**T.C.**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# BAZI KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KESİRLİ OPERATÖRLER İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

**ASLI ORUÇ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Prof. Dr. Erdal GÜL

Şubat, 2025

**T.C.**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# BAZI KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KESİRLİ OPERATÖRLER İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Aslı ORUÇ tarafından hazırlanan tez çalışması 19.02.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Erdal GÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. Erdal GÜL, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ömer GÖK, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN, Üye
İstanbul Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Erdal GÜL sorumluluğunda tarafımca hazırlanan "Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları İçin Kesirli Operatörler İçeren İntegral Eşitsizlikler" başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Aslı ORUÇ

İmza

Bu çalışma, “Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü’nün FYL-2023-5590” numaralı projesi ile desteklenmiştir.

*Aileme*

*ve*

*Öğrencilerime*

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli hocam Prof. Dr. Erdal GÜL'e çok teşekkür ederim. Ayrıca; öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve ilgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen aileme ve canım dedeme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aslı ORUÇ

Şubat, 2025

# İÇİNDEKİLER

**SİMGE LİSTESİ** viii
**ŞEKİL LİSTESİ** x
**ÖZET** xi
**ABSTRACT** xiii
**1 GİRİŞ** 1
**2 KURAMSAL TEMELLER** 4
2.1 Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler….……4
2.2 Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları……**7**
**3 MATERYAL ve YÖNTEM** 13
3.1 Bazı Temel Eşitsizlikler……..…….……..……..13
3.1.1 İntegraller için Hölder Eşitsizliği.....13
3.1.2 İntegraller için Power Mean Eşitsizliğ……..13
3.1.3 Young Eşitsizliği.……14
3.1.4 Hermite – Hadamard Eşitsizliği.……14
3.1.5 Simpson İntegral Eşitsizliği .……..14
3.1.6 Minkowski İntegral Eşitsizliği……..…..15
3.2. Kesirli İntegral Operatörler.……...15
3.2.1 Riemann – Liouville Kesirli İntegral Operatörü.……...16
3.2.2 Hadamard Kesirli İntegral Operatörü .……...17
3.2.3 Katugampola Kesirli İntegral Operatörü..……..17
3.2.4 Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü .……..18
3.2.5 ABK-Kesirli İntegral Operatörü ……18
3.2.6 Tempered Kesirli İntegral Operatörü.....19
3.2.7 Uyumlu Kesirli İntegral Opertörü…….…….……..19
**4 ARAŞTIRMA BULGULARI** 24
4.1 Tempered Kesirli İntegraller İçeren Hermite-Hadamrd Tipli Eşitsizlikler.....25
4.2 P-Fonksiyonlar için Elde Edilen Uyumlu Kesirli İntegral İçeren Eşitsizlikler…..34

**5 UYGULAMALAR** **42**

5.1 Sayısal Simülasyonlar ile Uygulamalar……..……...42

**6 SONUÇ** **44**

**KAYNAKÇA** **45**

**TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR** **48**

# SİMGE LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\subseteq$ | Alt Kümesi veya Eşit |
| ${}^{AB}_{\omega}I^{\xi}_{\kappa}\{\mathcal{F}(u)\}$ | Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü |
| $\beta(u,v)$ | Beta fonksiyonu |
| $\cup$ | Birleşim |
| $\mathrm{K}_s^1$ | Birinci anlamda $s$ −konveks fonksiyonların sınıfı |
| $\geq$ | Büyük veya Eşittir |
| $>$ | Büyüktür |
| $\in$ | Elemanıdır |
| $f'$ | $f$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi |
| $f''$ | $f$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi |
| $\Gamma(\alpha)$ | Gama fonksiyonu |
| $\chi(I)$ | Godunova-Levin fonksiyonu |
| $\Upsilon\Psi(h,I)$ | $h$ −konkav fonksiyonların sınıfı |
| $\Upsilon\Omega(h,I)$ | $h$ −konveks fonksiyonların sınıfı |
| $\mathrm{K}_s^2$ | İkinci anlamda $s$ −konveks fonksiyonların sınıfı |
| $J(I)$ | Jensen−konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $\supseteq$ | Kapsar veya Eşit |
| $\cap$ | Kesişim |
| $<$ | Küçüktür |
| $\leq$ | Küçük veya Eşittir |

| | |
|---|---|
| $C(I)$ | Konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $L(I)$ | Log-konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $\rho_m(b)$ | $m$ −konveks fonksiyonların sınıfı |
| $\mathcal{B}(\xi)$ | Normalizasyon fonksiyonu |
| $\mathrm{P}(I)$ | $P$ −fonksiyon |
| $\mathbb{R}_+$ | Pozitif reel sayılar kümesi |
| $QC(I)$ | Quasi−konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $I$ | $\mathbb{R}$'de bir aralık |
| $\psi_{u-}^{\alpha}\mathcal{F}$ | Sağ Riemann-Liouville kesirli integral operatörü |
| $\varpi_{u-}^{\alpha}\varphi$ | Sağ Hadamard kesirli integral operatörü |
| ${}^{\lambda}\chi_{u-}^{\alpha}\mathcal{F}(\zeta)$ | Sağ Katugampola kesirli integral operatörü |
| ${}_{\aleph_1,-}^{ABK}{}^{\lambda}I_t^{\nu}\mathcal{F}(t)$ | Sağ ABK-kesirli integral operatörü |
| ${}_{(c)}^{\tau}I_{\nu}^{\alpha,\zeta}\mathcal{F}(\nu)$ | Sağ Tempered kesirli integral operatörü |
| ${}^{b}I_{\alpha}$ | Sağ uyumlu kesirli integral |
| $\psi_{u+}^{\alpha}\mathcal{F}$ | Sol Riemann-Liouville kesirli integral operatörü |
| $\varpi_{u+}^{\alpha}\varphi$ | Sol Hadamard kesirli integral operatörü |
| ${}^{\lambda}\chi_{u+}^{\alpha}\mathcal{F}(\zeta)$ | Sol Katugampola kesirli integral operatörü |
| ${}_{\aleph_1,+}^{ABK}{}^{\lambda}I_t^{\nu}\mathcal{F}(t)$ | Sol ABK-kesirli integral operatörü |
| ${}_{(c)}^{\tau}I_{\nu}^{\alpha,\zeta}\mathcal{F}(\nu)$ | Sol Tempered kesirli integral operatörü |
| $I_{\alpha}^{a}$ | Sol uyumlu kesirli integral |
| $\mathrm{I}_{\alpha}(\alpha,\nu)$ | Tamamlanmamış Gamma fonksiyonu |
| $\mathcal{L}^1[a,b]$ | $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi |
| $\rho_m^{\alpha}(b)$ | $(\alpha,m)$ −konveks fonksiyonların sınıfı |

# ŞEKİL LİSTESİ

**Şekil 2.1** Belirli bir aralık üzerinde konveks fonksiyon…….. ..... 6
**Şekil 5.1** "$x$"için farklı $\zeta$ değerleri için sayısal simülasyonlar ..... 41
**Şekil 5.2** "$x$"için farklı $\zeta$ değerleri için sayısal simülasyonlar ..... 42

# ÖZET

## Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları İçin Kesirli Operatörler İçeren İntegral Eşitsizlikler

ASLI ORUÇ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Erdal GÜL

Bu tezin ilk bölümünde, iyi bilinen bazı eşitsizlik türleri ve çeşitli konveks fonksiyon tiplerinden bahsedilmektedir. Ardından, kesirli analizin ortaya çıkardığı yeni kavramlar olan kesirli basamaktan türev ve integral kavramlarının tarihçesi ve tanımlarına yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanımlar ve özellikler ile farklı türde bazı konveks fonksiyon sınıflarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, literatürdeki bazı temel eşitsizlikler ve kesirli basamaktan integral operatörleri tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde, Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler, iki kez türevlenebilir konveks fonksiyonlar için Tempered kesirli integral operatörleri aracılığıyla kurulmuştur. Bir yardımcı sonuç kullanılarak, Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin yeni tahminleri konvekslik, Hölder ve Power-Mean eşitsizlikleri yardımıyla sunulmuş ve bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise sonuçların etkinliğini göstermek amacıyla bazı simülasyon grafikleri verilmiştir. Ayrıca, uyumlu kesirli integral operatörü kullanılarak türetilmiş ve literatürde bulunan bir eşitlik sunulmuştur. Araştırma

sonuçlarında ise, uyumlu kesirli integraller aracılığıyla P- fonksiyonları sınıfı için yeni integral eşitsizliklerinin ispatları gerçekleştirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Tempered kesirli integral operatörü, Power-Mean eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar, Uyumlu kesirli türev ve integral operatorü, Hermite-Hadamard eşitsizliği.

# ABSTRACT

## Integral Inequalities Involving Fractional Operators For Some Classes Of Convex Functions

Aslı ORUÇ

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Erdal GÜL

The initial section of the paper discusses several established inequalities and various types of convex functions. It also introduces the concepts of fractional step derivatives and integrals, which are novel ideas emerging from fractional analysis. In the second section, fundamental definitions and characteristics of convex functions, along with different categories of convex functions, are presented. The third section introduces key inequalities and fractional step integral operators. In the fourth section, we derive Hermite-Hadamard type inequalities using Tempered fractional integral operators for convex functions that are twice differentiable. By employing an auxiliary result, new estimates of Hermite-Hadamard type inequalities are provided using convexity, Hölder's inequality, and the Power-Mean inequality, leading to the discovery of additional inequalities. Simulation graphs are included to illustrate the effectiveness of the results in the fifty section. Furthermore, the equation derived using the compatible fractional integral operator, as found in existing literature, is presented. In the research conclusions, new integral inequalities for the P-class functions are established through the application of compatible fractional integrals.

**Keywords:** Tempered fractional integral operator, Power-Mean inequality, Convex functions, Conformal fractional derivative and integral operator, Hermite-Hadamard inequality.

# 1
# GİRİŞ

Konvekslik kavramı, Arşimed'in π sayısını hesaplama yöntemiyle bağlantılıdır. Arşimed, konveks bir şeklin çevresinin, o şekli çevreleyen başka bir şeklin çevresinden daha küçük olduğunu gözlemlemiştir. Konvekslik kavramı, 19. yüzyılın sonlarına doğru matematik alanında yer edinmiştir. Bu konu, ilk kez 1881 yılında Hermite tarafından keşfedilmiş ve 1883 yılında Mathesis dergisinde yayımlanarak literatüre kazandırılmıştır. Konveks fonksiyonların temelleri ise 1905 ve 1906 yıllarında Johan Ludwig William Valdemar Jensen tarafından atılmıştır. Ancak konveks fonksiyonlarla ilk çalışan Jensen değildir; 1893 yılında Hadamard, bu fonksiyonların temel özelliklerine dair önemli ilk adımları atmıştır.

Konveks fonksiyon tanımı, eşitsizliklerle anlatıldığından, konveks fonksiyon kavramı eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkilidir. Eşitsizlikler, matematiğin tüm dallarında, fizikte, istatistikte, mühendisliğin çeşitli alanlarında, optimizasyon teorisinde, nümerik integrasyonda ve yaklaşım teorisinde geniş bir çalışma alanına sahiptir. Eşitsizlikler sürekli gelişen bir konudur ve son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Birçok matematikçi, eşitsizlikler teorisi ve konveks fonksiyonlar ile ilgili birçok kitap yazmıştır:

Inequalities (Hardy vd., 1952)

Analytic Inequalities (Mitrinović ve Vasic, 1970)

Classical and New Inequalities in Analysis (Mitrinović vd., 1993)

Konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler kullanılarak birçok çalışma ve integral eşitsizlik elde edilmiştir. En temel ve önemli integral eşitsizliklerden biri Hermite-Hadamard integral eşitsizliğidir. Konveks fonksiyonlarla ilgili yapılan birçok yeni çalışma, eşitsizlik teorisinin gelişmesinde rol oynamıştır. Eşitsizlik teorisine katkıda bulunan diğer kavramlar arasında kesirli türev ve kesirli integral kavramları da bulunmaktadır. Kesirli hesap, sadece tam sayılar için mi vardır? sorusuyla başlamıştır. 1695 yılında bu soruyu L'Hospital, bir mektup aracılığıyla Leibnitz'e yönelterek 1/2 mertebeden türevin anlamlı olup olmadığını sormuştur. Bu

mektuplaşma, kesirli hesabın matematikte yerini almaya başlamasına neden olmuştur. Konunun diğer bilim dallarında kullanılması ve başarılı çözümler vermesiyle, kesirli hesap gün geçtikçe önem kazanmıştır. Kesirli diferansiyel denklemler, özellikle fizik ve mühendislik bilimlerindeki birçok durumu en iyi aydınlatan denklem türü olmuştur. Fizik ve mühendisliğin yanı sıra, tıp, biyoloji, genetik, kimya, istatistik, psikoloji gibi birçok bilim dalında geniş kullanım alanı bulmuştur.

Diferansiyellenme teorisinin ortaya çıkışına kadar dayanan kesirli analiz, fiziksel yapısındaki karmaşasından dolayı klasik analiz kadar ifade edilmemiş ve bu yüzden bilim ve mühendislikte yeterince yer bulamamıştır. Ancak, doğanın gerçekliğini daha iyi ifade edebilmek için kesirli türev ve integral kavramlarının yaygınlaştırılması gerekmektedir. Kesirli analizin doğuşu, L'Hospital'in 1695 yılında Leibnitz'e yönelttiği özel mektupta türev mertebesi 1/2 olması durumunda bunun anlamlı olup olmayacağını sormasıyla başlamıştır. Bu soruyla birlikte kesirli türev ve integral kavramları araştırılmaya başlanmıştır. Leibnitz ve L'Hospital'den sonra Euler, 1730 yılında bu konuya dikkat çekmiştir P.S. Laplace, integraller yoluyla kesirli türevleri, S.F. Lacroix ise keyfi mertebeden türevleri ele almıştır. 1822'de J.B.J. Fourier, keyfi mertebeden türevlerin çalışmalarını başlatmıştır. İlk kez 1823 yılında N.H. Abel, kesirli türev ve integral operatörlerini tautochrone probleminin çözümü için kullanmıştır. J. Liouville, kesirli analiz tanım ve teoremlerini teorik olarak problemlere uygulamıştır. 1892 yılında kesirli integrasyon teorisini geliştiren G.F.B. Riemann, bu konuda uzun yıllar çalışmıştır. A.V. Letnikov ise bu konuda pek çok makale yayınlamıştır. H.H. Hardy ve M. Riesz gibi bilim insanları kesirli analiz konusuna önemli katkılarda bulunmuşlardır. Günümüze kadar A. Kilbas, M. Caputo, I. Podlubny, M. Fabrizio, T. Abdeljawad, R. Khalil, A. Atangana, D. Baleanu, gibi birçok bilim insanı bu konu üzerinde ciddi çalışmalar yaparak bilime katkı sağlamışlardır.

