T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STANDART OLMAYAN BANACH SOBOLEV FONKSIYON UZAYLARINDA ELIPTIK DENKLEMLERIN ÇÖZÜLEBILIRLIK PROBLEMLERI

Şeyma ÇETİN

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Eş-Danışman
Prof. Dr. Bilal BİLALOV

Aralık, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STANDART OLMAYAN BANACH SOBOLEV FONKSIYON UZAYLARINDA ELIPTIK DENKLEMLERIN ÇÖZÜLEBILIRLIK PROBLEMLERI

Şeyma ÇETİN tarafından hazırlanan tez çalışması 15.12.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Prof. Dr. Bilal BİLALOV
Azerbaycan Matematik ve Mekanik Enstitüsü Ulusal Bilimler Akademisi,
Yıldız Teknik Üniversitesi
Eş-Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Yusuf ZEREN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Yonca TURGUT SEZER, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ, Üye
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa _____

Danışmanım Prof. Dr. Yusuf ZEREN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Standart Olmayan Banach Sobolev Fonksiyon Uzaylarında Eliptik Denklemlerin Çözülebilirlik Problemleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Şeyma ÇETİN

İmza

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) ve Azerbaycan Ulusal Bilimler Akademisi Bilim Geliştirme Vakfı (ANAS) ikili işbirliği projesi, Proje no: 118F447; TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı ve Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi, Proje no: FDK-2023-5677) ile desteklenmiştir.

Değerli aileme...

TEŞEKKÜR

Son yıllardaki gelişmeler ile ortaya çıkan yeni fonksiyon uzayları, matematik, fizik ve mühendislik vb. birçok alanda önemli bir araç haline gelmiştir. Özellikle, kısmi diferansiyel denklemleri ve sınır değer problemlerini çok daha geniş bir bakış açısıyla incelemeyi sağlamaktadırlar. Eliptik, hiperbolik ve parabolik denklemler şeklinde kategorize edilebilen kısmi diferansiyel denklemler; fizik ve mühendislik gibi matematiğe dayanan birçok bilimsel alanda kullanılır. Örneğin; akışkanlar dinamiği, elektrostatik, ses, ısı, difüzyon, esneklik ve kuantum mekaniği ile ilgili modern bilimsel alanda önemli bir yere sahiptirler.

Bu tez çalışmasında; eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemleri grand Sobolev uzaylarında "ayrılabilir olmayan durumda", ağırlıklı grand Sobolev uzaylarında "ayrılabilir durumda" incelenmiştir. Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde; değerli bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her zaman sabırla ve büyük bir ilgiyle yol gösteren ve desteklerini esirgemeyen saygıdeğer ve kıymetli hocalarım Prof. Dr. Yusuf ZEREN ve Prof. Dr. Bilal BİLALOV'a teşekkür ederim. Ayrıca, bu süreçte beni her zaman destekleyen çok değerli aileme ve arkadaşlarıma minettarım.

Bunun yanında, doktora sürem boyunca 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı Birimi'ne ve Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkürlerimi sunarım.

Şeyma ÇETİN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ viii

KISALTMA LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xii

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 5

1.3 Hipotez 6

2 STANDART OLMAYAN BANACH FONKSİYON UZAYLARI 7

2.1 Banach Fonksiyon Uzayları 7

2.1.1 Ağırlıklı Banach Uzayları 10

2.1.2 Grand Lebesgue Uzayları 11

2.1.3 Grand Sobolev Uzayları 22

2.1.4 Ağırlıklı grand Lebesgue Uzayları 22

2.1.5 Orlicz Uzayları 26

2.1.6 Marcinkiewicz, Morrey, Campanato Uzayları 29

2.1.7 $L_{p(\cdot)}$ Değişken Üslü Lebesgue Uzayları 32

3 İZ, İZ OPERATÖRÜ, İZ UZAYI 34

3.1 Genişleme Teoremi 34

3.2 İz Kavramı 40

3.2.1 İz Operatörü 41

3.2.2 İz Uzayı 44

3.2.3 $X(\Omega)$ Uzayı için Özel Durumlar 46

3.3 Singüler Operatör 52

3.3.1 Singüler Operatörün Tanımı ve Özellikleri 52

3.3.2 Singüler Operatörün Bazı Standart Olmayan Fonksiyon Uzaylarında Sınırlılığı 57

4 ELİPTİK DENKLEMLER **64**
4.1 Eliptik Denklemler ile İlgili Bilgiler 64
4.1.1 $m - inci$ Mertebeden Eliptik Operatör 64
4.2 Grand Sobolev Uzaylarında Ayrılabilir Olmayan Durumda Lokal Çözülebilirlik ve İç Schauder tip Eşitsizlikler 67
4.2.1 Ana Lemma ve Lokal Varlık Teoremi 68
4.2.2 İç Schauder tip Eşitsizlikler 71
4.3 Ağırlıklı Grand Sobolev Uzaylarında Ayrılabilir Durumda Lokal Çözülebilirlik 72
4.3.1 $N^{m}_{p),\rho}(\Omega)$ uzayı ve Ana Lemma 81
4.3.2 Lokal Varlık Teoremi 84

5 SONUÇ **87**

KAYNAKÇA **88**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **93**

SİMGE LİSTESİ

$A \subset\subset B$	$\overline{A} \subset B$
domain	Açık ve bağlantılı küme
B_r	$B_r(0)$
$\|M\|$	M kümesinin Lebesgue ölçüsü
$\overline{M}$	M kümesinin kapanışı
$M_1 \Delta M_2$	M_1 ve M_2 kümeleri arasındaki simetrik fark
$\mathbb{Z}_+$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$B_r(x_0)$	$\mathbb{R}^n$ kümesinde x_0 merkezli açık yuvar
$\rho(x; M)$	x ve M kümesinin arasındaki uzaklık
[X;Y]	X'ten Y'ye sınırlı lineer operatörlerin Banach uzayı
[X]	$[X; X]$
$\Omega_r(x_0)$	$\Omega \cap B_r(x_0)$
Ω_r	$\Omega_r(0)$
$\partial\Omega$	Ω domainin sınırı
$\overline{\Omega}$	$\Omega \cup \partial\Omega$
$diam\Omega$	Ω kümesinin çapı
$\Im(\Omega, \mathscr{L})$	Ω kümesi üzerinde $\mathscr{L}$-ölçülebilir fonksiyonlar uzayı

KISALTMA LİSTESİ

BFU	Banach fonksiyon uzayı
h-BFU	Homojen Banach fonksiyon uzayı
h.h.y	Hemen hemen her yerde

ÖZET

Standart Olmayan Banach Sobolev Fonksiyon Uzaylarında Eliptik Denklemlerin Çözülebilirlik Problemleri

Şeyma ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Yusuf ZEREN
Eş-Danışman: Prof. Dr. Bilal BİLALOV

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; tezin giriş kısmı verilmiş olup, bu bölüm literatür özeti, tezin amacı ve hipotezden oluşmaktadır. İkinci bölümde, tez kapsamında araştırmaların yapıldığı grand Lebesgue uzayları, grand Sobolev uzayları ve diğer bazı standart olmayan Banach fonksiyon uzayları ile ilgili bilgiler verilmiştir. Grand Lebesgue uzayları için Castillo ve Rafeiro'nun [1] kaynağı referans alınarak ayrılabilirlik, yoğunluk ve duallik gibi kavramlar ile tezin ileriki bölümlerinde faydalanılacak bazı diğer bilgiler ayrıntılı olarak ifade edilmiştir. Banach fonksiyon uzayları ile ilgili tanım ve teoremlere Bennet ve Sharpley [2] kaynağı esas alınarak yer verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümler tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde, eliptik denklemler için varlık teoremleri için gerekli olan genişleme teoremi, iz operatörü, iz uzayı gibi kavramlar için alınan sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bu bölümde, singüler operatörün bazı standart olmayan fonksiyon uzaylarında sınırlılığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, eliptik denklemler ile ilgili temel bilgiler verilmiş olup grand Sobolev uzaylarında "ayrılabilir olmayan durumda" lokal varlık teoremleri ve İç Schauder tip eşitsizliklerle ilgili alınan sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, ağırlıklı grand Sobolev uzaylarında "ayrılabilir durumda" lokal çözülebilirlik ile ilgili elde edilen

lemma ve teoremler ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Grand Sobolev uzayları, ağırlıklı grand Sobolev uzayları, eliptik operatör, lokal çözülebilirlik, iz uzayı

ABSTRACT

Solvability Problems of Elliptic Equations in non Standard Banach Sobolev Function Spaces

Şeyma ÇETİN

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf ZEREN
Co-supervisor: Prof. Dr. Bilal BİLALOV

This thesis consists of four parts.

In the first part; the introduction part of the thesis is given and this part consists of the literature summary, the objective of the thesis and the hypothesis. In the second part, information about grand Lebesgue spaces, grand Sobolev spaces and some other non-standard Banach function spaces are given. About grand Lebesgue spaces, concepts such as separability, density and duality and some other information that will be used in the next parts of the thesis are expressed in detail by referring to the source of Castillo and Rafeiro [1]. Definitions and theorems related to Banach function spaces are given on the basis of Bennet and Sharpley [2].

The third and fourth chapters constitute the original part of the thesis.

In the third chapter, the results obtained for concepts such as extension theorem, trace operator, trace space, which are necessary for existence theorems for elliptic equations, are given. Also, in this section, the limitations of the singular operator in some non-standard function spaces are examined.

In the fourth chapter, basic information about elliptic equations are given, and the results about the local existence theorems in the “non-separable case” and interior Schauder type inequalities in grand Sobolev spaces are given. In addition, the obtained lemmas and theorems about local solvability in the "separable case" in weighted grand Sobolev spaces are expressed.

Keywords: Grand Sobolev spaces, weighted grand Sobolev spaces, elliptic operator, local solvability, trace space

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Son yıllarda; akışkanlar mekaniği, lineer olmayan elastisite teorisi, çeşitli fiziksel olayların matematiksel modellemesi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözülebilirlik problemleri gibi günümüze ait problemlerin çözümünde klasik fonksiyon uzaylarının(Hölder uzayları, Sobolev uzayları, vb.) uygun olmadığı gözlemlenmiştir. Bu sebeple, standart olmayan fonksiyon uzaylarını tanıtmak ve araştırmak gerekli hale gelmiştir. Standart olmayan fonksiyon uzaylarında, matematiğin diğer alanlarıyla karşılaştırıldığında, harmonik analiz problemleri üzerine yapılan araştırmalarda daha çok ilerleme kaydedilmiştir[1, 3–19]; ayrıca bu uzaylarda yaklaşım teorisi ile ilgili problemler de çalışılmaya başlanmıştır[20–33]. Standart olmayan fonksiyon uzaylarına değişken üslü Lebesgue uzayları, Orlicz uzayları, grand Lebesgue (Iwaniec-Sbordone) uzayları, Morrey uzayları ve bu uzayların birçoğunun ağırlıklı versiyonları ile genelleştirilmiş versiyonları örnek verilebilir.

1931'de ilk olarak W. Orlicz tarafından tanıtılan değişken üslü Lebesgue uzaylarına ilk zamanlarda teorik olarak ilgi duyulmuştur[3]. Ancak daha sonra, 19. yüzyılın sonlarına doğru, bir fonksiyon uzayı olmasından öte bu uzayın geniş araştırmaları; p(x)-Laplasyan, elektroreolojik sıvıların modellenmesi ve görüntü restorasyonu gibi uygulamalı matematiğin çeşitli problemleri üzerine yapılan çalışmalar sayesinde olmuştur[4, 5]. Literatürde değişken üslü Lebesgue uzayları ile ilgili matematikçiler tarafından yapılan birçok önemli çalışma bulunmaktadır. Bunlardan en temel olanı [6]'da değişken üslü Lebesgue uzaylarında yansıma, ayrılabilirlik, duallik, gömme ve düzgün fonksiyonların yoğunluğu gibi kavramlar ele alınmıştır. Bu uzaylarla ilgili; integral operatörler, değişken üslü Sobolev uzayları, ekstrapolasyonlar ve kısmi diferansiyel denklemler üzerine yapılan bazı çalışmalara [7–9] kaynaklarından ulaşılabilir.

W. Orlicz daha sonra kendi ismiyle bilinen Orlicz uzayı üzerine çalışmalara

yönelmiş ve Birnbaum ile birlikte [10] çalışmasında, $1 < p < +\infty$, L_p uzaylarının doğal bir genelleştirmesi olarak Orlicz uzayını tanıtmışlardır. Yaptıkları çalışmada klasik Lebesgue uzayları tanımındaki x^p yerine daha genel bir Φ konveks fonksiyonu alarak Orlicz uzayı tanımını vermişlerdir. Hasto ve Harjulehto [11]'da, [7] çalışmasına benzer yaklaşımlar kullanarak genelleştirilmiş Orlicz uzaylarında birçok sonuç elde etmişlerdir. [12] çalışmasında Lang ve Mendez, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde ortaya çıkan problemlerin, Orlicz uzaylarında rahat bir şekilde formüle edilebileceğini ve verimli bir şekilde çözülebileceğini belirtmişlerdir.

1938'de C. Morrey, ikinci mertebeden eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin regülerliği üzerine yaptığı araştırmalarda Morrey uzayı kavramını [13]'te tanıtmıştır ve burada kullandığı teknik harmonik analiz, potansiyel teori, kısmi diferansiyel denklemler, matematiksel fizik gibi birçok alanda çok kullanışlıdır. 1975'te D.R. Adams, Morrey uzaylarında kesirli maksimal operatörlerin ve kesirli integral operatörlerin sınırlılığını incelemiştir[14]. Sawano, Fazio ve Hakim [15] çalışmasında Morrey uzaylarını potansiyel teori ile bağlantılı olarak ele almışlardır ve eliptik diferansiyel operatörler için temel çözüm araştırmışlardır.

