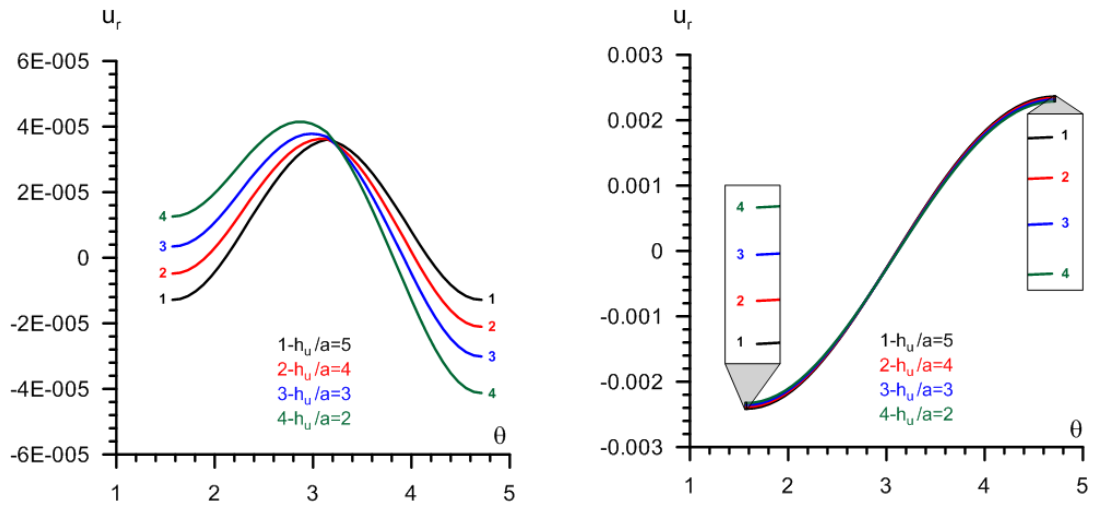


(a) (b)

Şekil 4.23 σ_{rr}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.

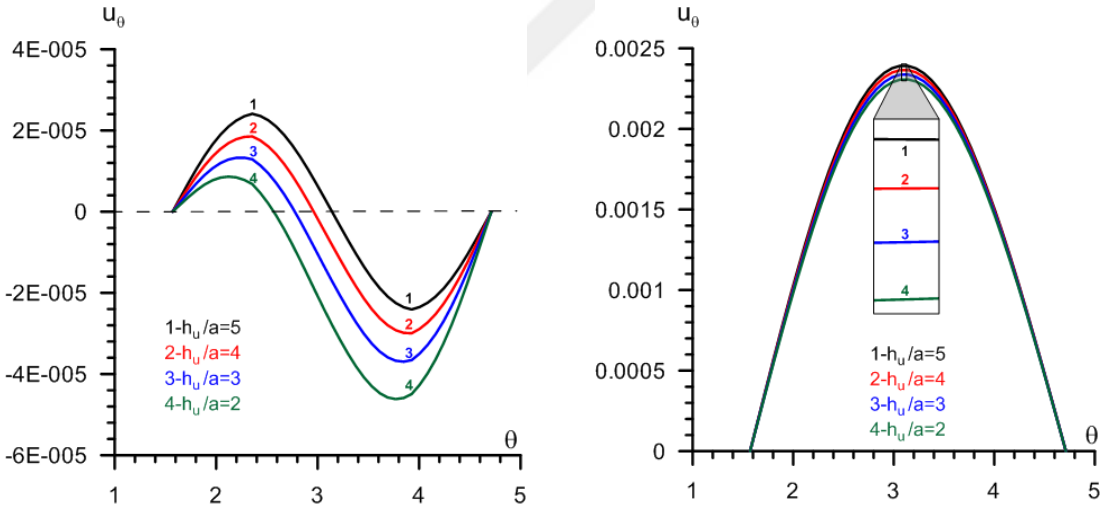
Şekil 4.24 ve Şekil 4.25'te $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$, $q/E_0=0.005$ ve n=2 parametre değerlerinde, yapıdaki dairesel deliğin konumunun plağın üst yüzeyine doğru yaklaştırılmasının (h_u/a değerinin küçülmesi), daiserel delik civarında sırasıyla u_r ve u_θ kutupsal yer değiştirme değerlerine olan etkisi incelenmiştir. Her iki problem için h_u/a parametre değişimi kutupsal yer değiştirme değerlerinde küçük değişiklikler yapmaktadır.



(a) (b)

Şekil 4.24 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.

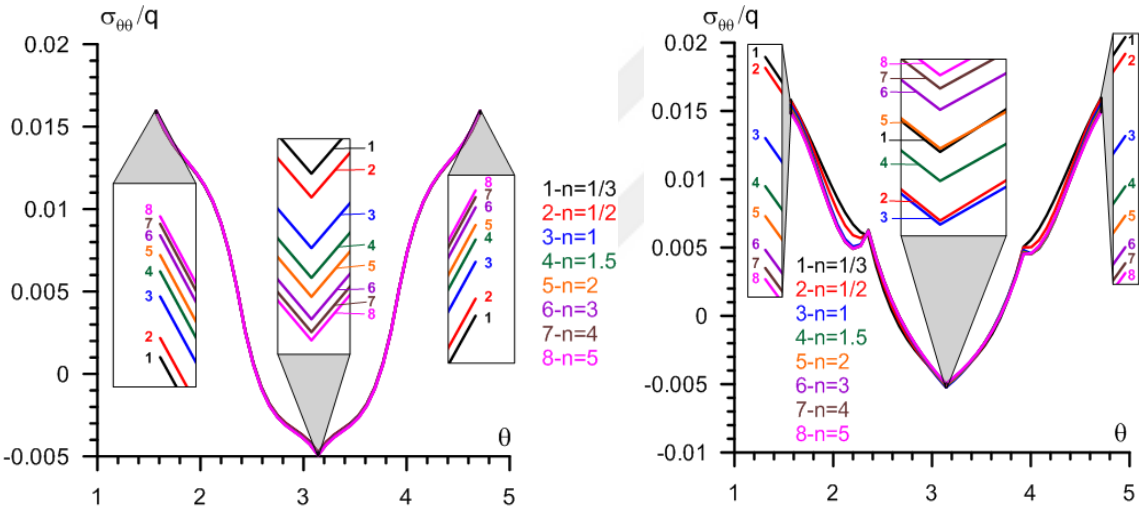


(a) (b)

Şekil 4.25 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.

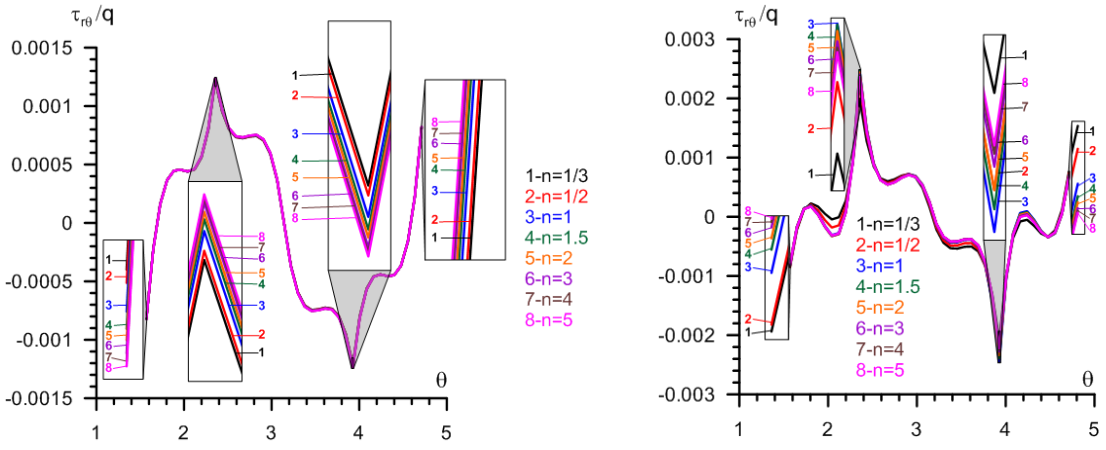
Şekil 4.26, Şekil 4.27 ve Şekil 4.28'de sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}/q$, $\tau_{r\theta}/q$ ve σ_{rr}/q kutupsal gerilme değerleri denklem (4.2) ve (4.3)'de verilen n parametresi değişimi için (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$, $h/\ell = 0.15$ ve $q/E_0 = 0.005$ parametre değerlerinde verilmiştir. Her iki problem için n parametre değişiminin kutupsal gerilmelere etkisi az olmakla beraber, n parametre değeri arttıkça, Problem 5'de tüm kutupsal gerilme değerleri mutlak değerce artmakta, Problem 6'da $\sigma_{\theta\theta}/q$ değerleri mutlak değerce azalırken, diğer iki kutupsal gerilme değerleri monoton olmayan bir değişim göstermektedir.



(a) (b)

Şekil 4.26 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^n$

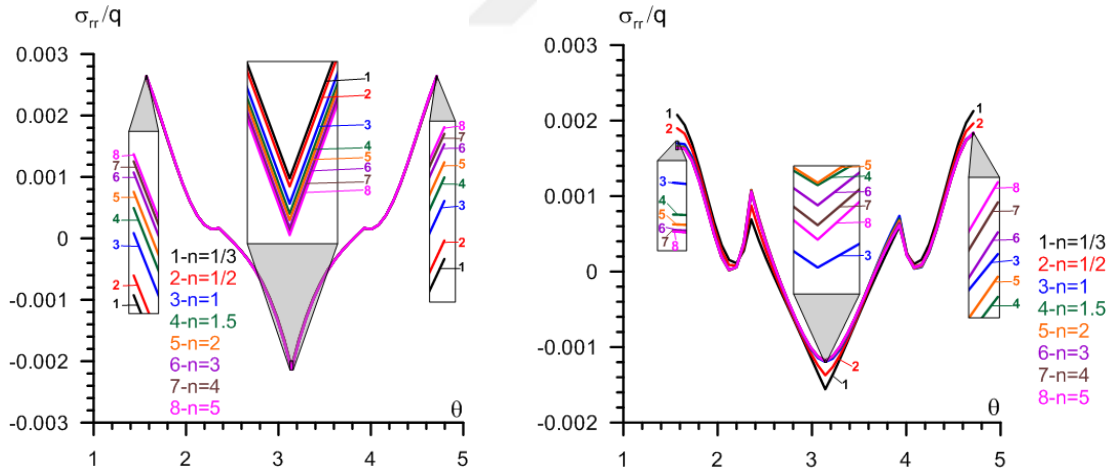
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^n$ için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$, $h/\ell = 0.15$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.27 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.

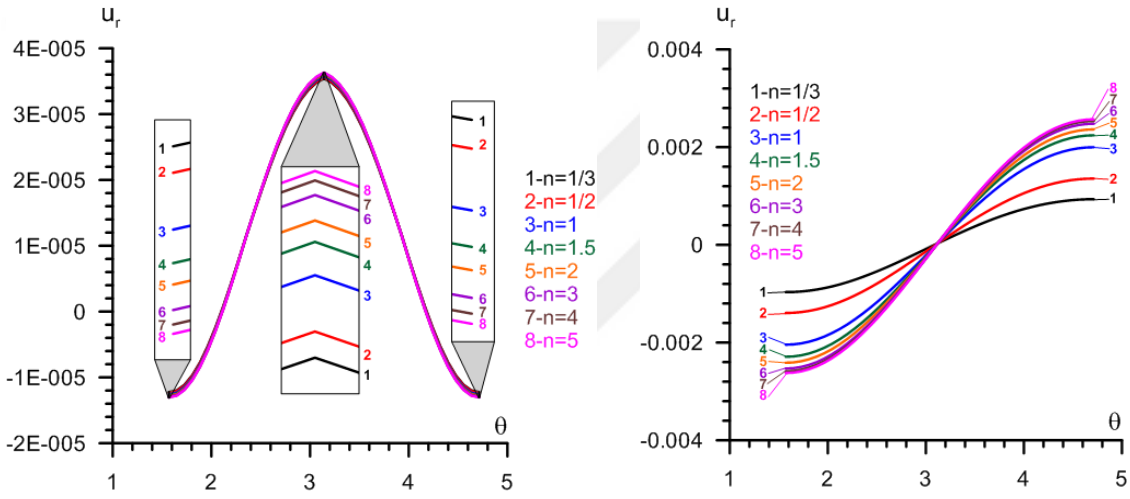


(a) (b)

Şekil 4.28 σ_{rr}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.

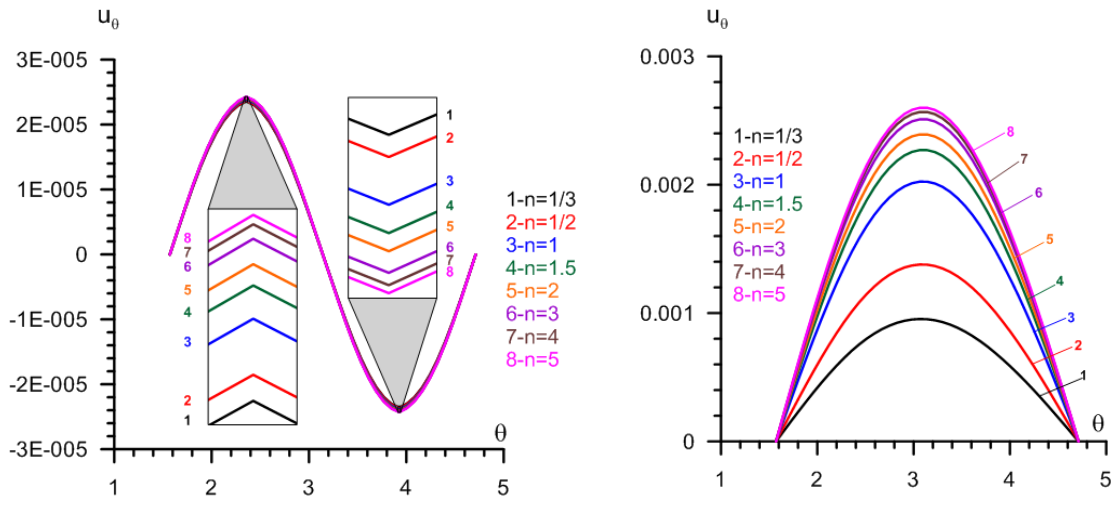
Şekil 4.29 ve Şekil 4.30'da sırasıyla u_r ve u_θ kutupsal yer değiştirme değerleri denklem (4.2) ve (4.3)'de verilen n parametresi değişiminin etkisi, (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$, $h/\ell = 0.15$ ve $q/E_0 = 0.005$ parametre değerlerinde verilmiştir. Her iki problem için n parametre değeri arttıkça dairesel delik civarında oluşan kutupsal yer değiştirme değerleri mutlak değerce artmaktadır. Bu artış Problem 6'da Problem 5'e göre çok daha fazla olmaktadır.



(a) (b)

Şekil 4.29 u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^n$

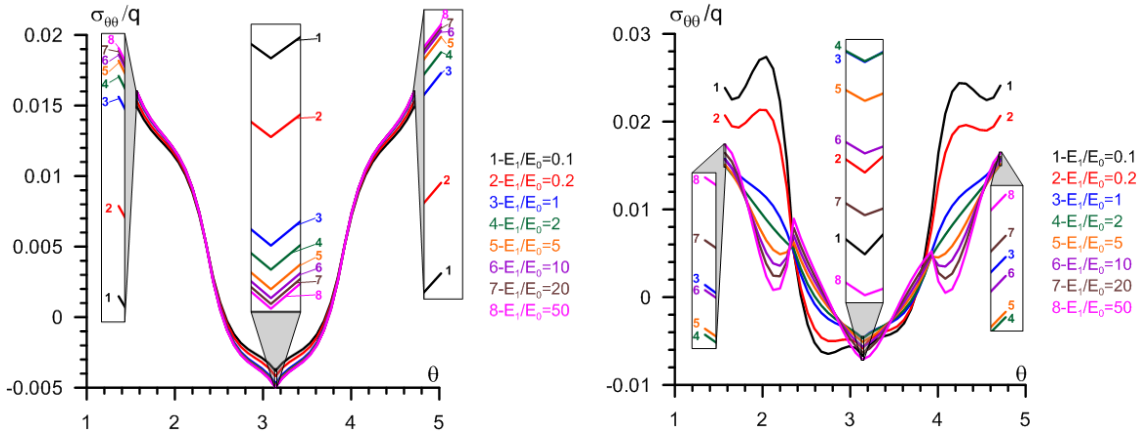
(b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^n$ için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$, $h/\ell = 0.15$ ve $q/E_0 = 0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

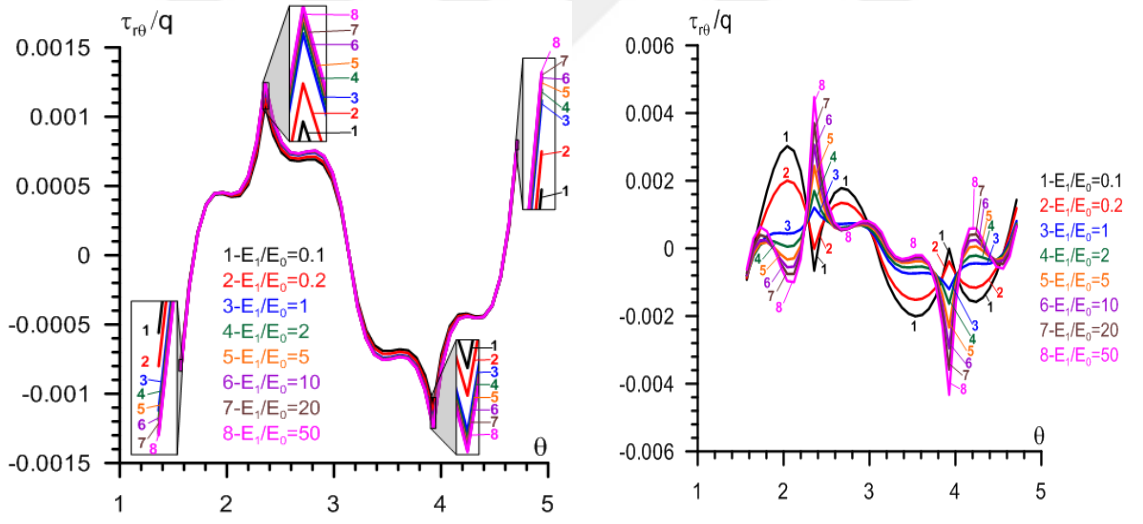
Şekil 4.30 u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında n değişiminin etkisi.

Şekil 4.31, Şekil 4.32 ve Şekil 4.33'te sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}/q$, $\tau_{r\theta}/q$ ve σ_{rr}/q kutupsal gerilme değerlerine E_1/E_0 parametresi değişiminin etkisi (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ ve n=2 parametre değerlerinde verilmiştir. Tüm kutupsal gerilme değerlerine, E_1/E_0 değişiminin etkisi Problem 6'da Problem 5'e göre daha fazladır. Problem 5 için E_1/E_0 değeri arttıkça gerilme değerleri monoton olarak mutlak değerce artmakla ancak, Problem 6'da E_1/E_0 parametresi değişimi gerilmeler üzerindeki etkisi monoton değildir.



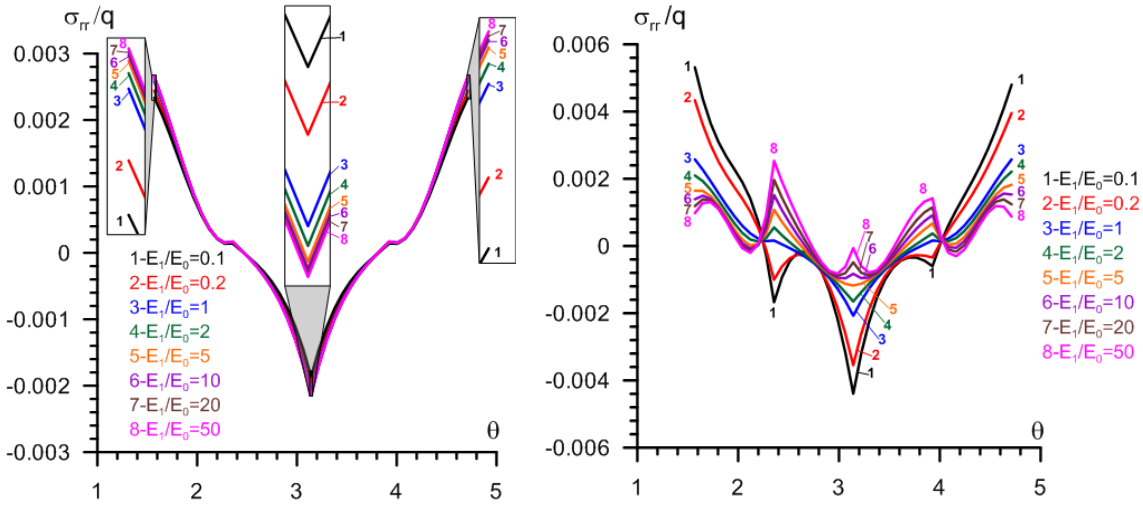
(a) (b)

Şekil 4.31 $\sigma_{\theta\theta}/q$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

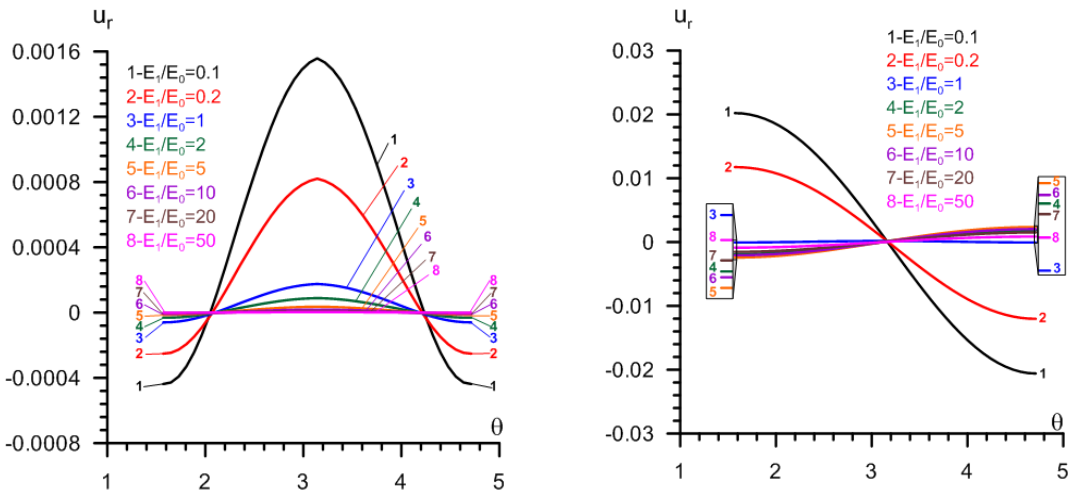
Şekil 4.32 $\tau_{r\theta}/q$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.33 σ_{rr}/q gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.

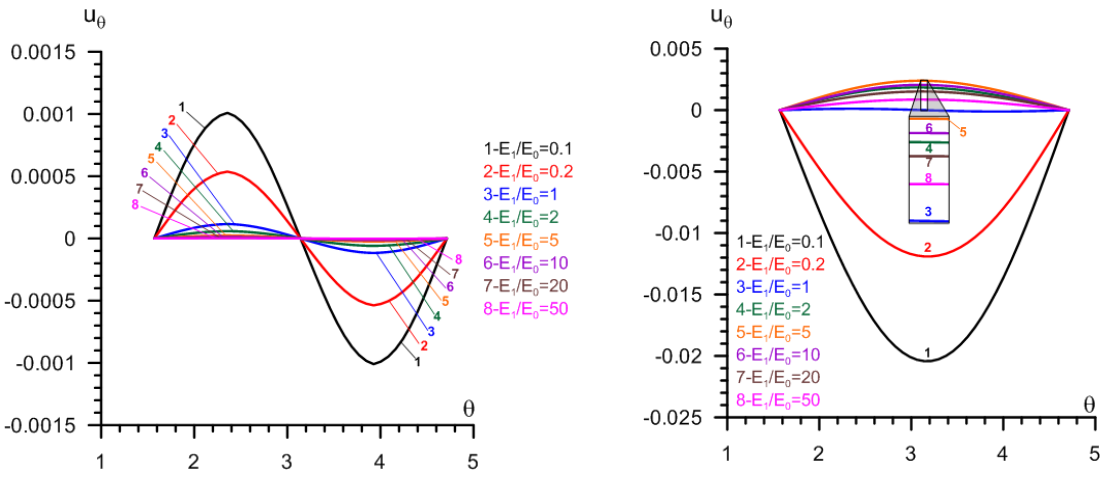
Şekil 4.34 ve Şekil 4.35'de sırasıyla u_r ve u_θ kutupsal yer değiştirme değerlerine E_1/E_0 parametresi değişiminin etkisi (a) Problem 5 ve (b) Problem 6 için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ ve n=2 parametre değerlerinde verilmiştir. Problem 5 için E_1/E_0 değeri arttıkça kutupsal yer değiştirme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde azalmaktadır. Problem 6'da E_1/E_0 parametresi değişimi kutupsal yer değiştirmeler üzerinde monoton olmayan değişimlere sebep olmaktadır. Bu etki $E_1/E_0<1$ durumu için $E_1/E_0>1$ durumuna göre daha fazladır.