Son yıllarda, klasik türevin sınırlarını aşan kesirli türevin yeni tanımları yapılmıştır (Khalil vd., 2014). Klasik türeve uyumlu olan bu tanımlar, çalışmaların artmasına neden olmuştur. Yeni bir kesirli türev tanımı olan uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative), sağladığı bazı avantajlar nedeniyle büyük ilgi görmüş ve bu tanımla ilgili birçok üst düzey çalışma yapılmıştır. Ancak, bazı araştırmacılar (Ortigueira ve Machado) uyumlu kesirli türev operatörünün

gerçekten kesirsel bir operatör olup olmadığını tartışmaktadır. Bu soru günümüzde hala tartışmalıdır ve belki de felsefi bir konudan öteye gitmemektedir. Yeni ortaya çıkan bu teoriye hangi ismin verileceği üzerine yapılan tartışmalar, bu yeni kesirli türev ve integral tanımı üzerinde çalışılmayı gerektiren bir konudur.

Konveks fonksiyonlar, kesirli türev ve kesirli integral eşitsizlikleri üzerine yapılan çalışmalara örnek olarak Mihesan (1993), Dragomir ve Pearce (2003). Anderson vd. (2007), Alomari vd. (2009), Kavurmacı ve Tunç (2014), Polat (2018), Ekinci ve Özdemir (2019), Fernandez ve Ustaoğlu (2020), Avcı vd. (2021), Akdemir vd. (2021), Çakaloğlu vd.(2021), Gül ve Yalçın (2024a, 2024b) verilebilir.

# 2
# KURAMSAL TEMELLER

## 2.1 Konveks Fonksiyonlar ile ilgili Bazı Temel Tanım ve Özellikler

Bu başlık altında, ilk olarak çalışmanın temel motivasyonunu oluşturacak bazı kavramlar sunulacaktır.

**Tanım 2.1** Bir $\ell$ lineer uzay içinde $S \subseteq \ell$ bir alt küme olsun. Eğer bu kümenin herhangi iki $u, v$ elemanı için

$$K = \{m \in \ell : m = \mathrm{t}u + (1 - \mathrm{t})v,\ 0 \leq \mathrm{t} \leq 1\} \subseteq S \tag{2.1}$$

bağıntısını sağlayan tüm noktalarda bu küme içerisinde ise $S$ kümesine **konveks küme** adı verilir. (Mitrinović ve Vasic, 1970).

Bu tanım, konveks kümelerin geometrik yapısını ifade eder. Konveks kümeler, düz bir çizginin herhangi iki noktası arasındaki tüm noktaların da bu kümede yer almasını şart koşar. Örneğin, bir çemberin içi konveksken, çemberin sınırı bu şartı sağlamaz.

**Tanım 2.2** Bir $\Xi$ fonksiyonu, I üzerinde tanımlı bir aralık için herhangi iki nokta $u, v \in \mathrm{I}$ ile ile şu eşitsizliği sağlıyorsa, bu fonksiyon Jensen anlamında konveks veya **kesin *J*-konveks** olarak adlandırılır:

$$\Xi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{\Xi(u)+\Xi(v)}{2} \tag{2.2}$$

Bu ifade, bir fonksiyonun ortalama değeri ile ilgili özel bir simetriyi tanımlar (Mitrinović ve Vasic, 1970).

Jensen eşitsizliği, konveks fonksiyonlar için temel bir özelliktir. Örneğin, $\Xi(\mathrm{x}) = x^2$ gibi bir fonksiyon bu eşitsizliği sağlar ve bu da onun bir J-konveks fonksiyon olduğunu gösterir. Bu eşitsizlik özellikle olasılık teorisi ve istatistikte yaygın olarak kullanılır.

**Tanım 2.3** Bir $\Xi$ fonksiyonu, bir $I$ aralığı üzerinde tanımlı olsun. Eğer herhangi iki nokta $u, v \in I$ ve bir ağırlık katsayısı $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa:

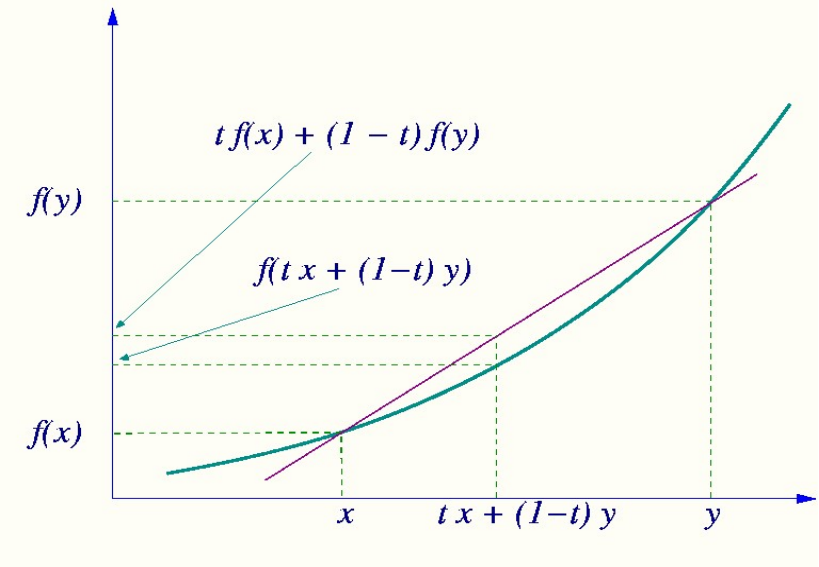
$$\Xi(tu + (1-t)v) \leq t\Xi(u) + (1-t)\Xi(v) \tag{2.3}$$

$\Xi$ fonksiyonuna $I$ üzerinde **konveks fonksiyon** adı verilir (Pečarić vd., 1992). Konveks fonksiyonlar, birçok matematiksel modelleme ve optimizasyon probleminde kullanılır. Yukarıdaki eşitsizlik, fonksiyon grafiğinin herhangi iki noktası arasında çizilen doğrunun, grafiğin üzerinde veya ona eşit olduğunu gösterir. Bu özellik, özellikle enerji minimizasyonu ve optimizasyon algoritmalarında kritik bir rol oynar.

$I$ üzerinde tanımlanan bir $\Xi$ fonksiyonu için konveks olmasının anlamı geometrik olarak $(x, \Xi(x))$ ve $(y, \Xi(y))$ noktalarını kapsayan $I$ üzerindeki doğru parçasının $\Xi$'nin grafiğinin üst kısmında yer alıyor olmasıdır. (Şekil 2.1)

Bir fonksiyon $\Xi$, $I$ üzerinde tanımlı olsun. Eğer bu fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi iki nokta $(x, \Xi(x))$ ve $(y, \Xi(y))$ arasında çizilen doğru parçası, fonksiyonun grafiğinin üst kısmında kalıyorsa, bu fonksiyon konveks olarak adlandırılır.

Bu tanım, konveks fonksiyonların görsel bir özelliğini açıklar. Örneğin, parabol şeklindeki bir fonksiyon $\Xi(x) = x^2$ her zaman bu şartı sağlar. Konvekslik, optimizasyon problemlerinde en iyi çözüm yollarını bulmak için kritik bir özelliktir.




**Şekil 2.1** Belirli bir aralık üzerinde konveks fonksiyondur

**Teorem 2.1 (Üçgen eşitsizliği):** Herhangi $u, v$ reel sayıları için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$|u + y| \leq |u| + |v|, \tag{2.4}$$

$$\big||u| - |y|\big| \leq |u - v|, \tag{2.5}$$

$$\big||u| - |y|\big| \leq |u + v|. \tag{2.6}$$

Bu ifadeler, tümevarım yöntemiyle genelleştirildiğinde şu formüle ulaşılır:

$$|u_1 + \cdots + u_n| \leq |u_1| + \cdots + |u_n|. \tag{2.7}$$

Bu eşitsizlikler, üçgen eşitsizliği olarak bilinir (Mitrinović vd., 1993).

Üçgen eşitsizliği, mutlak değerlerin bir özelliğini ifade eder ve vektör analizinden kompleks analizine kadar pek çok matematiksel alanın temel taşlarından biridir. Bu eşitsizlik, fiziksel bir yoruma sahiptir: Bir üçgende herhangi iki kenarın toplamı, üçüncü kenardan her zaman daha uzundur.

**Teorem 2.2** $\Xi$, $[e_1, e_2]$ aralığında sürekli bir reel fonkisyon olsun. Bu durumda, aşağıdaki üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu sağlanır:

$$\left|\int_{e_1}^{e_2} \Xi(t)dt\right| \leq \int_{e_1}^{e_2} |\Xi(t)|dt \quad (e_1 < e_2) \tag{2.8}$$

Bu ifade, üçgen eşitsizliğinin integral alanındaki bir uygulamasıdır (Mitrinović vd., 1993).

Bu eşitsizlik, bir eğrinin toplam alanının (mutlak değerleri ile ölçülen) alana eşit veya daha büyük olduğunu belirtir. Matematiksel analizde sıkça kullanılan bu özellik, fonksiyonların davranışlarını anlamak için önemlidir.

## 2.2. Konveks Fonksiyonlar için Bazı Farklı Türden Kavramlar

**Tanım 2.4** Bir fonksiyon $\Xi, [0,k] \to \mathbb{R}$ ile tanımlı ve $k > 0$ olsun. Eğer herhangi iki nokta $u, v \in [0,k]$, bir ağırlık katsayısı , $t \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için şu eşitsizlik sağlanıyorsa:

$$\Xi(tu + m(1-t)v) \leq t\Xi(u) + m(1-t)\Xi(v) \tag{2.9}$$

$\Xi$ fonksiyonuna $\boldsymbol{m}$ **−konveks fonksiyon** sınıfı adı verilir (Toader, 1988).

Bu tanım, klasik konveksliğin bir genelleştirilmesidir. Burada $m$ parametresi, konvekslik derecesini kontrol eder. Örneğin, $m = 1$ olduğunda bu tanım klasik konveksliğe indirgenir. $m$-konveks fonksiyonlar, ekonomi ve matematikte ağırlıklı dağılımlar ile ilgili problemlerde kullanılır.

**Tanım 2.5** $(\boldsymbol{\alpha, m})$ **−konveks fonksiyon sınıfı):** Bir fonksiyon $\Xi, [0,k] \to \mathbb{R}$ ile tanımlı ve $k > 0$ olsun. Eğer herhangi iki nokta $u, v \in [0,k]$, bir ağırlık katsayısı, $t \in [0,1]$ ve bir çift $(\alpha, m) \in [0,1] \times [0,1]$ için şu eşitsizliği sağlıyorsa:

$$\Xi(tu + m(1-t)v) \leq t^{\alpha}\Xi(u) + m(1-t^{\alpha})\Xi(v) \tag{2.10}$$

bu $\Xi$ fonksiyonuna $(\alpha, m)$ −konveks fonksiyon adı verilir (Bayraktar and Kudev, 2019).

$(\alpha, m)$ −konvekslik, daha geniş bir uygulama alanına sahiptir ve farklı konvekslik derecelerini modellemek için kullanılır. Bu tanım, optimizasyon ve ekonomik analizlerde daha hassas modelleme yapabilmek için uygundur.

**Tanım 2.6** Negatif olmayan bir fonksiyon $\Xi: l \to \mathbb{R}$ ile tanımlı olsun $u, v \in l$ ve bir ağırlık katsayısı $t \in (0,1)$ olmak üzere

$$\Xi(tu + m(1-t)v) \leq \frac{\Xi(u)}{t} + \frac{\Xi(v)}{1-t} \tag{2.11}$$

eşitsizliğini geçerli kılan $\Xi$'ye **Godunova-Levin fonksiyonu** denir.

Godunova-Levin fonksiyon sınıfı, klasik konveksliğin bir genelleştirilmesidir ve sıklıkla enerji minimizasyon problemlerinde kullanılır. Bu eşitsizlik, fonksiyonun ağırlıklı değerlerini orantılı bir şekilde karşılaştırır.

**Tanım 2.7 (P- fonksiyon):** Negatif olmayan bir fonksiyon $\Xi$, $l$ üzerinde tanımlı olsun. Eğer herhangi iki $u, v \in l$ ve $t \in (0,1)$ için şu eşitsizlik sağlanıyorsa:

$$\Xi(tu + (1-t)v) \leq \Xi(u) + \Xi(v) \tag{2.12}$$

$\Xi$ ye P- fonksiyon adı verilir (Niculescu and Persson, 2006).

P-fonksiyonlar, konveks ve quasi-konveks fonksiyonların geniş bir sınıfını kapsar. Bu tür fonksiyonlar, optimizasyon ve kontrol teorisinde kararlılık analizinde kullanılır. Ayrıca kesirli analiz yöntemlerinin eşitszilik teorisi ile entegrasyonunda yani optimal sınırların arayışı içinde kullanılmaktadır.

**Tanım 2.8** Bir fonksiyon $\Xi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, pozitif sayılar üzerinde tanımlı olmak üzere. Eğer herhangi iki sayı $u, v \in \mathbb{R}^+$ ve $\zeta, \eta \geq 0$ için $\zeta^s + \eta^s = 1$ koşulu ile eşitsizliği sağlıyorsa:

$$\Xi(\zeta u + \eta v) \leq \zeta^s \Xi(u) + \eta^s \Xi(v) \tag{2.13}$$

$\Xi$'ye **birinci anlamda $s$ −konveks fonksiyon** denir (Hudzik and Maligranda, 1994).