$L_{p)}$ grand Lebesgue uzayları 1992'de Iwaniec ve Sbordone tarafından [16] Jacobien'in integrallenebilmesi üzerine yaptıkları çalışmada tanıtılmıştır. Fiorenza 2000 yılında yaptığı [17] çalışmasında grand Lebesgue uzayları için duallik ve yansıma kavramlarını incelemiş ve $L_{p)'}$ small Lebesgue uzayını tanıtmıştır. Fiorenza ve Capone [18] çalışmasında small Lebesgue uzayının genelleştirilmiş versiyonu üzerine çalışmışlar ve Orlicz uzayı ile karşılaştırmasını yapmışlardır. Kısmi diferansiyel denklemler teorisinde bazı lineer olmayan denklemlerin çözümleri için varlık, teklik ve regülerlik problemlerinin çalışılmasında bu uzaylar elverişlidir ve yüksek mertebeden eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemleri [34–37] çalışmalarında bu uzaylar için araştırılmıştır. Grand Lebesgue uzayları ile ilgili temel fonksiyonel analiz bilgilerine [1] kaynağından ulaşılabilir. Grand Lebesgue uzaylarında açık ve anlaşılır ispatlar verebilmek için bir Banach fonksiyon uzayı oluşlarından yararlanmak iyi bir yoldur. Lebesgue, Orlicz ve Morrey uzayları gibi birçok uzayın dahil olduğu Banach fonksiyon uzayları(B.F.U) özel bir ölçü ile tanımlanan norm ile verilir ve [2]'de B.F.U ile ilgili ilişik uzay, duallik, yansıma, ayrılabilirlik gibi kavramlar incelenmiştir.

Ağırlıklı grand Lebesgue uzayları, grand Morrey uzayları gibi standart olmayan fonksiyon uzayları lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler

ile ilgili varlık, teklik ve regülerlik gibi problemlerin incelenmesi için uygun uzaylardır ve [19] kaynağında bu uzaylar ele alınmıştır. Bu uzaylarda Sobolev tipi teoremler ve bunlar için uygun ağırlık fonksiyonlarının karakterizasyonu üzerine sonuçlar elde edilmiştir. Diğer taraftan bir ve iki taraflı potansiyeller ile güçlü kesirli maksimal fonksiyonlar için iz problemlerinin çözümü araştırılmıştır. Bu alınan sonuçların hepsi sınırlı kümeler üzerindeki ağırlıklı grand Lebesgue uzayının tanımının elverişli olmasıyla bir kriter olarak verilebilmiştir. Ayrıca grand Lebesgue uzayında Riesz-tipi potansiyel operatörlerin sınırlılığı ile genelleştirilmiş grand Morrey uzaylarında Calderon-Zygmund operatorü ve Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı gösterilmiştir. [19]'da elde edilen bu ve bunun gibi birçok sonuç, VMO katsayılı farklılaşmayan(non-divergence) eliptik denklemlerin çözümlerinin regülerliğinin araştırılmasına olanak tanımıştır. [38] kaynağında ağırlıklı grand Lebesgue uzaylarına karşılık gelen ağırlıklı grand Sobolev uzaylarında $m - inci$ mertebeden eliptik denklemlerin lokal çözülebilirliği incelenmiştir.

Yukarıda örnekleri verilen birçok standart olmayan fonksiyon uzayında görüldüğü gibi kısmi diferansiyel denklemlerin çözülebilirlik problemleri üzerine bu uzaylarda önemli çalışmalar yapılmıştır. Kısmi diferansiyel denklemler parabolik, hiperbolik ve eliptik gibi sınıflandırmalara sahiptir. Bunlar arasında önemli bir yeri olan eliptik denklemler, denge durumlarını modeller ve zaman değişkenine bağlı değildir. En bilinen eliptik denklem örnekleri Laplace ve Poisson denklemleridir ve bu denklemlerin matematiksel ifadesi sırası ile

$$\Delta u = \sum D_{ii} u = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta u = f \tag{1.2}$$

şeklindedir. K. Miranda [39], A.V. Bitsadze [40], I.G. Petrovsky [41], L.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uraltseva [42], L. Hormander [43], L. Bers, F. John, M. Schechter [44], S.L. Sobolev [45], K. Moren [46], V.P. Mikhailov [47], J.L. Lyons, E. Magenes [48], S.G. Mikhlin [49], S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg [50] gibi birçok ünlü matematikçi eliptik denklemler ile ilgili önemli çalışmalar yapmışlardır.

Eliptik denklemler teorisi, pure matematiğin bir dalıdır; ancak uygulamalı matematikte de kullanılmaktadır ve daha çok matematiksel fiziğin etkisi altında gelişmiştir. Eliptik denklemler, matematiksel fizik alanında ya kendi başlarına ya da hiperbolik veya parabolik denklemlerle bağlantılı olarak ortaya çıkarlar, çünkü

hiperbolik ve parabolik denklemler genellikle bir eliptik operatör içerir. Parabolik ve hiperbolik denklemler zamana bağlı süreçleri tanımlar ve bu tür denklemlerin çözümleri, belirli sınır koşulları altında t bağımsız değişkenine göre değişir. Bunun aksine; eliptik denklemler durağan, kararlı durumları tanımlar. Örneğin; homojen bir levha veya cismin sabit sıcaklığını veren u fonksiyonu (1.1) Laplace denklemini sağlar ve bu denklem bir zarın denge formunu tanımlar.

Eliptik denklemler durağan durumları tanımladıklarından onların çözümlerinin en temel özelliklerinden biri düzgünlükleridir. Örneğin; Laplace denkleminin tüm sürekli çözümleri tüm bağımsız değişkenlerde analitiktir. Ayrıca, (1.1) denkleminin çözümlerinin temel özellikleri değişken sayısı n'ye bağlı değildir; ancak gösterimde basitlik için $n = 2$ durumu ele alınır. Genel eliptik denklemler için geçerli olan sonuçların bir incelemesini 1950'de Petrovsky [41] çalışmasında vermiştir.

Eliptik denklemlerin çözümleri için varlık teoremlerinin temelini Schauder tipi eşitsizlikler oluşturur. Bu eşitsizlikler, hipotez yoluyla bir çözümün varlığını varsaydığından, bunlara *a priori* tahminler denir. Schauder tipi eşitsizlikler, eliptik denklemin katsayıları ve sınır koşulları yeterince düzgün olduğunda denklemin düzgün klasik bir çözümünün varlığı için ön bilgi verir. İç Schauder eşitsizlikleri, çözüm için Hölder şartının sınırda değil denklemin tanımlı olduğu bölgenin içinde sağladığını söyler. Sınırda Schauder eşitsizlikleri ise çözüm için denklemin tanımlı olduğu tüm bölgede Hölder şartını sağladığı bilgisini verir. Gilbarg ve Trudinger [51] kaynağında Schauder teorisi yardımı ile denklemin baş katsayısının değerini bir noktada sabitleyerek lineer eliptik denklemlerin çözümleri ile ilgili sonuçlar almışlardır.

Eliptik denklemler teorisi, Hölder uzaylarında(klasik çözümler) ve Sobolev uzaylarında(Hilbert koşulu ile) çalışılmıştır. Klasik Sobolev uzayları ayrılabilirdir ve bu uzaylarda sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar yoğundur. Bu koşullar, eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemleri teorisinin çalışılabilmesinde önemli bir yere sahiptir. Bunun aksine; Morrey uzayları, grand Lebesgue uzayları gibi standart olmayan uzaylar ayrılabilir değildir ve bu nedenle bu uzaylarda(bahsi geçen uzaylar gösteriminde X sembolü kullanılacaktır) eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemlerinin çalışılması için belirli zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu uzaylarda diferansiyel denklemler iki durumda incelenebilir. Bunlar "ayrılabilir durum" ve "ayrılabilir olmayan durum"lardır. "Ayrılabilir olmayan durum"da, X uzayının normu ile tanımlanmış Sobolev uzayı ve bu Sobolev uzayındaki fonksiyonların iz uzayları tanımlanır. [52–60] çalışmalarında "ayrılabilir olmayan durum"da çalışmalar yapılmış; ancak bu çalışmalarda iz uzayları tanımlanmadığı için problemin ifadesi geleneksel ifadeden farklılık

göstermiştir. Eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemlerinin "ayrılabilir durum"da incelenebilmesi için ise ayrılabilir bir $X_s \subset X$ alt uzayı tanımlanmalı ve X_s alt uzayında denklem ile ilgili soruların cevabı aranmalıdır. [6, 45–47] çalışmalarında eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemleri grand Lebesgue uzaylarında "ayrılabilir durum"da araştırılmıştır.

Kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili araştırmalar yapmak için Sobolev uzayları fonksiyonel analiz teoremlerinin kullanımının uygun olduğu uzaylardır. Bir kısmi diferansiyel denklem, uygun fonksiyon uzayları arasında tanımlanan bir operatör ile yeniden biçimlendirilebilir. Diğer bir ifade ile, X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere

$$A : X \to Y \tag{1.3}$$

ile gösterilen A operatörü muhtemel sınır koşulları ile birlikte bir kısmi diferansiyel denklemin yapısını ifade eder. Bir kısmi diferansiyel denklemin (1.3) formunda ifade edilmesiyle bu denklemlerin çözülebilirliğinin araştırılmasında A operatörü için fonksiyonel analiz teoremlerinin kullanılması uygun hale gelir. X ve Y uzaylarının, Sobolev uzayı olarak alınması bu teoremlerin kullanılması için doğru seçimdir. [61] kaynağında E. Lawrence, Sobolev uzayları teorisini lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için geliştirmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, grand Sobolev uzayı ve ağırlıklı grand Sobolev uzayında eliptik denklemlerin lokal çözümünün varlığını göstermek ve bunun için izlenmesi gereken yolları araştırmaktır. Grand Sobolev uzayı ve ağırlıklı grand Sobolev uzayı gibi standart olmayan uzaylarda iki türlü durum ile eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemleri incelenir. Bunlar, “ayrılabilir durum” ve “ayrılabilir olmayan durum” lardır. “Ayrılabilir durumda” araştırmalar yapılırken genişleme teoremi, iz teoremi gibi teoremler uzayın öteleme operatörü ile tanımlanan bir alt uzayında; “ayrılabilir olmayan durumda” ise uzayın kendisinde ispatlanarak lokal çözümün varlığı gösterilmiştir. Genişleme teoremi ve iz teoremleri üçüncü bölümde Banach-Sobolev fonksiyon uzayları için ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde de bu sonuçlar özel olarak grand Sobolev ve ağırlıklı grand Sobolev uzaylarında kullanılmıştır. Ayrıca, singüler operatörün standart olmayan bazı fonksiyon uzaylarında sınırlılığı elde edilmiştir.

1.3 Hipotez

Eliptik denklemler teorisinde, çözülebilirlik problemlerini incelemek ve çalışılan uzayın yapısal özelliklerine göre varlık teoremlerini elde etmek önemli bir yere sahiptir. Son yıllarda teknolojinin gelişmesiyle araştırmacılar; diferansiyel denkemlerin çözümlerinin varlığının mevcut bilinen uzaylarda olmadığını, yeni(standart olmayan) uzaylarda çalışılması gerektiğini görmüşler ve bunun için yeni teoriler ortaya koymuşlardır. Tez kapsamında; genişleme teoremi, iz operatörü, iz uzayı ve karakterizasyonu ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlardan yararlanarak, grand Sobolev uzaylarında eliptik denklemlerin lokal çözümünün varlığı "ayrılabilir olmayan durumda", ağırlıklı grand Sobolev uzaylarında ise "ayrılabilir durumda" elde edilmiştir. Elde edilen ilgili teoremler ve sonuçlar diğer standart olmayan uzaylarda her iki durumda da araştırmalar yapmaya imkan sağlar.

2
STANDART OLMAYAN BANACH FONKSİYON UZAYLARI

2.1 Banach Fonksiyon Uzayları

Bu bölümde; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme; M_0, değerleri $[-\infty, \infty]$ aralığına düşen ve Ω'da hemen hemen her yerde sonlu olan tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesi; M_+^0 ise değerleri $(0, \infty)$ aralığına düşen M_0 kümesindeki fonksiyonlar sınıfının gösterimi için kullanılacaktır.

Tanım 2.1 (Banach fonksiyon normu). $\forall f, g, f_n \in M_+^0$, $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$ ve tüm ölçülebilir $E \subset \Omega$ alt kümeleri için aşağıdaki özellikler verilsin.

Ö1. $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$, Ω üzerinde h.h.y;

Ö2. $\rho(af) = a\rho(f)$;

Ö3. $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$;

Ö4. Ω üzerinde h.h.y $0 \leq g \leq f \Rightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$ (lattice özelliği);

Ö5. Ω üzerinde $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ (Fatou özelliği);

Ö6. $|E| < +\infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < +\infty$;

Ö7. $|E| < +\infty \Rightarrow \int_E f\,dx \leq C_E \rho(f)$. Burada C_E sayısı E kümesine bağımlı, ρ'dan bağımsızdır ve $0 < C_E < \infty$ dir.

Yukarıda verilen Ö1-Ö7 özelliklerini sağlayan ve $\rho : M_+^0 \longrightarrow [0, \infty]$ şeklinde tanımlanan fonksiyona Banach fonksiyon normu denir[1].

Tanım 2.2 (Banach fonksiyon uzayı). ρ bir Banach fonksiyon normu olmak üzere

$$X(\rho) = X_\rho = X = \{ f \in M_0 : \rho(|f|) < +\infty \} \tag{2.1}$$

ifadesi ile verilen uzaya Banach fonksiyon uzayı(BFU) denir ve $\forall f \in X$ fonksiyonu için norm

$$\left\| f \right\|_X \;=\; \rho\big(\left| f \right|\big) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır[1].

Tanım 2.3. $f(\cdot) \in M_0$ olsun. $f(\cdot)$ fonksiyonu için azalan yeniden düzenleme fonksiyonu, $[0,\infty)$ üzerinde,

$$f^*(t) \;=\; \inf\,\big\{\lambda : \mu f(\lambda) \leq t\big\}\;,\; t \geq 0$$

ile tanımlanan f^* fonksiyonudur. Burada,

$$\mu_f(\lambda) \;=\; \mu\big\{t : \big|\, f(t)\big| > \lambda\;,\; \lambda \geq 0\big\}$$

ile verilen küme $f(\cdot)$ fonksiyonunun dağılım fonksiyonudur[62].

Eğer $\mu_f(\lambda) \;=\; \mu_g(\lambda)\;,\; \forall \lambda > 0$ ise M üzerinde ölçülebilir f ve g fonksiyonlarına denk ölçülebilir fonksiyonlar denir.