(a) (b)

Şekil 4.34. u_r yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.35. u_θ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

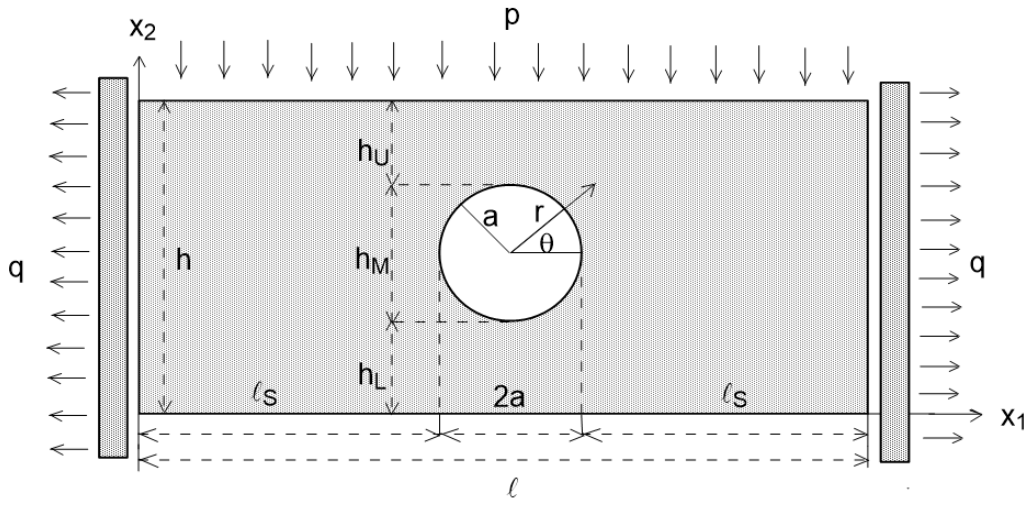
(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $q/E_0=0.005$ durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.

4.2 Öngerilmeli Dairesel Delik İçeren Şerit-Plağın Eğilmesi Problemi

Bu kısımda, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dairesel formda delik içeren ve bütün yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumunda, yapısında oluşan yer değiştirme ve gerilme değerlerinin belirlenmesine ait sınır değer problemleri ele alınacaktır. Ele alınan bu sınır değer problemlerine ait formülasyon, düzlem şekil değiştirme kabulü altında Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) çerçevesinde yapılarak, bu matematiksel modellerin çözümü sayısal olarak sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla belirlenecektir.

4.2.1 Matematiksel Modelleme

İçerisinde dairesel formda delik içeren dikdörtgen şerit-plağın karşılıklı iki kenarından düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde tutturulduğu (basit mesnet); yapısındaki öngerilmelerin esas yükleme yapılmadan önce, bu plağın karşılıklı iki kenarından etki eden ve birim yoğunluğu q olan düzgün yayılı eksenel kuvvet etkisinde oluştuğu kabul edilmektedir. Bu öngerilmeli FD plağın üst yüzeyine birim yoğunluğu p olan ilave düzgün yayılı basınç kuvvetinin etki ettiği kabul edilmektedir. Ele alınan sınır değer problemi LEÜBET çerçevesinde incelenmiştir. Şerit-plağa bağlı Ox_1x_2 koordinat takımı, şerit-plağın geometrik boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.36'da gösterilmektedir.



Şekil 4.36 Dairesel delik içeren şerit-plağa ait çözüm bölgesi ve yükleme durumu

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi;

$$\Omega' = \Omega - \Omega_{\mathbf{h}}$$

$$\Omega = \left\{0 \le \mathbf{x}_1 \le \ell;\ 0 \le \mathbf{x}_2 \le \mathbf{h}\right\}$$

$$\Omega_{\mathbf{h}} = \left\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \middle| \left(\mathbf{x}_1 - (\ell_{\mathbf{s}} + \mathbf{a})\right)^2 + \left(\mathbf{x}_2 - (\mathbf{h}_{\mathbf{L}} + \mathbf{a})\right)^2 \le \mathbf{a}^2 \right\} \tag{4.38}$$

dir. Ele alınan FD şerit-plağın malzeme özellikleri, sabit değil fonksiyondur. Ancak, bu plak malzemesine ait Poisson oranı sabit alınmış olup, Young Modülü sırasıyla x_1 ve x_2 koordinatlarından bağımlı tek serbest değişkenli fonksiyon olması durumları için 2 farklı problem ele alınacaktır. Dairesel formda delik içeren öngerilmeli FDM şerit-plakta Young Modülü'nün x_1'e bağlı olması durumu, Problem 7 ve x_2'ye bağlı olması durumu, Problem 8 olarak incelenecektir. Bu durumda FDM malzeme için

Problem7: $E(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = E(\mathrm{x}_1) = E_0 \left(a x_1 + b\right)^n$ (4.39)

Problem 8: $E(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = E(\mathrm{x}_2) = E_0 \left(c x_2 + d\right)^n$, $E_0, a, b, c, d, n \in R$ (4.40)

dir. Problemlerimiz sınır değer problemi olduğundan: Problem 7 için ; orijinde $E = E_0$, $x_1 = \ell / 2$ de $E = E_1$ değerini almaktadır. Problem 8 için ise orijinde $E = E_0$, $x_2 = h$ de $E = E_1$ değerini almaktadır. a, b, c, d sabitleri sınır değerlerinden elde edilebilmektedirler. Ele alınan sınır değer probleminin geometrisi ve yükleme durumunun $x_1 = \ell/2$ eksenine göre simetrik olmasından yararlanılarak çözüm, bölgenin ½ lik kısmında yaplacaktır. Yarım bölge için şerit-plağa bağlı koordinat takımı ve malzeme özelliği değişimi Şekil 4.2' de verildiği gibidir.

FDM şerit-plağın öngerilmeli malzemeden oluştuğu kabul edildiğinden, LEÜBET teorisi çerçevesinde, ele alınan sınır değer problemi iki aşamada incelenecektir. İlk aşamada, karşılıklı iki kenarından etki eden düzgün yayılı normal kuvvet etkisinde yapıda oluşan ön yer değiştirme ve ön gerilmeler belirlenecek daha sonra, bu ön etkilerin dahil olduğu LEÜBET denklemleri yardımıyla üst yüzeyinden etki eden ilave normal basınç kuvveti etkisinde yapıda oluşan yer değiştirme, gerilme değerleri belirlenecektir. Her bir aşamaya ait matematiksel formülasyon aşağıda

ayrı ayrı verilmiştir. Matematiksel formülasyonda ilk aşamaya ait büyüklükler üst indis (0), ikinci aşamaya ait büyüklükler üst indis (1) ile gösterilecektir.

Birinci aşamaya ait çözüm bölgesinde sağlanan denklem ve bağıntılar;

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = 0 \quad , \; i,j = 1,2 \tag{4.41}$$

Bünye denklemleri;

$$\sigma^{(0)} = D\varepsilon^{(0)}, \; \sigma^{(0)} = \left[\sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{22}^{(0)}, \tau_{12}^{(0)}\right]^T, \varepsilon^{(0)} = \left[\varepsilon_{11}^{(0)}, \varepsilon_{22}^{(0)}, \gamma_{12}^{(0)}\right]^T \tag{4.42}$$

Yer değiştirme-şekil değiştirme fonksiyonları

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i}\right), \; i,j=1,2 \tag{4.43}$$

olarak elde edilir.

Sınır koşulları;

$$u_2\Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in 0,h}} = 0, \; \sigma_{11}^{(0)}\Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in 0,h}} = q, \; \sigma_{12}^{(0)}\Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in 0,h}} = 0, \; \sigma_{ij}^{(0)}\Big|_{\substack{x_2=0;h \\ x_1 \in 0,\ell}} = 0$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} n_j \Big| \ell_s = 0 \; i,j=1,2 \tag{4.44}$$

şeklindedir. Burada

$$\ell_S = \left\{ x_1, x_2 \;\middle|\; x_1 - \ell_s + a \right\}^2 + \left(x_2 - h_L + a \right)^2 = a^2$$

olarak verilebilir. Belirtelim ki (4.42)'de verilen D matrisinin elemanları, ele alınan FD şerit-plak için fonksiyonlardan oluşmaktadır. Yani, $D_{ij} = D_{ij}(x_1)$ (Problem 7) veya $D_{ij} = D_{ij}(x_2)$ (Problem 8) dir. D matrisi

$$\mathbf{D}^{(k)} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2D_{66} \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

olmak üzere, bu matrisin bileşenleri, Poisson oranı $\upsilon = sb.$ için,

$$D_{11}=D_{22}=\frac{(1-\upsilon)E(x_k)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)},\ D_{12}=D_{21}=\frac{\upsilon E(x_k)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)},\ D_{66}=\frac{E(x_k)}{2(1+\upsilon)} \qquad (4.46)$$

olarak verilebilir. Burada i=1 (Problem 7) ve i=2 (Problem 8) değerlerini almaktadır.

Öngerilmeli FD şerit-plağın üst yüzeyinden etki eden düzgün yayılı basınç kuvveti etkisinde eğilmesi (ikinci aşama) problemine ait matematiksel model aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}}\left(\sigma_{\mathrm{ji}}^{(1)}+\sigma_{\mathrm{in}}^{(0)}\frac{\partial \mathrm{u_i^{(1)}}}{\partial \mathrm{x_n}}\right)=0 \qquad (4.47)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)}=\mathbf{D}\left(x_i\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \qquad (4.48)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i}\right),\ i,j=1,2 \qquad (4.49)$$

ve sınır koşulları;

$$u_2^{(1)}\Big|_{\substack{x_1=0;\ell\\ x_2\in[0,h]}}=0,\ \left(\sigma_{j1}^{(1)}+\sigma_{1n}^{(0)}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_n}\right)n_j\Big|_{\substack{x_1=0;\ell\\ x_2\in[0,h]}}=0,$$

$$\left(\sigma_{jk}^{(1)}+\sigma_{kn}^{(0)}\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_n}\right)n_j\Big|_{\substack{x_2=h\\ x_1\in[0,\ell]}}=p\delta_2^k,\ \left(\sigma_{ji}^{(1)}+\sigma_{in}^{(0)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n}\right)n_j\Big|_{\substack{x_2=0\\ x_1\in[0,\ell]}}=0\ ,$$

$$\left(\sigma_{ji}^{(1)}+\sigma_{in}^{(0)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n}\right)n_j\Big|_{\ell_s}=0\ ,\ \text{i;j;k=1,2} \qquad (4.50)$$

olarak verilebilir [79].

Eğer yapıdaki öngerilme ihmal edilirse yani, öngerilme içermeyen yapı elemanı için aynı problemlerin matematiksel formülasyonu verilmek istenirse; bu durumda yukarıda verilen ilk aşamaya ait sınır değer problemi göz ardı edilmeli ve ikinci aşamaya ait sınır değer problemine ait matematiksel formülasyonunda yer alan $\sigma_{in}^{(0)}=0$ alınmalıdır. Dolayısıyla, dairesel formda delik içeren öngerilmeli FDM

şerit-plağa ait ele alınan sınır değer probleminin matematiksel modeli, Problem 7 için (4.40) hariç (4.39)-(4.50) denklemleri ve Problem 8 için (4.40)-(4.50) denklemleri ile verilebilir.

4.2.2 Ele Alınan Problemlerin Varyasyonel Formülasyonu

Daha önceki bölümlerde olduğu gibi bu kısımda da ele alınan problemlerin çözümü sayısal olarak, sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla yapılacaktır. Sonlu eleman modellemesinde, nodlarda bilinmeyen olarak sadece yer değiştirme fonksiyonları seçilecektir (yani, yer değiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Metodu kullanılmıştır) [78]. Yapı elemanına etki eden toplam kuvvetler sonucunda yapı elemanında biriken toplam potansiyel enerji fonksiyoneli kullanılarak, sonlu eleman formülasyonu yapılacaktır. İlk aşama için

$$\Pi^{(0)} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega'} \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)} dx_1 dx_2 - \int_0^h q u_1^{(0)}\Big|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^h q u_1^{(0)}\Big|_{x_1=\ell} dx_2, \ i;j;k=1,2 \tag{4.51}$$

ve ikinci aşama için

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{2}\iint_{\Omega'} \left(T_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_1 dx_2 - \int_0^{\ell} p\, u_2^{(1)}\Big|_{x_2=h} dx_1 \tag{4.52}$$

(4.52)'de,

$$T_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \tag{4.53}$$

fonksiyonelleri ve Ritz tekniği yardımıyla sonlu eleman çözümü yapılacaktır. Belirtelim ki (4.51) ve (4.52) fonksiyonellerinin yer değiştirmelere göre birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden denge denklemleri ve gerilmelere göre verilen sınır koşulları elde edilir [78]. Yani verilen sınır değer problemi uygun fonksiyonelin Euler denklemleridir.

4.2.3 Sonlu Eleman Modellemesi

Ele alınan sınır değer problemine ait çözüm bölgesi sonlu adet sonlu elemana yani alt bölgeye $(\Omega_{(s)}$, s=1,2,...,M) ayrıklaştırılır. Dairesel delik civarında eğrisel kenarlara sahip 6 nodlu üçgen elemanlar, geri kalan kısımda 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar kullanılmıştır (Şekil 4.3). Bu kısımda kullanılacak olan sonlu eleman modellemesi, detaylı bir şekilde Kısım 4.1.3'de verilmiştir.

Her iki aşamaya ait sınır değer problemlerinin sonlu eleman çözümünde aynı sonlu eleman ayrıklaştırması kullanılmıştır. Çözüm yöntemi gereği, her bir sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu, polinom fonksiyon şeklinde seçilir. Bu polinom fonksiyonlar, birinci aşama için (4.51) fonksiyonelinde, ikinci aşama için (4.52) fonksiyonellerinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa; 1. aşamaya ait problemin çözümü

$$\mathbf{K}^{(0)}\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{F}^{(0)} \tag{4.54}$$

denklem sisteminin çözümüne, 2. aşamaya ait problemin çözümü

$$\mathbf{K}^{(1)}\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{F}^{(1)} \tag{4.55}$$

denklem sisteminin çözümüne indirgenir. (4.54) ve (4.55) eşitliklerinde $\mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(1)}$ Rijidlik matrisi, $\boldsymbol{u}^{(0)}, \boldsymbol{u}^{(1)}$ nodlarda bilinmeyenleri içeren matris ve $\mathbf{F}^{(0)}, \mathbf{F}^{(1)}$ kuvvet veya sağ taraf matrisini göstermektedir [78-79]. Örneğin, $\mathbf{K}^{(0)}$ matrisinin elemanları seçilen e. sonlu eleman için

$$\mathbf{K}^{(0),\mathbf{e}} = \int_{\Omega_e} \left(\boldsymbol{B}^{(\mathbf{e})}\right)^T \boldsymbol{D}^{(\mathbf{e})}\boldsymbol{B}^{(\mathbf{e})} d\Omega_e \tag{4.56}$$

şeklindedir. (4.56) integrallerinin hesaplanmasında sayısal integral alma yöntemlerinden Gauss karelemesi kullanılmıştır (Kısım 3.1.3)

(4.54) ve (4.55) cebrik denklem sistemlerinin ardışık olarak çözümünden sırasıyla birinci ve ikinci aşamaya ait nodlarda yer değiştirme değerleri belirlenir. Ancak birinci aşamaya ait gerilme değerleri, ikinci aşamada problemin formülasyonuna dahil olduğundan, (4.55) sisteminin çözümüne geçmeden önce, birinci aşamada yapıda oluşan gerilme değerlerinin belirlenmesi gerekir. Gerilme değerlerinin bulunmasına ait formülasyon Kısım 3.1.3'de verilmiştir.

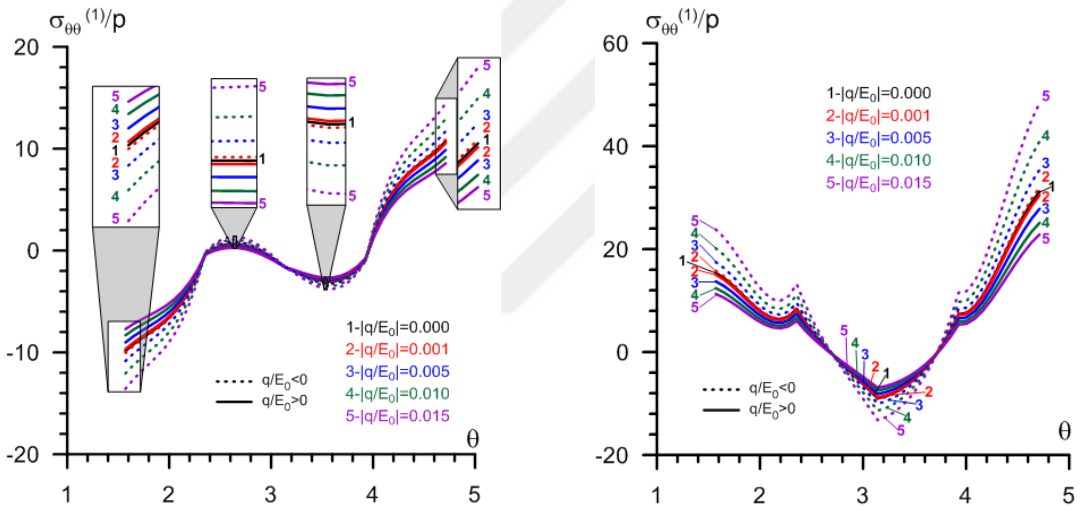
4.2.4 Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, yapısında dairesel delik bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış öngerilmeli sonlu şerit-plağın üst yüzeyinden etki eden eğilme kuvveti etkisinde, delik civarında oluşan yer değiştirmeler ve gerilme birikimlerine ait sayısal sonuçlar verilecektir. Ele alınan FDM şerit-plak için Poisson oranı sabit alınmış ancak, Young Modülü, x_1 veya x_2 değişkenine bağlı fonksiyon olduğu kabul edilmiş ve bu durumlar için 2 farklı problem incelenmiştir. Young Modülü'nün en büyük değerleri $\mathbf{x}_1 = \ell/2$ veya $\mathbf{x}_2 = \mathbf{h}$ kesitinde aldığı kabul edilmektedir. Belirtelim ki, ele alınan problemin çözümü, yapı elemanının geometrisi, sınır koşulları ve yüklemesinin $\mathbf{x}_1 = \ell/2$'ye göre simetrik olması özelliğinden yararlanılarak, çözüm bölgesinin ½ lik kısmında yapılmıştır. Bu bölge (Şekil 4.36) Ox_1 doğrultusunda N=80 ve Ox_2 doğrultusunda M=12 dikdörtgen sonlu eleman, dairesel delik civarında 4 eğrisel kenara sahip üçgen sonlu eleman olmak üzere toplamda, 958 dikdörtgen sonlu eleman, 4027 düğüm noktası (nod) ve 8004 serbestlik derecesi içermektedir. Çözüm için kullanılan sonlu eleman ayrıklaştırması, pek çok sonlu eleman ağı için bulunan değerlerin literatürdeki uygun değerlere en iyi yaklaşımın sağlandığı sonlu eleman ağı arasından seçilmiştir.

Bu kısımda verilen grafiklerde, kutupsal koordinatlardaki boyutsuz gerilme ve yer değiştirme değerleri verilmiştir. Belirtelim ki grafiklerde verilen u_θ ve u_r yer değiştirme değerleri boyutsuz ifadeler olup bu ifadeler; $\hat{u}_\theta$ ve $\hat{u}_r$ aynı yer değiştirmelerin boyutlu ifadeleri olmak üzere; $u_\theta = (\hat{u}_\theta / \ell)E_1/q\ell$, $u_r = (\hat{u}_r / \ell)E_1/q\ell$ şeklindedir. Belirtelim ki, tüm şekillerde (a)'da verilen grafikler Problem 7'ye ve (b)'de verilen grafikler Problem 8'e ait grafikleri içermektedir. Tüm grafikler dairesel deliğin $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ kısmında çizilmiştir.

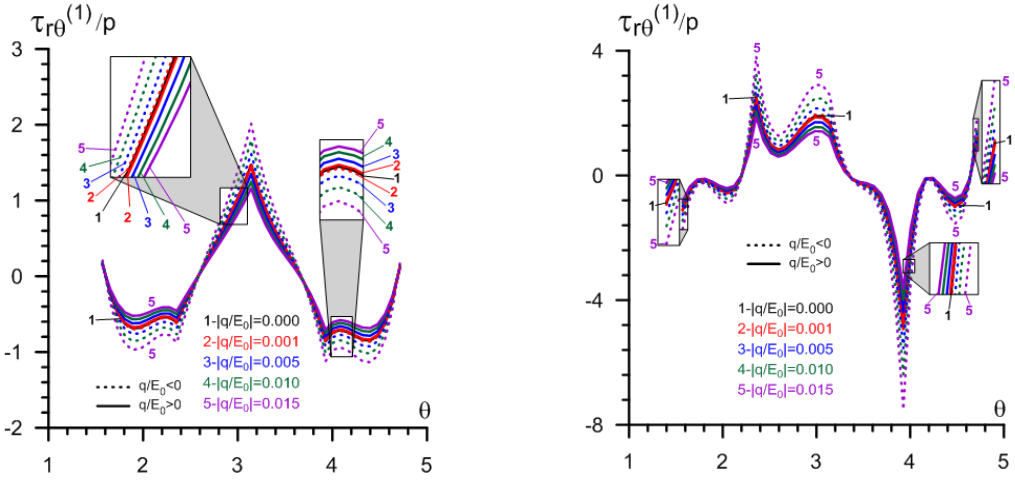
Şekil 4.37, Şekil 4.38 ve Şekil 4.39'de FD malzemeden $\left(E_1 / E_0 = 5\right)$ yapılmış dairesel formda delik içeren öngerilmeli şerit-plakta, basınç $\left(q/E_0 < 0\right)$ ve çekme öngerilmesi $\left(q/E_0 > 0\right)$ değişiminin $h_u / a = h_L / a = 5,\ a / \ell = 0.0125,\ h / \ell = 0.15,$

$E_1 / E_0 = 5$ ve n=2 durumunda (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için delik civarında oluşan sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$, $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ ve $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ kutupsal gerilme değerlerine olan etkisi incelenmiştir. Grafiklerde kesikli çizgi ile basınç öngerilmesi durumunda ve düz çizgi ile çekme öngerilmesi durumunda elde edilen sayısal sonuçlar verilmektedir. Yapıda basınç öngerilmesi $(q/E_0 < 0)$ olması, dairesel delik civarındaki kutupsal gerilme değerlerini mutlak değerce artırmakta, çekme öngerilmesi $(q/E_0 > 0)$ olması mutlak değerce azaltmaktadır. Basınç öngerilmesi olması durumu gerilmelerin değerlerini daha fazla etkilemektedir. Tüm grafiklerde uygulanan öngerilme değişimi delik civarında gerilmelerin ekstremal değer aldığı noktaları değiştirmemekte, sadece şiddetini değiştirmektedir.



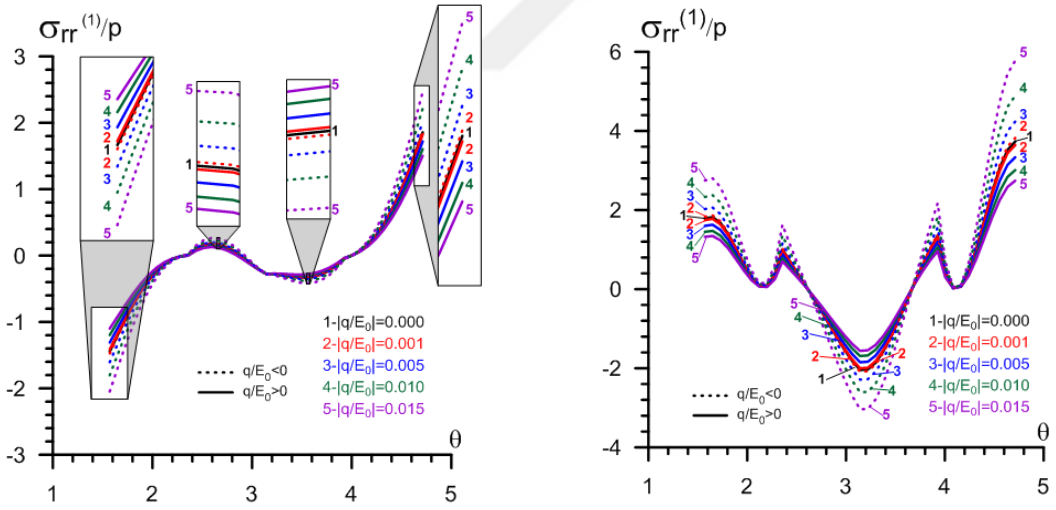
(a) (b)

Şekil 4.37 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için $h_u / a = h_L / a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $h/\ell = 0.15$ ve $E_1 / E_0 = 5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.