$s$ −konveks, klasik konvekslikten daha genel bir yapı sunar. $s$ −konveks fonksiyonlar, elastikiyet analizinden optimizasyona kadar birçok uygulamada kullanılır. Örneğin, $s = 1$ seçildiğinde, klasik konvekslik tanımı elde edilir.

**Tanım 2.9** $\zeta, \eta \geq 0,\ \zeta + \eta = 1$ olmak üzere, $s \in (0,1]$ olsun her $u, v$ pozitif reel sayıların birer elemanı ve $\Xi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer Bir fonksiyon $\Xi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, pozitif sayılar üzerinde tanımlı olsun. Eğer herhangi iki sayı $u, v \in \mathbb{R}^+$ ve $\zeta, \eta \geq 0$ için $\zeta + \eta = 1$ koşulu ile eşitsizliği sağlıyorsa:

$$\Xi(\zeta u + \eta v) \leq \zeta^s \Xi(u) + \eta^s \Xi(v) \tag{2.14}$$

$\Xi$'ye **ikinci anlamda $s$ −konveks fonksiyon** denir (Hudzik and Maligranda, 1994).

Bu tanım, $s$ −konveksliğin farklı bir yaklaşımıdır. Birinci anlamdan farkı, ağırlıkların toplamının sabit bir değere eşit olmasıdır. İkinci anlamda $s$ −konvekslik, özellikle optimizasyon algoritmalarında kullanılır.

**Tanım 2.10** Bir fonksiyon $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan değerler alıyor olsun. Eğer bir $\Xi: J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $u, v \in J$ için şu eşitsziliği sağlıyorsa:

$$\Xi(tu + (1-t)v) \leq h(t)\Xi(u) + h(1-t)\Xi(v) \tag{2.15}$$

$\Xi$ fonksiyonuna **$h$ −konveks fonksiyon** denir (Varošanec, 2007).

$h$ -konveks fonksiyonlar, standart konveksliğin daha esnek bir uzantısıdır. Burada, $h(t)$ fonksiyonu ağırlık katsayılarını tanımlayan bir kontrol mekanizmasıdır. Bu tür fonksiyonlar, özellikle enerji dağılımlarını modelleyen fiziksel sistemlerde uygulanır.

Bu eşitsizliğin tersine ilişkin olarak $\Xi$ fonksiyonu $h$ −konkav fonksiyon ya da $\Upsilon\Psi(h, J)$ sınıfına ait olarak kabul edilir. Eğer $h(t) = t$ seçilirse, bu durumda negatif olmayan tüm konveks fonksiyonlar $\Upsilon\Omega(h, J)$ sınıfına, negatif olmayan tüm konkav fonksiyonlar $\Upsilon\Psi(h, J)$ sınıfına dahildir. $h(t) = \frac{1}{t}$ alındığında, $\Upsilon\Omega(h, I) = Q(I)$ ve $h(t) = 1$ seçildiğinde, $\Upsilon\Omega(h, I) \supseteq \mathrm{P}(I)$ olduğu açıkça görülür. Ayrıca $h(t) = t^s$, $s \in (0,1)$ seçildiğinde $\Upsilon\Omega(h, I) \supseteq \mathrm{K}_s^2$ olduğu anlaşılmaktadır.

**Tanım 2.11** $u, v$ pozitif sayılarının $r$. kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$\mathcal{H}_r(u, v; \zeta) = \begin{cases} (\zeta u^r + (1-\zeta)v^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \ ise \\ u^{\zeta} v^{1-\zeta} \quad , & r = 0 \ ise \end{cases} \tag{2.16}$$

olarak tanımlanır.

Kuvvet ortalaması, aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamanın daha genel bir versiyonudur.

Örneğin: $r = 1$ olduğunda, aritmetik ortalama elde edilir.

$r = 0$ olduğunda, geometrik ortalama elde edilir.

Bu tanım, matematik ve istatistikte ölçüm analizi ve hata hesaplamalarında sıklıkla kullanılır.

**Tanım 2.12** Bir fonksiyon $\Xi$, $[e_1, e_2]$ aralığında tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi iki nokta $u, v \in [e_1, e_2]$ ve $\zeta \in [0,1]$ için şu eşitsizlik sağlanıyorsa:

$$\Xi(\zeta u + (1-\zeta)v) \leq M_k(\Xi(u), \Xi(v); \zeta) \tag{2.17}$$

$\Xi$'ye $[e_1, e_2]$ aralığında $k$ −konveks fonksiyon denir (Gill vd., 1997).

$r$ −konvekslik tanımı

$$\mathfrak{F}^r(\zeta u + (1-\zeta)v) = \begin{cases} (\zeta \Xi^r(u) + (1-\zeta)\Xi^r(v))^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \; ise \\ [\Xi(u)]^{\zeta}[\Xi(v)]^{1-\zeta} \quad , & r = 0 \; ise \end{cases} \tag{2.18}$$

ifadesi ile genelleştirilmiştir (Gill vd., 1997).

**Tanım 2.13** Bir fonksiyon $\Xi: A \to \mathbb{R}$ , $A \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan konveks küme üzerinde tanımlı olsun. Eğer herhangi iki nokta $\forall u, v \in A$ ve $t \in [0,1]$ için şu eşitsizliği sağlıyorsa:

$$\Xi(tu + (1-t)v) \leq max\{\Xi(u), \Xi(v)\} \tag{2.19}$$

fonksiyonuna **quasi−konveks fonksiyon** adı verilir (Dragomir vd., 1998).

Quasi-konvekslik, konvekslikten daha geniş bir sınıfı ifade eder. Bu özellik, genellikle minimum veya maksimum değerlerin analiz edildiği uygulamalarda kullanılır. Quasi-konveks fonksiyonların optimizasyon problemlerinde önemli bir yeri vardır. Bu eşitsizlik için eğer

$$\Xi(tu + (1-t)v) < max\{\mathfrak{F}(u), \mathfrak{F}(v)\} \tag{2.20}$$

eşitsizliği geçerli ise $\Xi$ fonksiyonuna kesin quasi−konveks fonksiyon denir. Benzer şartlar altında

$$\Xi(tu + (1-t)v) \geq max\{\mathfrak{F}(u), \mathfrak{F}(v)\} \tag{2.21}$$

eşitsizliği geçerli ise $\Xi$ fonksiyonuna quasi−konkav fonksiyon ve

$$\Xi(tu + (1-t)v) > max\{\mathfrak{F}(u), \mathfrak{F}(v)\} \tag{2.22}$$

eşitsizliği geçerli ise $\Xi$ fonksiyonuna kesin quasi−konkav fonksiyon denir (Dragomir vd., 1998).

**Tanım 2.14** $\Xi$ hem quasi−konveks hem de quasi−konkav ise $\Xi$ fonksiyonuna quasi monotoniktir denir (Dragomir vd., 1998).

**Tanım 2.15** Bir fonksiyon $\Xi: J \to \mathbb{R}$ tanımlı olsun. Eğer $log\Xi$, konveslik koşullarını sağlıyorsa, bu fonksiyon $log$ −konveks olarak adlandırılır. Aksi taktirde, $log\Xi$ konkavsa, bu fonksiyon $log$ konkav olarak adlandırılır.

$$\Xi(tu + (1-t)v) \leq [\Xi(u)]^t [\Xi(v)]^{(1-t)} \tag{2.23}$$

Eşitsizliği geçerli ise $\Xi$ fonksiyonuna $log$ −konveks fonksiyon ve bu eşitsizliğin tersi için çevrilirse $\Xi$ fonksiyonuna $log$ −konkav fonksiyon denir (Pečarić vd., 1992). $log$ −konveks fonksiyonlar, eksponansiyel büyümeyi ve çarpımsal yapıları modellemek için idealdir. Örneğin, $\Xi(x) = e^x$ bir log-konveks fonksiyondur. Bu tür fonksiyonlar, ekonomi, biyoloji ve mühendislikte birçok uygulama alanına sahiptir.

**Tanım 2.16** Beta fonksiyonu, iki pozitif reel sayı $\gamma$ ve $\rho$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\beta(\gamma,\rho)=\int_0^1 \vartheta^{\gamma-1}(1-\vartheta)^{\rho-1}d\vartheta\,,\ \gamma,\rho>0. \tag{2.24}$$

Bu ifade Euler tipi Beta integral fonksiyonu veya Euler integrali olarak bilinir. (Dragomir vd., 1998).

Beta fonksiyonu, özel fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutar. $\beta(\gamma,\rho),\gamma$ ve $\rho$' nin değerlerine bağlı olarak Gamma fonksiyonu ile bağlantılıdır:

$$\beta(\gamma,\rho)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+c)}. \tag{2.25}$$

Bu fonksiyon, istatistikte dağılım teorisinde ve integral hesaplamalarında sıkça kullanılır.

**Tanım 2.17 (Tamamlanmamış Gamma fonksiyonu)**

$\alpha > 0$ ve $x,\zeta \geq 0$ gerçel sayıları için $\zeta$ - Tamamlanmamış Gamma fonksiyonu şu şekilde tanımlanır

$$\mathrm{I}_{\alpha}(\alpha\,,\upsilon)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\upsilon}\mathrm{x}^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{dx} \tag{2.26}$$

Eğer $\zeta=1$, seçilirse, bu fonksiyon tamamlanmış Gamma fonksiyonuna dönüşür:

$$I(\alpha\,,\upsilon)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\upsilon}\mathrm{x}^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\mathrm{dx}\,,\alpha>0 \tag{2.27}$$

**Sonuç 2.1** $\alpha > 0$ and , $x,\zeta \geq 0$ gerçel sayıları için

a. $I_{\zeta(\upsilon-\gamma)}(\alpha,1)=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-\zeta(\upsilon-\gamma)x}dx=\frac{1}{(\upsilon-\gamma)^{\alpha}}I_{\alpha}(\alpha\,,\upsilon-\gamma).$

b. $\int_0^1 I_{\alpha(\upsilon-\gamma)}(\alpha,x)dx=\frac{I_{\alpha}(\alpha\,,\upsilon-\gamma)}{(\upsilon-\gamma)^{\alpha}}-\frac{I_{\alpha}(\alpha+1\,,\upsilon-\gamma)}{(\upsilon-\gamma)^{\alpha+1}}.$

Tamamlanmamış Gamma fonksiyonu, özellikle istatistiksel modelleme ve yoğunluk fonksiyonları hesaplamalarında önemlidir. $\zeta\neq1$ durumunda, bu fonksiyon diferansiyel denklemlerde sınır koşullarını modellemek için kullanılabilir.

# 3
# MATERYAL ve YÖNTEM

## 3.1 Bazı Temel Eşitsizlikler

### 3.1.1 İntegraller için Hölder Eşitsizliği

$\Xi > 1$ ve $\frac{1}{\Im} + \frac{1}{\wp} = 1$ kabul edilsin. $\Xi$ ve $G$, $[\varsigma, \chi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olup, $|\Xi|^{\Im}$, $|G|^{\wp}$, $[\varsigma, \chi]$ için, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\int_{\varsigma}^{\chi} |\Xi(u)G(u)|\, du \leq \left(\int_{\varsigma}^{\chi} |\Xi(u)|^{\Im} du\right)^{\frac{1}{\Im}} \left(\int_{\varsigma}^{\chi} |G(u)|^{\wp} du\right)^{\frac{1}{\Im}} \tag{3.1}$$

(Mitrinović vd.,1993).

Hölder eşitsizliği, integral teorisinin temel bir aracı olup normların ilişkisini tanımlar. Örneğin, $\Xi = \wp = 2$ durumunda, bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliğine indirgenir. Hölder eşitsizliği, özellikle Fourier analizinde kullanılır.

Bunun yanı sıra, Hölder eşitsizliğine bağlı olarak power mean eşitsizliği de şu şekilde ifade edilebilir.

### 3.1.2 İntegraller için Power Mean Eşitsizliği

$\wp \geq 1$ kabul edilsin. $\Xi$ ve $G$, $[\varsigma, \chi]$ reel fonksiyonlar olup, $|\Xi|$ ve $|G|^{\wp}$, $[\varsigma, \chi]$ aralığında ki fonksiyonlar ise, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\int_{\varsigma}^{\chi} |\Xi(u)G(u)|\, du \leq \left(\int_{\varsigma}^{\chi} |\Xi(u)| du\right)^{1-\frac{1}{\wp}} \left(\int_{\varsigma}^{\chi} |\Xi(u)||G(u)|^{\wp} du\right)^{\frac{1}{\wp}}. \tag{3.2}$$

### 3.1.3 Young Eşitsizliği

$\varsigma, \chi > 0$ ve $\Im, \wp > 1$ koşullarında, $\frac{1}{\Im} + \frac{1}{\wp} = 1$ olduğu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\varsigma\chi \leq \frac{\varsigma^{\Im}}{\Im} + \frac{\chi^{\wp}}{\wp} \tag{3.3}$$

Eşitlik yalnızca $\varsigma^{\Im} = \chi^{\wp}$ olduğu durumda sağlanır (Mitrinović and Vasic, 1970, s.49).

### 3.1.4 Hermite-Hadamard Eşitsizliği

$k$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir aralık olmak üzere, $u, v \in k$ ve $u < v$ ve $\Xi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon Kabul edilsin. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir: Bu eşitsizlik **Hermite-Hadamard eşitsizliği** olarak bilinir (Pečarić vd. 1992).

$$\Xi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v \Xi(t)dt \leq \frac{\Xi(u)+\Xi(v)}{2} \tag{3.4}$$

Bu eşitsizlik, konveks fonksiyonların integral ortalamasını değerlendirir. Özellikle diferansiyel denklemler ve optimizasyonda kullanılır. Örneğin, enerji hesaplamalarında bir eğrinin altındaki alanın sınırlarını belirlemek için bu eşitsizlikten yararlanılır.