Tanım 2.4 (Yeniden düzenleme altında değişmez uzay). ρ bir Banach fonksiyon normu olsun. Eğer tüm denk ölçülebilir f ve g fonksiyonları için

$$\rho(\,f) = \rho(g) \tag{2.3}$$

eşitliği sağlanıyorsa ρ normuna yeniden düzenleme altında değişmez denir. Bu durumda, $X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayına da yeniden düzenleme altında değişmez Banach fonksiyon uzayı ya da simetrik uzay denir[1].

Teorem 2.1. *$1 < p < q < +\infty$ iken $T \in \big[L_p\big]$ ve $T \in \big[L_q\big]$ olsun. α_X ve β_X Boyd indeksleri için $\dfrac{1}{q} < \alpha_X \leq \beta_X < \dfrac{1}{p}$ olmak üzere X yeniden düzenleme altında değişmez uzay olsun. Öyleyse $T \in \big[X\big]$ dir[63].*

Sonuç 2.1. *$\dfrac{1}{q} < \alpha_X \leq \beta_X < \dfrac{1}{p}$ olmak üzere α_X ve β_X Boyd indeksleri X bir yeniden düzenleme altında değişmez uzay olsun. Öyleyse, K singüler operatörü X uzayında sınırlıdır[63].*

Tanım 2.5. $\forall t > 0,\;\; \mathscr{M}_0(\mathbb{R}^+, m)$ üzerinde tanımlı E_t operatörü, çarpmaya göre öteleme operatörü(dilation operator),

$$\big(E_t f\big)(s) \;=\; f(st)\;, \quad (0 < s < \infty) \tag{2.4}$$

ile tanımlanır[2].

Tanım 2.6 (**Boyd İndeksi**). X uzayı, sonsuz, atomik olmayan, total σ-sonlu ölçülebilir ölçü uzayı üzerinde bir yeniden düzenleme altında değişmez Banach fonksiyon uzayı olsun. X uzayının Boyd indeksleri α_x ve β_x

$$\alpha_x = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_x(t)}{\log t} \quad , \quad \beta_x = \inf_{1<t<\infty} \frac{\log h_x(t)}{\log t}$$

şeklinde tanımlanır[2].

Önerme 2.1. *X uzayının $\alpha = \alpha_x$ ve $\beta = \beta_x$ ile verilen indeksleri*

$$\alpha_x = \lim_{t\to 0+} \frac{\log h_x(t)}{\log t} \quad , \quad \beta_x = \lim_{t\to \infty} \frac{\log h_x(t)}{\log t}$$

limitleri ile tanımlanırlar ve $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ şartını sağlarlar.
Ayrıca, X' ilişik uzay normunun $\alpha' = \alpha_{X'}$ ve $\beta' = \beta_{X'}$ indeksleri

$$\alpha' = 1 - \alpha \quad , \quad \beta' = 1 - \beta$$

şeklinde tanımlanır[2].

Tanım 2.7 (**Banach ilişik fonksiyon normu**). ρ bir Banach fonksiyon normu olsun.

$$\rho'(g) = sup\left\{ \int_\Omega fgdx : f \in M_0^+, \rho(f) \leq 1 \right\} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanan ρ' fonksiyonuna *Banach ilişik fonksiyon normu* denir[1].

Tanım 2.8 (**İlişik Banach fonksiyon uzayı**). ρ bir Banach fonksiyon normu ve $X = X(\rho)$ Banach fonksiyon uzayı olsun. ρ' Banach ilişik fonksiyon normu ile üretilen $X' = X'(\rho')$ Banach fonksiyon uzayına X uzayının *ilişik uzayı* denir[1].

$\left\|f\right\|_X$ Banach fonksiyon normuna benzer şekilde $g \in X'$ fonksiyonu için norm

$$\left\|g\right\|_{X'} \;=\; sup\left\{ \int_\Omega fgdx : f \in M^+,\ \left\|f\right\|_X \;\leq\; 1 \right\} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır[1].

Teorem 2.2. *Her X Banach fonksiyon uzayı, X'' ikinci ilişik uzayı ile denktir[1].*

Bu teoremde, duallik kavramı ile ilişik uzay kavramının birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Ancak, belirli şartlar sağlanıyorsa her ikisi de denk olurlar.

Teorem 2.3. *X ve Y birer Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer $X \hookrightarrow Y$ ise $Y' \hookrightarrow X'$ dir[1].*

Tanım 2.9 (**Mutlak sürekli norm**). X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer $f \in X$ fonksiyonu, $E_n \downarrow \emptyset$ şartını sağlayan her $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f\chi_{E_n} \right\|_X = 0 \tag{2.7}$$

eşitliğine sahipse f fonksiyonuna X üzerinde *mutlak sürekli norma* sahiptir denir[1].

Sürekli norma sahip $f \in X$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt uzay X_a ile gösterilsin. Eğer $X = X_a$ ise X uzayına *mutlak sürekli norma* sahiptir denir[1].

Teorem 2.4. *X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. X uzayındaki sınırlı fonksiyonların kümesinin kapanışı X_b ile gösterilsin. Bu durumda, $X_a \subseteq X_b \subseteq X$ kapsaması sağlanır[1].*

Sonuç 2.2. *Eğer $X_a = X$ ise $X_b = X$ dir[1].*

Teorem 2.5. *X bir Banach fonksiyon uzayı olsun. X uzayının dual uzayı X^* ve ilişik uzayı X' olmak üzere; X^* in X' uzayına kanonik olarak izometrik olması için gerek ve yeter şart X uzayının mutlak sürekli norma sahip olmasıdır[1].*

Teorem 2.6. *Bir X Banach fonksiyon uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter şart hem X uzayının hem de X' ilişik uzayının mutlak sürekli norma sahip olmasıdır[1].*

Son iki teorem ilişik uzay ve dual uzayın ne şartlar altında birbirine denk olduğunu gösteren gerek ve yeter şartları vermiştir. İlişik uzay kavramı üzerinde çalışmak dual uzayı karakterize etmekten daha kolay olabilmektedir.

2.1.1 Ağırlıklı Banach Uzayları

Tanım 2.10 (**Ağırlıklı Banach uzayı**). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domain(açık ve bağlantılı) küme olsun. Bu domain üzerinde $\|.\|_{X(\Omega)}$ normu ile $X(\Omega)$ Banach fonksiyon uzayı(B.F.U) alınsın. $w : \Omega \to \overline{R}_+$ fonksiyonu, $w \in \mathscr{F}(\Omega)$ ve $\left|w^{-1}\{0; +\infty\}\right| = 0$ olsun.

$$X_w(\Omega) = \left\{u \in \mathscr{F}(\Omega) : \|uw\|_{X(\Omega)} < +\infty\right\}$$

uzayına ağırlıklı Banach fonksiyon uzayı denir ve normu

$$\|u\|_{X(\Omega)} = \|uw\|_{X(\Omega)}, \quad \forall u \in X_w(\Omega)$$

ile tanımlanır[38].

2.1.2 Grand Lebesgue Uzayları

Tanım 2.11 (Grand Lebesgue uzayı). $1 < p < +\infty$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme olsun. $L_{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayı $f \in L_{p)}(\Omega)$ için

$$\left\|f\right\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty \tag{2.8}$$

normunun sonlu olduğu, Ω üzerinde ölçülebilir fonksiyonların kümesi olarak tanımlanır. Bir diğer ifade ile

$$L_{p)}(\Omega) = \left\{ f \in \Im(\Omega, \mathscr{L}) : \| f \|_{p)} < \infty \right\}$$

dır. Burada, $1 < p < +\infty$ dır ve $|\Omega| < +\infty$ dur [1].

Teorem 2.7. *$p > 1$ için $L_p(\Omega) \subsetneq L_{p)}(\Omega)$ dir[1].*

İspat. $0 < \varepsilon < p-1$ için $t = \dfrac{p}{p-\varepsilon}$ ve $s = \dfrac{p}{\varepsilon}$ alınsın. Aşağıdaki ifadeden

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right) + \frac{\varepsilon}{p} = 1 \tag{2.9}$$

t ve s nin birbirinin konjugesi olduğu görülür. $f \in L_p(\Omega)$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega} |f|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} &\leq \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} |f|^{p} dx\right)^{\frac{p-\varepsilon}{p}\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(|\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} |f|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \\
&= (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \left(\int_{\Omega} |f|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} |f|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq p^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} |f|^{p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1} \big(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f|^{p-\varepsilon}dx\big)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$$

olduğundan $f \in L_{p)}(\Omega)$ olur. ■

Aşağıdaki örnek, Teorem 2.7'deki kapsamanın kesin olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.1. *$\Omega = (0,1)$ seçilsin. $p > 1$, $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ için $f \in L_{p)}(0,1) \setminus L_p(0,1)$ dır. Gerçekten,*

$$\int_0^1 \big|f(x)\big|^p dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(\log x\big|_{\varepsilon}^1\big) = \infty \tag{2.10}$$

olduğundan $f \notin L_p(0,1)$ dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_0^1 x^{-\frac{1}{p}(p-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{p}{\varepsilon}x^{\frac{\varepsilon}{p}}\Big|_0^1\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &= p < +\infty\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_0^1 |x^{-\frac{1}{p}}|^{(p-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty \tag{2.11}$$

elde edildiğinden $f \in L_{p)}(0,1) \setminus L_p(0,1)$ dır[1].

Ayrıca, $p > 1$ ve $0 < \varepsilon < p-1$ için aşağıdaki kapsama sağlanır.

$$L_p(\Omega) \subsetneq L_{p)}(\Omega) \subsetneq L_{p-\varepsilon}(\Omega) \tag{2.12}$$

Teorem 2.8. *$1 < p < \infty$ olmak üzere $L_{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayı bir Banach uzayıdır[1].*

İspat. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L_{p)}(\Omega)$ bir Cauchy dizisi olsun. Öyleyse

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}\big|f_m - f_n\big|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0$$

dir. Dolayısıyla keyfi bir ε, $0 < \varepsilon < p-1$, için $m > n_0$ ve $n > n_0$ iken

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_m-f_n|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}<\frac{\eta}{3}$$

olacak şekilde keyfi bir $\eta>0$ sayısı için $n_0\in\mathbb{N}$ vardır. Buradan, keyfi bir ε sayısı için, $0<\varepsilon<p-1$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $L_{p-\varepsilon}(\Omega)$ uzayında da bir Cauchy dizisi olur. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $L_{p-\varepsilon}(\Omega)$ uzayındaki limiti f olsun ve $n>n_0$ seçilsin. Supremum tanımı gereği $0<\varepsilon_0<p-1$ olacak şekilde bir ε_0 vardır öyle ki

$$\begin{aligned}\left\|f-f_n\right\|_{p)} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f-f_n|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\\ &\leq \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f-f_n|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}}+\frac{\eta}{3}\end{aligned}$$

olur. Öte yandan, $m>n_1$ olacak şekilde $n_1\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_m-f_n|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}}<\frac{\eta}{3}$$

dir. Dolayısıyla, $n>n_1$ ve $m>n_1$ iken

$$\begin{aligned}\left\|f-f_n\right\|_{p)} &\leq \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_m-f_n|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}}\\ &+ \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_m-f|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}}+\frac{\eta}{3}\\ &< \frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}=\eta\end{aligned}$$

sağlanır. ■

Grand Lebesgue uzaylarında çalışmanın zorluklarından biri de C_0^∞ fonksiyon kümesinin bu uzayda yoğun olmamasıdır. Ancak yine de bir sonraki teoremde görüleceği üzere C_0^∞ fonksiyonlarının kapanışının bir karakterizasyonu yapılabilir.

Teorem 2.9. *$C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyon kümesi $L_{p)}(\Omega)$ uzayında yoğun değildir. $\overline{C_0^\infty}\big|_{L_{p)}(\Omega)}$ kapanışı*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{\Omega}\left|f\right|^{p-\varepsilon}dx=0 \tag{2.13}$$

koşulunu sağlayan $f \in L_{p)}(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşur[1].

İspat. $f \in \overline{C_0^\infty}\big|_{L_{p)}(\Omega)}$ olsun. Öyleyse $n \to \infty$ iken $\|f - f_n\|_{p)} \to 0$ olacak şekilde bir $f_n \in C_0^\infty$ fonksiyon dizisi vardır.

$\delta > 0$ alınsın ve $\|f - f_{n_0}\|_{p)} < \frac{\delta}{2}$, $f_{n_0} \in C_0^\infty$ olacak şekilde bir n_0 seçilsin. f_{n_0} için Hölder eşitsizliğinden

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega |f_{n_0}|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f_{n_0}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

sağlandığı görülür.

$\varepsilon < \varepsilon_0$ olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ var olduğundan

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega |f_{n_0}|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\delta}{2}.$$

Sonuç olarak, $\varepsilon < \varepsilon_0$ iken

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega |f|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} &\leq \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega |f-f_{n_0}|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \\ &+ \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega |f_{n_0}|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &\leq \|f-f_{n_0}\|_{p)} + \frac{\delta}{2} \\ &\leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki örnek ile $L_{p)}(\Omega)$ uzayının ayrılabilir olmadığı gösterilmiştir[36].

Örnek 2.2. *Genelliği kaybetmeden $n = 1$ için $L_{p)}(0,1)$ uzayı göz önüne alınsın. $\forall \lambda \in (0,1)$ için*

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \lambda \\ (t-\lambda)^{-\frac{1}{p}}, & \lambda \leq t \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyon ailesi verilsin. $\forall \lambda \in (0,1), f_\lambda \in L_{p)}(0,1)$ *olduğu açıktır.* $\mu > \lambda$ *alınırsa*

$$\begin{aligned}
\left\| f_\mu - f_\lambda \right\|_{p)} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 |f_\mu(t) - f_\lambda(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{1/(p-\varepsilon)} \\
&\geq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_\lambda^\mu (t-\lambda)^{-1+\varepsilon/p} dt \right)^{1/(p-\varepsilon)} \\
&\geq \lim_{\varepsilon \to 0} (\, p(\mu-\lambda)^{\varepsilon/p})^{1/(p-\varepsilon)} \\
&= p^{1/p} > \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $L_{p)}(0,1)$ *uzayı ayrılabilir değildir. Bu örnek kolaylıkla* $L_{p)}(\Omega)$ *uzayı için* n*-boyutlu duruma da genişletilebilir.*

Bir sonraki teoremde, Teorem 2.6'dan yararlanarak grand Lebesgue uzayının yansımalı olmadığı gösterilecektir.