(a) (b)

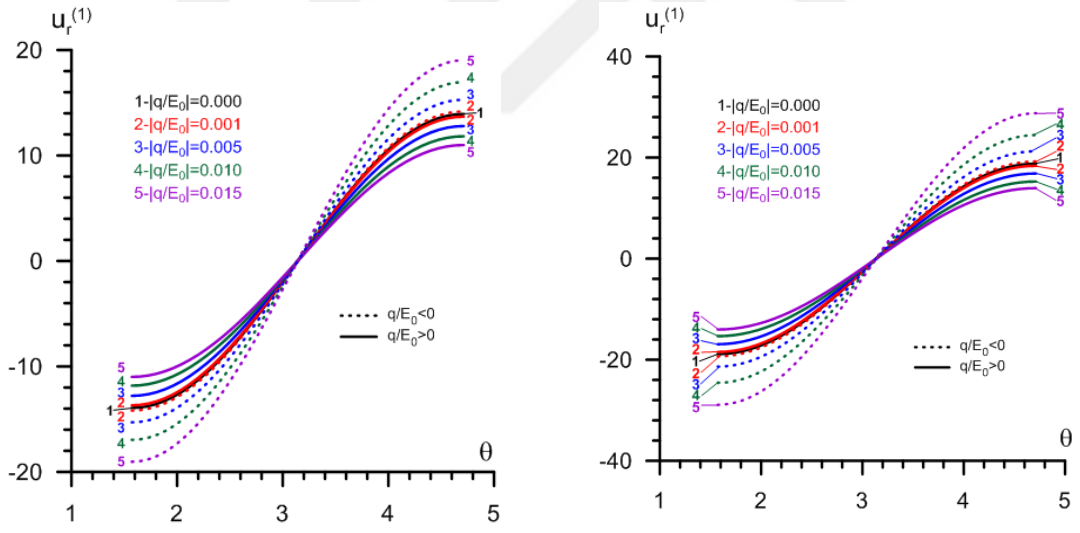
Şekil 4.38 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.



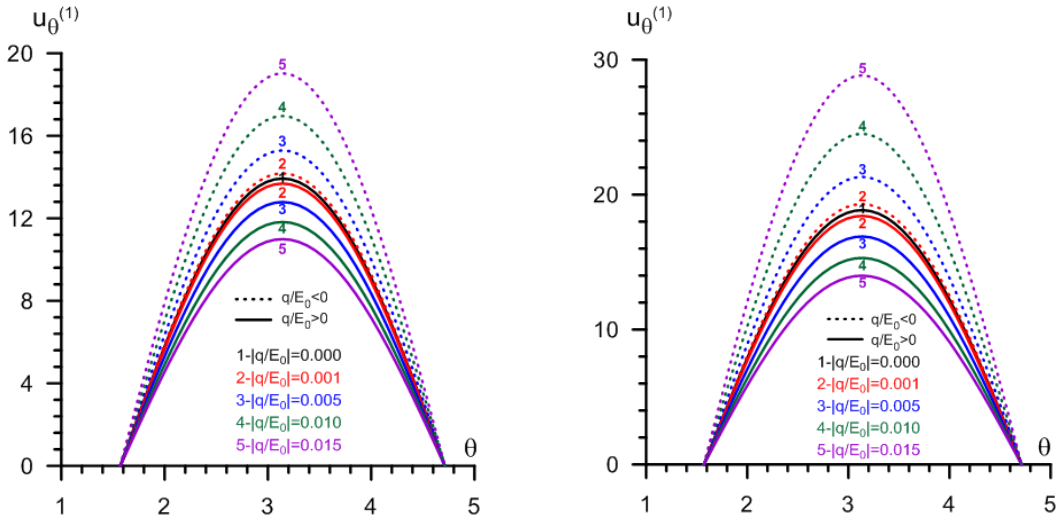
(a) (b)

Şekil 4.39 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.

Şekil 4.40-Şekil 4.41'de FD malzemeden $\left(E_1 / E_0 = 5\right)$ yapılmış dairesel formda delik içeren öngerilmeli şerit-plakta basınç $(q / E_0 < 0)$ ve çekme öngerilmesi $(q / E_0 > 0)$ değişiminin $h_u / a = h_L / a = 5, a / \ell = 0.0125, h / \ell = 0.15$, $E_1 / E_0 = 5$ ve n=2 durumunda (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için delik civarında, sırasıyla $u_r^{(1)}$ ve $u_\theta^{(1)}$ kutupsal yer değiştirme değerlerine olan etkisi incelenmiştir. Yapıda basınç öngerilmesi $(q / E_0 < 0)$ olması yer değiştirme değerlerini mutlak değerce artırmakta, çekme öngerilmesi $(q / E_0 > 0)$ olması yer değiştirme değerlerini mutlak değerce azaltmaktadır. Basınç öngerilmesi olması durumu yer değiştirmelerin değerlerini daha fazla etkilemektedir. Tüm grafiklerde öngerilmenin değerinin değişimi, delik civarında yer değiştirmelerin ekstremal değer aldığı noktaları değiştirmemekte, sadece yer değiştirmenin şiddetini değiştirmektedir. $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerinin maksimum değerine her iki problem için $\theta = \mp\frac{\pi}{2}$ 'de; $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerleri maksimum değerine her iki problem için $\theta = \pi$ 'de ulaşmaktadır.



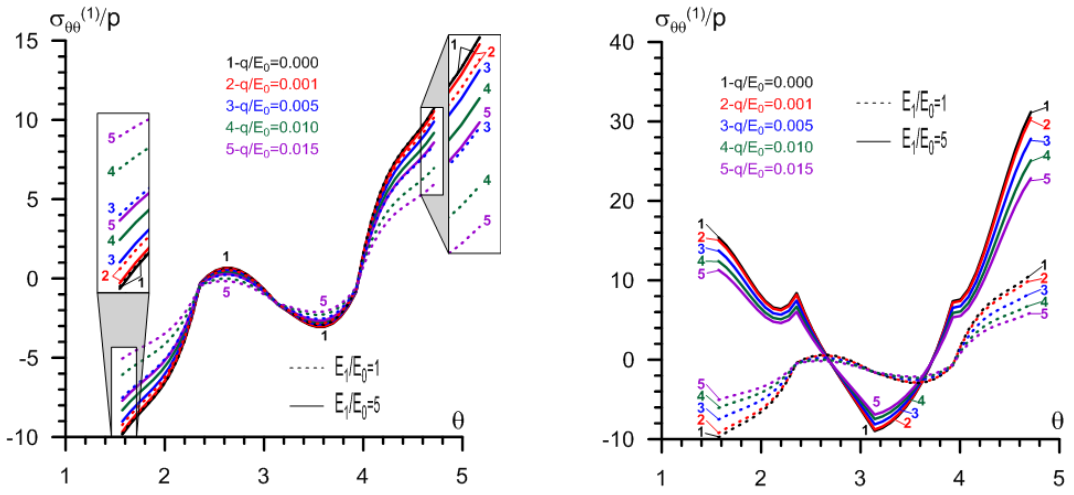
Şekil 4.40 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için $h_u / a = h_L / a = 5$, $a / \ell = 0.0125$, $h / \ell = 0.15$ ve $E_1 / E_0 = 5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.



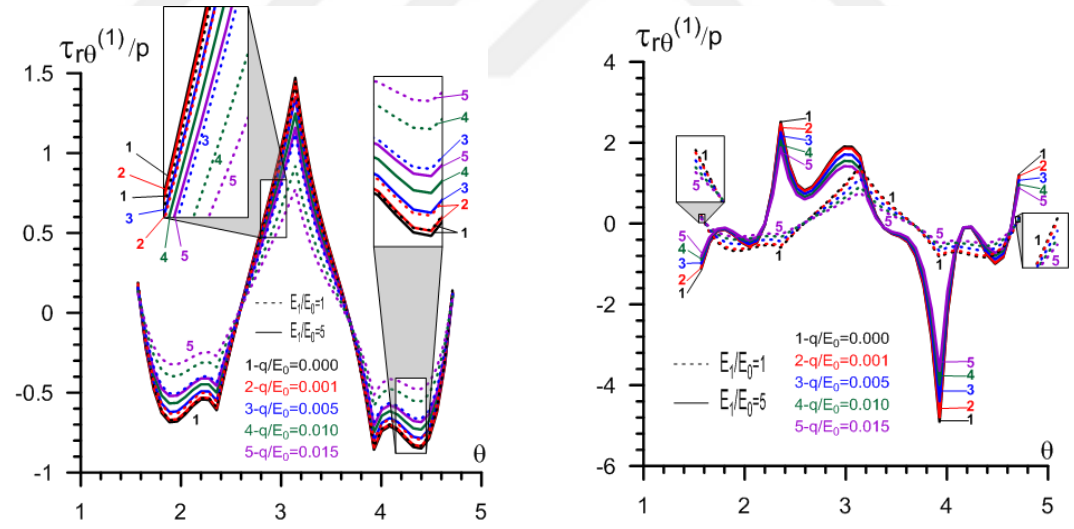
(a) (b)

Şekil 4.41 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ durumlarında basınç ve çekme öngerilmelerinin etkisi.

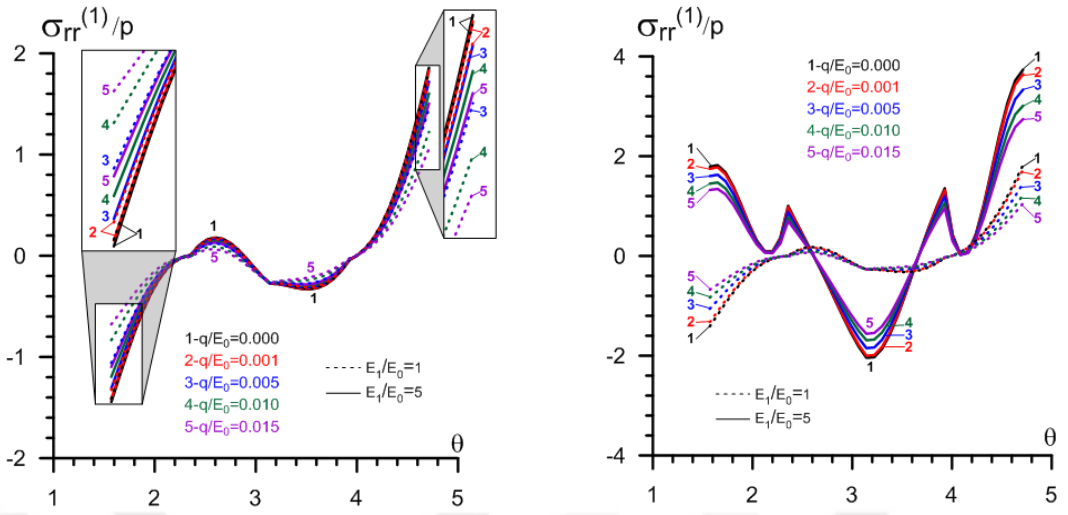
Şekil 4.42, Şekil 4.43 ve Şekil 4.44'de sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$, $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ ve $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ kutupsal gerilme değerleri, q/E_0 $(q/E_0>0)$ parametre değişimi için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve n=2 durumunda (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için $E_1/E_0=5$ (FD malzeme) ve $E_1/E_0=1$ (homojen izotrop) durumlarında verilmiştir. Her iki problem için q/E_0 arttıkça tüm gerilme değerleri mutlak değerce azalmakla birlikte, Problem 8 için homojen-izotrop malzeme ile FD malzeme alınması durumunda elde edilen uygun gerilme değerleri arasındaki fark daha fazla olmaktadır.



Şekil 4.42 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi.

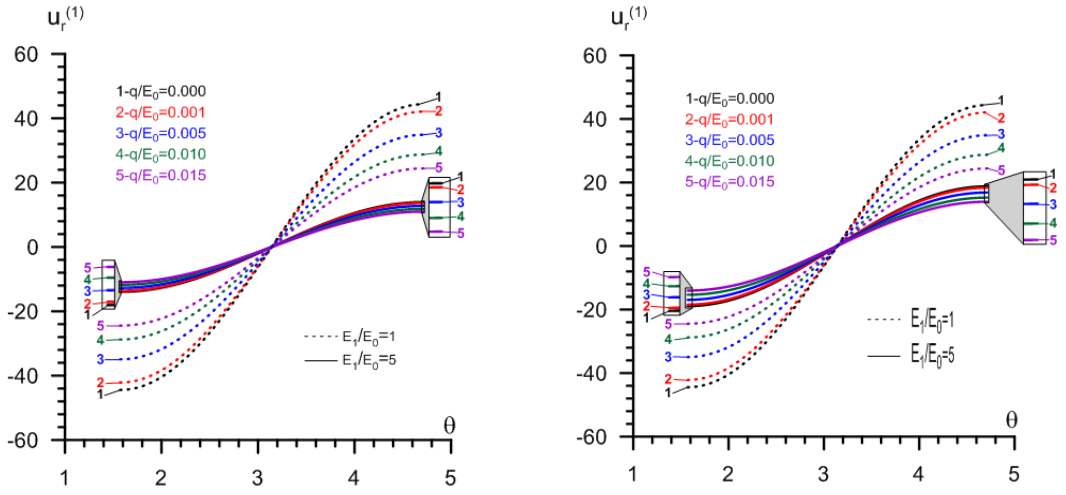


Şekil 4.43 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi.



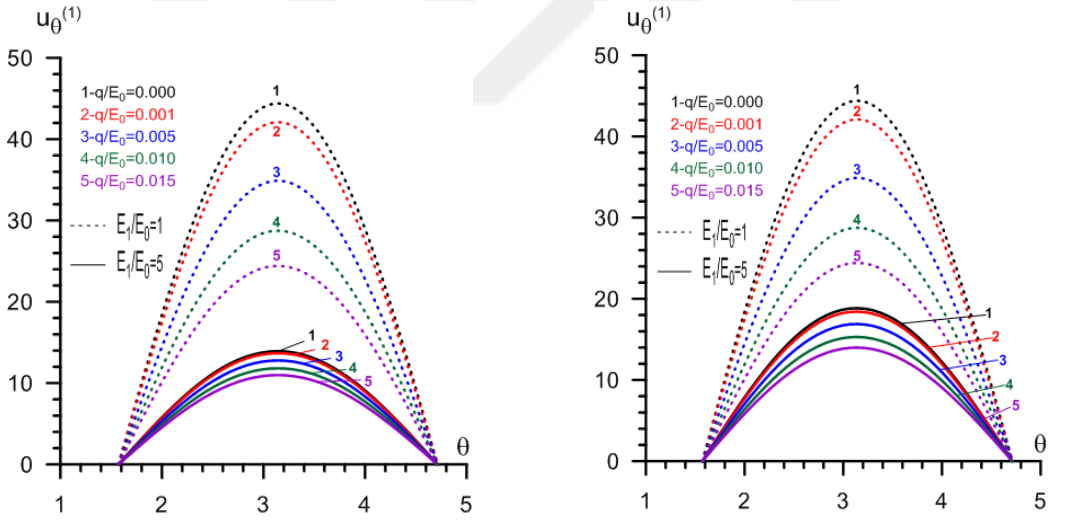
Şekil 4.44 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi.

Şekil 4.45 ve Şekil 4.46'da sırasıyla $u_r^{(1)}$ ve $u_\theta^{(1)}$ kutupsal yer değiştirme değerleri, q/E_0 parametre değişimi için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15$ ve n=2 durumunda (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için $E_1/E_0=5$ (FD malzeme) ve $E_1/E_0=1$ (homojen izotrop) durumlarında verilmiştir. Her iki problem için q/E_0 arttıkça tüm kutupsal yer değiştirme değerleri mutlak değerce azalmakla birlikte, Problem 8 için FD malzeme alınması durumunda $(E_1/E_0=5)$ elde edilen yer değiştirme değerleri, Proplem 7 için FD malzeme alınması durumunda $(E_1/E_0=5)$ elde edilen yer değiştirme değerlerinden daha büyük olmaktadır. Öngerilme arttıkça yapı elemanı malzemesinin homojen veya FD malzeme alınması durumlarına ait kutupsal yer değiştirme değerleri arasındaki fark azalmaktadır.



(a) (b)

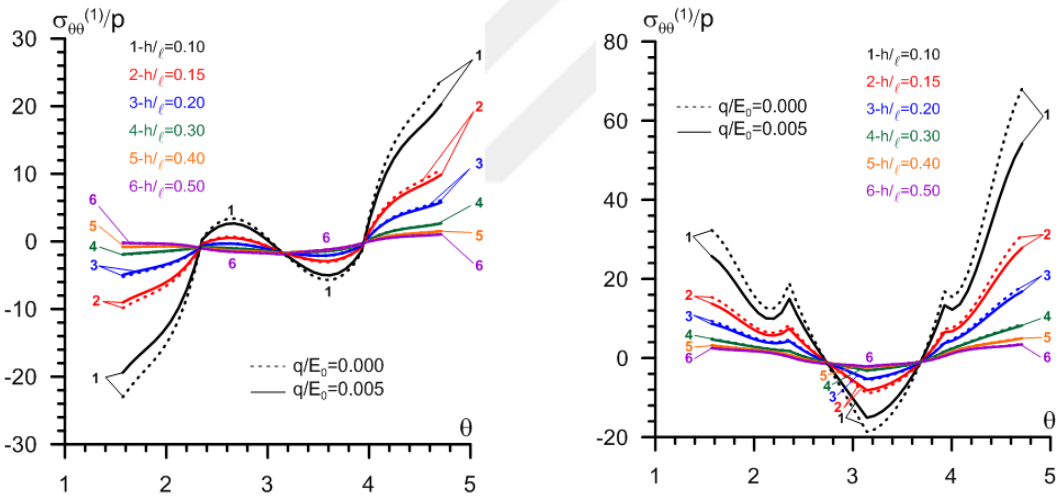
Şekil 4.45 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi.



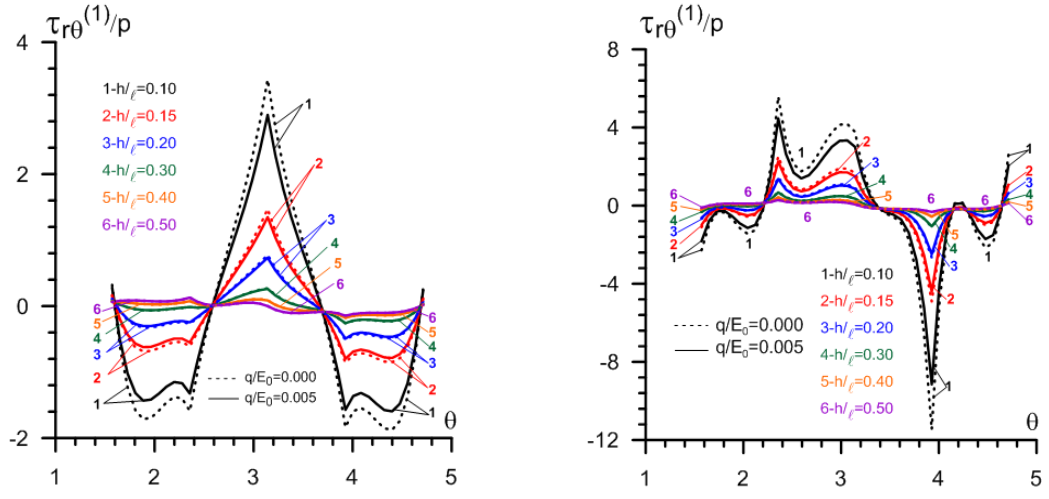
(a) (b)

Şekil 4.46 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $h/\ell=0.15$ parametre değerlerinde $E_1/E_0=5$ ve $E_1/E_0=1$ durumlarında ön gerilmenin etkisi.

Şekil 4.47, Şekil 4.48 ve Şekil 4.49'da sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$, $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ ve $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ kutupsal gerilme değerlerini gösteren grafikler, yapıda öngerilme olması ve olmaması durumları ve (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için farklı h/ℓ parametre değerlerinde yapıdaki dairesel delik civarında verilmiştir ($h_U/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$ ve $n = 2$). Dairesel deliğin boyutları değişmediğinden, h/ℓ parametresi arttıkça, deliğin plak içerisindeki kapladığı alanın tüm plak alanına oranı azalmaktadır. Bu durumda ele alınan her iki problem için ((a) Problem 7, (b) Problem 8), h/ℓ oranı arttıkça, tüm kutupsal gerilme değerleri mutlak değerce azalmaktadır. h/ℓ oranı arttıkça, her iki problemde yapı elemanının öngerilmeli malzemeden olması veya öngerilme içermeyen malzemeden olması durumları için dairesel delik civarında elde edilen gerilme değerleri arasındaki fark azalmaktadır.

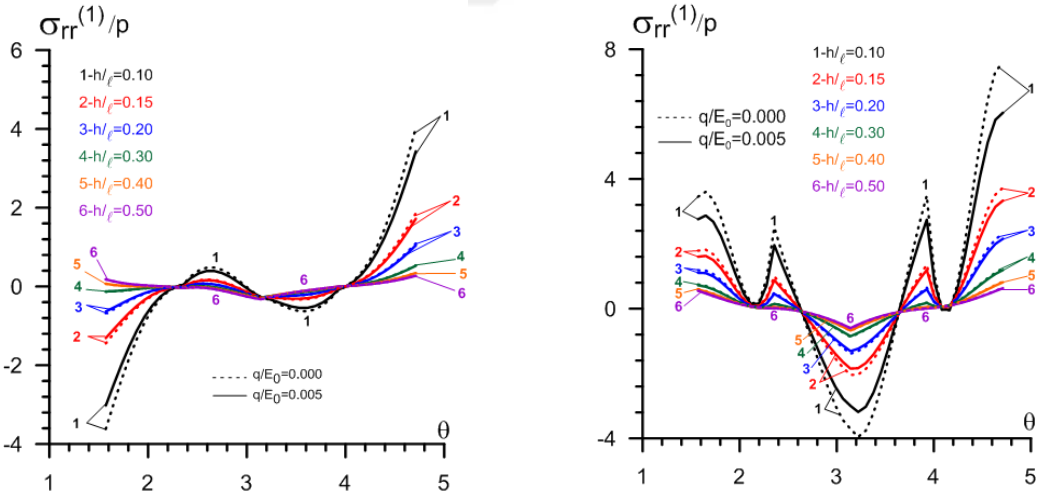


Şekil 4.47 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$ ve $E_1/E_0 = 5$ parametre değerlerinde $q/E_0 = 0.005$ ve $q/E_0 = 0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi.



(a) (b)

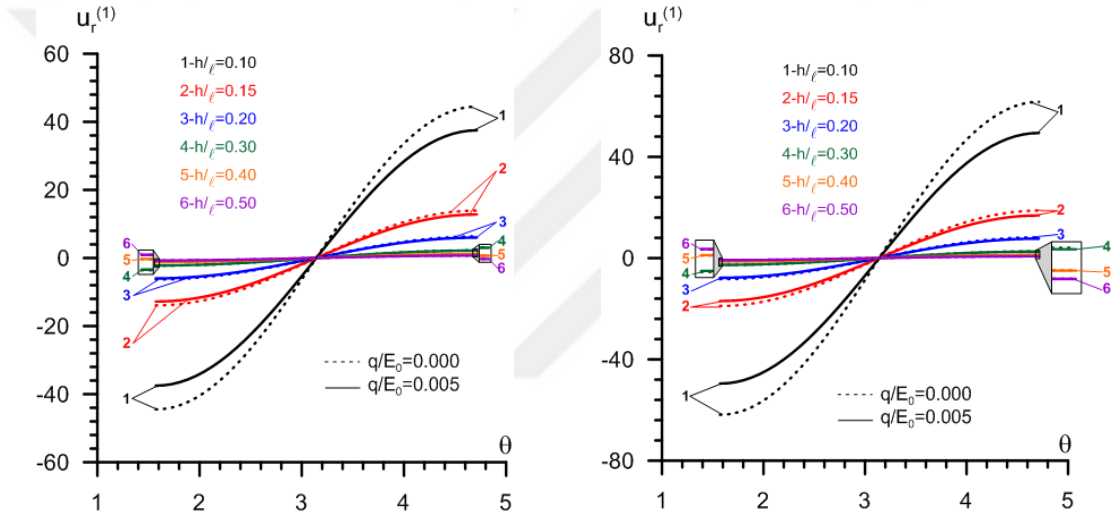
Şekil 4.48 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi.



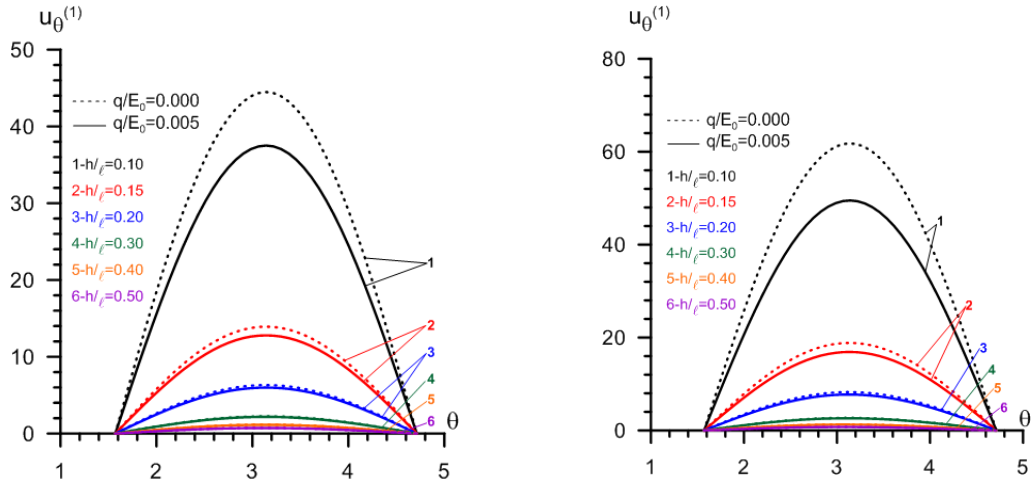
(a) (b)

Şekil 4.49 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi.