### 3.1.5 Simpson İntegral Eşitsizliği

$\Xi: I = [u, v] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir foksiyon olsun. Eğer $\left\|\Xi^{(4)}\right\|_\infty < \infty$ ise ve $\Xi$ fonksiyonu $I^{\circ}$ üzerinde 4. mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{\Xi(u)+\Xi(v)}{2} + 2\Xi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] - \frac{1}{u-v}\int_u^v \Xi(t)dt\right| \leq \frac{1}{2880}\left\|\Xi^{(4)}\right\|_\infty (v-u)^4. \tag{3.5}$$

### 3.1.6 Minkowski İntegral Eşitsizliği

$\Im \geq 1, 0 < \int_a^b u^{\Im}(t)dt < \infty$ ve $0 < \int_a^b v^{\Im}(t)dt < \infty$ olsun. Bu halde

$$\left(\int_a^b (u(t) + v(t))^{\Im} dt\right)^{\frac{1}{\Im}} \leq \left(\int_a^b u^{\Im}(t)dt\right)^{\frac{1}{\Im}} + \left(\int_a^b v^{\Im}(t)dt\right)^{\frac{1}{\Im}} \qquad (3.6)$$

eşitsizliğine Minkowski integral eşitsizliği denir.

Minkowski eşitsizliği, üçgen eşitsizliğinin $L^P$-normları için genelleştirilmiş bir versiyonudur. Analiz ve lineer cebir uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır. Örneğin, bu eşitsizlik $\Im = 2$ durumunda Öklid normuna indirgenir.

## 3.2 Kesirli İntegral Operatörler

Kesirli integral operatörleri, klasik türev ve integral işlemlerinin genelleştirilmiş bir versiyonudur. Bu operatörler, bir fonksiyonun geçmiş değerlerini dikkate alarak türev alma veya integral hesaplama işlemleri gerçekleştirir. Klasik diferansiyel hesaplamanın ötesine geçerek daha karmaşık ve esnek bir analiz yöntemi sunarlar. Özellikle bellek etkisine sahip fiziksel, biyolojik ve mühendislik sistemlerinin modellenmesinde kritik bir rol oynarlar.

Bu bölümde ele alınan başlıca kesirli integral ve türev operatörleri, farklı uygulama alanlarına hitap eden çeşitli özellikler sunmaktadır. Riemann-Liouville kesirli operatörleri, klasik integral ve türev işlemlerinin bir uzantısı olup sistemlerin başlangıç durumlarını modellemek için kullanılır. Hadamard kesirli operatörleri, logaritmik ölçekle hesaplama yaparak geometrik büyüme oranlarını modelleme imkânı sunar. Katugampola kesirli operatörleri, fiziksel ve biyolojik sistemlerin davranışlarını modellemek için kullanılan parametrik bir yapıya sahiptir. Atangana-Baleanu kesirli operatörleri ise normalizasyon fonksiyonları kullanarak daha geniş bir uygulama alanı sağlar.

Caputo ve Grünwald-Letnikov kesirli türev operatörleri, başlangıç koşulları açısından fiziksel anlamlılık taşıyan ve sayısal uygulamalara uygun yöntemler sunar. Riesz ve Marchaud kesirli operatörleri ise simetrik özellikleriyle öne çıkar ve özellikle difüzyon süreçlerinin modellenmesinde kullanılır. Liouville-Weyl operatörleri, tüm reel eksende tanımlı olup zaman ve uzay bağımsızlıklarını dikkate alır.

Kesirli integral operatörleri, yalnızca matematiksel bir araç olmanın ötesinde birçok alanda uygulanmaktadır. Fizikte elektromanyetik dalgaların yayılımı ve difüzyon süreçleri, mühendislikte kontrol sistemleri ve sinyal işleme, biyomedikal modellemede hafızalı sistemlerin ve biyolojik süreçlerin analizi, ekonomide ise finansal süreçlerin ve zaman serilerinin incelenmesi bu uygulama alanlarından bazılarıdır. Kesirli hesaplamalar, modern problemlere yenilikçi çözümler sunarak bilimsel araştırmalarda giderek daha fazla önem kazanmaktadır.

Bu genel bakış, kesirli integral operatörlerinin hem teorik hem de uygulamalı matematikteki önemini vurgulamaktadır.

### 3.2.1 Riemann – Liouville Kesirli İntegral Operatörü

$\Xi \in \mathcal{L}^1[u, v]$ olmak şartıyla $\psi_{u+}^{\alpha}\Xi$ ve $\psi_{v-}^{\alpha}\Xi$ Riemann – Lioville kesirli integrallerinin $a > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için tanımları sırasıyla

Sol tarafı;

$$\psi_{u+}^{\alpha}\Xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{u}^{\zeta}(\zeta - t)^{\alpha-1}\Xi(t)dt, \qquad \zeta > u \tag{3.7}$$

ve sağ tarafı;

$$\psi_{v-}^{\alpha}\Xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\zeta}^{v}(t - \zeta)^{\alpha-1}\Xi(t)dt, \qquad \zeta < v \tag{3.8}$$

dir. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t}u^{\alpha-1}du$ olup

$$\psi_{u+}^{0}\Xi(\zeta) = \Xi(\zeta) \tag{3.9}$$

ve

$$\psi_{v-}^{0}\Xi(\zeta) = \Xi(\zeta) \tag{3.10}$$

eşitlikleri geçerlidir (Kilbas vd., 2006).

Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri, klasik türev ve integrallerin genelleştirilmiş versiyonudur. Bu operatörler, fonksiyonun geçmiş değerlerini dikkate alarak türev alır veya integral hesaplar. Özellikle fiziksel sistemlerin hafızalı davranışlarını modellemek için yaygın olarak kullanılır.

### 3.2.2 Hadamard Kesirli İntegral Operatörü

Hadamard kesirli integralinin $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için sağ ve sol taraflı tanımları sırasıyla:

Sol tarafı;

$$\varpi_{u+}^{\alpha}\Xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_u^{\zeta} \frac{\Xi(t)}{\left(ln\frac{\zeta}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}, \qquad \zeta > u > 0 \tag{3.11}$$

Sağ tarafı;

$$\varpi_{v-}^{\alpha}\Xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\zeta}^{v} \frac{\Xi(t)}{\left(ln\frac{t}{\zeta}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}, \qquad 0 < \zeta < v. \tag{3.12}$$

şeklindedir. Burada Γ gamma fonksiyonudur (Kilbas vd., 2006).

Hadamard kesirli integral operatörleri, logaritmik bir ölçekle hesaplama yapar ve özellikle geometrik büyüme oranlarının incelenmesinde kullanılır. Bu operatör, ekonomi analizlerinde sıklıkla kullanılan bir araçtır.

### 3.2.3 Katugampola Kesirli İntegral Operatörü

$[u, v] \subseteq \mathbb{R}$ sonlu aralığında, $u > 0$ ve $\Xi \in X_a^l(u, v)$ kabul edilsin. Sol ve sağ taraflı Katugampola kesirli integral operatörleri, $u < \zeta < v$ ve $\lambda > 0$ için sırasıyla şu şekilde ifade edilir:

Sol tarafı;

$${}^{\lambda}\chi_{u+}^{\alpha}\Xi(\zeta) = \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_u^{\zeta} \frac{t^{\lambda-1}}{\left(\zeta^{\lambda}-t^{\lambda}\right)^{1-\alpha}}\Xi(t)dt \tag{3.13}$$

ve sağ tarafı;

$${}^{\lambda}\chi_{v-}^{\alpha}\Xi(\zeta) = \frac{\lambda^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{\zeta}^{v} \frac{t^{\lambda-1}}{\left(t^{\lambda}-\zeta^{\lambda}\right)^{1-\alpha}}\Xi(t)dt \tag{3.14}$$

şeklindedir (Katugampola, 2011).

Katugampola kesirli integral operatörleri, klasik integral operatörlerine bir parametre ekleyerek daha esnek bir yapı sağlar. Bu esneklik, farklı fiziksel ve biyolojik sistemlerde kullanılabilen bir modelleme aracı sunar.

**Teorem 3.1** $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ ise $\zeta > u$ için,

$$\lim_{\lambda \to 1} {}^{\lambda}\chi_{u+}^{\alpha}\Xi(\zeta) = \psi_{u+}^{\alpha}\Xi(\zeta) \tag{3.15}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} {}^{\lambda}\chi_{u+}^{\alpha}\mathfrak{F}(\zeta) = \mathfrak{I}_{u+}^{\alpha}\Xi(\zeta) \tag{3.16}$$

dir. Benzer sonuçlar sağ taraflı operatörler için de geçerlidir (Katugampola, 2011).

### 3.2.4 Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü

$\Xi \in \mathcal{L}^1(\lambda, \Theta), \lambda < \Theta, \varepsilon \in [0,1]$ iken

$${}_{\omega}^{AB}I_{\kappa}^{\xi}\{\Xi(u)\} = \frac{1-\xi}{\mathcal{B}(\xi)}\Xi(u) + \frac{\xi}{\mathcal{B}(\xi)\Gamma(\xi)}\int_{u}^{\Theta}(v-u)^{\xi-1}\Xi(u)du \tag{3.17}$$

Burada $\mathcal{B}(\xi)$ normalizasyon fonksiyonu olup; $\mathcal{B}(\xi) > 0$, $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}(1) = 1$ şeklindedir (Atangana ve Baleanu, 2016).

Bu operatör, kesirli hesaplamalarda bir normalizasyon fonksiyonu kullanarak hesaplama yapar. Bu yöntem, özellikle biyomedikal mühendislikte ve karmaşık sistemlerin modellenmesinde popülerdir.

### 3.2.5 ABK-Kesirli İntegral Operatörü

$[\aleph_1, \aleph_2] \subset \mathbb{R}$ sonlu bir aralık, $\nu \in (0,1)$ ve $\mathfrak{F} \in X_a^l(\aleph_1, \aleph_2)$ olsun. Sol ve sağ taraflı ABK- kesirli integral operatörleri $\lambda > 0$ için sırasıyla:

Sol tarafı; $t > \aleph_{1,} \geq 0$ için

$${}_{\aleph_{1,}+}^{ABK\ \lambda}I_t^{\nu}\Xi(t) = \frac{1-\nu}{\mathcal{B}(\nu)}\Xi(t) + \frac{\lambda^{1-\nu}\nu}{\mathcal{B}(\nu)\Gamma(\nu)}\int_{\aleph_{1,}}^{t}\frac{u^{\lambda-1}}{\left(t^{\lambda}-u^{\lambda}\right)^{1-\nu}}\Xi(u)du, \tag{3.18}$$

ve sağ tarafı; $t < \aleph_2$ için

$${}_{\aleph_2-}^{ABK\ \lambda}I_t^{\nu}\Xi(t) = \frac{1-\nu}{\mathcal{B}(\nu)}\Xi(t) + \frac{\lambda^{1-\nu}\nu}{\mathcal{B}(\nu)\Gamma(\nu)}\int_{t}^{\aleph_2}\frac{u^{\lambda-1}}{\left(u^{\lambda}-t^{\lambda}\right)^{1-\nu}}\Xi(u)du, \tag{3.19}$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{B}(\nu)$ normalizasyon fonksiyonu olup; $\mathcal{B}(\nu) > 0$, $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}(1) = 1$ şeklindedir.

### 3.2.6 Tempered Kesirli İntegral Operatörü

$[u, v]$ sonlu bir aralık, $\zeta \geq 0$, $\alpha > 0$ olsun. Bir $\Xi \in \mathcal{L}^1[u, v]$, fonksiyonu için, sırasıyla sol ve sağ temperlenmiş kesirli integral aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ {}_{(c)}{}^{\tau}_{+}I^{\alpha,\zeta}_{v}\Xi(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{c}^{x}(x-t)^{\alpha-1}e^{-\zeta(x-t)}\Xi(t)dt \tag{3.20} $$

ve

$$ {}_{(x)}{}^{\tau}_{-}I^{\alpha,\zeta}_{u}\Xi(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{v}(t-x)^{\alpha-1}e^{-\zeta(t-x)}v(t)dt. \tag{3.21} $$

Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyondur (Meerschaert vd., 2015; Li vd., 2019).

**Sonuç 3.1** Denklem (3.20) ve (3.21)'de ζ=0 alınırsa, sırasıyla sol ve sağ Riemann-Liouville operatörleri elde edilir.

### 3.2.7 Uyumlu Kesirli İntegral

$0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq u < v$ olarak verilsin. $\Xi$: $[u, v] \to R$ fonksiyonu için eğer

$$ \int_{u}^{v}\Xi(x)d_{\alpha}x = \int_{u}^{v}\Xi(x)x^{\alpha-1}dx \tag{3.22} $$

integrali var ve sonlu ise $\Xi$ fonksiyonu $[u, v]$ aralığı üzerinde $\alpha-$kesirli integrallenebilirdir denir (Khalil vd., 2014).

$\alpha \in (0,1]$ koşulunda, $\alpha$ mertebesindeki sol uyumlu kesirli integral şu şekilde tanımlanır:

$$ (I^{u}_{\alpha}\Xi)(t) = \int_{u}^{t}\Xi(x)d_{\alpha}(x,u) = \int_{u}^{t}(x-u)^{\alpha-1}\Xi(x)dx. \tag{3.23} $$

Buna benzer şekilde, $\alpha \in (0,1]$ koşulunda $\alpha$ mertebesindeki sağ uyumlu kesirli integral şu şekilde tanımlanır (Abdeljawad, 2015):

$$ \left({}^{v}I_{\alpha}\,\Xi\right)(t) = \int_{t}^{v}\Xi(x)d_{\alpha}(v,x) = \int_{t}^{v}(v-x)^{\alpha-1}\Xi(x)dx. \tag{3.24} $$

Kesirli operatörlerle ilgili teoremler, bu operatörlerin matematiksel özelliklerini anlamak ve çeşitli alanlardaki uygulamalarını mümkün kılmak için temel bir çerçeve sunar. Bu teoremler, kesirli türev ve integral operatörlerinin doğrusal yapıları, değişken dönüşümleri, süreklilik özellikleri ve konvolüsyon kuralları gibi matematiksel özelliklerini ortaya koyar. Bu bölümde ele alınan teoremler, kesirli hesaplamaların hem teorik hem de pratik kullanımlarına ışık tutmaktadır.

Bu teoremlerin en önemli katkılarından biri, kesirli türev ve integrallerin klasik türev ve integrallerle olan ilişkisini sağlamaktır. Örneğin, Riemann-Liouville kesirli operatörleriyle ilgili teoremler, bu operatörlerin süreklilik, diferansiyel denklemlerle bağlantı ve başlangıç koşulları açısından fiziksel olarak nasıl anlamlandırılabileceğini açıklar. Bu teoremler, fizik ve mühendislik gibi alanlarda kullanılan modellerin sağlam bir matematiksel temele dayanmasını sağlar.

