Final Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				1. S	2. S	3. S	4. S	Toplam
Adı Soyadı								
Numarası		Grup no						
Bölümü					Tarih		22.05.2019	
Dersin Adı	MAT1320 LİNEER CEBİR	Süre	80 dk.		Sınıf			
Öğretim Üyesi			İmza					

YÖK'ün 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

S1) $\begin{aligned} x + y - 3z &= 1 \\ 2x - y + z &= -2 \\ 3x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini katsayılar matrisinin tersi yardımıyla çözünüz. **[25 p]**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -(-15+10) = 5 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{Adj} A$$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & 5 \\ -2 & -7 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 10 & -7 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1 & -2/5 \\ 1/5 & 2 & -7/5 \\ -1/5 & 1 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} 1/5 & 1 & -2/5 \\ 1/5 & 2 & -7/5 \\ -1/5 & 1 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - 2 - \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} - 4 - \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} - 2 - \frac{9}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

S2) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ve $T = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ R^3'ün sıralı tabanları olmak üzere

T tabanından S tabanına geçiş matrisini bulunuz. **[25 p]**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{H_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{H_{21}(-1)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{H_{12}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \underset{H_{13}(-2)\ H_{23}(-2)}{}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$[M]_T^S = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

S3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A matrisinin öz değerlerini bulunuz.

b) En küçük öz değere karşılık gelen öz vektörleri bulunuz.

a) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(1+\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - 6\right]$

$= (1+\lambda)^2(4-\lambda) = 0$

$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = -1}$ $\boxed{\lambda_3 = 4}$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ için

$(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ için

$(A-\lambda I)X = 0$

$2x_1 - 2x_2 = 0$
$-3x_1 + 3x_2 = 0$
$-x_1 + x_2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

$x_1 = x_2 = r \quad (r \in \mathbb{R}) \qquad x_3 = s \quad (s \in \mathbb{R})$

$$X = \begin{bmatrix} r \\ r \\ s \end{bmatrix} = r \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_2}$$

S4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini Cayley-Hamilton Teoremi'nden yararlanarak bulunuz.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -3 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -3-2\lambda & 2+\lambda+\lambda^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2\lambda \\ -3-2\lambda & 2+\lambda+\lambda^2 \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(2+\lambda+\lambda^2) + 2\lambda(3+2\lambda)$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda - 6$$

$$P(A) = 0 \Rightarrow -A^3 + A - 6I_3 = 0$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - I_3)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\left\{\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$