Şekil 4.50 ve Şekil 4.51'de yapıdaki dairesel delik civarında sırasıyla $u_r^{(1)}$ ve $u_\theta^{(1)}$ kutupsal yer değiştirme değerlerini gösteren grafikler, (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için $h_u / a = h_L / a = 5,\ a / \ell = 0.0125$, $E_1 / E_0 = 5$ ve n=2 durumunda, farklı h / ℓ parametre değişimi için verilmiştir. h / ℓ değeri arttıkça kutupsal yer değiştirme değerleri, mutlak değerce azalmaktadır. Ayrıca h / ℓ oranı arttıkça, her iki problemde de, yapı elemanının öngerilmeli malzemeden olması veya öngerilme içermeyen malzemeden olması durumları için bulunan uygun değerleri arasındaki fark belirgin bir şekilde azalmaktadır.



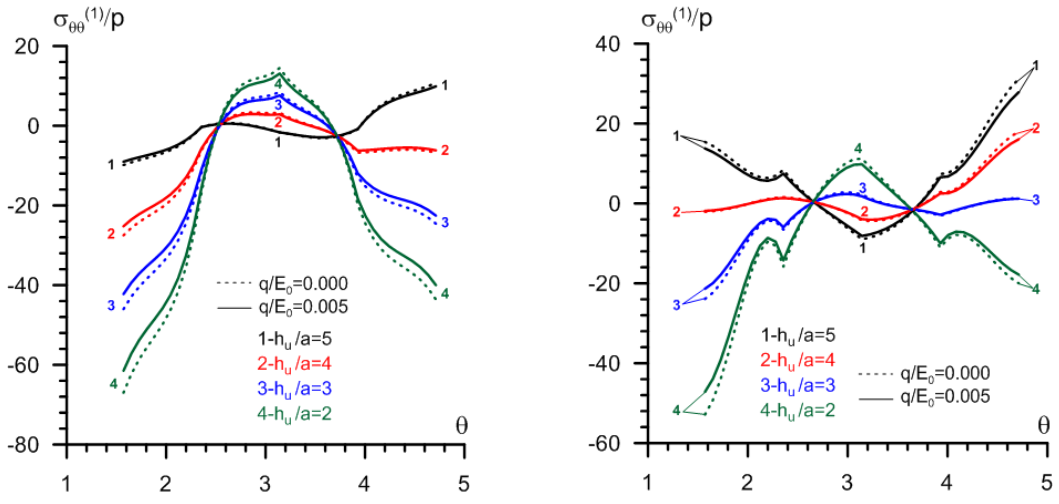
Şekil 4.50 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^2$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^2$ için $h_u / a = h_L / a = 5,\ a / \ell = 0.0125$ ve $E_1 / E_0 = 5$ parametre değerlerinde $q / E_0 = 0.005$ ve $q / E_0 = 0$ durumlarında h / ℓ parametre değişimin etkisi.



Şekil 4.51 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h/ℓ parametre değişimin etkisi.

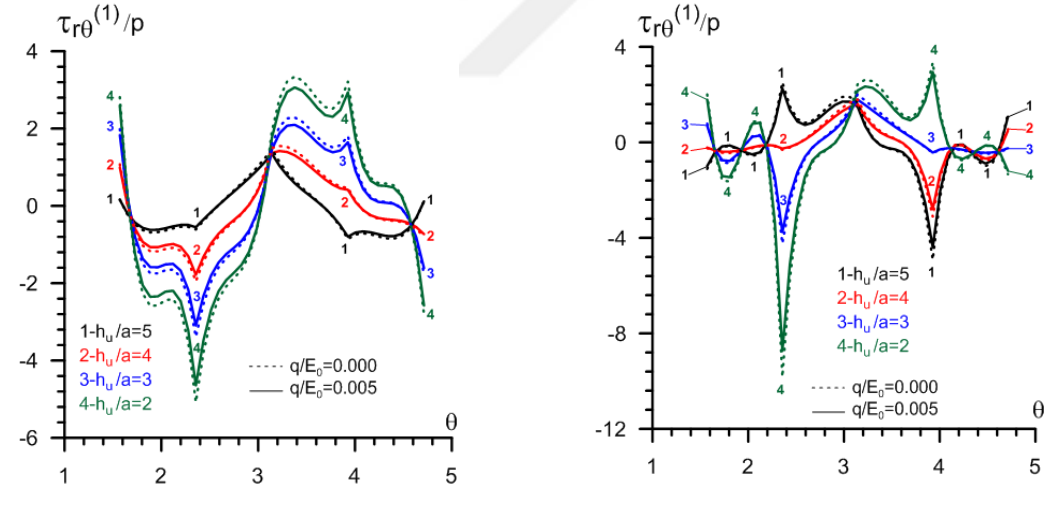
$a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve n=2 malzeme parametre değerlerinde yapıdaki dairesel deliğin mevcut konumuna paralel kalacak şekilde, bütünüyle plağın üst yüzeyine yaklaştırılmasının (h_u/a değerinin küçülmesi), dairesel delik civarında oluşan $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$, $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ ve $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ kutupsal gerilme değerlerine olan etkisi sırasıyla Şekil 4.52, Şekil 4.53 ve Şekil 4.54'de verilmiştir.

Her iki problem için (Problem 7 ve Problem 8) tüm kutupsal gerilme değerleri h_u/a parametre değeri azaldıkça mutlak değerce artmaktadır. Ayrıca, h_u/a oranı arttıkça yapı elemanının öngerilmeli veya öngerilme içermeyen malzemeden yapılmış olması durumlarında bulunan uygun gerilme değerleri arasındaki fark azalmaktadır.



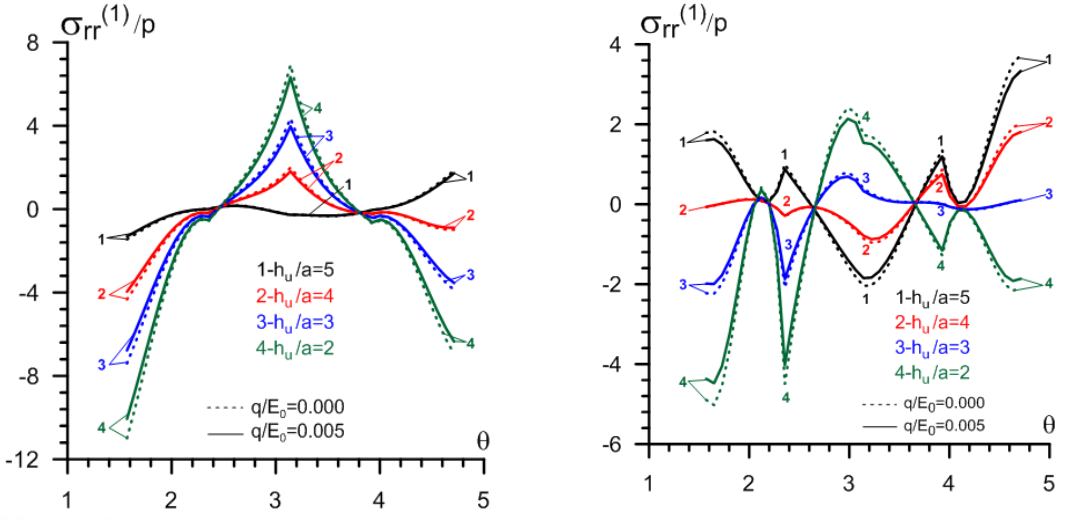
(a) (b)

Şekil 4.52 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$ $h/\ell=0.15$, ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.53 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$ $h/\ell=0.15$, ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.

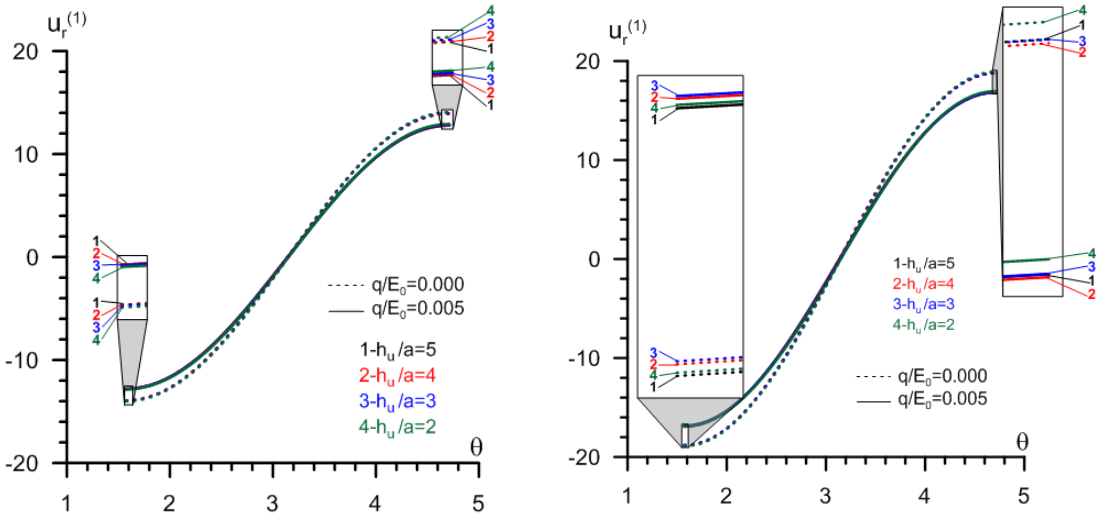


(a) (b)

Şekil 4.54 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$

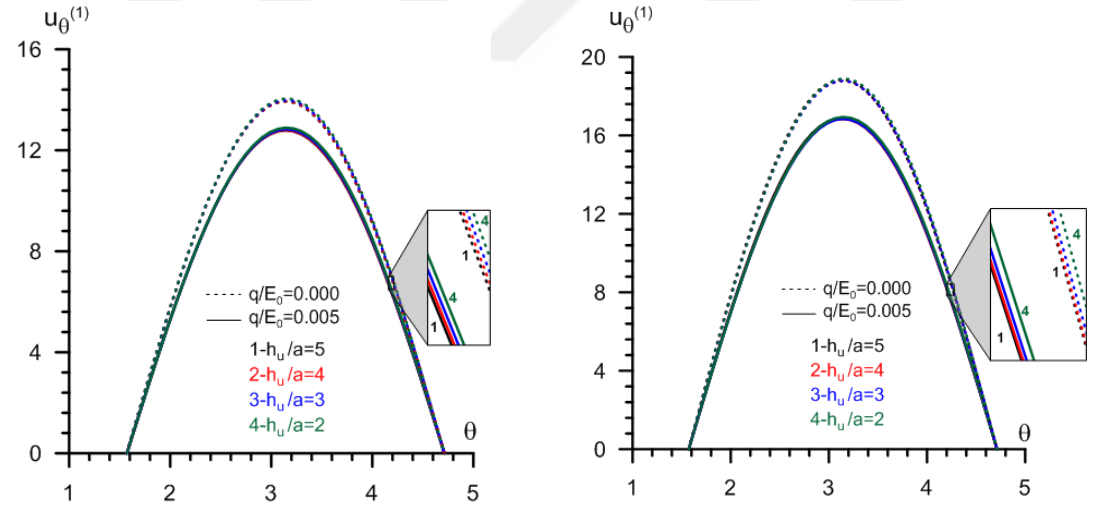
(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$ $h/\ell=0.15$, ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.

Şekil 4.55 ve Şekil 4.56'da $a/\ell=0.0125$, $E_1/E_0=5$, $h/\ell=0.15$ ve n=2 malzeme parametre değerlerinde, h_u/a parametre değişiminin (yani, dairesel deliğin konumunun, şerit-plağın serbest üst yüzeyine doğru yaklaştırılması/uzaklaştırılmasının), sırasıyla $u_r^{(1)}$ ve $u_\theta^{(1)}$ kutupsal yer değiştirme değerlerine olan etkisi incelenmiştir. Her iki problem için (Problem 7 ve 8) tüm kutupsal yer değiştirme değerlerine h_u/a parametresi değişimi etkisi çok azdır.



(a) (b)

Şekil 4.55 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$ $h/\ell=0.15$, ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.

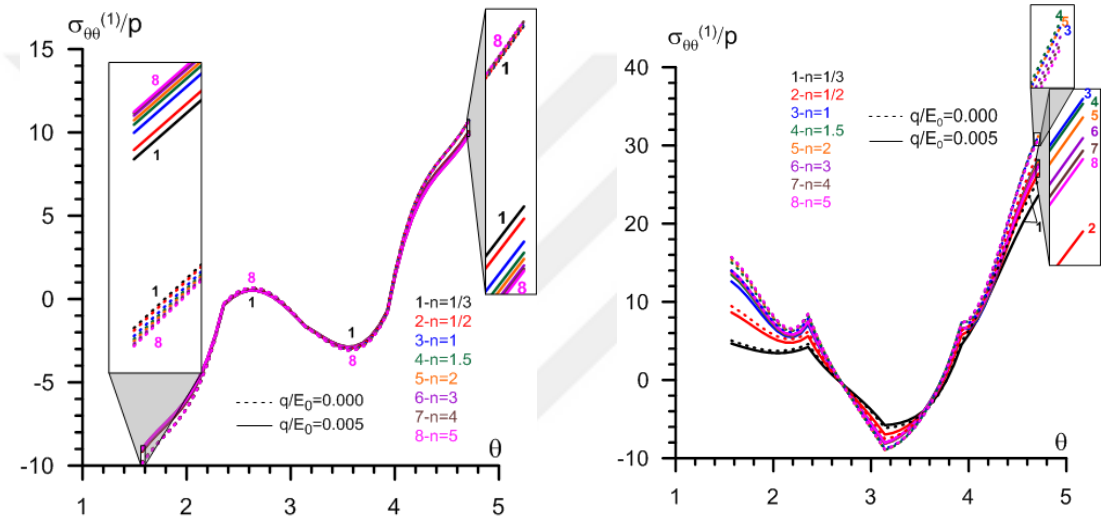


(a) (b)

Şekil 4.56. $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^2$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^2$ için $a/\ell=0.0125$ $h/\ell=0.15$, ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında h_u/a parametre değişimin etkisi.

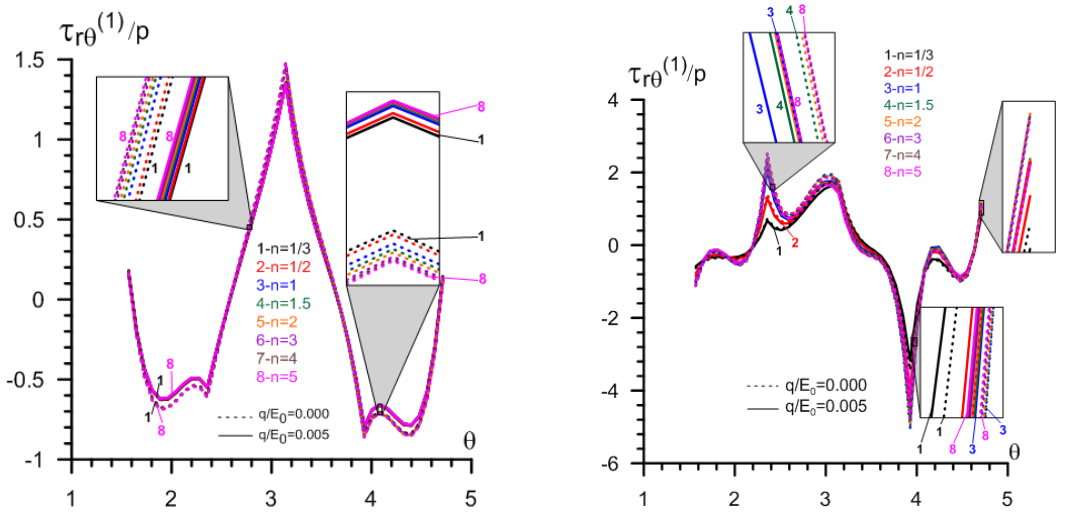
Şekil 4.57, Şekil 4.58 ve Şekil 4.59'da, denklem (4.39) ve (4.40)'da verilen n parametresi değişiminin dairesel delik civarında oluşan sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$, $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ ve $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ kutupsal gerilme değerlerine etkisi, (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$ ve $h/\ell = 0.15$ parametre değerleri için verilmiştir.

n parametre değişiminin kutupsal gerilmelere etkisi az olmakla beraber, Problem 8 için alınan etki Problem 7 için alınan etkiden daha fazladır.



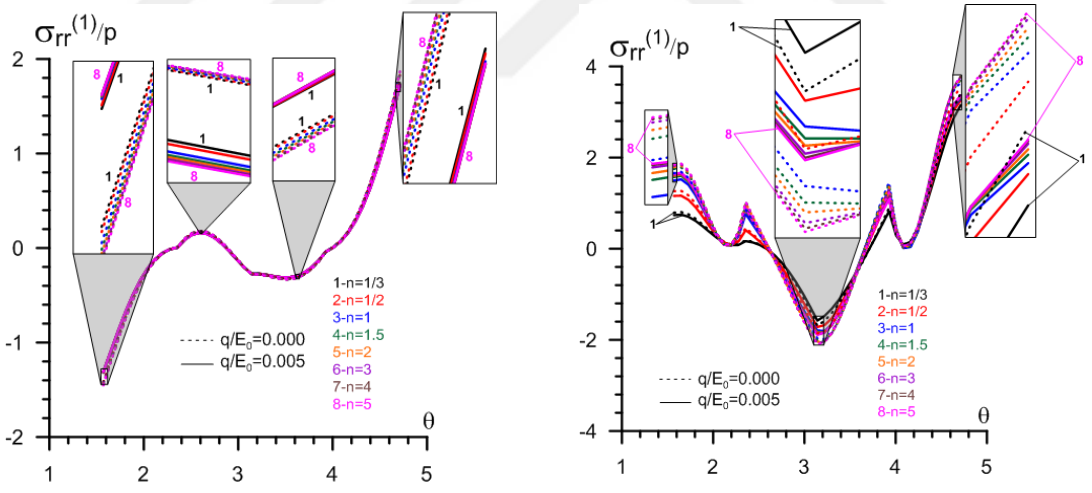
(a) (b)

Şekil 4.57 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^n$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^n$ için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $h/\ell = 0.15$ ve $E_1/E_0 = 5$ parametre değerlerinde $q/E_0 = 0.005$ ve $q/E_0 = 0$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.58 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi.

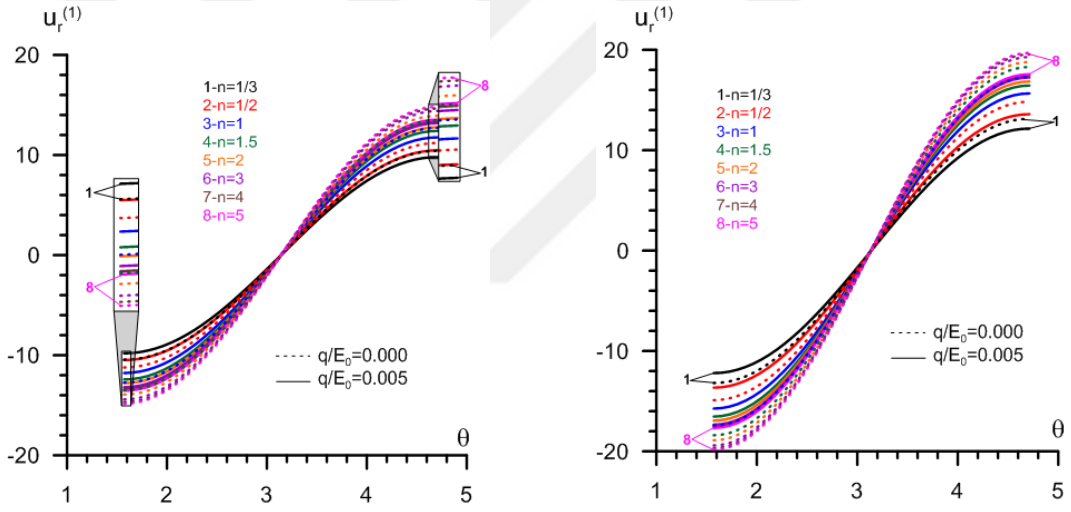


(a) (b)

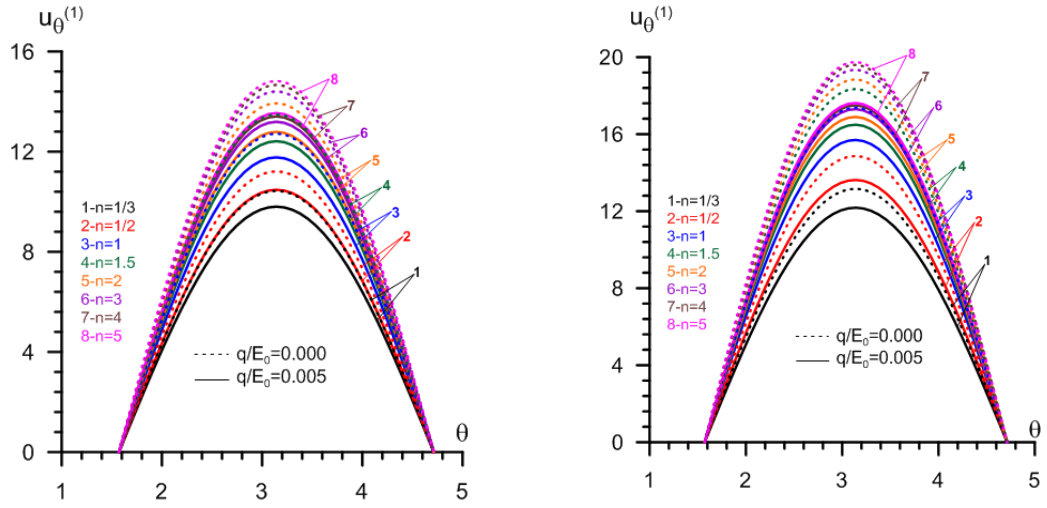
Şekil 4.59 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi.

Şekil 4.60 ve Şekil 4.61'de dairel delik civarında bulunan sırasıyla $u_r^{(1)}$ ve $u_\theta^{(1)}$ kutupsal yer değiştirme değerlerine, denklem (4.39) ve (4.40)'da verilen n parametresi değişiminin etkisi, (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $E_1/E_0 = 5$ ve $h/\ell = 0.15$ parametre değerlerinde verilmiştir.

Her iki problem için n parametresinin değeri arttıkça, yer değiştirme değerleri mutlak değerce artmaktadır. n parametresi, ele alınan yapı elemanı malzemesindeki fonksiyonel derecelendirme özelliğini etkileyen bir parametredir. Bu parametre değişiminin yapıdaki yer değiştirme değerleri üzerine etkisinin, gerilme değerleri üzerine etkisinden daha fazla olduğu tespit edilmiştir.



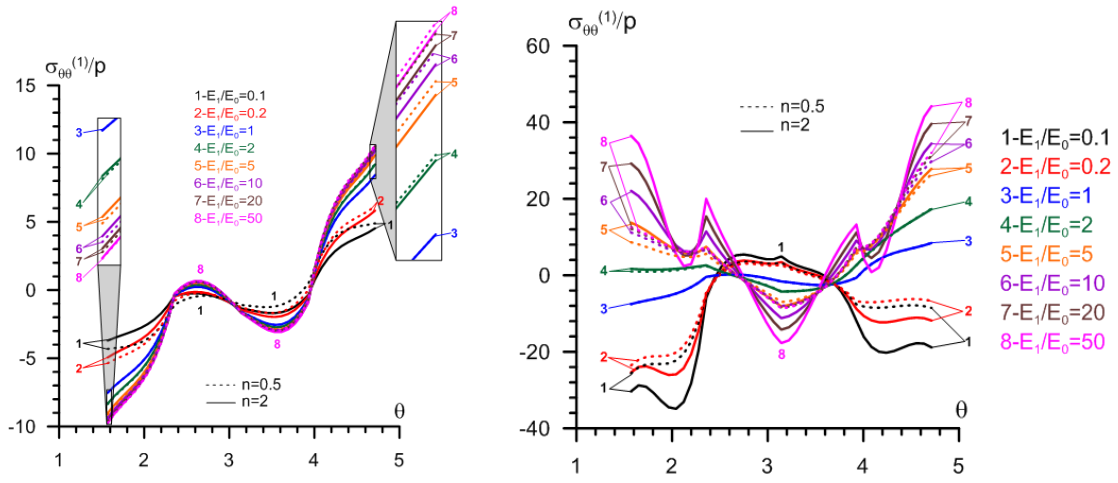
Şekil 4.60 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1) = E_0(ax_1 + b)^n$ (b) $E(x_2) = E_0(cx_2 + d)^n$ için $h_u/a = h_L/a = 5$, $a/\ell = 0.0125$, $h/\ell = 0.15$ ve $E_1/E_0 = 5$ parametre değerlerinde $q/E_0 = 0.005$ ve $q/E_0 = 0$ durumlarında n değişiminin etkisi.