Caputo kesirli türev operatörleriyle ilgili teoremler, özellikle başlangıç koşullarının fiziksel sistemlerde nasıl uygulanacağını netleştirir. Bu teoremler, Caputo türevlerinin klasik diferansiyel denklemlerle uyumlu bir şekilde nasıl kullanılabileceğini gösterir. Bu durum, biyomedikal mühendislik ve kontrol sistemleri gibi alanlarda oldukça önemlidir.

Hadamard ve Katugampola kesirli operatörleriyle ilgili teoremler, logaritmik ve parametrik yapılarla nasıl hesaplama yapılacağını ve bu yapıların geometrik büyüme veya özel ölçekli sistemlere nasıl uygulanacağını açıklar. Bu teoremler, sistemlerin analitik olarak modellenmesini ve çözüm yollarının daha geniş bir kapsamda araştırılmasını mümkün kılar.

Grünwald-Letnikov ve Marchaud kesirli türev operatörleriyle ilgili teoremler, bu operatörlerin sayısal çözümleme ve anormal difüzyon süreçleri üzerindeki etkilerini

inceler. Bu, özellikle fiziksel süreçlerin modellenmesi ve dijital simülasyonların gerçekleştirilmesi açısından önemli bir katkı sunar.

Son olarak, Riesz ve Liouville-Weyl kesirli operatörleriyle ilgili teoremler, bu operatörlerin simetrik özelliklerini ve sonsuz aralıkta nasıl kullanıldıklarını vurgular. Bu özellikler, teorik fizik ve olasılık hesaplamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır.

Genel olarak, kesirli operatörler ile ilgili teoremler, bu operatörlerin temel matematiksel yapılarını ve özelliklerini açığa çıkararak, onları uygulamalı problemlerde etkin bir şekilde kullanmamıza olanak tanır. Bu teoremler sayesinde, kesirli hesaplamaların teorik gücü ve uygulama potansiyeli daha iyi anlaşılmaktadır.

Farklı türden konveks fonksiyon sınıflarını içeren tempered kesirli integral opertörler ve uyumlu kesirli opertörler yardımıyla, Hermite-Hadamard tipi bazı genelleştirilmiş integral eşitsizliklerine ilişkin teoremler aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Teorem 3.2** $0 \leq \varrho < \eta$ ve $\Xi \in [\varrho, \eta]$ olsun. Eğer $\Xi$, $[\varrho, \eta] \to \mathbb{R}$ aralığında $(h, m)$ konveks bir fonksiyon, $\zeta \geq 0, \alpha > 0$ ve $m \in (0,1)$ ise, Tempered kesirli integral operatör için,

$$\frac{1}{h(1/2)}\Xi\left(\frac{\varrho+\eta}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\mathrm{I}_{\alpha}(\alpha, m\eta-\varrho)(m\eta-\varrho)^{\alpha}}\left[{}_{\left(\frac{\alpha+m\eta}{2}\right)}^{\tau}I_{\eta}^{\alpha,\zeta}\Xi(m\eta) + m^{\alpha}{}_{\left(\frac{\varrho+m\eta}{2}\right)}^{\tau}I_{\varrho}^{\alpha,\zeta}\Xi(\varrho/m)\right] \leq \frac{\Xi(\varrho)+\Xi(\eta)}{\mathrm{I}_{\alpha}(\alpha, m\eta-\varrho)}\varphi + \frac{[\Xi(\varrho/m)+\Xi(\eta/m)]}{\mathrm{I}_{\alpha}(\alpha, m\eta-\varrho)}\omega$$

eşitsizliği sağlanır (Gül vd., 2024).

**Teorem 3.3** $0 \leq \varrho < \eta$ ve $\Xi \in [\varrho, \eta]$ olsun. Eğer $\Xi$, $[\varrho, \eta] \to \mathbb{R}$ aralığında $S$ konveks bir fonksiyon, $\zeta \geq 0$ ve $\alpha > 0$ ise, Tempered kesirli integral operator için,

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\varrho+\eta}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{2^{s}\mathrm{I}_{\alpha}(\alpha, m\eta-\varrho)(\eta-\varrho)^{\alpha}}\left[{}_{\left(\frac{\varrho+\eta}{2}\right)}{}^{\tau}I_{\eta}^{\alpha,2\zeta}\Xi(\eta)+{}_{\left(\frac{\varrho+\upsilon}{2}\right)}{}^{\tau}I_{\varrho}^{\alpha,2\zeta}\Xi(\varrho)\right]$$
$$\leq \frac{\Xi(\varrho)+\Xi(\eta)}{2^{s}}(\mu+\eta)$$

eşitsizliği sağlanır (Gül vd., 2024).

**Teorem 3.4** Eğer $0 \leq u < \eta$ ve $\Xi:[u,\upsilon] \to \mathbb{R}$, $\Xi$ fonksiyonu $[u,\upsilon]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise ve $\alpha > 0$ ise, kesirli integral operator için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\Xi\left(\frac{u+\upsilon}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\upsilon-u)^{\alpha}}\left[\ J_{u^{+}}^{\alpha}\Xi(\upsilon)+J_{\upsilon^{-}}^{\alpha}\Xi(u)\right] \leq \frac{\Xi(u)+\Xi(\upsilon)}{2}$$

(Sarıkaya vd., 2013).

**Teorem 3.5** $0 \leq \varrho < \eta$ olmak $\Xi:[\varrho,\eta] \to \mathbb{R}$ ve $\Xi \in [\varrho,\eta]$ olsun. Eğer $\Xi$, $[\varrho,\eta]$ konveks bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise, uyumlu kesirli integral operator için,

$$\Xi\left(\frac{\varrho+\eta}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(\eta-\varrho)^{\alpha}\Gamma(\alpha-n)}\left[\ I_{u^{+}}^{\alpha}\Xi(\eta)+I_{\upsilon^{-}}^{\alpha}\Xi(\varrho)\right] \leq \frac{\Xi(\varrho)+\Xi(\eta)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. (Set vd., 2010).

**Theorem 3.6** $\Omega : [\varrho,\eta] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $\sigma-(s,m)$-konveks fonksiyon $\Omega \in \mathcal{L}^{1}(\varrho,\eta)$ ile $0 \leq \varrho < \eta$, $m \in (0,1]$. eğer $\sigma$ fonksiyonu $[\varrho,v]$ aralığı üzerinde pozitif artan ise ve $\varphi'(x)$ türevi $(u,\eta)$, aralığında süreklidir. $\alpha > 0$, için

$$\Omega\left(\sigma^{-1}\left(\frac{\sigma(\varrho)+m\sigma(\eta)}{2}\right)\right)$$
$$\leq \frac{1}{2^{\propto s}\left(\sigma(\varrho)-m\sigma(v)\right)}\left[\int_{mb}^{a}\Omega(x)\,\sigma'(x)dx\right.$$
$$\left.+\,m^{\propto}\int_{b}^{ma}\Omega(x)\,\sigma'(x)dx\right]$$
$$\leq \frac{[\Omega(\varrho)+\Omega(\eta)+m^{\propto}(\Omega(\varrho/m)+\Omega(\eta/m))]}{2^{\propto s}(\propto s+1)}$$

eşitszliği sağlanır (Gül vd., 2024).

**Lemma 3.1** Bir fonksiyon, $\Xi:[\varrho,\eta]\to\mathbb{R}$ aralığında tanımlı ve diferansiyellenbilir olmak, $\kappa\in[\varrho,\eta]$ ve $\alpha\in[\varepsilon,\varepsilon+1)$ olsun. $\Xi'\in L[\varrho,\eta]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\frac{(\kappa-\varrho)^{\alpha+1}}{n!\,(\eta-\varrho)}\left[\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\alpha-\varepsilon)}{2}\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\kappa+\frac{1-t}{2}\varrho\right)\right.$$
$$\left.-\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\alpha-\varepsilon)}{2}\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\kappa+\frac{1+t}{2}\varrho\right)dt\right]$$
$$-\frac{(\eta-\kappa)^{\alpha+1}}{n!\,(b-\varrho)}\left[\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\alpha-\varepsilon)}{2}\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\kappa+\frac{1-t}{2}\eta\right)dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\alpha-\varepsilon)}{2}\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\kappa+\frac{1+t}{2}\eta\right)dt\right]$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha-\varepsilon)(x-\varrho)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{[\Xi(\kappa)+\Xi(\varrho)]}{(\eta-\varrho)}-\frac{2^{\alpha}}{\eta-\varrho}\left[{}^{\eta}I_{\alpha}\Xi\left(\frac{\kappa+\varrho}{2}\right)+I_{\alpha}^{\varrho}\Xi\left(\frac{\kappa+\varrho}{2}\right)\right]$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha-\varepsilon)(\eta-\kappa)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{[\Xi(\kappa)+\Xi(\eta)]}{(\eta-\varrho)}-\frac{2^{\alpha}}{\eta-\varrho}\left[I_{\alpha}^{\varrho}\Xi\left(\frac{\kappa+\eta}{2}\right)+{}^{\eta}I_{\alpha}\Xi\left(\frac{\kappa+\eta}{2}\right)\right]$$

eşitliği geçerlidir (Yalçın, 2016).

# 4
# ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmanın araştırma bulguları, tempered kesirli integral operatörleri ve konveks fonksiyonlar temel alınarak elde edilen yeni matematiksel eşitsizliklerden oluşmaktadır. Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler, tempered kesirli integral operatörleri yardımıyla genişletilmiş ve iki kez türevlenebilir konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler geliştirilmiştir. Ayrıca, literatürde mevcut olan bir lemma kullanılarak P - fonksiyonları için yeni integral eşitsizlikleri türetilmiştir.

Tempered Kesirli İntegraller ve Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler: Bu çalışmada, tempered kesirli integral operatörlerinin konveks fonksiyonların integral değerlerini sınırlamak için nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir. Operatörlerin yardımıyla klasik Hermite-Hadamard eşitsizlikleri kesirli analize taşınmış ve daha genel sonuçlar elde edilmiştir. Çalışmada türevlenebilir fonksiyonların tempered integral ifadelerine uygulanabilirliği temel bir lemma yardımıyla kanıtlanmıştır.

Uyumlu Kesirli Operatörler ve Yeni Eşitsizlikler: Literatürde mevcut olan bir lemmadan hareketle P - fonksiyonları için yeni integral eşitsizlikleri türetilmiştir. Bu sonuçlar, conformable (uyumlu) kesirli integral operatörleri kullanılarak türetilmiştir ve literatürde ki çerçeveyi genişletmiştir. P - fonksiyonlara yönelik bu yeni eşitsizlikler, kesirli analizin sağladığı esneklik sayesinde farklı türde matematiksel problemlerin çözümünde potansiyel uygulama alanları sunmaktadır.

Elde Edilen Yeni Sonuçlar:

Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin Hölder ve Power-Mean eşitsizlikleriyle uyumlu hale getirilmesi, konveks fonksiyonlar için daha genel eşitsizlikler ortaya çıkarmıştır.

P - fonksiyonları için türetilen yeni integral eşitsizlikler, literatürde daha önce çalışılmamış bir alanı kapsayarak teoriye katkı sağlamıştır.

Bu bulgular, kesirli analizin geleneksel analiz üzerindeki katkılarını vurgulamakta ve diferansiyel denklemlerden optimizasyon problemlerine kadar geniş bir uygulama alanı sunmaktadır. Ayrıca, teorik sonuçların etkinliğini göstermek amacıyla sayısal simülasyonlar gerçekleştirilmiş ve bu simülasyonlar elde edilen eşitsizliklerin doğruluğunu desteklemiştir.

## 4.1 Tempered Kesirli İntegraller İçeren Hermite-Hadamrd Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, iki kez türevlenebilir konveks fonksiyonları kullanarak tempered kesirli integraller için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler verilecektir. Temel bulguları tempered kesirli integraller aracılığıyla kanıtlamak için faydalı olacak aşağıdaki özdeşlikle başlanacaktır:

**Lemma 4.1** Bir fonksiyon $\Xi: [u, v] \to \mathbb{R}$ iki kez diferansiyellenebilir ve $\Xi'' \in \mathcal{L}^1[u, v]$ olduğunda, aşağıdaki eşitlik, tempered kesirli integral operatörleri için geçerlidir:

$$\begin{aligned}\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(v-u)^{\alpha}}&\left[{}_{\left(\frac{\mathfrak{n}u+v}{\mathfrak{n}+1}\right)}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(u)+{}_{\left(\frac{u+\mathfrak{n}v}{\mathfrak{n}+1}\right)}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(v)\right]\\&-\frac{v-u}{n+1}\left(\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,1)\right)[\Xi'(u)-\Xi'(v)]\\&-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)[\Xi(u)+\Xi(v)]\\&=\frac{(v-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^2}\left[\int_0^1\left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,t)\right]\right.\\&\left.\times\left(\Xi''\left(\frac{n+t}{\mathfrak{n}+1}u+\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}v\right)+\Xi''\left(\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}u+\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}v\right)\right)dt\right].\end{aligned}$$

(4.1)

**İspat.** Kısmi integrasyon yöntemi ve Sonuç 2.1, (a)'dan yararlanarak, aşağıdaki ifade bulunur:

$$l_1 = \int_0^1 \left(t.\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,t) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,t)\right)\Xi''\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}u + \frac{1-v}{\mathfrak{n}+1}v\right)dt$$

$$= \frac{\mathfrak{n}+1}{u-v}\left[t.\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,t) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,t)\right]\Xi'\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}u + \frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}v\right)I_0^1$$

$$- \frac{\mathfrak{n}+1}{u-v}\int_0^1 \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,t)\Xi'\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}u + \frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}v\right)dt.$$