Teorem 2.10. $L_{p)}(\Omega)$ *uzayı yansımalı değildir[1].*

İspat. Yansımalı olmama kavramı mutlak sürekli olmayan $\|\Phi\|_{p)}$ normuna sahip bir Φ fonksiyonunun var olması ile ilgilidir. Gerçekten Φ fonksiyonu $\Phi(x) = x^{-\frac{1}{p}},\ x \in (0,1)$ şeklinde alındığında

$$\limsup_{a \to 0} \sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon \int_0^a x^{-\frac{p-\varepsilon}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \neq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $L_{p)}(\Omega)$ uzayının yansımalı olmadığı görülür. ■

Bir sonraki tanımda, $L_{p)}(\Omega)$ uzayının bir alt uzayı verilecektir. Bu bölümde, Ω üzerinde tanımlanmış her fonksiyonun sıfır ile $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ kümesine genişletildiği varsayılacaktır.

Tanım 2.12. $\delta \in \mathbb{R}^n$ keyfi bir vektör olmak üzere $\forall x \in \Omega,\ (T_\delta f)(x) = f(\delta + x)$ ile tanımlı öteleme(shift) operatörü verilsin.

$$G_{p)}(\Omega) = \left\{ f \in L_{p)}(\Omega) : \left\| T_\delta f - f \right\|_{p)} \to 0, \delta \to 0 \right\} \tag{2.14}$$

ile tanımlanan uzay $\|.\|_{p)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır, yani $L_{p)}(\Omega)$ uzayının bir alt uzayıdır[36].

Lemma 2.1. $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = G_{p)}(\Omega)$ *dır. Kapanış* $\|.\|_{p)}$ *normuna göre alınmıştır[36].*

İspat. $\omega_\varepsilon(.)$ bir ε-şapka (ε-cap) fonksiyonu olsun, yani

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

ile verilsin. Burada c_ε bir sabittir ve $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)dx = 1$ dir. $f \in G_{p)}(\Omega)$ keyfi fonksiyonu alınsın. f ile ω_ε arasındaki konvolüsyon f_ε

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\omega_\varepsilon(y)dy = (f * \omega_\varepsilon)(x)$$

ile gösterilsin. Buradan

$$\begin{aligned} \|f - f_\varepsilon\|_{p)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(.)\omega_\varepsilon(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(.-y)\omega_\varepsilon(y)dy \right\|_{p)} \\ &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_\Omega \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\omega_\varepsilon(y)dy \right|^{p-\varepsilon} dx \right)^{1/(p-\varepsilon)} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \Omega_\varepsilon(y) \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_\Omega |f(x-y) - f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{1/(p-\varepsilon)} dy \\ &\leq \sup_{|y|\leq\varepsilon} \|f(.-y) - f(.)\|_{p)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

olur. $f_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ olduğundan $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} = G_{p)}(\Omega)$ sağlanır. Böylece, $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in C^\infty(\overline{\Omega}), \|f-g\|_{p)} < \varepsilon$ elde edilir. $|\delta| > 0$ olacak şekilde yeterince küçük bir $\delta \in \mathbb{R}^n$ sayısı alınsın.

$$K_\delta = \{x \in \Omega : \rho(x; \partial\Omega) \geq |\delta|\}$$

ifadesi ile bir K_δ tanımlansın. Burada $mes(\Omega \setminus K_\delta), \delta \to 0$ olduğu açıktır.

$$g_\delta(x) = \begin{cases} g(x), & x \in K_\delta \\ 0, & x \notin K_\delta \end{cases}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın ve $g_{\delta;\varepsilon}(x) = (g_\delta * \omega_\varepsilon)(x)$ gösterimi kullanılsın. $\varepsilon < \delta/2$ için $g_{\delta;\varepsilon} \in C_0^\infty$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \|g - g_\delta\|_{p)} &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_{\Omega\setminus K_\delta} |g(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{1/(p-\varepsilon)} \\ &\leq \|g\|_\infty \sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varepsilon\, mes(\Omega \setminus K_\delta))^{1/(p-\varepsilon)} \\ &\leq (p-1)\|g\|_\infty\, mes(\Omega\, K_\delta)^{1/p} \to 0, \quad \delta \to 0. \end{aligned}$$

Diğer taraftan, $\|g_\delta - g_{\delta;\varepsilon}\|_{p)} \to 0,\ \varepsilon \to 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\|f - g_{\delta;\varepsilon}\|_{p)} \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\delta\|_p + \|g_\delta - g_{\delta;\varepsilon}\|_{p)}$$

eşitsizliğinden $\|f - g_{\delta;\varepsilon}\|_{p)} \to 0,\ 0 < \varepsilon < |\delta|/2,\ \delta \to 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} = G_{p)}(\Omega)$ dır. ■

Lemma 2.2. *Aşağıdaki gömmeler sağlanır.*

$$L_p(\Omega) \subset G_{p)}(\Omega) \subset L_{p)}(\Omega) \subset L_1(\Omega).$$

ve her bir kapsama kesindir[34].

İspat. Verilen örnekler kolaylıkla n-boyutlu duruma taşınabileceğinden lemmayı tek boyut için ispatlamak yeterlidir. Bu yüzden $\Omega = (0,1)$ olarak alınacaktır. $L_{p)}(0,1)$ uzayı ayrılabilir olmadığından lemma 2.1 gereği

$$G_{p)}(0,1) \subset L_{p)}(0,1)$$

gömmesi kesindir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{p)}(0,1)} &\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L_{p-\varepsilon}(0,1)} \\ &\leq \|f\|_{L_p(0,1)} \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} 2^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \\ &\leq (p-1)2^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(0,1)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

dır. $\forall f \in L_p(0,1)$ için $T_\delta f - f,\ \delta \to 0$ ifadesi $L_p(0,1)$ uzayında düşünüldüğünde (2.15) eşitsizliğinden $L_p(0,1) \subset G_{p)}(0,1)$ olduğu görülür. Bu kapsamanın kesin olduğunu gösterebilmek için

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}}, & t \in \left[e^{-n^{2p}}, 1\right] \\ 0, & t \in \left[0, e^{-n^{2p}}\right) \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyon dizisi göz önüne alınsın. $L_{p)}(0,1)$ ve $L_p(0,1)$ uzaylarındaki normlar

$$\|f_n\|_{L_{p)}(0,1)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 t^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p,$$

$$\|f_n\|_{L_p(0,1)} = \left(\int_{e^{-n^{2p}}}^1 t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} = n^2$$

şeklindedir. Öyleyse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f_n\|_{L_{p)}(0,1)}}{n^2}$$

serisi yakınsaktır. Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{n^2}$$

serisi $L_{p)}(0,1)$ uzayında yakınsar. Bu toplam $f(t)$ ile gösterilsin. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in G_{p)}(0,1)$ için $f \in G_{p)}(0,1)$ olduğu aşikardır. $f \notin L_p(0,1)$ olduğunun gösterilmesi gereklidir. Bunun için

$$S_m(t) = \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n(t)}{n^2}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

şeklinde kısmi toplam alınsın. $\forall m \in \mathbb{N}$ ve $h.h.y\, t \in (0,1)$ için $0 \leq S_m(t) \leq S_{m+1}(t)$ dır. $L_p(0,1)$ uzayında $\forall \varepsilon \in (0, p-1)$ için $S_m \to f, m \to \infty$ olduğundan $\forall m \in \mathbb{N}, h.h.y$ $t \in (0,1)$ için $|S_m(t)|^p \to |f(t)|^p$ dır. Dolayısıyla Levi teoreminden

$$\int_0^1 |S_m(t)|^p dt \to \int_0^1 |f(t)|^p dt, \quad m \to \infty$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_m(t)|^p dt &= \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n(t)}{n^2} \right|^p dt \\ &\geq \sum_{n=1}^{m} \frac{\int_0^1 |f_n(t)|^p dt}{n^{2p}} \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{n^{2p}}{n^{2p}} \\ &= m \to \infty \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_0^1 |S_m(t)|^p dt \to \infty, \quad m \to \infty$$

elde edilir. Böylece $f \notin L_p(0,1)$ dır. ■

2.1.2.1 Grand Lebesgue Uzaylarında Maksimal Operatör, Singüler Operatör

$L_{p)}(\Omega)$ uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığı önemli bir husustur. Basitlik açısından inceleme $(0,1)$ aralığında yapılacaktır. İspat için bir f

fonksiyonunun f^* azalan yeniden düzenleme fonksiyonu ve

$$Mf(x) = \sup_{(0,1)\supset I\ni x} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy$$

maksimal operatörü arasında iyi bilinen bir teorem tarafından verilen önemli bir ilişkiden yararlanılacaktır. Burada

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \quad t \in [0,1]$$

olarak alınacaktır[1].

Teorem 2.11. $\forall f \in L_1(0,1)$ *için*

$$c(Mf)^*(t) \leq f^{**}(t) \leq c'(Mf)^*(t), \quad t \in (0,1) \tag{2.16}$$

ifadesini sağlayan c *ve* c' *mutlak sabitleri vardır[2].*

Teorem 2.12. $1 < p < \infty$ *olsun.* $\forall f \in L_1(0,1)$ *için*

$$\|Mf\|_{p)} \leq C(p)\|f\|_{p)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C(p) > 1$ *sabiti vardır[1].*

İspat. (2.16) eşitsizliğinden

$$\|f\|_p = \|f^*\|_p$$

olduğundan ve f^* 'a Teorem 2.12 uygulandığından

$$\|Mf\|_{p)} = \|(Mf)^*\|_{p)} \leq C\|f^{**}\|_{p)} = C\|f\|_{p)}$$

elde edilir. ■

Grand Lebesgue uzaylarında bir diğer önemli nokta ise singüler operatörün sınırlı olup olmadığıdır. Singüler operatör

$$(Kf)(x) = k * f(x) = \int_\Omega f(y)k(x-y)dy$$

ile gösterilsin. Burada $\omega(x)$, sıfırıncı dereceden homojen pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$k(x) = \frac{\omega(x)}{|x|^n}$$

dır ve $d\sigma$ birim kürede yüzey elemanı olmak üzere

$$\int_{|x|=1} \omega(x)d\sigma = 0$$

şeklindedir.

Teorem 2.13. *K singüler operatörü $L_{p)}(\Omega)\,,\ 1 < p < +\infty,$ uzayında sınırlıdır. Yani*

$$\left\|Kf\right\|_{L_{p)}(\Omega)} \leq c\left\|f\right\|_{L_{p)}(\Omega)}\,, \quad \forall f \in L_{p)}(\Omega)$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı mevcuttur[36].

Lemma 2.3. *$L_{p)}(\Omega)$ uzayında, $1 < p < +\infty$, $G_{p)}(\Omega)$ alt uzayı K singüler operatörü altında değişmezdir[36].*

İspat. Lemmanın ispatı için $\|T_\delta Kf - Kf\|_{p)} \to 0, \delta \to 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olsun. $\|f - g\|_{p)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $g \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu vardır. Buradan

$$\begin{aligned}&\|(Kf)(x+\delta) - (Kf)(x)\|_{p)} = \\ &\quad = \|(K(f-g)(x+\delta)) + (Kg)(x+\delta) - (K(f-g))(x) - (Kg)(x)\|_{p)}\end{aligned}$$

$$\leq \|(K(f-g))(.+\delta)\|_{p)} + \|K(f-g)(.)\|_{p)} + \|(Kg)(.+\delta) - (Kg)(.)\|_{p)} \quad (2.17)$$

sağlanır. Ω kümesi

$$\Omega(\delta) = \{y - \delta : y \in \Omega\} = \{\tau : \tau + \delta \in \Omega\}$$

şeklinde olsun. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}(K(f-g))(x+\delta) &= \int_{\mathbb{R}^n} k(x+\delta-y)(f-g)(y)\chi_\Omega(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} k(x-\tau)(f-g)(\tau+\delta)\chi_\Omega(\tau+\delta)(y)d\tau\end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse

$$\|(K(f-g))(.+\delta)\|_{p)} \leq \|K\|_{p)\to p)}\|(f-g)(.+\delta)\chi_\Omega(.+\delta)\|_{p)}$$

olur. Burada $\|K\|_{p)\to p)}$ normu, K operatörünün $L(L_{p)}(\mathbb{R}^n); L_{p)}(\mathbb{R}^n))$ uzayları

arasında tanımlanır. Aşağıdaki ifade göz önüne alınarak

$$\|(f-g)(.+\delta)\chi_\Omega(.+\delta)\|_{L_{p)}(\mathbb{R}^n)} = \|f-g\|_{L_{p)}(\Omega)}$$

(2.17) ifadesinden

$$\|(Kf)(.+\delta)-(Kf)(.)\|_{p)} \leq 2\|K\|_{p)\to p)} + \|(Kg)(.+\delta)-(Kg)(.)\|_{p)}$$

elde edilir. İspatı tamamlayabilmek için $\forall g \in C_0^\infty$ olmak üzere

$$\|(Kg)(.+\delta)-(Kf)(.)\|_{p)} \to 0, \quad \delta \to 0$$

ifadesinin sağlandığının gösterilmesi gereklidir. g fonksiyonunun sıfır ile $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ kümesine genişletilmiş halinin $\mathbb{R}^n$ 'de düzgün sürekli olduğu aşikardır ve $\|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty$ dır. Öyleyse

$$(Kg)(x+\delta) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-\tau)g(\tau+\delta)\chi_\Omega(\tau+\delta)d\tau$$

ifadesinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
&\|(Kg)(.+\delta)-(Kg)(.)\|_{p)} \\
&\quad \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (g(y+\delta)\chi_\Omega(y+\delta) - g(y)\chi_\Omega(y))k(x-y)dy \right\|_{L_{p)}(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \leq \|K\|_{p)\to p)}\|g(.+\delta)\chi_\Omega(.+\delta) - g(.)\chi_\Omega(.)\|_{p)} \\
&\quad \leq \|K\|_{p)\to p)}(\|(g(.+\delta)-g(.))\chi_\Omega(.+\delta)\|_{p)} + \|g(.)(\chi_\Omega(.+\delta)-\chi_\Omega(.))\|_{p)}) \\
&\quad \leq c\|K\|_{p)\to p)}\|g(.+\delta)-g(.)\|_\infty + \|K\|_{p)\to p)}\|g\|_\infty\|\chi_\Omega(.+\delta)-\chi_\Omega(.)\|_{p)}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

elde edilir. Burada $c > 0$, δ dan bağımsız bir sabittir ve $\|g(.+\delta)-g(.)\|_\infty \to 0$, $\delta \to 0$ dır. Ayrıca, $mes(\Omega(\delta)\Delta\Omega) \to 0$, $\delta \to 0$ dır. Öyleyse

$$\|\chi_\Omega(.+\delta)-\chi_\Omega(.)\|_{p)} \leq c(mes(\Omega(\delta)\Delta\Omega))^{1/p} \to 0, \quad \delta \to 0$$

eşitsizliği dikkate alınırsa (2.18) ifadesinden yararlanarak

$$\|(Kg)(.+\delta)-(Kg)(.)\|_{p)} \to 0, \quad \delta \to 0$$

olduğu görülür. ■

2.1.3 Grand Sobolev Uzayları

Tanım 2.13 (Grand Sobolev uzayı). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir küme olmak üzere $W^m_{p)}(\Omega)$ ile gösterilen grand Sobolev uzayı

$$\|f\|_{W^m_{p)}} = \sum_{k=0}^{m} \left\|f^{(k)}\right\|_{L_{p)}(\Omega)}$$

normu ile üretilir[34].