(a) (b)

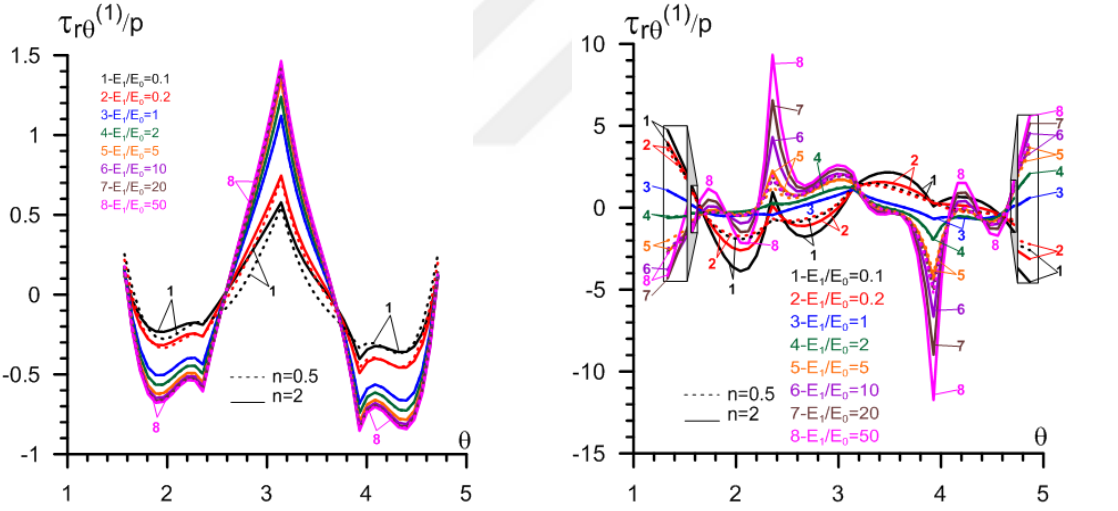
Şekil 4.61 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$ ve $E_1/E_0=5$ parametre değerlerinde $q/E_0=0.005$ ve $q/E_0=0$ durumlarında n değişiminin etkisi.

Şekil 4.62, Şekil 4.63 ve Şekil 4.64'te dairesel delik civarında sırasıyla $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$, $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ ve $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ kutupsal gerilme değerlerine E_1/E_0 parametresi değişiminin etkisi, $h_u/a=h_L/a=5$, $a/\ell=0.0125$, $h/\ell=0.15$, $q/E_0=0.005$ ile n=0.5 ve n=2 durumlarında (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için verilmiştir. Tüm kutupsal gerilme değerlerine, E_1/E_0 değişiminin etkisi Problem 8'de, Problem 7'ye göre daha fazladır. Problem 7 için E_1/E_0 değişiminde n=0.5 ve n=2 durumlarında elde edilen değerler arasında fark çok olmamakla birlikte, Problem 8'de n=2 için elde edilen değerler n=0.5 için elde edilen değerlerden her zaman mutlak değerce büyük kalmaktadır. Dairesel delik civarında bazı noktalarda E_1/E_0 ve n değişiminin kutupsal gerilmelere etkisi detaylı olarak Tablo 4.2-Tablo 4.7 'de verilmiştir.



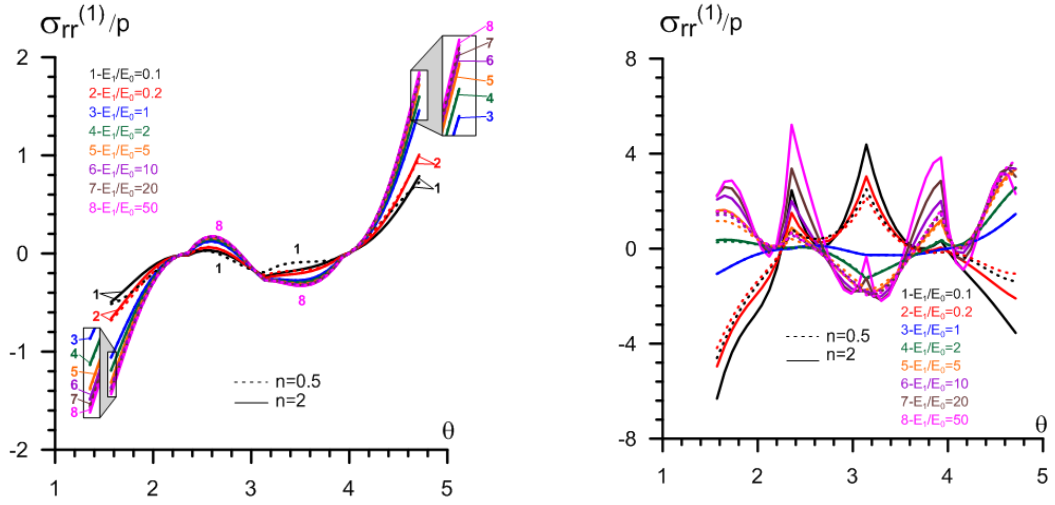
(a) (b)

Şekil 4.62 $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15,\ q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

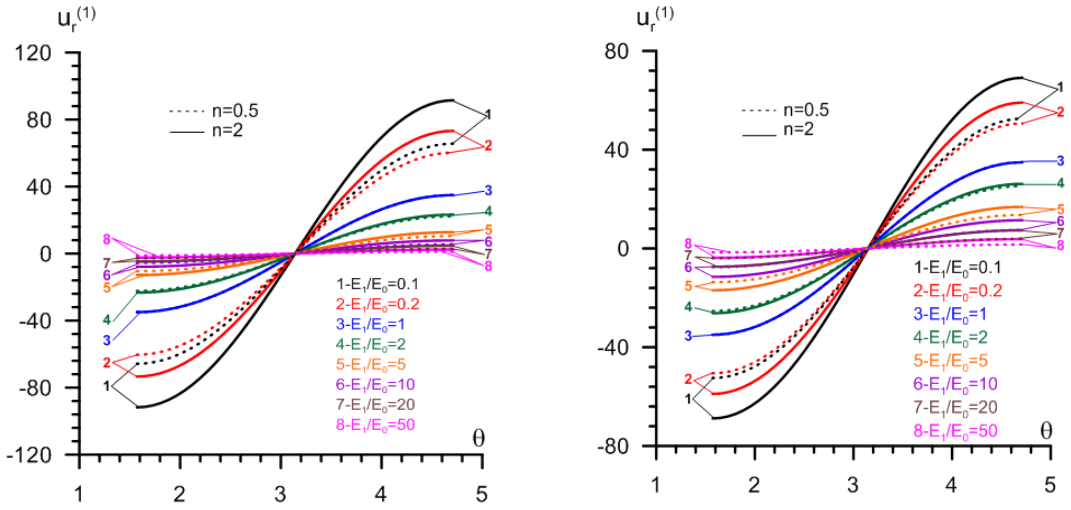
Şekil 4.63 $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15,\ q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.64 $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$ (b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15,\ q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.

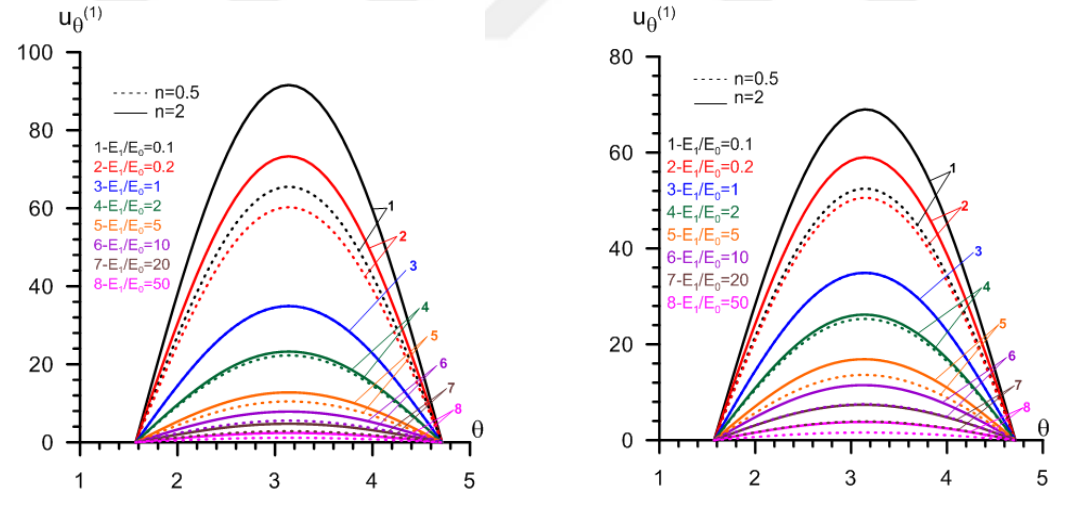
Şekil 4.65 ve Şekil 4.66'da dairesel delik civarında sırasıyla $u_r^{(1)}$ ve $u_\theta^{(1)}$ kutupsal yer değiştirme değerlerine farklı E_1/E_0 değerlerinin etkisi, $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15,\ q/E_0=0.005$ ile n=0.5 ve n=2 durumlarında (a) Problem 7 ve (b) Problem 8 için verilmiştir. Dairesel delik civarında oluşan kutupsal yer değiştirme değerleri, E_1/E_0 değeri arttıkça mutlak değerce önemli ölçüde azalmaktadır. n=2 için elde edilen değerler n=0.5 için elde edilen uygun değerlerden büyük kalmaktadır. Ayrıca, E_1/E_0 değeri arttıkça n=0.5 ve n=2 parametre değerleri için bulunan uygun yer değiştirme değerleri arasındaki fark azalmaktadır. Dairesel delik civarındaki bazı noktalarda E_1/E_0 ve n parametreleri değişiminin kutupsal yer değiştirmelere etkisi detaylı olarak, Tablo 4.8-Tablo 4.11 'de verilmiştir.



(a) (b)

Şekil 4.65 $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15,\ q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.



(a) (b)

Şekil 4.66 $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerlerine (a) $E(x_1)=E_0(ax_1+b)^n$

(b) $E(x_2)=E_0(cx_2+d)^n$ için $h_u/a=h_L/a=5,\ a/\ell=0.0125,\ h/\ell=0.15,\ q/E_0=0.005$ parametre değerlerinde n=0.5 ve n=2 durumlarında E_1/E_0 değişiminin etkisi.

Tablo 4.2-Tablo 4.7'de şerit-plağın içerdiği dairesel deliğin sınırındaki bazı noktalarda kutupsal gerilme değerlerinin, $h_u / a = h_L / a = 5, a / \ell = 0.0125$, $h / \ell = 0.15$ ile $q / E_0 = 0.005$ ve $q / E_0 = 0$ durumlarında, Problem 7 (4.39) ve Problem 8 (4.40) için E_1 / E_0 ve n parametreleri değişiminden nasıl etkilendiği verilmiştir. Belirtelim ki tablolarda verilen kesirli ifadelerin pay kısmındaki sayısal değerler, yapı elemanı malzemesinin öngerilme içermemesi ($q / E_0 = 0$) durumuna ait sayısal sonuçları; payda kısmındaki sayısal değerler, yapı elemanının mazlemesinin öngerilmeli ($q / E_0 = 0.005$) olması durumuna ait sayısal sonuçları göstermektedir.

Tablo 4.2'de Problem 7 (Young Modulü'nünü şerit-plağın Ox_1 ekseni doğrultusunda fonksiyonel değişmesi durumu) için dairesel delik civarındaki bazı noktalarda ($\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$), yukarıda verilen parametre değerlerinde şerit-plak malzemesinin öngerilmeli ($q / E_0 = 0.005$) veya öngerilme içermemesi ($q / E_0 = 0$) durumlarında farklı E_1 / E_0 ve n değerleri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)} / p$ gerilme değerleri verilmiştir. Sabit n değeri için E_1 / E_0 parametresi değeri arttıkça, $\sigma_{\theta\theta}^{(1)} / p$ gerilme değerleri $\theta = \mp\frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{3\pi}{4}$ noktalarında mutlak değerce artmakta, $\theta = 3\pi/4$ noktasında ise mutlak değerce azalmaktadır. E_1 / E_0 parametre değişiminin en fazla etkili olduğu noktalar $\theta = \mp\pi/2$ noktalarıdır. Sabit E_1 / E_0 değeri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)} / p$ gerilme değerleri, n değeri değişimi için monoton bir karaktere sahip değişmemektedir. Yapıda öngerilmenin varlığı gerilmelerin değerini mutlak değerce düşürmektedir ve öngerilmeli yapı elemanında $\sigma_{\theta\theta}^{(1)} / p$ gerilmeleri E_1 / E_0 ve n parametre değişiminden öngerilmesiz duruma göre daha fazla etkilenmektedir.

Tablo 4.3'de, Problem 8 (Young Modulü'nün. Ox_2 ekseni doğrultusunda fonksiyonel değişmesi durumu) için dairesel delik civarındaki bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ verilen parametre değerlerinde, şerit-plak mazlemesinin öngerilmeli ($q / E_0 = 0.005$) veya öngerilmesiz ($q / E_0 = 0$) olması durumlarında farklı E_1 / E_0 ve n değerleri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)} / p$ gerilme değerleri verilmiştir. Sabit n değeri için

E_1/E_0 parametre değeri arttıkça $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri $\theta = \mp\pi/2,\ \mp 3\pi/4$ noktalarında artmakta, $\theta = \pi$ noktasında ise azalmaktadır. E_1/E_0 parametre değişiminin en fazla etkili olduğu noktalar $\theta = \mp\pi/2$ noktalarıdır.

Sabit E_1/E_0 değeri ve farklı n değerleri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerlerinin değişimi, Problem 7 (Tablo 4.2)'de olduğu gibi monoton bir karakter taşımamaktadır.

Tablo 4.2 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli ($q/E_0 = 0.005$) veya öngerilmesiz $q/E_0 = 0$ olması durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri.

$\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
n = 1/2	$\frac{\pi}{2}$	−7.6055 −4.3071	−8.9217 −5.3575	−9.7772 −7.5231	−9.8013 −8.3599	−9.8076 −9.1286	−9.8085 −9.4500	−9.8087 −9.6247	−9.8087 −9.7341
	$\frac{3\pi}{4}$	−2.1077 −1.0662	−1.2435 −0.7822	−0.3820 −0.4211	−0.3492 −0.3872	−0.3407 −0.3611	−0.3396 −0.3506	−0.3393 −0.3450	−0.3392 −0.3415
	π	−1.1314 −1.0953	−1.3131 −1.2832	−1.6106 −1.6033	−1.6257 −1.6221	−1.6294 −1.6280	−1.6299 −1.6292	−1.6300 −1.6296	−1.6300 −1.6299
	$-\frac{3\pi}{4}$	1.4386 0.4513	0.4235 0.0070	−0.6887 −0.6376	−0.7425 −0.6984	−0.7573 −0.7345	−0.7594 −0.7471	−0.7599 −0.7536	−0.7600 −0.7575
	$-\frac{\pi}{2}$	8.2652 4.8975	9.7741 6.1439	10.7118 8.4380	10.7180 9.2660	10.7172 10.0342	10.7169 10.3565	10.7169 10.5319	10.7169 10.6418
n = 2	$\frac{\pi}{2}$	−9.4458 −3.7103	−9.5947 −4.9374	−9.7772 −7.5231	−9.8158 −8.3097	−9.8480 −9.0171	−9.8634 −9.3514	−9.8739 −9.5646	−9.8830 −9.7268
	$\frac{3\pi}{4}$	−0.8213 −0.4274	−0.6276 −0.4219	−0.3820 −0.4211	−0.3300 −0.3754	−0.2874 −0.3223	−0.2675 −0.2923	−0.2542 −0.2707	−0.2430 −0.2521
	π	−1.4182 −1.3492	−1.4998 −1.4628	−1.6106 −1.6033	−1.6346 −1.6311	−1.6537 −1.6524	−1.6623 −1.6616	−1.6677 −1.6674	−1.6721 −1.6719
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.0680 −0.3663	−0.3301 −0.4309	−0.6887 −0.6376	−0.7726 −0.7211	−0.8455 −0.8081	−0.8814 −0.8554	−0.9064 −0.8893	−0.9282 −0.9189
	$-\frac{\pi}{2}$	10.4161 4.5282	10.5704 5.8257	10.7118 8.4380	10.7251 9.2091	10.7267 9.8918	10.7230 10.2090	10.7183 10.4080	10.7126 10.5559
n = 5	$\frac{\pi}{2}$	−9.5634 −3.4602	−9.6416 −4.8099	−9.7772 −7.5231	−9.8201 −8.2987	−9.8662 −8.9856	−9.8945 −9.3161	−9.9182 −9.5370	−9.9438 −9.7208
	$\frac{3\pi}{4}$	−0.6762 −0.4025	−0.5682 −0.4541	−0.3820 −0.4211	−0.3243 −0.3717	−0.2637 −0.3046	−0.2277 −0.2601	−0.1985 −0.2229	−0.1682 −0.1845
	π	−1.4762 −1.4054	−1.5249 −1.4878	−1.6106 −1.6033	−1.6372 −1.6337	−1.6647 −1.6634	−1.6805 −1.6799	−1.6929 −1.6926	−1.7049 −1.7048
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.2574 −0.4326	−0.4102 −0.4689	−0.6887 −0.6376	−0.7813 −0.7279	−0.8833 −0.8402	−0.9475 −0.9140	−1.0022 −0.9773	−1.0623 −1.0459
	$-\frac{\pi}{2}$	10.5496 4.2865	10.6201 5.6995	10.7118 8.4380	10.7292 9.1965	10.7343 9.8497	10.7309 10.1505	10.7225 10.3403	10.7064 10.4830

Tablo 4.3 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n değerleri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri.

$\dfrac{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
n = 1/2	$\frac{\pi}{2}$	−39.1445 −25.6426	−35.2383 −23.5418	−9.7772 −7.5231	1.1659 1.0163	9.4515 8.6470	11.7338 11.1805	12.4660 12.1594	12.6975 12.5700
	$\frac{3\pi}{4}$	−7.0042 −4.9999	−6.2138 −4.5207	−0.3820 −0.4211	3.0236 2.4677	6.1846 5.6151	7.1449 6.7853	7.4615 7.2662	7.5627 7.4820
	π	5.8521 3.2656	4.8861 2.7172	−1.6106 −1.6033	−4.7351 −4.2046	−7.5083 −6.9741	−8.3512 −8.0156	−8.6289 −8.4470	−8.7175 −8.6424
	$-\frac{3\pi}{4}$	−11.1353 −7.5871	−9.7658 −6.7931	−0.6887 −0.6376	3.2063 2.6328	6.3309 5.7575	7.2341 6.8756	7.5269 7.3330	7.6197 7.5396
	$-\frac{\pi}{2}$	−13.3695 −8.5353	−10.3517 −6.6979	10.7118 8.4380	20.6986 17.4130	28.8777 26.3851	31.2854 29.7941	32.0882 31.2909	32.3482 32.0200
n = 2	$\frac{\pi}{2}$	−55.6655 −30.3309	−41.4503 −25.3962	−9.7772 −7.5231	1.9816 1.6873	15.3965 13.7519	23.8236 22.0839	30.6796 29.2328	37.3917 36.4829
	$\frac{3\pi}{4}$	−9.2368 −5.9533	−7.1800 −4.9591	−0.3820 −0.4211	3.2185 2.6117	8.3916 7.4512	12.3932 11.4601	16.1929 15.4104	20.5111 20.0019
	π	10.5873 4.9362	6.7699 3.4684	−1.6106 −1.6033	−4.8501 −4.2806	−8.9645 −8.1362	−11.9941 −11.2005	−14.8569 −14.2056	−18.1316 −17.7144
	$-\frac{3\pi}{4}$	−20.8360 −11.9120	−13.7179 −8.7856	−0.6887 −0.6376	3.2631 2.6603	7.3706 6.5536	9.8148 9.0854	11.7525 11.1933	13.5995 13.2678
	$-\frac{\pi}{2}$	−34.9843 −18.8343	−19.6794 −11.8330	10.7118 8.4380	20.7049 17.2982	31.1970 27.8379	37.1885 34.4471	41.6008 39.6146	45.3589 44.2391
n = 5	$\frac{\pi}{2}$	−55.0559 −28.5379	−41.0178 −24.6642	−9.7772 −7.5231	2.0538 1.7446	15.7377 13.9828	24.5253 22.5518	31.9333 30.1342	39.6330 38.3081
	$\frac{3\pi}{4}$	−9.0466 −5.7289	−7.1050 −4.8625	−0.3820 −0.4211	3.2260 2.6140	8.4655 7.4767	12.6682 11.6186	16.9402 15.9634	22.4267 21.6611
	π	10.5242 4.5525	6.7107 3.3283	−1.6106 −1.6033	−4.8430 −4.2710	−8.8741 −8.0203	−11.7866 −10.9287	−14.5537 −13.7916	−17.8236 −17.2580
	$-\frac{3\pi}{4}$	−21.8256 −11.9376	−13.9717 −8.8028	−0.6887 −0.6376	3.2430 2.6395	7.2238 6.3886	9.4805 8.7056	11.1702 10.5373	12.6108 12.1898
	$-\frac{\pi}{2}$	−37.0866 −18.9981	−20.3941 −12.0399	10.7118 8.4380	20.6215 17.2055	30.7641 27.3072	36.3613 33.4052	40.2880 37.9849	43.1439 41.6715

Tablo 4.4'de Problem 7 (Young Modulü'nün şerit-plağın Ox_1 ekseni doğrultusunda fonksiyonel değişmesi durumu) için dairesel delik civarında bazı noktalarda $(\theta = \mp\pi/2, \pi, \mp 3\pi/4)$ yukarıda verilen parametre değerlerinde şerit-plağın öngerilmeli $(q/E_0 = 0.005)$ ve öngerilmesiz $(q/E_0 = 0)$ durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri incelenmiştir. Sabit n değeri için E_1/E_0 parametre değeri arttıkça $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri incelenen tüm noktalarda

$\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0 > 1$ için mutlak değerce artarken, $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0 < 1$ için $\theta = 3\pi/4$ noktasında mutlak değerce azalmaktadır. Değişimin en fazla olduğu noktalar $\theta = \mp\pi/2$ noktalarıdır.

Sabit $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ değeri için de n değişimi en çok $\theta = \mp\pi/2$ noktalarını etkilemektedir. Yapıdaki öngerilme $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerini mutlak değerce azaltırken, öngerilmesiz yapı elemanı ise $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerlerini mutlak değerce arttırmaktadır. Belirtelim ki sabit $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ değerinde ele alınan tüm noktalarda $n = 1/2 \to 2$ geçişteki etki $n = 2 \to 5$ e geçişteki etkiden çok daha fazladır. Problem 7 için ele alınan parametre değerlerinin değişimi $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ kutupsal gerilme değerleri için $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}/p$ kutupsal gerilme değerlerine göre çok küçük kalmaktadır.

Tablo 4.5'de Problem 8 (Young Modulü'nün şerit-plağın Ox_2 ekseni doğrultusunda fonksiyonel değişmesi durumu) için dairesel delik civarındaki bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ yukarıda verilen parametre değerlerinde şerit-plağın öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n değerleri için $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri incelenmiştir. Sabit n değeri için $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ parametre değeri arttıkça $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri $\theta = \mp\pi/2$ noktalarında artmakta, $\theta = \mp 3\pi/4$ noktalarında $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0 < 1$ için mutlak değerce azalırken, $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0 > 1$ için mutlak değerce artmaktadır.

Sabit $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ değeri için $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri n arttıkça dairesel deliğin ilave yüklemeye yakın olan üst yüzeyinde $\theta \in (\pi/2, \pi)$ aralığında mutlak değerce artmaktadır, deliğin alt yüzeyinde düzgün dağılım göstermemektedir.

Tablo 4.4 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri.