Buradan, kısmi integrasyon yöntemiyle,

$$l_1 = \frac{\mathfrak{n}+1}{u-v}\left[\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,1)\right]\Xi'(u)$$

$$- \frac{\mathfrak{n}+1}{u-v}\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{e^{\zeta(v-u)t}}\Xi'\left(\frac{1-t}{n+1}u + \frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}v\right)dt.$$

olduğu dikkate alınırsa

$$l_1 = \frac{\mathfrak{n}+1}{u-v}\left[\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,1)\right]\Xi'(u)$$

$$+ \frac{\mathfrak{n}+1}{u-v}\left[\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)\Xi(u)\frac{\mathfrak{n}+1}{v-u}\right.$$

$$+ \frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha+2}\Gamma(\alpha)}{(v-u)^{2+\alpha}}\int_u^{\frac{nu+v}{n+1}}\left(\frac{\mathfrak{n}u+v}{\mathfrak{n}+1}\right.$$

$$\left.\left. - x\right)^{\alpha-1} e^{-(n+1)\zeta\left(\frac{nu+v}{n+1}-x\right)}\Xi(x)dx\right].$$

bulunur. Buradan

$$l_1 = \frac{\mathfrak{n}+1}{u-v}\left[\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,1)\right]\ \Xi'(u)$$

$$-\frac{(\mathfrak{n}+1)^2}{(v-u)^2}\mathrm{I}_{\zeta(v-\mathrm{a})}(\alpha,1)\Xi(u)$$

$$+\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha+2}\Gamma(\alpha)}{(v-u)^{2+\alpha}}\left(\frac{\mathfrak{n}u+v}{n+1}\right)^{\tau}{}_{+}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(u).$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, kısmi integrasyon ve genel integral alma kuralları çerçevesinde $l_2$ ifadesi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$l_2 = \int_0^1 \left(t.\,\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,t) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,t)\right)\Xi''\left(\frac{t}{2}v\right.$$

$$\left.+\frac{2-t}{2}u\right)dt$$

$$=\frac{\mathfrak{n}+1}{v-u}\left[\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,1)\right]\Xi'(v)$$

$$-\left(\frac{\mathfrak{n}+1}{v-u}\right)^2\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)\Xi(v)$$

$$+\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha+2}\Gamma(\alpha)}{(v-u)^{2+\alpha}}\left(\frac{u+\mathfrak{n}v}{n+1}\right)^{\tau}{}_{-}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(v).$$

Son olarak, $l_1$ve $l_2$ eşitlikleri toplanarak ve elde edilen özdeşliğin her iki tarafı $\frac{(v-u)^2}{(n+1)^2}$ ile çaparak istenen (4.1) sonucu elde edilir.

**Teorem 4.1** $\Xi$: $[u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ ye $[u, v]$ aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\Xi'' \in \mathcal{L}^1[u, v]$ olsun. $|\Xi''|$ konveks fonksiyon olmak üzere Tempered kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(v-u)^{\alpha}}\left[{}_{\left(\frac{\mathfrak{n}u+v}{\mathfrak{n}+1}\right)}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(u)+{}_{\left(\frac{u+\mathfrak{n}v}{\mathfrak{n}+1}\right)}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(v)\right]\right.$$

$$-\frac{v-u}{\mathfrak{n}+1}\left(\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,1)\right)[\Xi'(u)$$

$$\left.-\Xi'(v)]-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)[\Xi(u)+\Xi(v)]\right|$$

$$\leq\frac{(v-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^3}[|\Xi''(u)|+|\Xi''(v)|](\tau+\varsigma).$$

Burada, $\zeta \geq 0, \alpha > 0$ dır.

**İspat.** Lemma 4.1'in sağ tarafı ve $|\Xi''|$ nin konveks fonksiyon olduğu kullanılarak

$$\left|\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(v-u)^{\alpha}}\left[{}_{\left(\frac{\mathfrak{n}u+v}{n+1}\right)}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(u)+{}_{\left(\frac{u+\mathfrak{n}v}{n+1}\right)}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(n+1)\zeta)}\Xi(v)\right]\right.$$

$$-\frac{v-u}{n+1}\left(\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,1)\right)[\Xi'(u)-\mathcal{F}'(v)]$$

$$\left.-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)[\Xi(u)+\Xi(v)]\right|$$

$$\leq\left|\frac{(v-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^2}\left[\int_0^1\left[t.\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,t)\right]dt\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left|\Xi''\left(\frac{n+t}{n+1}u+\frac{1-t}{n+1}v\right)\right|+\left|\Xi''\left(\frac{1-t}{n+1}u+\frac{n+t}{n+1}v\right)\right|dt\right]\right|$$

$$\frac{(\upsilon-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^2}\int_0^1 \left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)\right]$$

$$\times\left[\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}\right)|\Xi''(u)|+\left(\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}\right)|\Xi''(\upsilon)|\right]dt$$

$$+\frac{(\upsilon-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^2}\int_0^1 \left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)\right]$$

$$\times\left[\left(\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}\right)|\Im''(u)|+\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}\right)|\Xi''(\upsilon)|\right]dt$$

$$=\frac{(\upsilon-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^3}\left[\int_0^1 \left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)\right]\right.$$

$$\times[(\mathfrak{n}+t)|\Xi''(u)|+(1-t)|\Xi''(\upsilon)|]dt$$

$$+\int_0^1 \left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)\right]$$

$$\left.\times[(1-t)|\Xi''(u)|+(n+t)|\Xi''(\upsilon)|]dt\right]$$

elde edilir.

$$\tau=\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{e^{\zeta(\upsilon-u)t}}(1-t)dt \text{ and } \varsigma=\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{e^{\zeta(\upsilon-u)t}}(\mathfrak{n}+t)dt.$$

ile birlikte, gerekli hesaplamalardan yararlanarak

$$\left|\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(\upsilon-u)^{\alpha}}\left[{}_{\left(\frac{\mathfrak{n}u+\upsilon}{\mathfrak{n}+1}\right)}{}^{\tau}_{+}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(u)+{}_{\left(\frac{u+\mathfrak{n}\upsilon}{\mathfrak{n}+1}\right)}{}^{\tau}_{-}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(\upsilon)\right]\right.$$

$$-\frac{\upsilon-u}{\mathfrak{n}+1}\left(\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,1)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,1)\right)[\Xi'(u)-\Xi'(\upsilon)]$$

$$\left.-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,1)[\Xi(u)+\Xi(\upsilon)]\right|$$

$$\leq\frac{(\upsilon-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^3}[|\Xi''(u)|+|\Xi''(\upsilon)|](\tau+\varsigma).$$

eşitsizliği bulunur.

**Teorem 4.2** $\Xi$: $[u, v] \to \mathbb{R}$ ye $[u, v]$ aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\Xi'' \in \mathcal{L}^1[u, v]$ olsun. $|\Xi''|^q$ konveks fonksiyon olmak üzere Tempered kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(v-u)^{\alpha}}\left[{}_{\left(\frac{\mathfrak{n}u+v}{n+1}\right)}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(u) + {}_{\left(\frac{u+\mathfrak{n}v}{n+1}\right)}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(v)\right]\right.$$

$$-\frac{v-u}{\mathfrak{n}+1}\left(\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,1)\right)[\Xi'(u) - \Xi'(v)]$$

$$\left.-\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,1)[\Xi(u)+\Xi(v)]\right|$$

$$\leq \frac{(v-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^2}\psi^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{\left|\Xi''(v)\right|^q}{2} + \frac{2n+1}{2}\left|\Xi''(u)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\left|\Xi''(u)\right|^q}{2} + \frac{2\mathfrak{n}+1}{2}\left|\Xi''(v)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Burada $q \geq 1,\ \zeta \geq 0, \alpha > 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve

$\psi = \int_0^1 \left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha,t) - \mathrm{I}_{\zeta(v-u)}(\alpha+1,t)\right]^p dt$ şeklindedir.

**İspat**. Lemma 4.1'in sağ tarafı ve $|\Xi''|$ nin konveks fonksiyon olduğu ve Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\left|\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(\mathcal{v}-\mathcal{u})^{\alpha}}\left[{}_{\left(\frac{\mathfrak{n}\mathcal{u}+\mathcal{v}}{\mathfrak{n}+1}\right)}{}^{\tau}I_{\mathcal{u}}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(\mathcal{u})+{}_{\left(\frac{\mathcal{u}+\mathfrak{n}\mathcal{v}}{\mathfrak{n}+1}\right)}{}^{\tau}I_{\mathcal{u}}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(\mathcal{v})\right]\right.$$

$$-\frac{\mathcal{v}-\mathcal{u}}{\mathfrak{n}+1}\left(\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha,1)-\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha+1,1)\right)[\Xi(\mathcal{u})-\Xi'(\mathcal{v})]$$

$$\left.-\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha,1)[\Xi(\mathcal{u})+\Xi(\mathcal{v})]\right|$$

$$\leq\left|\frac{(\mathcal{v}-\mathcal{u})^{2}}{(\mathfrak{n}+1)^{2}}\left[\int_{0}^{1}\left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha+1,t)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\left|\Xi''\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}\mathcal{u}+\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}\mathcal{v}\right)\right|+\left|\Xi''\left(\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}\mathcal{u}+\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}\mathcal{v}\right)\right|\right)dt\right]\right|$$

$$\leq\frac{(\mathcal{v}-\mathcal{u})^{2}}{(\mathfrak{n}+1)^{2}}\left\{\left(\int_{0}^{1}\left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha+1,t)\right]^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.\times\left(\int_{0}^{1}\left|\Xi''\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}\mathcal{u}+\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}\mathcal{v}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\frac{(\mathcal{v}-\mathcal{u})^{2}}{(\mathfrak{n}+1)^{2}}\left\{\left(\int_{0}^{1}\left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha+1,t)\right]^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.\times\left(\int_{0}^{1}\left|\Xi''\left(\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}\mathcal{u}+\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}\mathcal{v}\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Burada,

$$\left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha+1,t)\right]=\int\mathrm{I}_{\zeta(\mathcal{v}-\mathcal{u})}(\alpha,t)\,dt>0$$

eşitliği göz önüne alınarak,

$$\frac{(\upsilon-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^2}\left(\int_0^1\left[t.\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(\mathfrak{n}+t)|\Xi''(u)|^q\right.$$

$$\left.+(1-t)|\Xi''(\upsilon)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(\upsilon-u)^2}{(n+1)^2}\left(\int_0^1\left[t.\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(t,\alpha+1)\right]^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(1-t)|\Xi''(u)|^q\right.$$

$$\left.+(n+t)|\Xi''(\upsilon)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalardan sonra ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3** $\Xi$: $[u,\upsilon]\to\mathbb{R}$ ye $[u,\upsilon]$ aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\Xi''\in\mathcal{L}^1[u,\upsilon]$ olsun. $|\Xi''|^q$ için $q\geq 1$ konveks fonksiyon olmak üzere Tempered kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{(\mathfrak{n}+1)^\alpha\Gamma(\alpha)}{(\upsilon-u)^\alpha}\left[{}_{\left(\frac{\mathfrak{n}u+\upsilon}{\mathfrak{n}+1}\right)}^{\tau}I_u^{(\alpha,(n+1)\zeta)}\Xi(u)+{}_{\left(\frac{u+\mathfrak{n}\upsilon}{\mathfrak{n}+1}\right)}^{\tau}I_u^{(\alpha,(n+1)\zeta)}\Xi(\upsilon)\right]\right.$$

$$-\frac{\upsilon-u}{\mathfrak{n}+1}\left(\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,1)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,1)\right)[\Xi'(u)-\Xi'(\upsilon)]$$

$$\left.-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,1)[\Xi(u)+\Xi(\upsilon)]\right|$$

$$\leq\frac{(\upsilon-u)^2}{(\mathfrak{n}+1)^2}\eta^{1-\frac{1}{q}}\left\{|\Xi''(u)|^q\gamma_1+\gamma_2|\Xi''(\upsilon)|^q+|\Xi''(\upsilon)|^q\gamma_1\right.$$

$$\left.+\gamma_2\left|\mathfrak{F}^{\prime\prime(u)}\right|^q\right\}.$$

**İspat.** Lemma 4.1'in sağ tarafı ve $|\Xi''|$ nin konveks fonksiyon olduğu ve Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{(\mathfrak{n}+1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{(\upsilon-u)^{\alpha}}\left[{}_{\left(\frac{\mathfrak{n}u+\upsilon}{\mathfrak{n}+1}\right)}{}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,\mathfrak{n}\zeta)}\Xi(u)+{}_{\left(\frac{u+\mathfrak{n}\upsilon}{\mathfrak{n}+1}\right)}{}^{\tau}I_{u}^{(\alpha,(\mathfrak{n}+1)\zeta)}\Xi(\upsilon)\right]\right.$$

$$-\frac{\upsilon-u}{\mathfrak{n}+1}\left(\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,1)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,1)\right)[\Xi'(u)-\Xi'(\upsilon)]$$

$$\left.-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,1)[\Xi(u)+\Xi(\upsilon)]\right|$$

$$\leq\left|\frac{(\upsilon-a)^{2}}{(\mathfrak{n}+1)^{2}}\left[\int_{0}^{1}\left[t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\left|\Xi''\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}u+\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}\upsilon\right)\right|+\left|\Xi''\left(\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}u+\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}\upsilon\right)\right|\right)dt\right]\right|$$

$$\leq\frac{(\upsilon-u)^{2}}{(\mathfrak{n}+1)^{2}}\left\{\left(\int_{0}^{1}t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\times\left(\int_{0}^{1}t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)\right.$$

$$\left.-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)\left|\Xi''\left(\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}u+\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}\upsilon\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{0}^{1}t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_{0}^{1}t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)\left|\Xi''\left(\frac{1-t}{\mathfrak{n}+1}u+\frac{\mathfrak{n}+t}{\mathfrak{n}+1}\upsilon\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

ile birlikte aşağıdaki eşitlikler göz önüne alınarak;

$$\eta=\int_{0}^{1}t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)dt,$$

$$\gamma_{1}=\int_{0}^{1}t.\,\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha,t)-\mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1,t)(n+t)dt,$$

$$\gamma_2 = \int_0^1 t.\, \mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha, t) - \mathrm{I}_{\zeta(\upsilon-u)}(\alpha+1, t)(1-t)dt.$$

ve gerekli hesaplamalar yapılarak ispat tamamlanır.