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde kurulan $X(\Omega)$ Banach fonksiyon uzayı olmak üzere genel anlamda Sobolev uzayı

$$W^m_X(\Omega) = \{u \in X(\Omega) : \exists \partial^\alpha u, \forall \alpha : |\alpha| \leq m \ \ \& \ \ \partial^\alpha u \in X(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m\}$$

ile tanımlıdır. Burada α multi indekstir.

2.1.4 Ağırlıklı grand Lebesgue Uzayları

Tanım 2.14. $\rho : \Omega \to [0, +\infty]$ bir ağırlık fonksiyonu olsun, yani ρ ölçülebilir bir fonksiyon ve $\left|\rho^{-1}\{0; +\infty\}\right| = 0$ dır. $L_{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayının ağırlıklı hali

$$\left\|f\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_\Omega \left|f\right|^{p-\varepsilon} \rho \, dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

normu ile tanımlanır ve ağırlıklı grand Lebesgue uzayı $L_{p),\rho}(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca, $L_{p),\rho}(\Omega)$ uzayına karşılık gelen $W^m_{p),\rho}(\Omega)$ Sobolev uzayı

$$\left\|f\right\|_{W^m_{p),\rho}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \left\|\partial^\alpha f\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)}$$

normu tarafından üretilir[38].

2.1.4.1 Riesz Potansiyelinin Özellikleri

Eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemleri üzerine çalışmalar yapabilmek için $N^m_{p)}$ uzayında Riesz potansiyelinin bazı özelliklerine ihtiyaç vardır. Bu bölümde zayıf singülerliğe sahip bir integral operatörün özellikleri incelenecektir. Bu özellikler, $W^k_{p)}(\Omega)$ sınıfındaki fonksiyonların özelliklerini incelemek için

kullanılacaktır. Sobolev sınıflarındaki fonksiyonların özelliklerinin araştırılmasında

$$u(x)=\sum_{|\alpha|=0}^{k-1}x^{\alpha}\int_{\Omega}b_{\alpha}(y)u(y)dy+\sum_{|\alpha|=k}\int_{\Omega}\frac{A_{\alpha}(x;y)}{r^{n-k}}\partial^{\alpha}u(y)dy,\quad \forall u\in C^{k}(\overline{\Omega}) \tag{2.19}$$

ile verilen Sobolev integral özdeşliği önemli bir yere sahiptir. Burada $b_{\alpha}\in C(\overline{\Omega})$, $A_{\alpha}\in L_{\infty}(\Omega\times\Omega)$(genel anlamda $x\neq y$ için $A_{\alpha}(x;y)$ sonsuz diferansiyellenebilir) dır. (2.19) gösterimi uyarınca

$$(K\rho)(x)=V(x)=\int_{\Omega}\frac{A(x,y)}{r^{\lambda}}\rho(y)dy \tag{2.20}$$

ile verilen integral operatörü(Riesz potansiyeli) dikkate alınsın. Burada $r=|y-x|;\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ sınırlı bir tanım kümesi, $0\leq\lambda<n;\ \ A\in L_{\infty}(\Omega\times\Omega)$ dır.

Teorem 2.14. *$\Omega\subset\mathbb{R}^{n}$ bir sınırlı tanım kümesi, $\rho\in L_{p)}(\Omega)$, $A\in C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ ve $\lambda p'<n$ olsun. (2.20) ile verilen operatör $L_{p)}(\Omega)$ uzayından $C(\overline{\Omega})$ uzayına kompakttır[35].*

İspat. $\lambda p^{'}<n\Leftrightarrow p>\frac{n}{n-\lambda}$ olsun. $p-\varepsilon>\frac{n}{n-\lambda}$ olacak şekilde $\varepsilon=(0,p-1)$ alınsın ve $p_{\varepsilon}=p-\varepsilon$ ile gösterilsin. Öyleyse (2.20) ile verilen operatör, kaynak [49] teorem 1.1.1 gereği, $L_{p_{\varepsilon}}(\Omega)$ uzayından $C(\overline{\Omega})$ uzayına kompakt davranır. $\mathscr{M}\subset L_{p)}(\Omega)$ bir sınırlı küme olsun, yani

$$\|\rho\|_{L_{p)}(\Omega)}\leq C,\quad \forall\rho\in\mathscr{M}$$

dır. Buradan

$$\|\rho\|_{L_{p_{\varepsilon}}(\Omega)}\leq C_{\varepsilon}\|\rho\|_{L_{p)}(\Omega)}\leq C,\quad \forall\rho\in\mathscr{M}$$

yazılabilir(C, ρ'dan bağımsız bir sabittir). Sonuç olarak, $\mathscr{M}$ kümesi $L_{p_{\varepsilon}}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır. Dolayısıyla, yukarıda behsedilen kaynak [49] teorem 1.1.1 gereği $K\mathscr{M}$ kümesi $C(\overline{\Omega})$ uzayında kompakttır. ■

Teorem 2.15. *$\lambda p^{'}\geq n$ olsun ve $n-(n-\lambda)<s\leq n$ olacak şekilde s tam sayısı alınsın. (2.20) ile verilen integral operatör, Ω kümesinin herhangi bir Ω_{s} kesişiminde, s boyutlu bir düzlem tarafından hemen hemen her yerde $\mathbb{R}^{s}$ Lebesgue ölçüsüne sahip bir fonksiyon tanımlar. $\forall r:1<r<r_{0}=\frac{sp}{n-(n-\lambda)p}$ için (2.20) ile verilen K operatörü $L_{p)}(\Omega)$ uzayı ile $L_{r}(\Omega_{s})$ uzayı arasında(ayrıca $L_{p)}(\Omega)$ uzayı ile $L_{r)}(\Omega_{s})$ uzayı arasında) sınırlıdır[35].*

İspat. $\lambda p^{'}\geq\Leftrightarrow\ p\leq\frac{n}{n-\lambda}$ ve $s:n-(n-\lambda)p<s\leq n$ bir keyfi tam sayı ve

$r : 1 < r < r_0 = \frac{sp}{n-(n-\lambda)p}$ bir keyfi sayı olsun. Keyfi bir $\varepsilon \in (0, p-1)$ sayısı için

$$n-(n-\lambda)(p-\varepsilon) < s,\, r < \frac{s(p-\varepsilon)}{n-(n-\lambda)(p-\varepsilon)}$$

eşitsizliği sağlansın. Böyle bir ε var olduğu aşikardır. Öyleyse, $p_\varepsilon = p-\varepsilon$, s ve r sayıları için [49] kaynağı teorem 1.3.2'nin tüm koşulları sağlanır ve (2.20) ile verilen K operatörü $L_{p_\varepsilon(\Omega)}$ uzayı ile $L_r(\Omega_s)$ uzayı arasında sınırlı davranır, yani bir $C > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\|K\rho\|_{L_r(\Omega_s)} \le C_\varepsilon \|\rho\|_{L_{p_\varepsilon}(\Omega)} \le C_\varepsilon \|\rho\|_{L_{p_\varepsilon}(\Omega)}$$

dır. Burada C_ε, ρ'dan bağımsız bir sabittir. ■

Teorem 2.16. *Eğer $\lambda p' \ge n$ ise (2.20) ile verilen K operatörü $L_{p)}(\Omega)$ uzayı ile $L_r(\Omega)$ uzayı arasında(ayrıca $L_{p)}(\Omega)$ uzayı ile $L_{r)}(\Omega)$ uzayı arasında) kompaktır.[35].*

İspat. $\lambda p' \ge \Leftrightarrow \; p \le \frac{n}{n-\lambda}$ ve $r : 1 < r < \frac{np}{n-(n-\lambda)p}$ bir keyfi sayı olsun. $r < \frac{n(p-\varepsilon)}{n-(n-\lambda)(p-\varepsilon)}$ eşitsizliğini sağlayan bir $\varepsilon \in (0, p-1)$ sayısı alınsın. Öyleyse, $p_\varepsilon = p-\varepsilon$ ve r sayıları için [49] kaynağı teorem 1.4.1'in tüm koşulları sağlanır ve bu teoremle (2.20) ile tanımlanan K operatörü $L_{p_\varepsilon}(\Omega)$ uzayı ile $L_r(\Omega)$ uzayı arasında kompakt davranır. $\mathscr{M} \subset L_{p)}(\Omega)$ sınırlı bir küme olsun. Öyleyse

$$\|\rho\|_{L_{p_\varepsilon}(\Omega)} \le C_\varepsilon \|\rho\|_{L_{p)}(\Omega)} \le C, \quad \forall \rho \in \mathscr{M}$$

dır. Burada C, ρ'dan bağımsız bir sabittir. Sonuç olarak $\mathscr{M}$, $L_{p_\varepsilon(\Omega)}$ uzayında sınırlı bir kümedir. Öyleyse yukarıda bahsedilen teoremle $K\mathscr{M}$ kümesinin $L_r(\Omega)$ uzayında kompakt olduğu gösterilmiş olur. ■

2.1.4.2 Gömme Teoremleri

Bir önceki bölümde alınan sonuçlar $W^k_{p)}(\Omega)$ uzayında Sobolev-tipi gömme teoremlerinin elde edilmesine imkan sağlayacaktır. Bu bölüm boyunca, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir tanım kümesi ve bazı kürelere yıldızsal bağlı olduğu varsayılacaktır. Bir noktadan çıkan herhangi bir ışının, bu alanın sınırıyla bir ve yalnızca bir ortak noktası varsa, bu alana bir noktaya göre yıldızsal bağlı denilir.

Teorem 2.17. *Eğer $pk > n$ ise $W^k_{p)}(\Omega)$ uzayı $C(\overline{\Omega})$'ye kompakt şekilde gömülür[35].*

İspat. $\varepsilon \in (0, p-1)$ sayısı $p_\varepsilon k > n$ eşitsizliğini sağlayan keyfi bir sayı olsun($p_\varepsilon =$

$p-\varepsilon$). $W^k_{p_\varepsilon}(\Omega)$ uzayının $C(\overline{\Omega})$ içine kompakt şekilde gömüldüğü açıktır. Bir küme $W^k_{p)}(\Omega)$ uzayında sınırlıysa $W^k_{p_\varepsilon}(\Omega)$ uzayında da sınırlı olduğundan istenilen sonuç $W^k_{p_\varepsilon}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ gömmesinden elde edilir. ■

Teorem 2.18. *$pk \leq n$ ve $\Omega_s \subset \Omega$, s boyutlarının parçalı düzgün bir manifoldu olsun($n - kp < s \leq n$). Öyleyse $W^k_{p)}(\Omega)$ uzayı $L_r(\Omega_s)$ uzayına(ayrıca $L_{r)}(\Omega_s)$ uzayına) sürekli gömülür. Burada $1 < r < r_0 = \dfrac{sp}{n-kp}$ dır[35].*

İspat. $1 < r < \frac{sp}{n-kp}$ olsun. Öyleyse

$$r < r_\varepsilon \frac{s(p-\varepsilon)}{n-k(p-\varepsilon)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\varepsilon \in (1, p-1)$ olduğu aşikardır. Ayrıca, $p_\varepsilon k \leq n$ dır($p_\varepsilon = p-\varepsilon$). Kaynak [49] teorem 3.3.2 den $W^k_{p_\varepsilon}(\Omega)$ uzayı $L_r(\Omega_s)$ uzayına süreli gömülür, bir diğer ifade ile

$$\|u\|_{L_r(\Omega_s)} \leq C\|u\|_{W^k_{p_\varepsilon}(\Omega)} \leq C\|\|_{W^k_{p)}(\Omega)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ vardır. Aşağıda verilen

$$\|u\|_{L_{r)}(\Omega_s)} \leq C\|u\|_{L_r(\Omega_s)}$$

eşitsizliği dikkate alınırsa($C > 0$, u 'dan bağımsızdır) gerekli ifade elde edilmiş olunur. ■

Sıradaki teoremler, tamamiyle benzer bir yol ile ispatlanır.

Teorem 2.19. *$1 \leq r < \dfrac{np}{n-kp}$ iken $pk \leq n$ ise $W^k_{p)}(\Omega)$ uzayı $L_r(\Omega)$ uzayına kompakt şekilde gömülür[35].*

Teorem 2.20. *$u \in W^k_{p)}(\Omega)$ olsun. Öyleyse u fonksiyonu, Ω'da herhangi bir $l < k$ mertebesindeki tüm muhtemel genelleştirilmiş türevlere sahiptir. Aynı zamanda, eğer $(k-l)p \leq n$ ve $1 \leq r < \dfrac{np}{n-kp}$ ise $W^k_{p)}(\Omega)$ uzayı $C^l(\overline{\Omega})$ uzayı içine; ayrıca eğer $(k-l)p > n$ ise $W^l_r(\Omega)$ uzayı içine(ayrıca $W^l_{r)}(\Omega)$) kompakt şekilde gömülür[35].*

2.1.5 Orlicz Uzayları

Tanım 2.15. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme olsun. Φ fonksiyonu; $[0,\infty)$ aralığında tanımlı, ölçülebilir ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$$\tilde{L}_\Phi(\Omega) = \left\{ u \in L(\Omega) : \int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx < +\infty \right\}$$

olarak kabul edilsin. $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ sınıfına Orlicz sınıfı denir.

$$\rho(u;\Phi) = \int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon ile $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ sınıfında h.h.y eşit fonksiyonlar özdeşleştirilir.