$\frac{\sigma_{rr}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0}}{\sigma_{rr}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
n = 1/2	$\frac{\pi}{2}$	−0.8051 −0.5142	−1.1236 −0.6826	−1.4111 −1.0594	−1.4223 −1.1943	−1.4253 −1.3174	−1.4257 −1.3687	−1.4258 −1.3965	−1.4259 −1.4140
	$\frac{3\pi}{4}$	0.0281 0.0033	0.0046 −0.0100	0.0073 −0.0014	0.0076 0.0020	0.0077 0.0050	0.0077 0.0063	0.0077 0.0070	0.0077 0.0074
	π	−0.2010 −0.1928	−0.2296 −0.2228	−0.2722 −0.2703	−0.2733 −0.2724	−0.2735 −0.2731	−0.2735 −0.2733	−0.2735 −0.2734	−0.2735 −0.2735
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.0647 −0.0416	−0.0376 −0.0257	−0.0401 −0.0326	−0.0406 −0.0357	−0.0408 −0.0384	−0.0408 −0.0395	−0.0408 −0.0401	−0.0408 −0.0405
	$-\frac{\pi}{2}$	1.0509 0.7260	1.4493 0.9746	1.8220 1.4593	1.8344 1.6008	1.8374 1.7272	1.8378 1.7796	1.8379 1.8080	1.8379 1.8258
n = 2	$\frac{\pi}{2}$	−1.2749 −0.4947	−1.3337 −0.6623	−1.4111 −1.0594	−1.4287 −1.1893	−1.4438 −1.3095	−1.4513 −1.3678	−1.4565 −1.4057	−1.4610 −1.4352
	$\frac{3\pi}{4}$	0.0013 −0.0197	0.0040 −0.0133	0.0073 −0.0014	0.0078 0.0019	0.0082 0.0049	0.0083 0.0062	0.0083 0.0071	0.0084 0.0077
	π	−0.2477 −0.2320	−0.2591 −0.2505	−0.2722 −0.2703	−0.2742 −0.2733	−0.2753 −0.2749	−0.2755 −0.2753	−0.2754 −0.2753	−0.2753 −0.2752
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.0325 −0.0192	−0.0357 −0.0232	−0.0401 −0.0326	−0.0410 −0.0357	−0.0416 −0.0386	−0.0419 −0.0400	−0.0421 −0.0409	−0.0423 −0.0416
	$-\frac{\pi}{2}$	1.6471 0.7883	1.7248 1.0068	1.8220 1.4593	1.8419 1.5968	1.8577 1.7211	1.8648 1.7801	1.8694 1.8180	1.8731 1.8471
n = 5	$\frac{\pi}{2}$	−1.3192 −0.4587	−1.3520 −0.6453	−1.4111 −1.0594	−1.4306 −1.1884	−1.4519 −1.3088	−1.4654 −1.3701	−1.4768 −1.4134	−1.4894 −1.4518
	$\frac{3\pi}{4}$	0.0032 −0.0201	0.0048 −0.0135	0.0073 −0.0014	0.0079 0.0019	0.0084 0.0049	0.0087 0.0063	0.0088 0.0072	0.0088 0.0078
	π	−0.2563 −0.2399	−0.2626 −0.2539	−0.2722 −0.2703	−0.2745 −0.2735	−0.2762 −0.2758	−0.2768 −0.2766	−0.2768 −0.2767	−0.2763 −0.2763
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.0346 −0.0202	−0.0367 −0.0235	−0.0401 −0.0326	−0.0411 −0.0358	−0.0420 −0.0388	−0.0426 −0.0403	−0.0430 −0.0415	−0.0434 −0.0424
	$-\frac{\pi}{2}$	1.7066 0.7622	1.7492 0.9947	1.8220 1.4593	1.8442 1.5963	1.8670 1.7215	1.8802 1.7838	1.8906 1.8266	1.9010 1.8632

Tablo 4.5 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\sigma_{rr}^{(1)}/p$ gerilme değerleri.

$\frac{\sigma_{rr}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0}}{\sigma_{rr}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
$n=1/2$	$\frac{\pi}{2}$	−7.1448 −4.6066	−6.3630 −4.1834	−1.4111 −1.0594	0.2977 0.2665	1.2617 1.1583	1.4892 1.4210	1.5609 1.5236	1.5837 1.5682
	$\frac{3\pi}{4}$	1.2402 0.8187	1.0623 0.7150	0.0073 −0.0014	0.0370 0.0195	0.4555 0.4065	0.6207 0.5853	0.6761 0.6562	0.6937 0.6854
	π	3.8955 2.4949	3.3316 2.1657	−0.2722 −0.2703	−1.4009 −1.2152	−1.8585 −1.7179	−1.9391 −1.8577	−1.9656 −1.9226	−1.9747 −1.9571
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.2389 −0.1478	−0.2378 −0.1511	−0.0401 −0.0326	0.4732 0.3887	1.2858 1.1380	1.5222 1.4438	1.6085 1.5654	1.6353 1.6175
	$-\frac{\pi}{2}$	−2.2562 −1.3831	−1.7177 −1.0568	1.8220 1.4593	3.0140 2.5470	3.5572 3.2538	3.6735 3.5000	3.7151 3.6237	3.7299 3.6924
$n=2$	$\frac{\pi}{2}$	−11.8915 −6.3160	−8.2633 −4.9580	−1.4111 −1.0594	0.4104 0.3587	1.7884 1.6013	2.2311 2.0700	2.3481 2.2383	2.2552 2.2009
	$\frac{3\pi}{4}$	4.4328 2.4586	2.4150 1.5043	0.0073 −0.0014	0.0683 0.0451	1.0045 0.8824	2.1796 2.0068	3.5526 3.3738	5.3532 5.2157
	π	8.1216 4.3827	5.0631 3.0385	−0.2722 −0.2703	−1.4721 −1.2684	−2.0427 −1.8486	−1.8436 −1.7261	−1.2915 −1.2422	−0.3433 −0.3415
	$-\frac{3\pi}{4}$	0.5647 0.3402	0.0418 0.0455	−0.0401 −0.0326	0.4195 0.3412	1.3560 1.1965	2.1904 2.0156	3.0150 2.8598	3.9498 3.8449
	$-\frac{\pi}{2}$	−6.7905 −3.5489	−3.6194 −2.0980	1.8220 1.4593	3.0659 2.5736	3.7339 3.3352	3.6311 3.3641	3.1810 3.0290	2.3590 2.3006
$n=5$	$\frac{\pi}{2}$	−12.1513 −6.1142	−8.3182 −4.8904	−1.4111 −1.0594	0.4215 0.3676	1.8429 1.6416	2.3113 2.1276	2.4191 2.2843	2.2495 2.1753
	$\frac{3\pi}{4}$	5.1476 2.7272	2.6353 1.6149	0.0073 −0.0014	0.0719 0.0481	1.0253 0.8958	2.2770 2.0788	3.8690 3.6373	6.2855 6.0641
	π	8.5887 4.4060	5.1948 3.0568	−0.2722 −0.2703	−1.4799 −1.2737	−2.0993 −1.8909	−1.9389 −1.8024	−1.3636 −1.3014	−0.1983 −0.2015
	$-\frac{3\pi}{4}$	0.9942 0.5587	0.1521 0.1149	−0.0401 −0.0326	0.4023 0.3265	1.2377 1.0852	1.9460 1.7737	2.6332 2.4697	3.4026 3.2763
	$-\frac{\pi}{2}$	−7.4856 −3.7105	−3.8331 −2.1784	1.8220 1.4593	3.0698 2.5736	3.7892 3.3671	3.7541 3.4497	3.3448 3.1532	2.4456 2.3616

Tablo 4.6'de, Problem 7 (Young Modulü'nün Ox_1 ekseni doğrultusunda fonksiyonel değişmesi durumu) için dairesel delik civarındaki bazı noktalarda $(\theta = \mp\pi/2, \pi, \mp 3\pi/4)$ ve verilen parametre değerlerinde şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilme içermemesi $(q/E_0 = 0)$ durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri verilmiştir. Sabit n değeri için E_1/E_0 parametre değeri arttıkça, $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerleri $\theta = \pi, \mp 3\pi/4$ noktalarında mutlak değerce artmakta, $\theta = \mp\pi/2$ noktalarında azalmaktadır. E_1/E_0 parametre değişiminin en fazla etkili olduğu nokta $\theta = \pi$ noktasıdır. Sabit E_1/E_0 değerinde n değişiminin etkisi çok azdır. Yapıda öngerilmenin varlığı, gerilmelerin değerini mutlak değerce düşürmektedir.

Tablo 4.7'de, Problem 8 (Young Modulü'nün Ox_2 ekseni ekseni doğrultusunda fonksiyonel değişmesi durumu) için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ ve verilen parametre değerlerinde şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $(q/E_0 = 0.005)$ veya öngerilme içermemesi $(q/E_0 = 0)$ durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri verilmiştir. Sabit n değeri için $\mathbf{E_1/E_0}$ parametresi değeri arttıkça $\mathbf{E_1/E_0} < 1$ durumunda $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerleri $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/4$ noktalarında mutlak değerce azalmaktadır, $\mathbf{E_1/E_0} > 1$ durumunda ise mutlak değerce artmaktadır. Yapıda öngerilmenin varlığı gerilme değerlerini mutlak değerce düşürmektedir ve öngerilmesiz yapı elemanında $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ kayma gerilmesi değerleri $\mathbf{E_1/E_0}$ ve n parametre değişiminden öngerilmeli duruma göre mutlak değerce daha fazla etkilenmektedir. $\mathbf{E_1/E_0} = 1$ değeri homojen izotrop malzeme durumuna denk geldiği için n değişiminin etkisi olmamaktadır. Sabit $\mathbf{E_1/E_0}$ değerinde ele alınan tüm noktalarda $n = 1/2 \to 2$ geçişteki etki $n = 2 \to 5$ e geçişteki etkiden çok daha fazladır.

Belirtelim ki, şerit-plak malzemesinin fonksiyonel değişiminin Ox_2 doğrultusu boyunca alınması durumunda (Problem 8) bulunan tüm kutupsal gerilme değerlerine $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0$ ve n parametre değişiminlerinin etkisi, şerit-plak malzemesinin fonksiyonel değişiminin Ox_1 doğrultusu boyunca alınması (Problem 7) durumunda bulunan uygun gerilmelere etkisinden daha fazla olduğu tespit edilmiştir.

Tablo 4.6 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n değerleri için $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri.

$\frac{\tau_{r\theta}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0}}{\tau_{r\theta}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
$n = 1/2$	$\frac{\pi}{2}$	0.5316 0.2526	0.3735 0.2179	0.1886 0.1558	0.1808 0.1615	0.1787 0.1699	0.1784 0.1738	0.1783 0.1759	0.1783 0.1773
	$\frac{3\pi}{4}$	−0.2949 −0.1692	−0.4402 −0.2582	−0.5910 −0.4384	−0.5973 −0.4979	−0.5989 −0.5518	−0.5992 −0.5742	−0.5992 −0.5864	−0.5993 −0.5941
	π	0.8170 0.5499	1.1072 0.7236	1.4352 1.1207	1.4478 1.2435	1.4510 1.3541	1.4514 1.4002	1.4515 1.4252	1.4515 1.4409
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.4623 −0.3349	−0.6425 −0.4575	−0.8362 −0.6827	−0.8432 −0.7434	−0.8450 −0.7976	−0.8425 −0.8202	−0.8453 −0.8324	−0.8453 −0.8400
	$-\frac{\pi}{2}$	0.5179 0.2513	0.3472 0.2013	0.1534 0.1230	0.1443 0.1263	0.1418 0.1335	0.1415 0.1370	0.1413 0.1391	0.1413 0.1404
$n = 2$	$\frac{\pi}{2}$	0.2821 0.1165	0.2420 0.1368	0.1886 0.1558	0.1764 0.1571	0.1660 0.1565	0.1609 0.1554	0.1573 0.1542	0.1543 0.1527
	$\frac{3\pi}{4}$	−0.5151 −0.1893	−0.5478 −0.2633	−0.5910 −0.4384	−0.6008 −0.4962	−0.6093 −0.5501	−0.6134 −0.5764	−0.6163 −0.5937	−0.6188 −0.6072
	π	1.2644 0.5782	1.3401 0.7459	1.4352 1.1207	1.4551 1.2403	1.4713 1.3503	1.4787 1.4033	1.4837 1.4377	1.4879 1.4644
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.7384 −0.4040	−0.7817 −0.4924	−0.8362 −0.6827	−0.8475 −0.7423	−0.8564 −0.7970	−0.8604 −0.8234	−0.8630 −0.8404	−0.8652 −0.8537
	$-\frac{\pi}{2}$	0.2542 0.1058	0.2118 0.1171	0.1534 0.1230	0.1394 0.1213	0.1269 0.1180	0.1206 0.1154	0.1162 0.1132	0.1123 0.1108
$n = 5$	$\frac{\pi}{2}$	0.2525 0.1027	0.2297 0.1289	0.1886 0.1558	0.1751 0.1559	0.1605 0.1511	0.1513 0.1459	0.1436 0.1404	0.1353 0.1336
	$\frac{3\pi}{4}$	−0.5395 −0.1746	−0.5579 −0.2567	−0.5910 −0.4384	−0.6019 −0.4959	−0.6137 −0.5505	−0.6212 −0.5788	−0.6275 −0.5991	−0.6344 −0.6175
	π	1.3212 0.5544	1.3633 0.7350	1.4352 1.1207	1.4573 1.2399	1.4803 1.3511	1.4939 1.4076	1.5048 1.4472	1.5160 1.4818
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.7711 −0.3971	−0.7951 −0.4891	−0.8362 −0.6827	−0.8487 −0.7423	−0.8616 −0.7982	−0.8691 −0.8266	−0.8749 −0.8465	−0.8808 −0.8639
	$-\frac{\pi}{2}$	0.2235 0.0910	0.1989 0.1085	0.1534 0.1230	0.1379 0.1199	0.1206 0.1117	0.1095 0.1043	0.0999 0.0968	0.0891 0.0875

Tablo 4.7 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \ \pi,\ \ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı E_1/E_0 ve n değerleri için $\tau_{r\theta}^{(1)}/p$ gerilme değerleri.

$\frac{\tau_{r\theta}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0}}{\tau_{r\theta}^{(1)}/p\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
n = 1/2	$\frac{\pi}{2}$	1.4522 1.0146	1.3005 0.9240	0.1886 0.1558	−0.3962 −0.3303	−0.8506 −0.7766	−0.9742 −0.9275	−1.0140 −0.9887	−1.0267 −1.0162
	$\frac{3\pi}{4}$	−1.0628 −0.6845	−1.0194 −0.6692	−0.5910 −0.4384	0.2377 0.2197	1.4115 1.3017	1.8022 1.7231	1.9302 1.8858	1.9705 1.9520
	π	1.9974 1.3173	1.8860 1.2696	1.4352 1.1207	1.5441 1.3001	1.7949 1.6416	1.8887 1.7997	1.9211 1.8739	1.9317 1.9123
	$-\frac{3\pi}{4}$	0.6627 0.3998	0.5339 0.3227	−0.8362 −0.6827	−2.3835 −2.0286	−4.3572 −3.9967	−5.0063 −4.7766	−5.2179 −5.0929	−5.2843 −5.2327
	$-\frac{\pi}{2}$	−1.3154 −0.8687	−1.1228 −0.7557	0.1534 0.1230	0.6812 0.5761	1.0681 0.9784	1.1743 1.1199	1.2090 1.1798	1.2201 1.2081
n = 2	$\frac{\pi}{2}$	2.0276 1.2786	1.5541 1.0487	0.1886 0.1558	−0.4287 −0.3543	−1.1081 −0.9890	−1.4270 −1.3231	−1.5474 −1.4752	−1.4650 −1.4305
	$\frac{3\pi}{4}$	1.7435 0.9462	0.2401 0.1509	−0.5910 −0.4384	0.3267 0.2926	2.5168 2.2614	4.6440 4.3142	6.8753 6.5562	9.5663 9.3352
	π	2.2771 1.2262	1.8691 1.1456	1.4352 1.1207	1.4820 1.2399	1.6763 1.4992	1.8601 1.7258	2.0322 1.9374	2.2091 2.1560
	$-\frac{3\pi}{4}$	0.1764 0.0851	0.4790 0.2740	−0.8362 −0.6827	−2.3015 −1.9466	−4.9036 −4.3957	−7.1603 −6.6479	−9.4117 −8.9725	−12.0229 −11.7318
	$-\frac{\pi}{2}$	−2.6455 −1.4711	−1.6702 −1.0387	0.1534 0.1230	0.6922 0.5814	1.2007 1.0754	1.4521 1.3483	1.6082 1.5334	1.7067 1.6653
n = 5	$\frac{\pi}{2}$	2.0270 1.2470	1.5511 1.0352	0.1886 0.1558	−0.4290 −0.3548	−1.1207 −0.9949	−1.4524 −1.3357	−1.5584 −1.4715	−1.3377 −1.2948
	$\frac{3\pi}{4}$	2.6957 1.3854	0.5568 0.3359	−0.5910 −0.4384	0.3336 0.2979	2.5390 2.2697	4.7375 4.3663	7.1826 6.7837	10.4505 10.1025
	π	2.1819 1.1103	1.8032 1.0830	1.4352 1.1207	1.4668 1.2256	1.6023 1.4258	1.7236 1.5867	1.8238 1.7223	1.8904 1.8281
	$-\frac{3\pi}{4}$	−0.4090 −0.2116	0.3471 0.1943	−0.8362 −0.6827	−2.2656 −1.9141	−4.6698 −4.1657	−6.6942 −6.1668	−8.7238 −8.2378	−11.1485 −10.7761
	$-\frac{\pi}{2}$	−2.7605 −1.4682	−1.7024 −1.0416	0.1534 0.1230	0.6905 0.5792	1.1916 1.0619	1.4348 1.3220	1.5800 1.4924	1.6525 1.5973

Tablo 4.8-Tablo 4.11'de, şerit-plağın içerdiği dairesel delik civarındaki bazı noktalarında kutupsal yer değiştirme değerlerinin, $h_u / a = h_L / a = 5,\ a / \ell = 0.0125$, $h / \ell = 0.15$, $q / E_0 = 0.005$ ve/veya $q / E_0 = 0$ için farklı E_1 / E_0 ve n parametre değerlerinin etkisi, Problem 7 (4.39) ve Problem 8 (4.40) için verilmiştir. Belirtelim ki, tablolarda verilen kesirli ifadelerde pay kısmındaki değerler, yapı elemanı malzemesinin öngerilme içermemesi $(q / E_0 = 0)$ durumuna ait değerleri; payda kısmındaki sayısal değerler, yapı elemanı malzemesinin öngerilme $(q / E_0 = 0.005)$ içermesi duruma ait değerleri göstermektedir.

Tablo 4.8 ve Tablo 4.9'da, sırasıyla Problem 7 ve Problem 8 için dairesel delik civarındaki bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi / 2,\ \pi,\ \mp 3\pi / 4\right)$ verilen parametre değerlerinde, şerit-plak malzemesinin öngerilmeli($q / E_0 = 0.005$) veya öngerilme içermemesi $(q / E_0 = 0)$ durumlarında, farklı $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0$ ve n değerleri için $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerleri verilmiştir. Tüm n değerleri için $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0$ değeri arttıkça $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerleri $\theta = \pi,\ \mp 3\pi / 4$ noktalarında azalmaktadır, $\theta = \mp\pi / 2$ noktalarında bu yer değiştirme değerleri sıfırdır. Tüm n değerleri için $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0$ parametre değişiminin en fazla etkili olduğu nokta $\theta = \pi$ noktasıdır. Sabit $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0$ değeri için $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerleri $\theta = \pi,\ \mp 3\pi / 4$ noktalarında n değeri arttıkça artmaktadır. Bu değişimler $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0 < 1$ için $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0 > 1$ durumuna göre daha fazladır. Belirtelim ki sabit $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0$ değerinde ele alınan tüm noktalarda $n = 1/2 \to 2$ geçişteki etki $n = 2 \to 5$ e geçişteki etkiden çok daha fazladır. Yapıda öngerilmenin varlığı yer değiştirmelerin değerini mutlak değerce düşürmektedir ve öngerilmesiz yapı elemanında $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerleri $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0$ ve n parametre değişiminden öngerilmeli duruma göre daha fazla etkilenmektedir. $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0 = 1$ değeri homojen izotrop malzeme durumuna denk geldiği için n değişiminin etkisi olmamaktadır.

Tablo 4.8 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n değerleri için $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerleri.

$\frac{u_\theta^{(1)}\big\vert_{q/E_0=0}}{u_\theta^{(1)}\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
n = 1/2	$\frac{\pi}{2}$	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
	$\frac{3\pi}{4}$	76.3720/46.2812	66.7459/42.5602	31.3789/24.6690	18.2590/15.7379	7.9253/7.4044	4.0518/3.9105	2.0455/2.0087	0.8221/0.8160
	π	108.1708/65.5341	94.5250/60.2557	44.4137/34.9127	25.8410/22.2718	11.2156/10.4783	5.7340/5.5339	2.8947/2.8427	1.1633/1.1548
	$-\frac{3\pi}{4}$	76.2723/46.1871	66.6640/42.4818	31.3552/24.6455	18.2470/15.7260	7.9205/7.3996	4.0494/3.9081	2.0443/2.0075	0.8216/0.8156
	$-\frac{\pi}{2}$	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
n = 2	$\frac{\pi}{2}$	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
	$\frac{3\pi}{4}$	144.4947/64.7013	92.7968/51.7869	31.3789/24.6690	19.2081/16.4313	9.8445/9.0386	5.8656/5.5608	3.4696/3.3560	1.7248/1.6938
	π	204.6643/91.5774	131.4047/73.3009	44.4137/34.9127	27.1834/23.2524	13.9300/12.7894	8.2991/7.8678	4.9087/4.7480	2.4400/2.3961
	$-\frac{3\pi}{4}$	144.2953/64.5191	92.6890/51.6841	31.3552/24.6455	19.1961/16.4193	9.8397/9.0337	5.8631/5.5584	3.4683/3.3548	1.7243/1.6933
	$-\frac{\pi}{2}$	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
n = 5	$\frac{\pi}{2}$	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
	$\frac{3\pi}{4}$	163.3268/68.1905	98.6106/53.5290	31.3789/24.6690	19.4323/16.5939	10.4807/9.5691	6.6645/6.2709	4.2997/4.1244	2.4721/2.4078
	π	231.3135/96.4985	139.6302/75.7615	44.4137/34.9127	27.5004/23.4823	14.8297/13.5396	9.4290/8.8720	6.0827/5.8346	3.4969/3.4060
	$-\frac{3\pi}{4}$	163.1151/67.9972	98.5002/53.4237	31.3552/24.6455	19.4202/16.5819	10.4757/9.5642	6.6620/6.2684	4.2984/4.1231	2.4716/2.4073
	$-\frac{\pi}{2}$	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0

Tablo 4.9 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n değerleri için $u_\theta^{(1)}$ yer değiştirme değerleri.

$\dfrac{u_\theta^{(1)}\big\vert_{q/E_0=0}}{u_\theta^{(1)}\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
$n = 1/2$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{54.8054}{36.9270}$	$\frac{51.8517}{35.5962}$	$\frac{31.3789}{24.6690}$	$\frac{21.2085}{17.9222}$	$\frac{10.5485}{9.6654}$	$\frac{5.5845}{5.3265}$	$\frac{2.8428}{2.7744}$	$\frac{1.1435}{1.1323}$
	π	$\frac{77.9508}{52.5073}$	$\frac{73.7166}{50.5932}$	$\frac{44.4137}{34.9127}$	$\frac{29.9432}{25.3022}$	$\frac{14.8670}{13.6221}$	$\frac{7.8675}{7.5040}$	$\frac{4.0045}{3.9081}$	$\frac{1.6108}{1.5949}$
	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{55.2904}{37.2350}$	$\frac{52.2658}{35.8635}$	$\frac{31.3552}{24.6455}$	$\frac{21.0816}{17.8135}$	$\frac{10.4458}{9.5711}$	$\frac{5.5251}{5.2698}$	$\frac{2.8118}{2.7441}$	$\frac{1.1310}{1.1198}$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
$n = 2$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{85.1920}{48.3965}$	$\frac{65.4121}{41.4548}$	$\frac{31.3789}{24.6690}$	$\frac{22.0004}{18.5581}$	$\frac{13.3947}{12.0056}$	$\frac{8.7963}{8.1734}$	$\frac{5.5194}{5.2664}$	$\frac{2.7722}{2.7065}$
	π	$\frac{121.5207}{68.9963}$	$\frac{93.1335}{59.0001}$	$\frac{44.4137}{34.9127}$	$\frac{31.1960}{26.1946}$	$\frac{18.8489}{16.8940}$	$\frac{12.3560}{11.4810}$	$\frac{7.7428}{7.3880}$	$\frac{3.8844}{3.7924}$
	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{86.4198}{49.0464}$	$\frac{66.1254}{41.8777}$	$\frac{31.3552}{24.6455}$	$\frac{21.9590}{18.4379}$	$\frac{13.2188}{11.8479}$	$\frac{8.6447}{8.0327}$	$\frac{5.4068}{5.1591}$	$\frac{2.7075}{2.6434}$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
$n = 5$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{94.3680}{51.2173}$	$\frac{68.5094}{42.6814}$	$\frac{31.3789}{24.6690}$	$\frac{22.2756}{18.6821}$	$\frac{14.0404}{12.5231}$	$\frac{9.7645}{9.0040}$	$\frac{6.6565}{6.2926}$	$\frac{3.8503}{3.7247}$
	π	$\frac{134.6584}{73.0377}$	$\frac{97.5580}{60.7532}$	$\frac{44.4137}{34.9127}$	$\frac{31.4424}{26.3690}$	$\frac{19.7535}{17.6186}$	$\frac{13.7096}{12.6418}$	$\frac{9.3305}{8.8205}$	$\frac{5.3884}{5.2127}$
	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{95.7974}{51.9346}$	$\frac{69.2781}{43.1280}$	$\frac{31.3552}{24.6455}$	$\frac{22.1321}{18.5604}$	$\frac{13.8502}{12.3534}$	$\frac{9.5862}{8.8397}$	$\frac{6.5083}{6.1526}$	$\frac{3.7483}{3.6262}$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$

Tablo 4.10 ve Tablo 4.11'de, sırasıyla Problem 7 ve Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda ($\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$) ve verilen parametre değerlerinde şerit-plak malzemesinin öngerilmeli ($q/E_0 = 0.005$) veya öngerilme içermemesi ($q/E_0 = 0$) durumlarında, farklı $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n için $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerleri verilmiştir.