## 4.2 P-Sınıfı Fonksiyonlar İçin Türetilen Conformable (Uyumlu) Kesirli İntegral Opertörü İçeren Eşitsizlikler

**Teorem 4.4.** Bir fonksiyon $\Xi: [u, \mathfrak{v}] \to \mathbb{R}$ ve $(u, \mathfrak{v})$ açık aralığının alt kümesinde diferansiyellenebilir olsun. $|\Xi'|$ fonksiyonu $[u, \mathfrak{v}]$ aralığında $p$ fonksiyon olursa ve $|\Xi'| \leq K$ koşulu sağlanıyorsa, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\left|\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\gamma-u)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(u)]}{(\mathfrak{v}-u)} - \frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-u}\left[I_{\tau}^{u}\Xi\left(\frac{\gamma+u}{2}\right) + {}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+u}{2}\right)\right]\right.$$
$$+\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathfrak{v})]}{(\mathfrak{v}-u)}$$
$$\left.-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-u}\left[{}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right) + I_{\tau}^{u}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)\right]\right|$$
$$\leq \frac{(\gamma-u)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-u)}\left[\frac{\varepsilon!\,\Gamma(\tau-\varepsilon+1)}{\Gamma(\tau+2)}|\Xi'(\gamma)| + |\Xi'(u)|\right]$$
$$+\frac{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-u)}\left[\frac{n!\,\Gamma(\tau-\varepsilon+1)}{\Gamma(\tau+2)}|\Xi'(\gamma)| + |\Xi'(\mathfrak{v})|\right]$$

Bu eşitsizlik $\tau \in (\varepsilon, \varepsilon+1]$ aralığında tanımlıdır. $\Gamma(\gamma)$ ifadesi Euler'in gamma fonksiyonunu ifade etmektedir.

**İspat:** Eşitszilğin ispatı için Lemma 4.1 özdeşliği kullanılarak integraller için tanımlı mutlak değer özelliğinden

$$\left|\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\gamma-u)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(u)]}{(\mathfrak{v}-u)} - \frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-u}\left[I_{\tau}^{u}\Xi\left(\frac{\gamma+u}{2}\right) + {}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+u}{2}\right)\right]\right.$$
$$+\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathfrak{v})]}{(\mathfrak{v}-u)}$$
$$\left.-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-u}\left[I_{\tau}^{u}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right) + {}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(\gamma-\mathcal{u})^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\int_0^1 \frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathcal{u}\right)\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 \frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma+\frac{1+t}{2}\mathcal{u}\right)\right|dt\right]$$
$$+\frac{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\int_0^1 \frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 \frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma+\frac{1+t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|dt\right]$$

elde edilir. $|\Xi'|$ fonksiyonu, $[\mathcal{u},\mathfrak{v}]$ aralığında $P$ fonksiyon olduğundan

$$\left|\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\gamma-\mathcal{u})^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(x)+\Xi(\mathcal{u})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-a}\left[I_{\tau}^{\mathcal{u}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)+\ {}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)\right]\right.$$
$$+\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(b)]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}$$
$$\left.-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-\mathcal{u}}\left[I_{\tau}^{\mathcal{u}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)+\ {}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)\right]\right|$$
$$\leq \frac{(\gamma-\mathcal{u})^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\int_0^1 \frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}(|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(\mathcal{u})|)dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 \frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}(|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(\mathcal{u})|)\right]$$
$$+\frac{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\int_0^1 \frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}(|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(\mathfrak{v})|)dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 \frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}(|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(\mathfrak{v})|)\right]$$

elde edilmiş olup kısmi integrasyon ve genel integral özellikleri kullanılarak,

$$\frac{(\gamma-\mathcal{u})^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\frac{\varepsilon!\,\Gamma(\tau-\varepsilon+1)}{\Gamma(\tau+2)}|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(\mathcal{u})|\right]$$
$$+\frac{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\frac{\varepsilon!\,\Gamma(\tau-\varepsilon+1)}{\Gamma(\tau+2)}|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(\mathfrak{v})|\right]$$

bulunur. Burada

$$\int_0^1 \mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)dt=\int_0^1 1\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)dt$$

$$= \mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)t|_0^1 - \int_0^1 t^{\varepsilon}(1-t)^{\tau-\varepsilon-1}\,dt$$

$$= \mathcal{B}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon) - \mathcal{B}(\varepsilon+2,\tau-\varepsilon)$$

$$= \frac{\Gamma(\varepsilon+1)\Gamma(\tau-\varepsilon)}{\Gamma(\tau+1)} - \frac{\Gamma(\varepsilon+2)\Gamma(\tau-\varepsilon)}{\Gamma(\tau+2)}$$

olup Gamma fonksiyonun özelliklerinden,

$$= \frac{\varepsilon!\,\Gamma(\tau-\varepsilon)}{\Gamma(\tau+1)} - \frac{(\varepsilon+1)!\,\Gamma(\tau-\varepsilon)}{(\tau+1)\Gamma(\tau+2)}$$

$$= \frac{\varepsilon!\,\Gamma(\tau-\varepsilon+1)}{\Gamma(\tau+2)}$$

elde edilir. Böylece, $\Gamma(\varepsilon+1) = \varepsilon\Gamma(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.5** Bir fonksiyon $\Xi\colon [\mathcal{u},\mathfrak{v}] \to \mathbb{R}$ ve $(\mathcal{u},\mathfrak{v})$ açık aralığının alt kümesinde diferansiyellenebilir olsun. $|\Xi'|$ fonksiyonu $[\mathcal{u},\mathfrak{v}]$ aralığında $p$ fonksiyon olursa ve $q \geq 1$ ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\gamma-\mathcal{u})^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(x)+\Xi(\mathcal{u})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})} - \frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-\mathcal{u}}\left[I_{\tau}^{\mathcal{u}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right) + {}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)\right]\right.$$
$$+ \frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathfrak{v})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}$$
$$\left. - \frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-\mathcal{u}}\left[{}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right) + I_{\tau}^{\mathcal{u}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(\gamma-\mathcal{u})^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left(\int_0^1 \mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(I_1\right)^{\frac{1}{q}} + \left(I_2\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$+ \frac{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left(\int_0^1 \mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(I_3\right)^{\frac{1}{q}} + \left(I_4\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Bu eşitsizlik $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $\tau \in [\varepsilon,\varepsilon+1)$ için geçerlidir.

**İspat:** Lemma 4.1 özdeşiliği kullanılarak mutlak değer özelliği ve Hölder eşitsizliği için,

$$\left|\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\gamma-\mathcal{u})^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathcal{u})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-\mathcal{u}}\left[I_{\tau}^{\mathcal{u}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)+{}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)\right]\right.$$
$$+\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathfrak{v})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}$$
$$\left.-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-\mathcal{u}}\left[{}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)+I_{\tau}^{\mathcal{u}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{(\gamma-\mathcal{u})^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathcal{u}\right)\right|\right.$$
$$\left.+\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma+\frac{1+t}{2}\mathcal{u}\right)\right|dt\right]$$
$$+\frac{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\alpha+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma+\frac{1+t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq\left(\int_0^1\left(\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathcal{u}\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^1\left(\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1+t}{2}\mathcal{u}\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1\left(\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^1\left(\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1+t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Her $\gamma\in[\mathcal{u},\mathfrak{v}]$ için,

$$I_1=\int_0^1\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathcal{u}\right)\right|^{q}dt\leq\int_0^1|\Xi'(\gamma)|^{q}+|\Xi'(\mathcal{u})|^{q}\,dt$$

$$= |\Xi'(\gamma)|^q + |\Xi'(\mathcal{u})|^q$$

$$I_2 = \int_0^1 \left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma + \frac{1+t}{2}\mathcal{u}\right)\right|^q dt = |\Xi'(\gamma)|^q + |\Xi'(\mathcal{u})|^q$$

$$I_3 = \int_0^1 \left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma + \frac{1-t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|^q dt = |\Xi'(\gamma)|^q + |\Xi'(\mathfrak{v})|^q$$

$$I_4 = \int_0^1 \left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma + \frac{1+t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|^q dt = |\Xi'(\gamma)|^q + |\Xi'(\mathfrak{v})|^q$$

olup böylece ispat elde edilmiş olur.

**Teorem 4.6** $\Xi: [\mathcal{u}, \mathfrak{v}] \to \mathbb{R}$, ve $0 \leq \mathcal{u} < v$ koşuluyla $(\mathcal{u}, \mathfrak{v})$ ve $\Xi \in L_1[\mathcal{u}, \mathfrak{v}]$ olduğu varsayılsın. Eğer $\Xi$ fonksiyonu $[\mathcal{u}, \mathfrak{v}]$ aralığında $p$ fonksiyonu ise, bu durumda uyumlu kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir;

$$\Xi\left(\frac{\mathcal{u}+\mathfrak{v}}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\tau+1)}{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau}\Gamma(\alpha-n)}[I_{\tau}^{\mathcal{u}}\Xi(\mathfrak{v}) + {}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi(\mathcal{u})] \leq \frac{\Xi(\mathcal{u})+\mathfrak{F}(\mathfrak{v})}{2}.$$

Burada $\tau \in [\varepsilon, \varepsilon+1)$ aralığındadır.

**İspat:** Eğer $\gamma, \delta \in [\mathcal{u}, \mathfrak{v}]$ aralığında ve $\Xi$ fonksiyonu $[\mathcal{u}, \mathfrak{v}]$ aralığında $p$ fonksiyonu ise, şu eşitsizlik geçerlidir:

$$\Xi\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right) \leq \frac{\Xi(\gamma)+\Xi(\delta)}{2}$$

Eğer $\gamma = t\mathcal{u} + (1-t)\mathfrak{v}, \delta = (1-t)\mathcal{u} + t\mathfrak{v}$ olarak kabul edilirse, şu ifade elde edilir:

$$\Xi\left(\frac{\mathcal{u}+\mathfrak{v}}{2}\right) \leq \frac{\Xi(t\mathcal{u}+(1-t)\mathfrak{v}) + \Xi\big((1-t)\mathcal{u}+t\mathfrak{v}\big)}{2}$$

Bu ifadeyi her iki tarafından $\frac{1}{\varepsilon!}t^{\varepsilon}(1-t)^{\tau-\varepsilon-1}$ ile çarparak ve t'ye gore $[0,1]$ aralığında integrali alınarak şu sonuca ulaşılır:

$$2\frac{1}{\varepsilon!}\Xi\left(\frac{\mathcal{u}+\mathfrak{v}}{2}\right)\int_0^1 t^{\varepsilon}(1-t)^{\tau-\varepsilon-1}\,dt$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon!}\int_0^1 t^{\varepsilon}(1-t)^{\tau-\varepsilon-1}\,\Xi(t\mathcal{u}+(1-t)\mathfrak{v})dt$$

$$+\frac{1}{\varepsilon!}\int_0^1 t^{\varepsilon}(1-t)^{\tau-\varepsilon-1}\,\Xi\big((1-t)\mathcal{u}+t\mathfrak{v}\big)dt$$

$$=\frac{1}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})^{\tau}}I_{\tau}^{a}\Xi(\mathfrak{v})+I_{\tau}\Xi(\mathcal{u})$$

Ayrıca, $\int_0^1 t^{\varepsilon}(1-t)^{\tau-\varepsilon-1}\,dt=\mathcal{B}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)=\frac{\Gamma(\varepsilon+1)\Gamma(\tau-\varepsilon)}{\Gamma(\tau+1)}$ olduğu kullanılmıştır. Bu hesaplamalarla eşitsizliğin sol tarafının ispatı tamamlanmış olur. Sağ tarafın ispatı için ise; fonksiyonun P fonksiyon olma durumu göz önünde bulundurularak şu eşitsizlikler yazılır:

$$\Xi(t\mathcal{u}+(1-t)\mathfrak{v})\leq\Xi(\mathcal{u})+\Xi(\mathfrak{v}),$$

$$\Xi\big((1-t)\mathcal{u}+t\mathfrak{v}\big)\leq\Xi(\mathcal{u})+\Xi(\mathfrak{v}).$$

Bu iki eşitsizlik toplandığında $\frac{1}{\varepsilon!}t^{\varepsilon}(1-t)^{\tau-\varepsilon-1}$ ile çarpılıp t'ye göre integrali yapılırsa, şu eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})^{\tau}}I_{\tau}^{a}\Xi(\mathfrak{v})+I_{\tau}\Xi(\mathcal{u})\leq 2\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)}{\Gamma(\tau+1)}[\Xi(\mathcal{u})+\Xi(\mathfrak{v})].$$

Bu da, ispatın tamamlandığını gösterir.

**Teorem 4.7** Bir fonksiyon $\Xi:[\mathcal{u},\mathfrak{v}]\to\mathbb{R}$ ve $(\mathcal{u},\mathfrak{v})$ açık aralığının alt kümesinde diferansiyellenebilir olsun. $|\Xi'|$ fonksiyonu $[\mathcal{u},\mathfrak{v}]$ aralığında P fonksiyon olursa bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\gamma-\mathcal{u})^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathcal{u})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-\mathcal{u}}\left[I_{\alpha}^{\mathcal{u}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)+{}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)\right]\right.$$
$$+\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathfrak{v})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}$$
$$\left.-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-\mathcal{u}}\left[{}^{\mathcal{u}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)+I_{\tau}^{\mathfrak{v}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leq (\gamma-\mathcal{u})^{\tau+1}\left[3A_1\left(\Xi(\gamma)+\Xi(\mathcal{u})\right)\right]+(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau+1}\left[3A_1\left(\Xi(\gamma)+\Xi(\mathfrak{v})\right)\right]$$

eşitsizliği $\tau\in(\varepsilon,\varepsilon+1]$ için geçerlidir. Burada

$$A_1=\frac{3}{2}\mathcal{B}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)-\mathcal{B}(\varepsilon+2,\tau-\varepsilon)-\frac{1}{2}\mathcal{B}(\varepsilon+3,\tau-\varepsilon)$$

ve

$$A_2=\frac{1}{2}\mathcal{B}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)-\mathcal{B}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon-1)-\frac{1}{2}\mathcal{B}(\varepsilon+3,\tau-\varepsilon)$$

ile tanımlıdır.