Tanım 2.16. Bir Φ fonksiyonuna Young fonksiyonu denir; öyle ki, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ile tanımlı

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, t \geq 0 \tag{2.21}$$

eşitliğini sağlayan ve

i) $\forall s > 0$ için $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi(s) > 0$,

ii) φ fonksiyonu keyfi bir $s \geq 0$ noktasında sağdan sürekli,

iii) φ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında artan değil,

iv) $\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = \infty$

özelliklerine sahip olan bir φ fonksiyonu vardır.

Teorem 2.21. *Φ Young fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sürekli, negatif olmayan, kesin artan ve konvekstir. Diğer yandan, Φ Young fonksiyonu*

$$\begin{aligned}
\Phi(0) &= 0;\ \Phi(\infty) = \lim_{t\to\infty}(t) = \infty, \\
\lim_{t\to+0} \frac{\Phi(t)}{t} &= 0;\ \lim_{t\to} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty, \\
\Phi(\alpha t) &\leq \alpha\,\Phi(t),\ \forall \alpha \in [0,1],\ \forall t \geq 0, \\
\Phi(\beta t) &\geq \beta(t)\,\Phi,\ \forall \beta > 1,\ \forall t \geq 0
\end{aligned}$$

özelliklerine de sahiptir.

$\forall \lambda \in (0,1)$ ve $\forall s; t \geq 0$ için

$$\Phi(\lambda s + (1-\lambda)t) \ \leq \ \lambda\,\Phi(s) + (1-\lambda)\,\Phi(t)$$

ise Φ fonksiyonu konvekstir.

Teorem 2.22. *Φ bir Young fonksiyonu olsun. Öyleyse $\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ bir konveks sınıftır ve $\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ kapsaması doğrudur.*

Konveks fonksiyonlarla ilgili bir çok konuda Jensen eşitsizliğinden yararlanılır.

Teorem 2.23 (Jensen Eşitsizliği)**.** *Φ, $\mathbb{R}$ 'de konveks bir fonksiyon olsun. Öyleyse*

i) *$t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$; $\alpha_k > 0$; $k = \overline{1,n}$ olsun. Öyleyse*

$$\Phi\left(\frac{\alpha_n t_1 + ... + \alpha_n t_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 \Phi(t_1) + ... + \alpha_n \Phi(t_n)}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}$$

dır.

ii) *$\alpha = \alpha(x)$ fonksiyonu Ω 'da h.h.y pozitif bir fonksiyon olsun. Öyleyse*

$$\Phi\left(\frac{\int_\Omega u(x)\alpha(x)dx}{\int_\Omega \alpha(x)dx}\right) \leq \frac{\int_\Omega \Phi(u(x))\alpha(x)dx}{\int_\Omega \alpha(x)dx} \ ; \ \forall u(x) \geq 0$$

dır.

Tanım 2.17. φ fonksiyonu Tanım 2.16'da belirtildiği şekilde Φ fonksiyonunu üretsin.

$$\psi(t) = \sup_{\varphi(s) \leq t} s$$

ve

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds, \quad t \in [0, \infty)$$

olsun. Ψ 'ye Φ fonksiyonunu tamamlayıcı fonksiyon denir. Bununla birlikte; Φ fonksiyonu da Ψ 'yi tamamlayıcı fonksiyondur ve Φ; Ψ tamamlayıcı Young fonksiyonları çifti denilir.

Tanım 2.18. Φ Young fonksiyonu Δ_2 şartını sağlasın($\Phi \in \Delta_2$), eğer $\exists K > 0 \wedge \exists T \geq$ ise

$$\Phi(2t) \ \leq \ K\,\Phi(t), \quad \forall t \geq T$$

olur. Δ_2 şartı $\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ sınıfının lineer uzay olması için gereklidir.

Teorem 2.24. *i)* *$\|\Omega\| < +\infty \Rightarrow \widetilde{L}_{\Phi}(\Omega)$ lineerdir $\Leftrightarrow \Phi \in \Delta_2$;*

ii) $\|\Omega\| < +\infty, \Phi \in \Delta_2 \wedge T = 0 \Rightarrow \widetilde{L}_\Phi(\Omega)$ *lineerdir.*

Aşağıda $L_\Phi(\Omega)$ Orlicz uzayları tanımı verilecektir.

Tanım 2.19. Φ bir Young fonksiyonu ve Ψ de onun tamamlayıcı fonksiyonu olsun.

$$\|u\|_{L_\Phi(\Omega)} = \sup\left\{\int_\Omega |uv|dx : g(v;\Psi) \leq 1\right\}, \quad u \in L(\Omega)$$

normu tanımlansın. Öyleyse

$$L_\Phi(\Omega) = \left\{u \in L(\Omega) : \|u\|_{L_\Phi(\Omega)} + \infty\right\}$$

uzayına Orlicz uzayı denir.

$L_\Phi(\Omega)$ uzayı ve $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$ sınıfı arasındaki ilişki şöyledir: Eğer Φ Young fonksiyonu ise $\tilde{L}_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega)$ ve $\|u\|_{L_\Phi(\Omega)} \leq g(u;\Phi) + 1$ dır. Buna ek olarak, $\Phi \in \Delta_2$ ise $\tilde{L}_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ dır.

Teorem 2.25. *Eğer* Φ *Young fonksiyonu ise* $L_\Phi(\Omega)$ *uzayı bir Banach uzayıdır.*

Δ_2 şartı Orlicz uzayının ayrılabilir olması için çok önemlidir.

Teorem 2.26. $\Phi \in \Delta_2$ *Young fonksiyonu* ($|\Omega| = \infty$ *olduğunda* $T = 0$ *dır) ise* $L_\Phi(\Omega)$ *Orlicz uzayı ayrılabilirdir.*

Tanım 2.20. Φ bir Young fonksiyonu ve

$$E_\Phi(\Omega) = \left\{u \in L_\Phi(\Omega) : \lambda u \in \tilde{L}_\Phi(\Omega), \forall \lambda > 0\right\}$$

olsun. Öyleyse

$$E_\Phi(\Omega) \subset \tilde{L}_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega)$$

olduğu açıktır.

Bu sınıflar arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.27. $\Phi \in \Delta_2$ *bir Young fonksiyonu olsun* ($|\Omega|$ *durumunda* $T = 0$). *Öyleyse*

$$E_\Phi(\Omega) = \tilde{L}_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) \tag{2.22}$$

olur.

2.22 ilişkisi $\Phi \notin \Delta_2$ olduğunda doğru değildir.

Teorem 2.28. *Φ bir Young fonksiyonu ve $|\Omega| < +\infty$ dır. Öyleyse $E_\Phi(\Omega) = \overline{S(\Omega)}$ (kapanış $L_\Phi(\Omega)$ normuna göredir) dir. Burada $S(\Omega)$, Ω üzerindeki basit fonksiyonlar çokluğudur.*

Bu başlıkta verilen bilgiler için [64, 65] kaynaklarından yararlanılmıştır. Bu uzaylarla ilgili detaylı bilgilere bu kaynaklardan ulaşılabilinir.

2.1.6 Marcinkiewicz, Morrey, Campanato Uzayları

$|\Omega| < +\infty, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir tanım kümesidir. $0 < \lambda < 1$ ve $1 \leq p < +\infty$ için

$$M_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{u \in L(\Omega) : \|u\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)} < +\infty\right\}$$

dir, öyle ki

$$\|u\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{E \subset \Omega} \left(\frac{1}{|E|^\lambda} \int_E |f|^p dx\right)^{1/p} \tag{2.23}$$

olur. Burada supremum ölçülebilir her $E \subset \Omega$ kümesi üzerinden alınır. 2.23 'te verilen norm ile $M_{p,\lambda}(\Omega)$ 'ya Marcinkiewicz uzayı denilir.

Teorem 2.29. *$0 < \lambda < 1, \ \ 1 \leq p < +\infty$ olmak üzere $M_{p,\lambda}(\Omega)$ Marcinkiewicz uzayı ayrılabilir olmayan Banach uzaydır.*

$f \in L(\Omega)$ fonksiyonu için $\mu_f(t) = \left\{x \in \Omega : |f(x)| > t\right\}$ olsun.

$$\|f\|_{\text{w-L}_{p(\Omega)}} = \sup_{t>0} \left(t[\mu_f(t)]^{1/p}\right)$$

normu verilsin. Öyleyse,

$$\text{w-L}_p(\Omega) = \left\{f \in L(\Omega) : \|f\|_{\text{w-L}_{p(\Omega)}} < +\infty\right\}$$

uzayına zayıf Lebesgue uzayı denilir.

Teorem 2.30. *$p \in (1, \infty)$ ve $\lambda = 1 - \frac{1}{p}$ olsun. Öyleyse $M_{1;\lambda}(\Omega) =$ w-$L_p(\Omega)$ olur.*

$1 \leq p < +\infty, \ \ M_{p,\lambda}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ sürekli kapsaması vardır. Öte yandan, $p_1 > p$ belirli bir sayı ve $\forall E \subset \Omega$ ölçülebilir bir küme olsun. Hölder eşitsizliğinden($\alpha = \frac{p_1}{p}$ derecesi için)

$$\int_E |f|^p dx \ \leq \ |E|^{\frac{1}{\alpha'}} \left(\int_E |f|^{p_1} dx\right)^{p/p'} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{|E|^{\lambda}}\int_E |f|^p\,dx\right)^{1/p} \le |E|^{\left(\frac{1}{\alpha'}-\lambda\right)\frac{1}{p}}\left(\int_E |f|^{p_1}\,dx\right)^{1/p_1} \le$$

$$\le |E|^{\left(1-\lambda-\frac{p}{p_1}\right)\frac{1}{p}}\|f\|_{L_{p_1}(\Omega)}$$

elde edilir. Buradan $p_1 = \frac{p}{1-\lambda}$ için

$$\|f\|_{M_{p;\lambda}(\Omega)} \le \|f\|_{L_{\frac{p}{1-\lambda}}(\Omega)}$$

olursa $L_{\frac{p}{1-\lambda}}(\Omega) \subset M_{p;\lambda}(\Omega)$ sürekli gömmesi doğrudur. Bu sonuçtan yararlanarak bir sonraki lemma elde edilir.

Lemma 2.4. $0 < \lambda < 1,\ \ 1 \le p < +\infty$ *için*

$$L_{\frac{p}{1-\lambda}}(\Omega) \subset M_{p;\lambda}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$$

sürekli gömmesi doğrudur.

Aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 2.2. $1 \le p < +\infty$ *ve* $0 < \lambda < 1$ *için* $M_{p;\lambda}(\Omega)$ *uzayı simetrik bir uzaydır. Bu uzayın aşağı* α_M *ile yukarı* β_M *indeksleri aynıdır ve* $\alpha_M = \beta_M = \frac{1-\lambda}{p}$ *dır.*

Aşağıda Morrey uzayının tanımı verilecektir. Bunun için $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir sınırlı tanım kümesi ve $d_\Omega = diam\Omega$ olmak üzere; eğer

$$\left|\Omega_r(x)\right| \ge Ar^n, \quad \forall r \in (0, d_\Omega)$$

ifadesini sağlayan en az bir $A > 0$ varsa Ω tanım kümesi $\mathscr{A}$-tipindedir denir. Burada, $\Omega_r(x) = \Omega \cap B_r(x)$ dır. Bu başlıkta, Ω tanım kümesinin $\mathscr{A}$-tipinde olduğu kabul edilecektir.

Tanım 2.21. $1 \le p < +\infty$ ve $\lambda \ge 0$ için

$$\|u\|_{L_{p;\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{0<r\le d_\Omega \\ x\in\Omega}} \left(\frac{1}{r^{\lambda}}\int_{\Omega_r(x)} |f|^p dy\right)^{1/p} \tag{2.24}$$

olsun.

$$L_{p;\lambda}(\Omega) = \left\{u \in L(\omega) : \|u\|_{Lp;\lambda(\Omega)} < +\infty\right\}$$

ile tanımlanan uzaya Morrey uzayı denir ve 2.24 ile verilen norm Morrey uzayının normudur.

$\mathscr{A}$-tipinde olan bütün tanım kümeleri için

$$\sup_{\substack{0<r\leq d_\Omega \\ x\in\Omega}} \left(\frac{1}{|\Omega_r(x)|^{\lambda/n}} \int_{\Omega_r(x)} |f|^p dy \right)^{1/p}$$

ile verilen norm, $\|\cdot\|_{L_{p,\lambda}(\Omega)}$ normu ile $L_{p,\lambda}(\Omega)$ uzayında denktir.

$E \subset \Omega$ ölçülebilir kümeleri için

$$u_E = \frac{1}{|E|} \int_E u(y) dy$$

olsun.