Tüm n değerleri için $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ değeri arttıkça, $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerleri $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ noktalarında mutlak değerce azalmakta ve en fazla etki $\theta = \mp\pi/2$ noktasında oluşmaktadır. Sabit $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ değerleri için $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerleri $\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4$ noktalarında n değeri arttıkça mutlak değerce artmaktadır. Bu değişimler $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0 < 1$ için $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0 > 1$ durumuna göre daha fazladır. Belirtelim ki sabit $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ için ele alınan tüm noktalarda $n = 1/2 \to 2$ e geçişteki etki $n = 2 \to 5$ e geçişteki etkiden çok daha fazladır. Yapı elemanının öngerilmeli malzemeden yapılmış olması, verilen yükleme için elde edilen yer değiştirmelerin değerini mutlak değerce düşürmektedir. Ayrıca, yapı elemanının öngerilme içermemesi durumunda elde edilen $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerleri $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n parametre değişiminden, yapı elemanı malzemesinin öngerilme içermesi durumunda elde edilen uygun yer değiştirme değerlerine göre daha fazla etkilenmektedir.

Tablo 4.10 Problem 7 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n değerleri için $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerleri.

$\dfrac{u_r^{(1)}\big\vert_{q/E_0=0}}{u_r^{(1)}\big\vert_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
$n = 1/2$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-108.5551}{-65.7543}$	$\frac{-94.7069}{-60.3798}$	$\frac{-44.4405}{-34.9375}$	$\frac{-25.8541}{-22.2843}$	$\frac{-11.2209}{-10.4834}$	$\frac{-5.7366}{-5.5365}$	$\frac{-2.8960}{-2.8440}$	$\frac{-1.1639}{-1.1553}$
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-76.8558}{-46.5548}$	$\frac{-67.0717}{-42.7547}$	$\frac{-31.4568}{-24.7286}$	$\frac{-18.2982}{-15.7712}$	$\frac{-7.9410}{-7.4190}$	$\frac{-4.0597}{-3.9181}$	$\frac{-2.0494}{-2.0126}$	$\frac{-0.8236}{-0.8176}$
	π	$\frac{0.0300}{0.0278}$	$\frac{0.0232}{0.0219}$	$\frac{0.0059}{0.0058}$	$\frac{0.0029}{0.0029}$	$\frac{0.0011}{0.0011}$	$\frac{0.0005}{0.0005}$	$\frac{0.0002}{0.0002}$	$\frac{0.0001}{0.0001}$
	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{76.8198}{46.5187}$	$\frac{67.0376}{42.7207}$	$\frac{31.4448}{24.7166}$	$\frac{18.2920}{15.7650}$	$\frac{7.9385}{7.4165}$	$\frac{4.0584}{3.9168}$	$\frac{2.0488}{2.0120}$	$\frac{0.8234}{0.8173}$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{108.4141}{65.6221}$	$\frac{94.5878}{60.2660}$	$\frac{44.4046}{34.9020}$	$\frac{25.8359}{22.2662}$	$\frac{11.2135}{10.4761}$	$\frac{5.7329}{5.5328}$	$\frac{2.8942}{2.8421}$	$\frac{1.1631}{1.1546}$
$n = 2$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-204.9901}{-91.7656}$	$\frac{-131.5559}{-73.4101}$	$\frac{-44.4405}{-34.9375}$	$\frac{-27.1963}{-23.2648}$	$\frac{-13.9351}{-12.7943}$	$\frac{-8.3016}{-7.8703}$	$\frac{-4.9099}{-4.7493}$	$\frac{-2.4405}{-2.3966}$
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-145.2168}{-64.9803}$	$\frac{-93.1698}{-51.9763}$	$\frac{-31.4568}{-24.7286}$	$\frac{-19.2474}{-16.4645}$	$\frac{-9.8604}{-9.0531}$	$\frac{-5.8736}{-5.5684}$	$\frac{-3.4736}{-3.3599}$	$\frac{-1.7264}{-1.6953}$
	π	$\frac{0.0564}{0.0496}$	$\frac{0.0294}{0.0274}$	$\frac{0.0059}{0.0058}$	$\frac{0.0029}{0.0029}$	$\frac{0.0011}{0.0011}$	$\frac{0.0005}{0.0005}$	$\frac{0.0002}{0.0002}$	$\frac{0.0001}{0.0001}$
	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{145.1313}{64.8957}$	$\frac{93.1206}{51.9273}$	$\frac{31.4448}{24.7166}$	$\frac{19.2411}{16.4582}$	$\frac{9.8578}{9.0505}$	$\frac{5.8722}{5.5670}$	$\frac{3.4729}{3.3592}$	$\frac{1.7261}{1.6951}$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{204.6997}{91.5013}$	$\frac{131.3967}{73.2586}$	$\frac{44.4046}{34.9020}$	$\frac{27.1779}{23.2465}$	$\frac{13.9275}{12.7868}$	$\frac{8.2978}{7.8665}$	$\frac{4.9080}{4.7473}$	$\frac{2.4397}{2.3959}$
$n = 5$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-231.6224}{-96.6840}$	$\frac{-139.7776}{-75.8695}$	$\frac{-44.4405}{-34.9375}$	$\frac{-27.5133}{-23.4947}$	$\frac{-14.8347}{-13.5445}$	$\frac{-9.4314}{-8.8744}$	$\frac{-6.0839}{-5.8358}$	$\frac{-3.4974}{-3.4064}$
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-164.0669}{-68.4524}$	$\frac{-98.9874}{-53.7141}$	$\frac{-31.4568}{-24.7286}$	$\frac{-19.4716}{-16.6270}$	$\frac{-10.4966}{-9.5836}$	$\frac{-6.6726}{-6.2784}$	$\frac{-4.3037}{-4.1282}$	$\frac{-2.4737}{-2.4094}$
	π	$\frac{0.0587}{0.0514}$	$\frac{0.0298}{0.0277}$	$\frac{0.0059}{0.0058}$	$\frac{0.0029}{0.0029}$	$\frac{0.0011}{0.0011}$	$\frac{0.0005}{0.0005}$	$\frac{0.0002}{0.0002}$	$\frac{0.0001}{0.0001}$
	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{163.9727}{68.3594}$	$\frac{98.9361}{53.6631}$	$\frac{31.4448}{24.7166}$	$\frac{19.4653}{16.6207}$	$\frac{10.4939}{9.5809}$	$\frac{6.6712}{6.2770}$	$\frac{4.3030}{4.1275}$	$\frac{2.4734}{2.4091}$
	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{231.3118}{96.4012}$	$\frac{139.6140}{75.7136}$	$\frac{44.4046}{34.9020}$	$\frac{27.4949}{23.4763}$	$\frac{14.8271}{13.5369}$	$\frac{9.4276}{8.8705}$	$\frac{6.0819}{5.8338}$	$\frac{3.4966}{3.4056}$

Tablo 4.11 Problem 8 için dairesel delik civarında bazı noktalarda $\left(\theta = \mp\pi/2,\ \pi,\ \mp 3\pi/4\right)$ şerit-plak malzemesinin öngerilmeli $\left(q/E_0 = 0.005\right)$ ve öngerilmesiz $\left(q/E_0 = 0\right)$ durumlarında farklı $\mathbf{E}_1/\mathbf{E}_0$ ve n değerleri için $u_r^{(1)}$ yer değiştirme değerleri.

$\dfrac{u_r^{(1)}\big\|_{q/E_0=0}}{u_r^{(1)}\big\|_{q/E_0=0.005}}$	θ	E_1/E_0							
		0.1	0.2	1	2	5	10.0	20.0	50.0
$n = 1/2$	$\frac{\pi}{2}$	−77.8433 −52.4477	−73.6296 −50.5451	−44.4405 −34.9375	−29.9855 −25.3393	−14.8948 −13.6479	−7.8830 −7.5189	−4.0125 −3.9159	−1.6140 −1.5981
	$\frac{3\pi}{4}$	−55.3398 −37.2768	−52.3231 −35.9109	−31.4568 −24.7286	−21.1785 −17.8966	−10.5043 −9.6249	−5.5574 −5.3006	−2.8284 −2.7603	−1.1377 −1.1265
	π	−0.3857 −0.2521	−0.3314 −0.2206	0.0059 0.0058	0.0879 0.0742	0.0736 0.0673	0.0428 0.0408	0.0223 0.0218	0.0090 0.0089
	$-\frac{3\pi}{4}$	55.0606 37.0873	52.0802 35.7423	31.4448 24.7166	21.2289 17.9375	10.5513 9.6675	5.5851 5.3270	2.8430 2.7745	1.1436 1.1323
	$-\frac{\pi}{2}$	78.0690 52.5769	73.8171 50.6530	44.4046 34.9020	29.9084 25.2714	14.8398 13.5970	7.8519 7.4891	3.9964 3.9001	1.6075 1.5917
$n = 2$	$\frac{\pi}{2}$	−121.1754 −68.8363	−92.9582 −58.9101	−44.4405 −34.9375	−31.2423 −26.2350	−18.8915 −16.9326	−12.3876 −11.5106	−7.7636 −7.4079	−3.8949 −3.8027
	$\frac{3\pi}{4}$	−86.3897 −49.0488	−66.1535 −41.9086	−31.4568 −24.7286	−22.0624 −18.5260	−13.3051 −11.9255	−8.7109 −8.0943	−5.4530 −5.2032	−2.7329 −2.6681
	π	−0.9745 −0.5326	−0.5696 −0.3487	0.0059 0.0058	0.0983 0.0824	0.1276 0.1140	0.1111 0.1030	0.0831 0.0792	0.0481 0.0469
	$-\frac{3\pi}{4}$	85.7184 48.6678	65.7492 41.6506	31.4448 24.7166	22.1190 18.5718	13.3890 11.9999	8.7873 8.1648	5.5118 5.2592	2.7678 2.7022
	$-\frac{\pi}{2}$	121.8218 69.1443	93.3082 59.0957	44.4046 34.9020	31.1570 26.1603	18.8013 16.8510	12.3150 11.4429	7.7124 7.3591	3.8670 3.7754
$n = 5$	$\frac{\pi}{2}$	−134.2472 −72.8603	−97.3675 −60.6581	−44.4405 −34.9375	−31.4895 −26.4099	−19.7993 −17.6600	−13.7461 −12.6757	−9.3566 −8.8452	−5.4032 −5.2271
	$\frac{3\pi}{4}$	−95.7482 −51.9321	−69.3024 −43.1578	−31.4568 −24.7286	−22.2365 −18.6492	−13.9421 −12.4357	−9.6624 −8.9100	−6.5673 −6.2085	−3.7868 −3.6634
	π	−1.1426 −0.5946	−0.6158 −0.3701	0.0059 0.0058	0.0997 0.0835	0.1381 0.1228	0.1311 0.1205	0.1099 0.1037	0.0763 0.0737
	$-\frac{3\pi}{4}$	94.9660 51.5078	68.8664 42.8840	31.4448 24.7166	22.2939 18.6955	14.0329 12.5157	9.7524 8.9925	6.6453 6.2819	3.8429 3.7176
	$-\frac{\pi}{2}$	135.0116 73.2009	97.7469 60.8540	44.4046 34.9020	31.4028 26.3342	19.7016 17.5720	13.6608 12.5967	9.2897 8.7819	5.3600 5.1853

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez kapsamında, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış şerit-plağın yapısında süreksizlik içermemesi (Kısım 3) veya yapısında dairesel formda delik içermesi (Kısım 4) durumlarının her biri için ele alınan yüklemeler altında ve yapı elemanı malzemesinin öngerilme içermemesi (Kısım 3.1-Kısım 4.1) veya öngerilme içermesi (Kısım 3.2-Kısım 4.2) durumlarında statik analizi, düzlem şekil değiştirme kabulü altında incelenmiştir. İncelemelerde, FD şerit-plak malzemesine ait Young Modülünün fonksiyon ancak, Poisson oranı ile malzeme yoğunluğunun sabit olduğu kabul edilmiştir. Young modül fonksiyonunun tek serbestlik derecesine sahip polinom fonksiyon olması durumları ele alınmış, bu fonksiyonun farklı 2 durumu için tez kapsamında toplam 8 farklı problem incelenmiştir.

Yapı elemanı malzemesinin öngerilme içermemesine ait sınır değer problemlerine ait matematiksel modelleme, Elastisite Teorisi'nin kesin denklemleri yardımıyla; yapı elemanı malzemesinin öngerilmeli olması durumuna ait sınır değer problemlerine ait matematiksel modelleme, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) yardımıyla yapılmıştır. Ele alınan bütün sınır değer problemlerinin çözümü, Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak, tarafımızdan yapılan algoritma ve programlar yardımıyla sayısal olarak yapılmıştır. Tez kapsamında yapılan araştırmalar ve bu araştırmalarda elde edilen sonuçlar ile bu sonuçların değerlendirmesi aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

Tez kapsamında yapılan araştırmalar;

1. Kısım 3.1'de yapısında herhangi bir geometrik süreksizlik içermeyen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı eksenel çekme/basınç kuvveti etkisindeki şerit-plağın mekaniğine ait sınır değer problemleri, lineer elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde ele alınmıştır.

2. Kısım 3.2.' de yapısında herhangi bir geometrik süreksizlik içermeyen öngerilmeli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, üstten ilave eğilme kuvveti etkisindeki şerit-plağın mekaniğine ait sınır değer problemleri, Lineerize edilmiş üç boyutlu elastisite teorisi çerçevesinde ele alınmıştır.
3. Kısım 4.1'de yapısında dairesel formda delik bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı eksenel çekme/basınç kuvveti etkisindeki şerit-plağın mekaniğine ait sınır değer problemleri, lineer elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde ele alınmıştır.
4. Kısım 4.2.'de yapısında dairesel formda delik bulunan öngerilmeli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, karşılıklı iki kenarından basit mesnetli, üst yüzeyinde etki eden normal basınç kuvveti etkisindeki şerit-plağın mekaniğine ait sınır değer problemleri, Lineerize edilmiş üç boyutlu elastisite teorisi çerçevesinde ele alınmıştır.
5. İncelemelerde FD şerit-plak malzemesine ait Young Modülünün koordinat eksenleri doğrultusunda değişimi polinom fonksiyon olarak seçilmiş ancak, Poisson oranı ile malzeme yoğunluğunun sabit olduğu kabul edilmiştir. Young modülünün yatay ve düşey eksenler boyunca değişimi ayrı ayrı alınmış (yani, tek serbestlik dereceli fonksiyon olarak seçilmiş) ve bir birinden farklı 8 problem için incelemeler yapılmıştır.
6. Yapı içerisindeki öngerilmelerin, esas yükleme yapılmadan önce bu şerit-plağın karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme veya basınç kuvveti etkisiyle, yapı içerisinde oluştuğu kabul edilmiştir.
7. İncelenen sınır değer problemlerinin çözümü Sonlu Elemanlar Metodu yardımıyla yapılmıştır. Bunun için herhangi bir hazır paket program kullanılmamış, tüm algoritma ve programlar tarafımızdan Fortran programlama dili kullanılarak yapılmıştır.

8. Şerit-plağın yapısında herhangi bir süreksizlik olmaması durumlarına ait problemler için çözüm bölgesinin sonlu eleman ayrıklaştırmasında (Kısım 3.1 ve Kısım 3.2) 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar kullanılmıştır.
9. Şerit-plağın yapısında dairesel formda delik içermesi durumlarına ait problemler için çözüm bölgesinin sonlu eleman ayrıklaştırmasında; dairesel delik civarında altı nodlu eğrisel kenarlara sahip üçgen sonlu elemanlar, geri kalan kısımda 9 nodlu dikdörtgen sonlu elemanlar kullanılmıştır.
10. Sonlu eleman formülasyonunda, yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar kullanılmıştır.
11. En küçük kareler metodu yardımıyla sonlu eleman sınırlarında süreksiz olan gerilme fonksiyonları için varyasyonel iyileştirme yapılarak, tüm bölgede sürekli gerilme değerleri elde edilmiştir.
12. Tarafımızca oluşturulan algoritma ve programlardan elde edilen sayısal sonuçlar, literatürdeki uygun sonuçlarla test edilmiştir.
13. Tez kapsamında ele alınan her bir problemde, geometrik, malzeme ve yükleme durumu ile yapıdaki öngerilmenin varlığının şerit-plağın mekanik davranışına etkisi incelenmiş ve elde edilen bilimsel sonuçlar açıklanmıştır.

Tez kapsamında elde edilen sonuçların değerlendirmesi aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Karşılıklı iki kenarından düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde tutturulmuş (basit mesnetli) ve bu iki kenarından düzgün yayılı eksenel çekme/basınç kuvveti etkisindeki süreksizlik içermeyen FD dikdörtgen şerit-plağın; çekme/basınç kuvvetinin yoğunluğundaki artış, tüm gerilme ve yer değiştirme değerlerini mutlak değerce arttırmaktadır. Çekme kuvveti uygulanması durumunda $\left(q/E_0 > 0\right)$ elde edilen gerilme ve yer değiştirme değerleri ile basınç kuvveti uygulanması durumunda $\left(q/E_0 < 0\right)$ elde edilen uygun gerilme ve yerdeğiştirme değerleri simetriktir. (Şekil 3.5 -Şekil 3.9)

2. Çekme kuvvetinin yoğunluğundaki $\left(q/E_0\right)$ artış, yapı elemanı malzemesinin homojen izotrop $\left(E_1/E_0=1\right)$ olması durumu ile FD malzeme $\left(E_1/E_0\neq 1\right)$ olması durumlarındaki uygun gerilme ve yer değiştirme değerleri arasındaki farkı arttırmaktadır. (Şekil 3.10 -Şekil 3.14)
3. Yapı elemanının homojen-izotrop malzeme olması ile FD malzeme olması durumlarındaki uygun gerilme değerleri arasındaki fark: fonksiyonel derecelendirme doğrultusu esas yükleme doğrultusuna dik olması durumunda (Problem 2) elde edilen etki, fonksiyonel derecelendirme doğrultusu esas yükleme doğrultusuna paralel olması durumunda (Problem 1) elde edilen etkiye göre daha fazladır.(Şekil 3.10 - Şekil 3.12)
4. Süreksizlik içermeyen eksenel çekme kuvveti etkisindeki FD şerit plaklarda, fonksiyonel değişim özelliğini temsil eden n kuvvet parametresindeki değişim ile Young Modülündeki değişim: fonksiyonel derecelendirme doğrultusu esas yükleme doğrultusuna dik olan (Problem 2) durumunda, fonksiyonel derecelendirme doğrultusu esas yükleme doğrultusuna paralel olan (Problem 1) durumuna göre gerilme değerlerine etkisi daha fazladır.(Şekil 3.15 -Şekil 3.17) (Şekil 3.20 - Şekil 3.22)
5. Süreksizlik içermeyen eksenel çekme kuvveti etkisindeki FD şerit plaklarda, fonksiyonel değişim özelliğini temsil eden n kuvvet parametresinin değerindeki artış: yer değiştirme değerlerini mutlak değerce arttırmaktadır. (Şekil 3.18 - Şekil 3.19)
6. Süreksizlik içermeyen FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumunda, her iki derecelendirme yönü için de(Problem 3 ve Problem 4) yapıda ki basınç öngerilmesi $\left(\mathrm{q}/\mathrm{E}_0<0\right)$ yer değiştirme ve gerilme değerlerini mutlak değerce arttırmakta, çekme öngerilmesi $\left(\mathrm{q}/\mathrm{E}_0>0\right)$ olması ise yer değiştirme ve gerilmeleri mutlak değerce azaltmaktadır. Basınç öngerilmesinin, çekme öngerilmesine göre yapıda meydana gelen gerilme ve yer değiştirme değerlerine çok daha fazla etki etmektedir. (Şekil 3.27 - Şekil 3.31)

7. Süreksizlik içermeyen FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumunda, öngerilme arttıkça homojen ve FD malzeme için gerilme (yerdeğiştirme) değerleri arasındaki fark artmaktadır (azalmaktadır). (Şekil 3.32 - Şekil 3.36)
8. Sürekli değişen fonksiyon olarak seçilen Young Modulü'ne sahip süreksizlik içermeyen FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumunda, polinom fonksiyonun kuvveti (n parametresi) arttıkça her iki derecelendirme yönü için de yer değiştirme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde artmaktayken; gerilme değerlerinde küçük değişimler yapmaktadır. (Şekil 3.40 - Şekil 3.41)
9. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, öngerilmeli süreksizlik içermeyen şerit-plağın eğilmesi durumunda, sürekli değişen polinom fonksiyon olarak seçilen Young Modülü'ne sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede polinom fonksiyonun kuvveti sabit (n=2) alınıp Young modülünün $\left(E_1 / E_0\right)$ belirtilen kesitlerde şiddeti arttıkça, gerilme değerleri mutlak değerce artmaktadır. Tüm gerilme değerleri, şerit-plak öngerilmeli olduğu durumda E_1 / E_0 değişiminden öngerilmesiz duruma göre daha fazla etkilenmektedir. (Şekil 3.42 - Şekil 3.44)
10. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, öngerilmeli süreksizlik içermeyen şerit-plağın eğilmesi durumunda, sürekli değişen polinom fonksiyon olarak seçilen Young Modülü'ne sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede polinom fonksiyonun kuvveti sabit (n=2) alınıp Young modülünün $\left(E_1 / E_0\right)$ belirtilen kesitlerde şiddeti arttıkça, yer değiştirme değerleri mutlak değerce önemli ölçüde azalmaktadır. Her iki problem için de öngerilmesiz durumda $\left(\mathrm{q} / \mathrm{E}_0 = 0\right)$ elde edilen yer

değiştirme değerleri öngerilmenin ele alındığı $\left(q / E_0 = 0.005\right)$ duruma göre mutlak değerce daha fazladır. (Şekil 3.45 - Şekil 3.46)

11. Yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren, karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki şerit-plak probleminde sonlu homojen izotrop ortamdaki merkezi dairesel boşluğun yarıçapı küçüldükçe, sonsuz ortamdaki dairesel boşluk sınırındaki kutupsal gerilme değerlerine yaklaşılmaktadır.(Tablo 4.1)
12. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren şerit-plağın karşılıklı kenarlarından uygulanan düzgün yayılı çekme/basınç kuvvetinin şiddetinin artması dairesel delik civarındaki tüm kutupsal gerilme ve kutupsal yer değiştirme değerleri mutlak değerce arttırmaktadır. Çekme kuvveti uygulanması durumunda $\left(q/E_0 > 0\right)$ elde edilen kutupsal gerilme ve yer değiştirme değerleri ile basınç kuvveti uygulanması durumunda $\left(q/E_0 < 0\right)$ elde edilen gerilme ve yer değiştirme değerleri simetriktir. (Şekil 4.6 - Şekil 4.10)
13. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren şerit-plağın karşılıklı kenarlarından uygulanan düzgün yayılı çekme/basınç kuvvetinin derecelendirme yönü; uygulanan kuvvete dik alındığında (Problem 6) q/E_0 parametre değerleri arttıkça, homojen izotrop ve FD malzeme alınması durumlarında elde edilen kutupsal gerilme değerleri arasındaki fark artmaktadır. FD malzeme kullanımı dairesel delik civarındaki kutupsal gerilme değerlerinin maksimum ve minimum değerler aldığı noktaları değiştirmemektedir. (Şekil 4.11 - Şekil 4.13)
14. Her iki derecelendirme yönü için q/E_0 parametre değerleri arttıkça, homojen izotrop ve FD malzeme alınması durumlarında elde edilen kutupsal yerdeğiştirme değerleri arasındaki fark artmaktadır. Problem 5

(Problem 6) için $E_1 / E_0 = 1$ (homojen izotrop) durumunda elde edilen kutupsal yerdeğiştirme değerleri, $E_1 / E_0 = 5$ (FD malzeme) durumunda elde edilen kutupsal yerdeğiştirme değerlerine göre mutlak değerce daha fazladır (azdır). (Şekil 4.14 - Şekil 4.15)

15. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki şerit-plakta h/ℓ oranı arttıkça, $\sigma_{\theta\theta}/q$ ve σ_{rr}/q gerilme değerleri mutlak değerce artmaktadır. $\tau_{r\theta}/q$ gerilme değerleri Problem 5 için h/ℓ oranı arttıkça artmakta, Problem 6 için bazı aralıklarda artarken bazı aralıklarda azalmaktadır. (Şekil 4.16 - Şekil 4.18)
16. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki şerit-plakta h/ℓ oranı arttıkça, dairesel delik civarındaki kutupsal yer değiştirme değerleri, Problem 5 (Problem 6) için mutlak değerce artmakta (azalmakta) dır. (Şekil 4.19 - Şekil 4.20)
17. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki şerit-plakta, dairesel deliğin mevcut konumuna paralel kalacak şekilde, bütünüyle plağın üst yüzeyine yaklaştırıldıkça dairesel delik civarındaki tüm kutupsal gerilme değerleri mutlak değerce artmaktadır, sadece Problem 6 için σ_{rr}/q gerilme değeri mutlak değerce azalmaktadır. (Şekil 4.21 - Şekil 4.23)
18. Sürekli değişen fonksiyon olarak seçilen Young Modulü'ne sahip FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki şerit-plakta polinom fonksiyonun kuvveti (n parametresi) arttıkça; Problem

5'de tüm kutupsal gerilme değerleri artmakta, Problem 6'da $\sigma_{\theta\theta}/q$ değeri azalmakta, diğer iki kutupsal gerilme değerleri düzgün olmayan bir değişim göstermektedir. n parametre değişimi gerilmelerin ekstremum değerlerini değiştirmemektedir. (Şekil 4.26 - Şekil 4.28)