**İspat:** Lemma 4.1'den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\gamma-\mathcal{u})^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathcal{u})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-\mathcal{u}}\left[I_{\tau}^{\mathcal{u}}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)+{}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathcal{u}}{2}\right)\right]\right.\\
&\qquad+\frac{\Gamma(\tau-\varepsilon)(\mathfrak{v}-x)^{\tau}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathfrak{v})]}{(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\\
&\qquad\left.-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-a}\left[{}^{\mathfrak{v}}I_{\alpha}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)+I_{a}^{a}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)\right]\right|\\
&\leq\frac{(\gamma-a)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathcal{u}\right)\right|dt\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma+\frac{1+t}{2}\mathcal{u}\right)\right|dt\right]\\
&\quad+\frac{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\alpha+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-\mathcal{u})}\left[\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1+t}{2}\gamma+\frac{1-t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|dt\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^1\frac{\mathcal{B}_t(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}\left|\Xi'\left(\frac{1-t}{2}\gamma+\frac{1+t}{2}\mathfrak{v}\right)\right|dt\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $|\Xi'|$ fonksiyonu, $[\mathcal{u},\mathfrak{v}]$ aralığında P fonksiyon olduğundan

$$\left|\frac{\Gamma(\tau-n)(\gamma-u)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(u)]}{(\mathfrak{v}-u)}-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-u}\left[I_{\tau}^{u}\Xi\left(\frac{\gamma+u}{2}\right)+{}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+u}{2}\right)\right]\right.$$

$$+\frac{\Gamma(\tau-n)(\mathfrak{v}-x)^{\tau}}{\Gamma(\tau+1)}\frac{[\Xi(\gamma)+\Xi(\mathfrak{v})]}{(\mathfrak{v}-u)}$$

$$\left.-\frac{2^{\tau}}{\mathfrak{v}-u}\left[{}^{\mathfrak{v}}I_{\tau}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)+I_{\tau}^{u}\Xi\left(\frac{\gamma+\mathfrak{v}}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{(\gamma-u)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-u)}\left[\int_{0}^{1}\frac{\mathcal{B}_{t}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}(|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(u)|)dt\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{1}\frac{\mathcal{B}_{t}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}(|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(\mathfrak{v})|)\right]$$

$$+\frac{(\mathfrak{v}-\gamma)^{\tau+1}}{\varepsilon!\,(\mathfrak{v}-u)}\left[\int_{0}^{1}\frac{\mathcal{B}_{t}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}(|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(u)|)dt\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{1}\frac{\mathcal{B}_{t}(\varepsilon+1,\tau-\varepsilon)}{2}(|\Xi'(\gamma)|+|\Xi'(\mathfrak{v})|)\right].$$

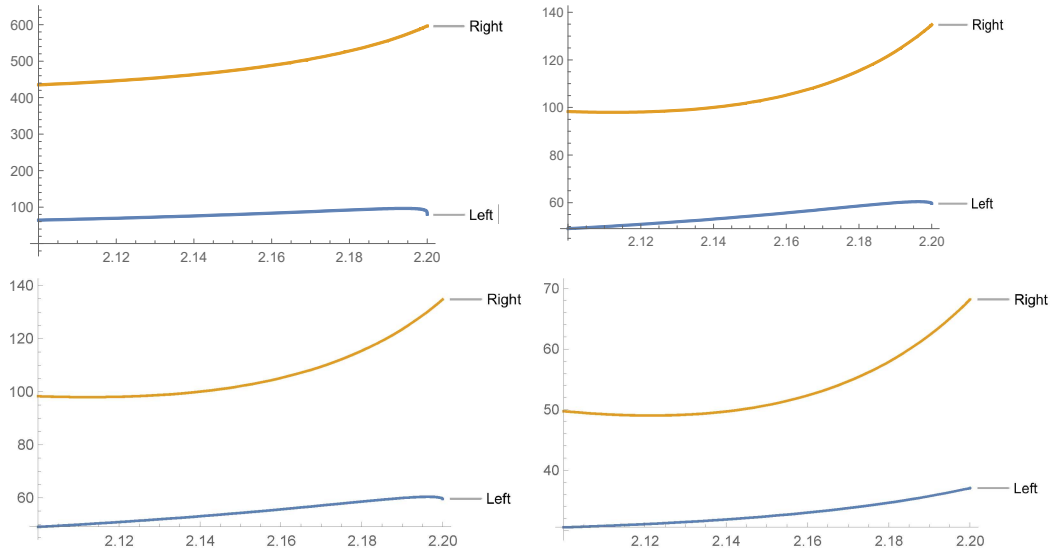
Böylece gerekli integral işlemleri sonrası teoremin ispatı elde edilir.

# 5
# UYGULAMALAR

## 5.1 Sayısal Simülasyonlar ile Uygulamalar

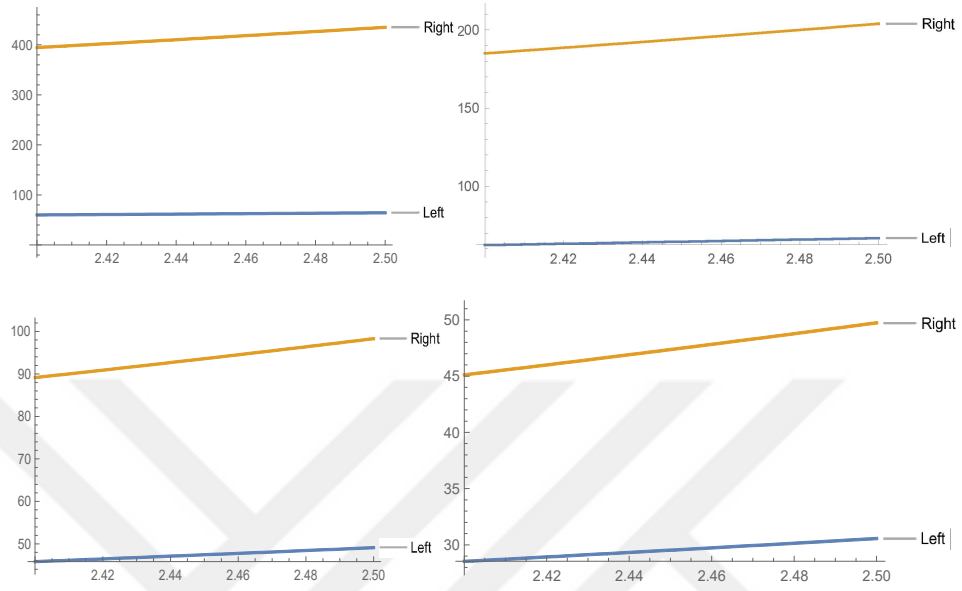
Bu bölümde, araştırma bulgularında ki ana sonuçların etkinliğini göstermek için bazı sayısal simülasyonlar verilmiştir. Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'deki bazı özel durumlar seçilerek eşitsizliklerin sol ve sağ tarafları arasındaki farkı gösterilmiştir. Aşağıdaki şekilerde, araştırma bulgularında ki ana sonuçların etkili ve geçerli olduğu açıktır.

**Önerme 5.1** Teorem 4.1'de $u = 1, v = 4, \varepsilon = 1, \mathcal{F}(x) = x^4$ seçildiğinde, sırasıyla $\alpha = 1, \zeta = 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ için aşağıdaki simülasyonlar elde edilir:




**Şekil 5.1** "$x$"için farklı $\zeta$ değerleri için sayısal simülasyonlar

**Önerme 5.2** Teorem 4.2'de $\mathcal{u} = 1, \mathcal{v} = 4, \varepsilon = 1, q = \frac{1}{2}, \mathfrak{F}(x) = x^4$ seçildiğinde, sırasıyla $\alpha = 1, \zeta = 0.25, 0.5, 0.75, 0.99$ için aşağıdaki simülasyonlar elde edilir:




**Şekil 5.2** "$x$"için farklı $\zeta$ değerleri için sayısal simülasyonlar

# 6
# SONUÇ

Bu çalışma, konveks fonksiyonları ve türevlerini daha iyi anlamak isteyen matematikçiler, ekonomistler ve mühendisler için değerli bir kaynaktır. Ayrıca, bu tür eşitsizliklerin optimizasyon ve optimizasyon teorisi gibi uygulamalı matematik alanlarındaki önemini vurgulamaktadır. Çalışmada, kesirli Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin Tempered kesirli integral operatörleri kullanılarak nasıl genelleştirilebileceği derinlemesine incelenmiştir.

Uyumlu kesirli integrallerin analizi için kullanılan yöntemler, klasik integrallerde uygulanan tekniklerin genelleştirilmiş bir versiyonudur. Bu bağlamda, konveks fonksiyon türlerine yönelik yeni eşitsizlikler geliştirilmiştir. Ayrıca, literatürde ki çeşitli lemmalardan faydalanılarak Hermite-Hadamard tipi integral eşitsizliklerin yeni bir versiyonu elde edilmiştir. Ortaya çıkan bulgular, özel olarak $\alpha = \varepsilon + 1$ seçimiyle Riemann-Liouville integrallerini kapsayan sonuçlara indirgene-bilmektedir

Matematiksel analizdeki bu önemli konu hakkında daha iyi bir anlayış kazanmak isteyen okuyuculara katkıda bulunmayı amaçlamaktadır.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar Lemma 4.1'e benzer özdeşlikleri 3. Bölümdeki tanımları ile birlikte verilen farklı kesirli basamaktan integral operatörler yardımıyla integral özdeşlikleri elde ederek konveks fonsiyonların çeşitli sınıfları için yeni integral eşitsizlikleri elde edebilir.

# KAYNAKÇA


Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.

Akdemir, , A., O., Karaoğlan, A., Ragusa, M. A., and Set, E. (2021). Fractional integral inequalities via Atangana-Baleanu operators for convex and concave functions. *Journal of Function Spaces*, 1-10.

Alomari, M., Darus, M., and Dragomir, S. S. (2009). New inequalities of Simpson's type for $s$ −convex functions with applications. *RGMIA Res. Rep. Coll*, 12 (4).

Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K., and Vuorinen, M. (2007). Generalized convexity and Inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 335, 1294-1308.

Atangana A., and Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model, *Thermal Science*, 20 (2), 763-769.

Avcı, M.A, Akdemir, A.O., and Kavurmacı, H.Ö. (2021). Integral Inequalities for Differentiable− convex Functions in the Second Sense via Atangana-Baleanu Integral Operators. *4th Internatıonal Conference on Mathematical and Related Scıences Book of Proceedıngs*.

Bayraktar, B., and Kudaev, V. C. (2019). Some new integral inequalities for (s, m)-convex and (α, m)-convex functions. Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, 94(2), 15-25.

Çakaloğlu, M. N., Aslan, S. and Akdemir, A. O. (2021). Hadamard Type Integral Inequalities for Differentiable $(h, m)$ −Convex Functions. *Eastern Anatolian Journal of Science*., 7(1), 12-18.

Dragomir, S. S., and Pearce, C. E. M. (1998). Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 57(3), 377-385.

Dragomir, S. S., and Pearce, C. (2003). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. *Science direct working paper*, S1574-0358 (04)70845-X., Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3158351

Ekinci, A., and Özdemir, M. E. (2019). Some new integral inequalities via Riemann-Liouville integral operators. *Applied and Computational Mathematics*, 18(3).

Set, E., Özdemir, M. E., and Dragomir, S.S. (2010). On the Hermite-Hadamard Inequality and other integral inequalities involving two functions. *J. Inequal. Appl.*, p.9, Artcile ID 148102.

Fernandez, A., and Ustaoğlu, C. (2020). On some analytic properties of tempered fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math*., 366, 112400.

Gill, P. M., Pearce, C. E. M., and Pecaric, J. (1997). Hadamard's inequality for r-convex functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 215(2), 461-470.

Gül, E., Akdemir, A. O., and Yalçın, A. (2024). Hermite-Hadamard Inequalities for a New Class of Generalized-(s,m) via Fractional Integral. *Türk Doğa ve Fen Dergisi*(*1*), 109-115. https://doi.org/10.46810/tdfd.1423351

Gül, E., and Yalçın, A. (2024a). Some novel estimations of hadamard type inequalities for different kinds of convex functions via tempered fractional integral operator. *Filomat*, 38 (10), 3683–3690.

Gül, E., and Yalçın, A. (2024b). Some Integral Inequalities Through Tempered Fractional Integral Operator. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 73(2), 399-409.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.

Hudzik, H., and Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. Aequationes mathematicae, 48, 100-111.

Katugampola, U. N. (2011). New approach to a generalized fractional integral. *Applied Mathematics And Computation*, 218(3), 860-865.

Kavurmacı-Önalan, H., and Tunç, M. (2014). Some Simpson Type Integral Inequalities for $s$ −Geometrically Convex Functions with Application. *Le Matematiche*, vol.LXIX – Fasc.II pp.193-204.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations. Vol. 204, Elsevier.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, *264*, 65-70.

Li, C., Deng, W., and Zhao, L. (2019). Well-posedness and numerical algorithm for the tempered fractional ordinary differential equations. *Discret. Contin. Dyn. Syst.-B*, 24, 1989–2015.

Meerschaert, M. M., Sabzikar, F. and Chen, J. (2015). Tempered fractional calculus. *J. Comput. Phys*., 293, 14–28.

Mihesan, V.G. (1993) A generalization of the convexity, Seminar of Functional Equations, Approx. and Convex, Cluj-Napoca (Romania).

Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., and Fink, A.M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Mitrinović, D. S., and Vasic, P. M. (1970). Analytic inequalities (Vol. 1). Berlin: Springer.

Niculescu, C., and Persson, L. E. (2006). Convex functions and their applications (Vol. 23). New York: Springer.

Pečarić, J., Proschan, F., and Tong, Y.L. (1992). Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Polat, F. (2018). M-konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integraller içeren integral eşitsizlikler (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).

Sarikaya, M. Z., Set, E., Yaldiz, H., and Başak, N. (2013). Hermite–Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9-10), 2403-2407.

Toader, G. (1988). On the convexity of high order of sequences. Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS), 43(57), 35-40.

Varošanec, S. (2007). On h-convexity. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 326(1), 303-311.

Yalçin, A. (2016). Farklı türden konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integraller içeren integral eşitsizlikler (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).

.

# TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

**Konferans Bildirileri**

**1.** Oruç, A., and Gül, E. (2024, March 13-16). Integral inequalities involving fractional operators for differentiable convex functions. *4th International Symposium of Scientific Research and Innovative Studies (ISSRIS'24)*.