Tanım 2.22. $1 \leq p < +\infty$ ve $\lambda \geq 0$ için

$$[u]_{p,\lambda} = \sup_{\substack{0<r\leq d_\Omega \\ x\in\Omega}} \big(\frac{1}{r^\lambda} \int_{\Omega_r(x)} |u(y) - u_{\Omega_r(x)}|^p dy \big)^{1/p}$$

olsun.

$$C_{p,\lambda}(\Omega) = \big\{ f \in L(\Omega) : [u]_{p,\lambda} < +\infty \big\}$$

uzayına Campanato uzayı denilir. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{C_{p,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + [u]_{p,\lambda}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.31. *$L_{p,\lambda}(\Omega)$ Morrey ve $C_{p,\lambda}(\Omega)$ Campanato uzayları Banach uzaylarıdır.*

$1 \leq p < +\infty$ ve $0 < \lambda < 1$ için Morrey ve Campanato uzayları ayrılabilir olmayan ve simetrik olmayan uzaylardır. Bu uzaylar arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.32. *Morrey ve Campanato uzayları arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.*

(i) $p \in [1, \infty)$ *ve* $\lambda = 0$ *ise* $L_{p,0}(\Omega) = L_p(\Omega) = C_{p,0}(\Omega)$ *dır.*

(ii) $p \in [1, \infty)$ *ve* $\lambda = n$ *ise* $L_{p,n}(\Omega) = L^\infty(\Omega)$ *dır.*

(iii) $1 \leq p < +\infty$ *ve* $0 \leq \lambda$; $\vartheta : \dfrac{\lambda - n}{p} \leq \dfrac{\vartheta - n}{q}$ *ise* $L_{q,\vartheta}(\Omega) \subset L_{p,\lambda}(\Omega)$ *sürekli gömmesi doğrudur.*

(iv) $1 \leq p < +\infty$ *ve* $\lambda \in [0, n)$ *ise* $L_{p,\lambda}(\Omega) = C_{p,\lambda}(\Omega)$ *dır.*

(v) $1 \leq p < +\infty$ *ve* $\lambda \in (n, n+p]$ *ise*

$$C_{p,\lambda}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \alpha = \frac{\lambda - n}{p}$$

dır. Burada $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *Hölder uzayıdır.*

Bu başlıkta verilen bilgiler için [2, 14, 15, 64] kaynaklarından yararlanılmıştır. Bu uzaylarla ilgili daha geniş bilgilere bu kaynaklardan ulaşılabilinir.

2.1.7 $L_{p(\cdot)}$ Değişken Üslü Lebesgue Uzayları

$L_{p(\cdot)}$ değişken üslü Lebesgue uzaylarının ortaya çıkışı 1930'lu yıllarda W. Orlicz'in çalışmaları ile başlamıştır. Son yıllarda bu uzaylar ile ilgili çeşitli sorular üzerine çalışmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir. Bu bölümde verilen bilgiler için [8] kaynağından yararlanılmıştır. Bu uzayla ilgili ihtiyaç duyulan daha detaylı bilgilere bu kaynaktan ulaşılabilinir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir(Lebesgue anlamında) bir küme ve $1 \leq p(x) < +\infty, \ \forall x \in \Omega$ için $p \in \mathscr{P}(\Omega)$ herhangi bir fonksiyon olsun. $p_+ = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x)$ ve $p_- = \operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x)$ ile gösterilsin.

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : p(x) = 1\},$$

$$\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\},$$

$$\Omega_0 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_\infty)$$

olsun.

$\rho_{p(\cdot)}(\cdot)$ ile aşağıdaki modüler gösterilsin.

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} \big|f(x)\big|^{p(x)} dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty} \big|f(x)\big|$$

ve

$$\big\|f\big\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

Luxemburg normu verilsin.

$$L_{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{f \in L(\Omega) : \big\|f\big\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} < +\infty\right\}$$

uzayına değişken üslü Lebesgue uzayı denir.

$p(\cdot)$ fonksiyonunun eşleniği $p'(\cdot)$

$$p'(x) = \begin{cases} \frac{p(x)}{p(x)-1} \ , & 1 < p(x) < \infty \\ 1 \ , & p(x) = \infty \\ \infty \ , & p(x) = 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Önerme 2.3. *En az bir $C_p > 0$ sayısı vardır öyle ki $\forall f \in L_{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $\forall g \in L_{p'(\cdot)}(\Omega)$ için*

$$\int_\Omega \left| f(x)g(x) \right| dx \leq C_p \left\| f \right\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega)} \left\| g \right\|_{L_{p'(\cdot)}(\Omega)}$$

Hölder eşitsizliği sağlanır.

Sürekli fonksiyonların $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ uzaylarında yoğunluğu ile ilgili aşağıda verilen teorem doğrudur.

Teorem 2.33. $1 \leq p(\cdot) < +\infty$ *ve* $p \in L_\infty(\Omega)$ *için* $p \in \mathscr{P}(\Omega)$ *verilsin. Öyleyse,* $C(\Omega) \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$ *kümesi* $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ *uzayında yoğundur. Eğer* Ω *bir açık küme ise* $C_0^\infty \cap L_{p(\cdot)}(\Omega)$ *kümesi* $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ *uzayında yoğundur.*

Sonuç 2.3. $1 \leq p(\cdot) < +\infty$ *ve* $p \in L_\infty(\Omega)$ *için* $p \in \mathscr{P}(\Omega)$ *verilsin. Öyleyse* $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ *uzayı ayrılabilir uzaydır.*

3
İZ, İZ OPERATÖRÜ, İZ UZAYI

Bu bölümde, $X(\Omega)$ BFU için genişleme operatörünün varlığı araştırılacak ve klasik yöntemin uygulanabileceği $X(\Omega)$ uzayı ve Ω domaini üzerinde yeterli şartlar verilecektir. Bunun için gerekli bazı kavramlardan bahsedilecektir.

Diğer yandan, $W_X^m(\Omega)$ BFU'dan olan fonksiyonların belirli $(n-1)$ boyutlu $S \subset \overline{\Omega}$ manifoldu üzerinde izi, iz operatörü ve uygun iz uzayını belirlemek için bir yaklaşım verilecektir. Klasik uzaylardan($C(\overline{\Omega})$ sürekli fonksiyonlar uzayı, $H^\alpha(\overline{\Omega})$ Hölder uzayı, $L_p(\Omega)$ Lebesgue uzayı vs.) farklı olarak genel $X(\Omega)$ BFU için iz kavramını belirlerken bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden, μ Lebesgue ölçüsü olmak üzere $X(\Omega)$ uzayı, $(\Omega;\mu)$ ölçü uzayı üzerinde Luxemburg aksiyomları ile tanımlanır.

$W_p^1(\Omega)$ Sobolev uzayındaki fonksiyonların izleri $L_p(\partial\Omega; d\sigma)$ Lebesgue uzayına dahildir. Burada $d\sigma$, $\partial\Omega$ yüzeyi üzerinde yüzey elemanıdır. Genel $W_X^1(\Omega)$ uzayı durumunda $L_p(\partial\Omega; d\sigma)$ uzayı kısmında $\partial\Omega$ üzerinde tanımlanmış hangi ölçü ile hangi BFU'larının olacağı ve bunların tanımlanması gibi önemli sorular ortaya çıkar. Bu bölümde, bu soruların açıklığa kavuşturulması için bir yaklaşım ortaya koyulacaktır. Alınan sonuçlar, daha önce alınmış sonuçların genelleştirilmesidir. Bu bölümde verilen bilgiler için [62] kaynağından yararlanılmıştır.

3.1 Genişleme Teoremi

Elliptik denklemlerin sınır değer problemlerinin Fredholm olma özelliğine sahip olmasının araştırılmasında, herhangi bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domainine uygun $W_p^m(\Omega)$ Sobolev uzayı fonksiyonlarının daha geniş $\Omega' \supset \Omega$ domainine uygun $W_p^m(\Omega')$ fonksiyonlarına genişletilebilmesi önemli bir yere sahiptir. Diğer uzaylardaki fonksiyonların (örneğin $L_p(\Omega)$ Lebesgue uzayı) genişletilebilmesi, çalışılan uzayın Banach uzayı olup olmamasına bağlı olarak bazı zorluklar içerebilmektedir. Bu başlıkta, $W_p^m(\Omega)$ uzayları göz önünde bulundurulacak ve genişleme teoremleri

araştırılacaktır.

$\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir domain ve $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ herhangi bir domain olsun. $W_p^m(\Omega')$, $p \geq 1$, $m \geq 1$ Sobolev uzayı göz önünde bulundurulsun. $F \in W_p^m(\Omega')$ fonksiyonunun Ω üzerinde kısıtlanışı $\mathscr{R}F =: F|_\Omega$ ile gösterilsin. $\mathscr{R}F \in W_p^m(\Omega)$ ve ayrıca $\mathscr{R} \in \left[W_p^m(\Omega'); W_p^m(\Omega)\right]$ dır. Diğer taraftan,

$$\left\|\mathscr{R}F\right\|_{W_p^m(\Omega)} = \left\|F\right\|_{W_p^m(\Omega)} \leq \left\|F\right\|_{W_p^m(\Omega')}$$

ifadesinden yararlanarak $\|\mathscr{R}\| = 1$ olduğu görülebilir. F fonksiyonu, $\mathscr{R}F$ fonksiyonunun $W_p^m(\Omega')$ uzayındaki genişlemesidir.

Burada, $Im\mathscr{R} = W_p^m(\Omega)$ olup olmadığı önemli bir noktadır. Diğer yandan, $\forall F \in W_p^m(\Omega')$ için $\exists\theta \in \left[W_p^m(\Omega); W_p^m(\Omega')\right] : \theta\big(\mathscr{R}F\big) = F$ olup olmadığının araştırılması gereken bir diğer noktadır. Bu iki önemli noktanın sonuçlarının alınması Ω domainin $\partial\Omega$ sınırının düzgünlük derecesine bağlıdır. Burada, θ operatörüne genişleme operatörü denilmektedir.

$C^{(m)}(\overline{\Omega})$ ve $W_p^m(\Omega)$ uzayları gibi klasik uzaylarda yukarıda bahsedilen iki önemli noktaya açıklık getirmek için $\partial\Omega \in C^{(m)}$ şartı yeterlidir. Genel $W_X^m(\Omega)$ BFU durumunda bu iki noktanın cevaplarının bulunması çalışılan $X(\Omega)$ BFU 'nun hangi özelliklere sahip olduğuna bağlıdır. Örneğin; $X(\Omega)$ eğer ağırlıklı $L_{p,w}(\Omega)$ uzayı ise genişleme operatörünün varlığı için ağırlıksız versiyonunda uygulanan klasik yaklaşım yöntemi geçerli değildir, bu yüzden yeni bir yaklaşım yönteminin uygulanması gerekir(baknz S.K. Chua [66]).

$K \subset \mathbb{R}^n$ kenarları koordinat eksenlerine paralel olan herhangi bir n boyutlu küp olsun. $\mathscr{L}_K$ topluluğu K 'nın Lebesgue anlamında ölçülebilir alt kümelerinin σ cebiri ve m , n boyutlu Lebesgue ölçüsü olmak üzere $(K; \mathscr{L}_K; m)$ bir ölçü uzayı olsun. $X(K)$ bu ölçü uzayı üzerinde $\|.\|_{X(K)}$ normu ile bir BFU olur. χ_Ω karakteristik fonksiyon olmak üzere $\Omega \subset K$ domaini için $\|f\|_{X(\Omega)} = \left\|f\chi_\Omega\right\|_{X(K)}$ olduğu kabul edilsin. $X(\Omega)$ 'ya $X(K)$ 'nın ürettiği BFU denilir.

$D \subset K$ herhangi bir domain ve $\varphi : \Omega \to D$ fonksiyonu Ω 'nın D üzerine tek değerli dönüşümü olsun. φ dönüşümü $(D; \sigma_\varphi)$ ölçülebilir uzayını üretir(bknz [67]). Burada $\sigma_\varphi = F \subset D : \varphi^{-1}(F) \in \mathscr{L}_\Omega$ şeklinde tanımlanır. Bu ölçü uzaylarına göre, φ ölçülebilir fonksiyondur ve $\forall F \in \sigma_\varphi \Rightarrow \varphi^{-1}(F) \in \mathscr{L}_\Omega$ şeklindedir.

$(D; \sigma_\varphi)$ ölçü uzayına göre ölçülebilir $g : D \to \overline{R}_+ = [0, +\infty]$ fonksiyonları için $\rho_\varphi(g) = \rho(g \circ \varphi)$ olduğu kabul edilsin. ρ_φ fonksiyonu

$(D;\sigma_\varphi,m)$ ölçü uzayı üzerinde fonksiyonel normu olsun. ρ_φ fonksiyonu Tanım 2.1 ile verilen Banach fonksiyon uzayı olma şartlarından Ö1-Ö3 özelliklerini sağladığı açıktır. Ö4 'ün sağlanıp sağlanmadığı gösterilecektir. Bunun için $F \in \sigma_\varphi : m(F) < +\infty$ ise $m(E) < +\infty$, $E = \varphi^{-1}(F)$ olduğu görülür ve buradan $\rho(\chi_E) < +\infty$ elde edilir. Dolayısıyla, $\chi_F(\varphi_x) = \chi_E(x)$, $\forall x \in \Omega$ olur. Öyleyse, $\rho_\varphi(\chi_F) = \rho(\chi_E) < +\infty$ olduğundan Ö4 sağlanır.

Ö5 'in sağlanıp sağlanmadığını göstermek için $F \in \sigma_\varphi : m(F) < +\infty$ ve $E = \varphi^{-1}(F)$ olsun. $m(E) < +\infty$ olduğu açıktır. $J_\varphi(.)$ ile φ dönüşümünün jakobiyeni gösterilsin. $J_\varphi(.) \in L_\infty(\Omega)$ sağlansın. Öyleyse,

$$\left|\int_F g(y)dm(y)\right| = \left|\int_{\varphi^{-1}(F)} g\big(\varphi(x)\big)J_\varphi(x)dm(x)\right| \leq$$

$$\leq \big\|J_\varphi\big\|_{L_\infty(\Omega)} \int_E \big|g\big(\varphi(x)\big)\big|dm(x) \leq c_E\,\rho(g\circ\varphi) = c_E\,\rho_\varphi(g)$$

elde edilir. Burada, c_E sadece E 'ye ve dolayısıyla sadece F 'ye bağlı bir sabittir. Dolayısıyla, ρ_φ 'nin Ö5 'i sağladığı görülür. Buradan aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.1. *$\varphi : \Omega \to D$ tek değerli dönüşümü $(\Omega;\mathscr{L}_\varphi;m)$ ve $(D;\sigma_\varphi;m)$ uzaylarına göre ölçülebilirdir ve $J_\varphi(.) \in L_\infty(\Omega)$ sağlanır. Öyleyse, $\rho_\varphi(g) = \rho(g\circ\varphi)$ fonksiyonu $(D;\sigma_\varphi;m)$ üzerinde bir fonksiyonel normudur.*

ρ_φ fonksiyonel normundan yararlanarak ve $\big\|g\big\|_{X_\varphi(D)} = \rho_\varphi\big(|g|\big)$ normu yardımı ile $(D;\sigma_\varphi;m)$ ölçü uzayı üzerinde $X_\varphi(D)$ BFU tanımlanacaktır. $(D;\sigma_\varphi;m)$ ölçü uzayı üzerinde $X_\varphi(D)$ ve $X(D)$ iki BFU tanımlanır. Bu iki uzay ile ilgili aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 3.1. $\varphi : \Omega \to D$ dönüşümü göz önüne alınsın. $X_\varphi(D)$ ve $X(D)$ uzayları izomorf ise, yani $\exists\delta_\varphi > 0$ için

$$\delta_\varphi\big\|f\big\|_{X(D)} \leq \big\|f\big\|_{X_\varphi(D)} \leq \delta_\varphi^{-1}\big\|f\big\|_{X(D)}\,,\ \forall f \in X(D)$$

ise $X(\Omega)$ BFU 'na φ-değişmez denir.