19. Sürekli değişen fonksiyon olarak seçilen Young Modulü'ne sahip FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki şerit-plakta polinom fonksiyonun kuvveti (n parametresi) arttıkça; kutupsal yerdeğiştirme değerleri mutlak değerce artmaktadır. Bu artış Problem 6'da Problem 5'e göre çok daha fazla olmaktadır. n parametre değişimi yerdeğiştirmelerin ekstremum değerlerini değiştirmemektedir. (Şekil 4.29 - Şekil 4.30)
20. Sürekli değişen fonksiyon olarak seçilen Young Modulü'ne sahip FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden düşey doğrultuda yer değiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda boşluk içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki şerit-plakta, polinom fonksiyonun kuvveti sabit (n=2) alınıp Young modülünün (E_1 / E_0) belirtilen kesitlerde şiddeti arttıkça, Problem 5 için kutupsal gerilmeler düzgün olarak mutlak değerce küçük oranda artmakla beraber, Problem 6'da farklı değişimlere sebep olmaktadır. Tüm kutupsal gerilme değerlerine, E_1 / E_0 değişiminin etkisi Problem 6'da Problem 5'e göre daha fazladır. (Şekil 4.31 - Şekil 4.33)
21. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; yapıda basınç öngerilmesi $(q/E_0 < 0)$ olması dairesel delik civarındaki kutupsal gerilme değerlerini mutlak değerce artırmakta, çekme öngerilmesi $(q/E_0 > 0)$ olması mutlak değerce azaltmaktadır. Basınç öngerilmesi olması durumu gerilmelerin değerlerini

daha fazla etkilemektedir. Tüm grafiklerde uygulanan öngerilme değişimi delik civarında gerilmelerin maksimum ve minimum değer aldığı noktaları değiştirmemekte sadece şiddetini değiştirmektedir. (Şekil 4.37 - Şekil 4.39)

22. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; yapıda basınç öngerilmesi $(q/E_0 < 0)$ olması yer değiştirme değerlerini mutlak değerce artırmakta, çekme öngerilmesi $(q/E_0 > 0)$ olması yer değiştirme değerlerini mutlak değerce azaltmaktadır. Basınç öngerilmesi olması durumu yer değiştirmelerin değerlerini daha fazla etkilemektedir. Tüm grafiklerde uygulanan öngerilme değişimi delik civarında yerdeğiştirmelerin maksimum ve minimum değer aldığı noktaları değiştirmemekte sadece şiddetini değiştirmektedir. (Şekil 4.40 - Şekil 4.41)
23. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; kutupsal gerilme değerleri öngerilme arttıkça mutlak değerce azalmaktadır. (Şekil 4.42 - Şekil 4.44)
24. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; kutupsal yerdeğiştirme değerleri öngerilme arttıkça mutlak değerce azalmakla birlikte, Problem 8 için FD malzeme alınması durumunda $(E_1/E_0 = 5)$ elde edilen yerdeğiştirme değerleri Proplem 7 için FD malzeme alınması durumunda $(E_1/E_0 = 5)$ elde edilen yerdeğiştirme değerlerinden daha fazla olmaktadır. Öngerilme arttıkça homojen ve FD malzeme için kutupsal yer değiştirme değerleri arasındaki fark azalmaktadır. (Şekil 4.45 - Şekil 4.46)
25. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-

plağın eğilmesi durumu için; ele alınan her iki problem için (Problem 7 ve Problem 8), h/ℓ oranı arttıkça tüm kutupsal gerilme ve yerdeğiştirme değerleri mutlak değerce azalmaktadır. h/ℓ oranı arttıkça her iki problemde de öngerilmesiz ve öngerilmeli malzeme için kutupsal gerilme ve yerdeğiştirme değerleri arasındaki fark azalmaktadır. (Şekil 4.47 - Şekil 4.51)

26. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; her iki problemde (Problem 7 ve Problem 8) tüm kutupsal gerilme değerleri h_u/a parametre değeri azaldıkça mutlak değerce artmaktadır. h_u/a oranı arttıkça (yapıdaki dairesel deliğin mevcut konumuna paralel kalacak şekilde, bütünüyle plağın üst yüzeyine yaklaştırılmasının) öngerilmesiz ve öngerilmeli malzeme için gerilme değerleri arasındaki fark azalmaktadır. (Şekil 4.52 - Şekil 4.54)
27. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; n parametre değişiminin kutupsal gerilmelere etkisi az olmakla beraber, Problem 8 için alınan etki Problem 7 için alınan etkiden daha fazladır. (Şekil 4.57 - Şekil 4.59)
28. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; her iki problemde (Problem 7 ve Problem 8) n parametresi arttıkça yerdeğiştirme değerleri mutlak değerce artmaktadır. n değeri arttıkça öngerilmesiz ve öngerilmeli malzeme için yer değiştirme değerleri arasındaki fark artmaktadır. (Şekil 4.60 - Şekil 4.61)
29. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-

plağın eğilmesi durumu için; n parametre değişimi kutupsal gerilmelerin ve yerdeğiştirmelerin ekstremum değer aldığı noktaları değiştirmemektedir. (Şekil 4.57 - Şekil 4.61)

30. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; tüm kutupsal gerilme değerlerine, E_1 / E_0 değişiminin etkisi Problem 8'de Problem 7'ye göre daha fazladır. (Şekil 4.62 - Şekil 4.64)
31. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; Belirtelim ki tüm kutupsal gerilme değerlerine $\mathbf{E}_1 / \mathbf{E}_0$ ve n parametre değişiminlerinin etkisi FDM malzeme özelliği değişimi şerit plağın enine göre alındığında (Problem 8), FDM malzeme özelliği değişimi şerit-plağın boyuna göre alınması (Problem 7) durumuna göre daha fazla olmaktadır.(Şekil 4.62 - Şekil 4.64)
32. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; dairesel delik civarında kutupsal yer değiştirme değerleri, E_1 / E_0 değeri arttıkça mutlak değerce önemli ölçüde azalmaktadır. E_1 / E_0 arttıkça n=0.5 ve n=2 parametre değerleri için yer değiştirme değerleri arasındaki fark azalmaktadır. (Şekil 4.65 - Şekil 4.66)
33. FDM malzemeden yapılmış, yanal yüzeylerinden yerdeğiştirme yapamayacak şekilde mesnetlenmiş, dairesel formda delik içeren karşılıklı kenarlarından düzgün yayılı çekme kuvveti etkisindeki öngerilmeli şerit-plağın eğilmesi durumu için; young Modülü ve n parametresi değişiminin etkisi yapı elemanı öngerilmeli olduğunda daha fazladır.

Tez kapsamında geliştirilen algoritma ve programların, süreksizlik içermeyen/süreksizlik içeren ve öngerilmeli/öngerilmesiz ve farklı yükleme durumlarına sahip, farklı eksenler boyunca fonksiyonel derecelendirilmiş yapısal elemanların statik analizine uygulanabilmesi, tez çerçevesinde yapılan araştırmaların önemini artırmaktadır. Literatürde mevcut çalışmalara ait sayısal sonuçların kıyaslanmasında, yaklaşık teorilerin hassasiyet mertebesinin tespit edilmesinde ve modelleme ve tasarım uygulamalarında, tez çerçevesinde incelenen sınır değer problemlerinin modellenmesi ve elde edilen sayısal sonuçların önemli bir referans olabileceği öngörülmektedir.

KAYNAKÇA

[1] M. Koizumi, "The Concept of FGM", *Ceram. Trans. Func. Grad. Mater*., 34, 3–10, 1993.

[2] M. Koizumi, "FGM activities in Japan", *Compos. Part B Eng*., **28**(1-2), 1-4, 1997.

[3] K. Swaminathan, D. T. Naveenkumar, A. M. Zenkour, E. Carrera, "Stress vibration and buckling analyses of FGM plates- A state of the art review", *Composite Structures*, 120, 10-31, 2015.

[4] F. Erdoğan, B. H. Wu, "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties", *Journal of Applied Mechanics*, 64, 449-456, 1997.

[5] J. N. Reddy, C. M. Wang, S. Kitipornchai, "Axisymmetric bending of functionnally graded circular and annular plates", *Euro. J. Mech. A. Solids*, 18, 185-199, 1999.

[6] M. H. Santare, J. Lambros, "Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials", *Journal of Applied Mechanics*, 67, 819-822, 2000.

[7] J. H. Kim, G. H. Paulino, "Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials", *Journal of Applied Mechanics*, 69, 502-514, 2002.

[8] S. H. Chi, Y. L. Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transerve load-part I: analysis", *International Journal of Solids and Structures*, 43, 3657-3674, 2006.

[9] S. H. Chi, Y. L. Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transerve load-part II: numerical results", *International Journal of Solids and Structures*, 43, 3675-3691, 2006.

[10] B. Yang, H. J. Ding, W. Q. Chen, "Elasticity solutions for a uniformly loaded annular plate of functionally graded materials", *Structural Engineering and Mechanics*, 30, 4, 501-512, 2008.

[11] G. Udupa, S. S. Rao, K. V. Gangadharan, "Functionally graded composite materials: an overview", *Procedia Materials Science*, 5, 1291-1299, 2014.

[12] D. K. Nguyen, B. S. Gan, T. H. Trinh, "Geometrically nonlinear analysis of planar beam and frame structures made of functionally graded material", *Structural Engineering and Mechanics*, 49, 6, 727-743, 2014.

[13] T. M. Tu, T. H. Quoc, N. V. Long, "Bending analysis of functionally graded plates using new eight-unknown higher order shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 62, 3, 311-324, 2017.

[14] E. Madenci, "A refined functional and mixed formulation to static analyses of FGM beams", *Structural Engineering and Mechanics*, 69, 4, 427-437, 2019.

[15] M. Khebizi, H. Guenfoud, M.Guenfoud, R. E. Fatmi, "Three-dimensional modelling of functionally graded beams using Saint-Venant's beam theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 72, 2, 257-273, 2019.

[16] P. A. Demirhan, V. Taskin, "Static analysis of simply supported functionally graded sandwich plates by using four variable plate theory", *Technical journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*,30(2), 8987-9007, 2019.

[17] B. S. Aragh, H . Hedayati, E. B. Farahani, M. A Hedayati, "Novel 2-D six-parameter power-law distribution for free vibration and vibrational displacements of two-dimensional functionally graded fiber reinforced curved panels". *Eur. J. Mech. A/Solids*;30: 865–83, 2011.

[18] J. N. REDDY, "Analysis of Functionally Graded Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, No. 1-3, 84-663, 2000.

[19] G. N. Savin, "Stress Concentration Around Holes", *E. Gros Translator*, Pergamon, 1961.

[20] M. Y. Kaltakcı, "Dairesel Delikli Ortotropik Kompozit Levhalardaki Gerilme Yığılmasının Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Araştırılması", Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya, 1990.

[21] B. S. Dündar, "Dairesel Delikli Dikdörtgen Bir Levhada Gerilme Dağılımının Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Hesaplanması", Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara, 2002.

[22] A. M. Yücel, "Dikdörtgen Delik İçeren Kompozit Kiriş-Plakların Eğilmesindeki Gerilme Dağılımı Problemleri", Doktora Tezi, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2003.

[23] Ü. B. Yeşil, "Tek veya Çift Dairesel Delik İçeren Şerit-Levhada Gerilme Yığılmalarının Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi", Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2005.

[24] Ü. B. Yeşil, "Silindirik Boşluk İçeren Öngerilmeli Anizotrop Kalın Plağın Statik ve Dinamik Analizi", Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2011.

[25] F. Z. Hu, C. Soutis, E.C. Edge, "Interlaminar Stresses in Composite Laminates with a Circular Hole", *Composite Structures*, 37:223-232, 1997.

[26] X. W. Xu, T. M. Yue, H. C. Man, "Stress Analysis of Finite Composite Laminate with Multiple Loaded Holes", *International Journal of Solids and Structures*, 36:919-931, 1999.

[27] V. G. Ukadgaonker, D. K. N. Rao, "A General Solution for Stress Around Holes in Symmetric Laminates under Inplane Loading", *Composite Structures*, 49:339-354, 2000.

[28] H. Engels, D. Zakharov, W. Becker, "The Plane Problem of an Elliptically Reinforced Circular Hole in an Anisotropic Plate or Laminate", *Archive of Applied Mechanics*, 71: 601-612, 2001.

[29] E. Pan, , B. Yang, , G. Cai, F. G. Yuan, “Stress Analyses Around Holes in Composite Laminates Using Boundary Element Method”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25(1): 31-40, 2001.

[30] H. C. Wu, B. Mu, “On Stres Concentrations for Isotropic/Orthotropic Plates and Cylinders with a Circular Hole”, *Composites Part B Engineering*, 34:127-134, 2002.

[31] S. D. Pandita, K. Nishiyabu, I. Verpoest, “Strain Concentrations in Woven Fabric Composites with Holes”, *Composite Structures*, 59(3):361-368, 2003.

[32] S. Temiz, A. Ozel, A. Demir, S. Murat, “ FE stress analysis of thick composite laminates with a hole in bending”, *Applied Composite Materials*, 10(2):103-117, 2003.

[33] H. Suemasu, H. Takahashi, T. Ishikawa, “On Failure Mechanisms of Composite Laminates with an Open Hole Subjected to Compressive Load”, *Composites Science and Technology*, 66(5):634-641, 2005.

[34] L. T. Toubal, M. Karama, B. Lorrai, “Stress Concentration in a Circular Hole in Composite Plate”, *Composite Structures*, 68(1):31-36, 2005.

[35] V. G. Ukadgaonker, V. Kakhandki, "Stress analysis for an orthotropic plate with an irregular shaped hole for different in-plane loading conditions-Part 1", *Composite Structures*, 70, 74-255, 2005.

[36] N. K. Jain, N. D. Mittal, “Finite Element Analysis for Stress Concentration and Deflection in Isotropic, Orthotropic and Laminated Composite Plates with Central Circular Hole Under Transverse Static Loading”, *Materials Science and Engineering*, 498:115-124, 2008.

[37] Z. Yang, C. B. Kim, C. Cho, H. G. Beom, “The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plate Containing a Circular Hole”, *International journal Solids Structures*, 45: 713-731, 2008.

[38] Y. Zheng, K. Chang-Boo, C. Chongdu, G. B. Hyeon, “The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plate Containing a Circular Hole”, *International Journal of Solids and Structures*, 45(3-4): 713-731, 2008.

[39] F. Li, Y. He, C. Fan, H. Li, H. Zhang, “Investigation on the Three-Dimensional Stress Concentration of LY12-CZ Plate with Two Equal Circular Holes Under Tension”, *Mat. Sci. Eng. A-Struct.*, 483-484, 474-476, 2008.

[40] Z. Yang, "The stress and strain concentrations of an elliptical hole in an elastic plate of finite thickness subjected to tensile stress", *Int. J. Fract*, 155(1), 43–54, 2009.

[41] Z. Yang, C. B. Kim, H. G. Beom, C. Cho, “The Stress and Strain Concentrations of Out-of-Plane Bending Plate Containing a Circular Hole”, *Int. J.Mech. Sci.*, 52:836-846.

[42] D. K. N. Rao, M. R. Babu, K. R. N. Reddy, D. Sunil, "Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates", *Composite Structures*, 92, 2845-2859, 2010.

[43] D. S. Sharma, "Stress concentration around circular/elliptical/triangular cutouts in infinite composite plate", In: Proceedings of the world congress on engineering (WCE 2011), vol. III, July, London, U.K., 6–8, 2011.

[44] S. Nagpal, N. Jain, S. Sayal, "Stress concentration and its mitigation techniques in flat plate with singularities: a critical review", *Eng J* 2012;16(1):1–16.

[45] S. D. Akbarov, N. Yahnioglu, U. A. Yucel, " On the Influence of the Initial Tension of a Strip with a Rectangular Hole on the Stress Concentration Caused By Additional Loading", *Journal of Srain Analysis for Engineering Design*, 39, 615-624, 2004.

[46] S. D. Akbarov, N. Yahnioglu, U. B. Yesil, "Interaction Between two Neighboring Circular Holes In A Pre-Streched Simply Supported Orthotropic Strip Under Bending", *Mechanics Composites Materials*, 44, No 6, 827-838, 2008.

[47] S. D. Akbarov, N. Yahnioglu, U. B. Yesil, "A 3D FEM Analysis of Stress Concentrations Around Two Neighboring Cylindirical holes In A PreStressed Rectangular Composite Plate Under Bending", *Mechanics Composites Materials*, 48, No 5, 499-510, 2012.

[48] I. Y. Khoma, O. A. Kondratenko, "Stress Distribution Around a Circular Cylindrical Cavity in a Prestressed Plate**",** *International Applied Mechanics*, 44(1): 23-33, 2008.

[49] Yahnioglu, U. B. Yesil, "Concentration of Stress Around A Cylindrical Hole In An Initial Stressed Rectangular Orthotropic Thick Plate", ASME2010 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, July 12-14, Istanbul, Turkey, 2010.

[50] U. B. Yesil, "The Effect of Initial Stretching of A Rectangular Plate With A Cylindrical Hole On The Stress And Displacement Distributions Around The Hole", *Turkish Journal Engineering Env. Sci*., 34, 1-15, 2010.

[51] U. B. Yesil, "The Effect of Own Weight on the Static Analysis of a Prestretched Plate-Strip With a Circular Hole in Bending", *Mechanics of Composite Materials,* Vol. 53, No. 2, 243-252, 2017.

[52] M. Mohammadi, JR. Dryden, L. Jiang, "Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate", *Int J Solids Struct.*, 48, 483–491, 2010.

[53] B. Karahalil, "Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerde Gerilme Yığılmalarının İncelenmesi", Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2012.

[54] D. V. Kubair, B. Bhanu-Chandar, "Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension", *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, 732-742, 2008.

[55] Q. Yang, C. Gao, W. Chen, "Stress analysis of a functionally graded material plate with a circular hole", *Arch. Appl. Mech.*, 80; 895-907, 2010.

[56] Q. Yang, C. Gao, W. Chen, "Stress concentration in a finite functionally graded material plate", *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 55, 7, 1263-1271, 2012.

[57] R. Sburlati, S. R. Atashipour, S. A. Atashipour, "Reduction of the stress concentration factor in a homogeneous panel with hole by using a functionally graded layer", *Composites: Part B*, 61, 99–109, 2014.

[58] D. V. Kubair, "Stress concentration factor in functionally graded plates with circular holes subjected to anti-plane shear loading", *J Elast.*, 2013.

[59] D. V. Kubair, "Stress concentration factors and stress-gradients due to circular holes in radially functionally graded panels subjected to anti-plane shear loading", *Acta Mech*, 224(11), 2845–2862, 2013.

[60] J. Huang, S. Venkataraman, A. J. Rapoff, R. T. Haftka, "Optimization of axisymmetric elastic modulus distributions around a hole for increased strength", *Struct. Multidiscip. Optim*., **25**(4), 225–236, 2003.

[61] U. B. Yeşil, M. C. Atasayanlar, " Öngerilmeli Fonksiyonel Derecelendirilmiş Şerit Plağın Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Statik Analizi**",** *21. Ulusal Mekanik Kongresi*, Niğde, Türkiye, 2 - 06 Eylül 2019, ss.421-430.

[62] U. B. Yeşil, M. C. Atasayanlar, " Eğilme Etkisindeki Öngerilmeli Fonksiyonel Derecelendirilmiş Şerit Plağın FEM ile Statik Analizi", *Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi,* cilt.8, sa.3, ss.160-172,Türkiye, 2019.

[63] U. B. Yeşil, M. C. Atasayanlar, " FEM Analysis of a FGM Pre-Stressed Plate Strip With A Circular Hole Under Bending", *Journal of Applied Science and Engineering*, cilt.23, sa.4, ss.627-642, 2020.

[64] R. V. Southwell, " On The General Theory of Elastic Stability", *Philos.Trans. Soc., London Ser A*, 213: 187-244, 1913.

[65] C. B. Biezeno, H. Hencky, "On The General Theory of Elastic Stability", *K. Akad. Wet Amsterdam Proc.*, 32: 444-4456, 1930.

[66] M. A. Biot, "Sur la Stabilite de l'equilibre Elastic Stability", *Ann Soc. Sci. Sect B*, 54 (1):91-109, 1934.

[67] M. A. Biot, "Nonlinear Theory Eelasticity and The Linearized Case for a Body Under Initial Stresses", *Phill Mag. Ser Z*, 27:89-115, 1939.

[68] M. A. Biot, "Mechanics Of Incremental Deformation", *John Wiley& Sons, Inc.,* 1965, New York London Sydney.

[69] Neuber. H, "Die Grundgleichungen der elastichen Stabilität in allegemeinen Koordinaten und lhre integration," *ZAMM,* 23, No. 6, 63–82, 1943.

[70] E. Trefftz, "Uber die Ableitung der Stabilitatskriterien des elastischen Gleichgewichts aus Elastizitatstheorie der endlichen Deformationen", *Proc. 3rd Inter. Congr. Mech. (Stockholm, 1930),* Bd. 3 ,1931.

[71] E. Trefftz, "Zur Theorie der Stabilitatdes elastischen Gleichgewichts", *ZAMM*,12, No. 3 , 1933.

[72] R. Kappus, "Zur Elastizitatstheorie endlicher Verschiebungen", *ZAMM*, **19**, No. 5, 271–285, 1939.

[73] R. Kappus, “Zur Elastizitatstheorie endlicher Verschiebungen”, *ZAMM*, **19**, No. 6, 344–361, 1939.

[74] A. E. Green, R. S. Rivlin, R. T. Shield, "General Theory of Small elastic Deformations Superimposed on Finite elastic deformations", *Proceedings of the Royal society A*, 211(1104):128-154, 1952.

[75] A. N. Guz, "Fundamental Of The Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.

[76] S. D. Akbarov, T. Sisman, N. Yahnioglu, “On the Fracture of the Unidirectional Composites in Compression”, *International Journal Engineering and Science*, 35(12/13):1115-1136, 1997.

[77] S. P. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, "Theory of Elasticity", *Third Edition, Mc Graw- Hill International Editions*, London, 1970.

[78] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR, "The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems", *Mc Graw- Hill Book Company*, Oxford, 1989.

[79] S. D. AKBAROV, A. N. GUZ, "Mechanics of Curved Composites, Kluwer Academic Publishers", Dordrecht, The Netherlands, 2000.

Gauss noktaları ve ağırlık fonksiyonları

$\pm x_i$		w_i
0	n=1	2.000 000 000 000 000
0.577 350 269 189 626	n=2	1.000 000 000 000 000
0.774 596 669 241 483 0.000 000 000 000 000	n=3	0.555 555 555 555 556 0. 888 888 888 888 889
0.861 136 311 594 953 0.339 981 043 584 856	n=4	0.347 854 845 137 454 0. 652 145 154 862 546
0.906 179 845 938 664 0.538 469 310 105 683 0.000 000 000 000 000	n=5	0.236 926 885 056 189 0.478 628 670 499 366 0.568 888 888 888 889
0.932 469 514 203 152 0.661 209 386 466 265	n=6	0.171 324 492 379 170 0.360 761 573 048 139

0.238 619 186 083 197		0.467 913 934 572 691
	n=7	
0.949 107 912 342 759		0.129 484 966 168 870
0.741 531 185 599 394		0.279 705 391 489 277
0.405 845 151 377 397		0.381 830 050 505119
0.000 000 000 000 000		0.417 959 183 673 469
	n=8	
0.960 289 856 497 536		0.101 228 536 290 376
0.796 666 477 413 627		0.222 381 034 453 374
0.525 532 409 916 329		0.313 706 645 877 887
0.183 434 642 495 650		0.362 683 783 378 362
	n=9	
0.968 160 239 507 626		0.081 274 388 361 574
0.836 031 107 326 636		0.180 648 160 694 857
0.613 371 432 700 590		0.260 610 696 402 935
0.324 253 423 403 809		0.312 347 077 040 003
0.000 000 000 000 000		0.330 239 355 001 260
	n=10	
0.973 906 528 517 172		0.066 671 344 308 688
0.865 063 366 688 985		0.149 451 349 150 581
0.679 409 568 299 024		0.219 086 362 515 982
0.433 395 394 129 247		0.269 266 719 309 996
0.148 874 338 981 631		0.295 524 224 714 753

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Ulusal Makale

1. U. Yesil, M. C. Atasayanlar, "EĞİLME ETKİSİNDEKİ ÖNGERİLMELİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ŞERİT PLAĞIN FEM İLE STATİK ANALİZİ", *Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, cilt.8, ss.160-172, 2019 (Hakemli Üniversite Dergisi)

Uluslararası Makale

1. U. Yesil, M. C. Atasayanlar, **"**FEM ANALYSIS OF A FGM PRE-STRESSED PLATE STRIP WITH A CIRCULAR HOLE UNDER BENDING**",** *Journal of Applied Science and Engineering*, cilt.23, ss.627-642,2020(ESCI İndekslerine Giren Dergi)

Konferans Bildirileri

1. U. Yesil, M. C. Atasayanlar, "Öngerilmeli Fonksiyonel Derecelendirilmiş Şerit Plağın Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Statik Analizi", *21. Ulusal Mekanik Kongresi*, Niğde, Türkiye, 2 - 06 Eylül 2019, ss.421-430.