$\Phi(\Omega)$ topluluğu $\varphi : \Omega \to D = \varphi(\Omega)$ dönüşümler ailesi olsun. Eğer bu aile $\forall\varphi \in \Phi(\Omega)$ için φ-değişmez ise $X(\Omega)$ BFU 'na $\Phi(\Omega)$-değişmez denilir. Diğer yandan, Lebesgue anlamında ölçülebilir alt kümelerinin σ-cebiri olmak üzere $\sigma_\varphi = \mathscr{L}_D$ ise $\varphi : \Omega \to D$ dönüşümüne Lebesgue dönüşümü denilir.

$X(\Omega)$ simetrik uzay olması durumunda aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 3.1. *$\varphi : \Omega \to D = \varphi(\Omega)$ Lebesgue dönüşümü $\exists \delta > 0$ için*

$$\delta m(E) \leq m\big(\varphi(E)\big) \leq \delta^{-1} m(E)\ ,\ \forall E \in \mathscr{L}_{\Omega}$$

şartını sağlarsa $(\Omega; \mathscr{L}_{\Omega}; m)$ üzerinde tanımlanmış $X(\Omega)$ simetrik uzayı φ-değişmezdir.

İspat. $g = f \circ \varphi^{-1}$ olsun.

$$E_{\lambda}(f) = \{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}$$

$$E_{\lambda}(g) = \{y \in D : |g(y)| > \lambda\}$$

kümeleri göz önüne alınsın. $\forall \lambda > 0$ için $\varphi(E_{\lambda}(f)) = E_{\lambda}(g)$ olduğu açıktır. Öyleyse,

$$\delta m_f(\lambda) \leq m_g(\lambda) \leq \delta^{-1} m_f(\lambda)\ ,$$

ifadesi göz önüne alınsın. [68]'den yararlanarak

$$\delta \big\|f\big\|_{X(\Omega)} \leq \big\|f \circ \varphi^{-1}\big\|_{X_{\varphi}(D)} \leq \delta \big\|f\big\|_{X(\Omega)}\ ,\ \forall f \in X(\Omega)$$

olduğu görülür. ■

Bu lemmadan yararlanarak aşağıdaki sonuç alınır.

Sonuç 3.1. *$\varphi : \Omega \to D = \varphi(\Omega)$ Lebesgue dönüşümü tek değerlidir. Ayrıca, $J_{\varphi} \in L_{\infty}(\Omega)$ ve $J_{\varphi^{-1}}(D)$ sağlanır. Öyleyse, $(\Omega; \mathscr{L}_{\Omega}; m)$ üzerinde tanımlanan keyfi $X(\Omega)$ simetrik uzayı φ-değişmezdir.*

Gerçekten de bu durumda Lemma 3.1 'in şartlarının sağlandığı aşağıdaki ifadelerden görülmektedir.

$$\varphi(E) = \int_{E} \big|J_{\varphi}\big| dm \leq \big\|J_{\varphi}\big\|_{L_{\infty}(E)}\, m(E)$$

$$m(E) = \int_{\varphi(E)} \big|J_{\varphi^{-1}}\big| dm \leq \big\|J_{\varphi^{-1}}\big\|_{L_{\infty}(\varphi(E))}\, m(\varphi(E))$$

Bundan sonraki kısımda, $X(\Omega)$ BFU 'nun ürettiği $W_X^m(\Omega)$ Banach Sobolev uzaylarına göre genişleme teoremleri verilecektir. Bu teoremler verilmeden önce ilerde kullanılacak olan aşağıdaki özellik verilmiştir.

Özellik(φ). $\forall\Omega \subset K$ domaini için $X(\Omega)$ uzayı $\forall\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{D} = \overline{\varphi(\Omega)}$ diffeomorfizmine göre φ-değişmezdir.

$\overline{\Omega} \subset K$ herhangi bir domain olsun. Genelliği kaybetmeden $\Omega = \Pi_a^+ = \Pi_a \cap \mathbb{R}_+^n$ olacak şekildeki paralelkenar alınsın. Burada, $\Pi_a = \left\{y \in \mathbb{R}^n : |y_k| < a\ ,\ \forall k = \overline{1,n}\right\} \subset K$ dır. $\forall f \in W_X^m(\Pi_a^+)$ fonksiyonu alınsın.

$$F(y) = \begin{cases} f(y) & ,\ y \in \Pi_a^+ \\ \sum_{k=1}^{m+1} A_k f(y'; -\frac{y_n}{k}) & ,\ y \in \Pi_a^- \end{cases}$$

ile verilen fonksiyon göz önüne alınsın. Burada, $y = (y_1, \ldots, y_n) = (y'; y_n)$, $\Pi_a^- = \Pi_a \cap \{y_n < 0\}$ ve $\{A_1, \ldots, A_{m+1}\}$ katsayıları

$$\sum_{k=1}^{m+1} \left(-\frac{1}{k}\right)^s A_k = 1\ \ ,\ \ s = \overline{0,m}$$

sisteminin çözümüdür. Bu çözüm vardır ve tektir.

$f \in W_1^m(\Pi_a^+)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, klasik sonuçlardan $F \in W_1^m(\Pi_a)$ dır ve aynı zamanda $\forall\alpha \in Z_+^n : |\alpha| \le m$ multiindeksi ve $y \in \Pi_a^-$ için

$$\partial^\alpha F(y) = \sum_{k=1}^{m+1} A_k \left(-\frac{1}{k}\right)^{\alpha_n} \partial^\alpha f\left(y'; -\frac{y_n}{k}\right)$$

formülü doğrudur. Burada, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dır.

$$\Pi_k^\pm = \left\{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < y_i < a\ ,\ i = \overline{0, n-1}\ ;\ 0 < \pm y_n < \frac{a}{k}\right\}$$

kümesi göz önüne alınsın. $\forall k = \overline{1, m-1}$ sabitlenmiş indeksi için $\varphi_k(y) = \left(y'; \frac{y_n}{k}\right)$, $\forall y \in \Pi_a^-$ dönüşümü alınsın. φ_k fonksiyonunun Π_a^- 'den Π_+^k üzerine tek değerli bir dönüşümdür. Dolayısıyla, $\varphi_k \in C^{(1)}(\overline{\Pi_a^-})$ ve $\varphi_k^{-1} \in C^{(1)}(\overline{\Pi_k^+})$ olur. $f_\varphi = \partial^\alpha f$ ile gösterilsin. Öyleyse, $\forall y \in \Pi_a^-$ için $\partial^\alpha F(y)$ türevi

$$\partial^\alpha F(y) = \sum_{k=1}^{m+1} c_k f_\alpha\left(\alpha_k^{-1}(y)\right)$$

ile gösterilebilir. Burada, $c_k = \left(-\frac{1}{k} \right)^{\alpha_n} A_k \ , \ k = \overline{1, m+1}$ dır. Öyleyse,

$$\left\| \partial^\alpha F(y) \right\|_{X(\Pi_a^-)} \ \leq \ \sum_{k=1}^{m+1} \left| c_k \right| \left\| f_\alpha\big(\varphi_k^{-1}(y)\big) \right\|_{X(\Pi_a^-)}$$

elde edilir.

Aşağıda verilen

$$\varphi(y) = (y'; -y_n) \ \ ve \ \ \psi_k(y) = \left(y'; \frac{y_n}{k} \right)$$

dönüşümleri göz önüne alınsın. $\varphi_k = \psi_k \circ \varphi$ ile gösterilsin. Burada $\varphi : \Pi_a^- \leftrightarrow \Pi_a^+$ ve $\psi_k : \Pi_a^+ \leftrightarrow \pi_k^+$ dir. Belirtilen bu dönüşümlerin bir diffeomorfizm olduklarını göstermek kolaydır. Dolayısıyla, Özellik (φ) 'den yararlanarak,

$$\left\| f_\alpha\big(\varphi_k(.)\big) \right\|_{X(\Pi_a^-)} = \left\| f_\alpha\big(\psi_k(\varphi(.))\big) \right\|_{X(\Pi_a^-)} \sim \left\| f_\alpha\big(\psi_k(.)\big) \right\|_{X(\Pi_a^+)} \sim \left\| f_{\alpha(.)} \right\|_{X(\Pi_k^+)}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left\| \partial^\alpha F(.) \right\|_{X(\Pi_a^-)} \leq c \sum_{k=1}^{m+1} \left\| f_\alpha(.) \right\|_{X(\Pi_k^+)} \leq mc \left\| f_\alpha \right\|_{X(\Pi_a^+)} = c \left\| \partial^\alpha f \right\|_{X(\Pi_a^+)}$$

alınır. Dolayısıyla bir sonraki lemma doğrudur.

Lemma 3.2. *$X(K)$ BFU için Özellik (φ) sağlansın ve $\Pi_a \subset K : \Pi_a = \Pi_a^+ \cup \Pi_a^-$ bir paralelkenar olsun. Öyleyse, $\theta \in \left[W_X^m(\Pi_a^+); W_X^m(\Pi_a) \right] \ : \ \theta f\big|_{\Pi_a^+} = f, \forall f \in W_X^m(\Pi_a^+)$ operatörü vardır.*

Genel durumda, genişleme teoreminin varlığı için aşağıdaki lemmanın verilmesi gereklidir.

Lemma 3.3. *$\overline{\Omega} \subset K$ domaninin $\forall \xi \in \partial\Omega$ noktası için $r = r(\xi) > 0$ yarıçaplı $B_r(\xi)$ yuvarı vardır(genelliği kaybetmeden $B_r(\xi) \subset K$ olarak kabul edilsin.), öyle ki $\big(\theta_\xi f\big|_{\Omega_r(\xi)}\big)(x) = f(x)$ ve $x \in \Omega_r(\xi)$, $\Omega_r(\xi) = \Omega \cap B_r(\xi)$ şartını sağlayan $\exists \theta_\xi \in \left[W_X^m(\Omega); W_X^m(B_r(\xi)) \right]$ olacak şekilde bir θ_ξ operatörü vardır. Buradan, $\forall \rho > 0$ için $\Omega_\rho = \cup_{x \in \Omega} B_\rho(x)$ domainine göre $\theta \in \left[W_X^m(\Omega); \overset{0}{W}{}_X^m(\Omega_\rho) \right]$: $\theta f\big|_\Omega = f$ ve $\big(\theta f\big)(x) = 0$, $\forall x \in \Omega_\rho \backslash \Omega_{\rho/2}$ şartlarını sağlayan bir θ genişleme operatörü vardır.*

Bu iki lemmadan yararlanarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.2 (Genişleme Teoremi)**.** *Kabul edelim ki, $X(K)$ BFU Özellik (φ) 'yi sağlasın. $\Omega \subset \Omega' \subset K : \partial\Omega \in C^{(m)}$ şartlarına sahip bir domain olsun. Öyleyse,*

$\theta \in \left[W_X^m(\Omega); W_{X;\theta}^m(\Omega')\right]$ *olacak şekilde bir genişleme operatörü vardır. Yani,* $\theta \in \left[W_X^m(\Omega); W_{X;\theta}^m(\Omega')\right]$ *genişleme operatörü vardır ve aşağıdaki şartları sağlar.*

i) $(\theta f)|_\Omega = f, \forall f \in W_X^m(\Omega)$,

ii) $\forall f \in W_X^m(\Omega) \Rightarrow \overline{supp(\theta f)} \subset \Omega'$.

3.2 İz Kavramı

Kabul edelim ki, $K = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_k < 1, k = \overline{1,n}\} \subset \mathbb{R}^n$ bir küptür ve onun $i-$inci izi $K_i = \{x \in K : x_i = 0\}, i = \overline{1,n}$ dir. $\mathscr{F}(K)$ ile K 'da Lebesgue anlamında ölçülebilen fonksiyonların kümesi gösterilsin. Eğer $f(x_i^{'}; x_i) = C_{x_i^{'}}$ h.h.y $x_i \in (0,1)$ ise $f \in \mathscr{F}(K)$ fonksiyonu x_i değişkenine bağımlı değildir. Burada $C_{x_i^{'}}$, x_i değişkenine bağlı değildir ve $x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_i^{'}; x_i)$, $x_i^{'} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ dir. Her bir $g_k \in \mathscr{F}(K_i)$ fonksiyonu ile özdeşleştirilecektir, öyle ki $g_k(x_i^{'}; x_i) = g(x_i^{'})$, $\forall x \in K$ 'dır.

$E \in \mathscr{L}_K$ kümesi için E_i ile E 'nin K_i üzerine ortogonal projeksiyonu gösterilsin. $E_i \in K$ ve

$$m(E) = \int_{E_i} |I_{x_i^{'}}| \, dm_{(n-1)} \, , \quad I_{x_i^{'}} = \left\{x_i \in \mathbb{R} : (x_i^{'}; x_i) \in E\right\}.$$

olduğu açıktır. Buradan, $m(E) > 0 \Leftrightarrow m_{(n-1)}(E_i) > 0$ olduğu görülür.

Kabul edelim ki, $M \in \mathscr{L}_{K_i}$ keyfi bir kümedir ve

$$M_K = \left\{(x_i^{'}; x_i) \in K : x_i^{'} \in M\right\}. \tag{3.1}$$

dır. Dolayısıyla, aşağıdaki lemma sağlanır.

Lemma 3.4. *Kabul edelim ki,* $M \in \mathscr{L}_{K_i}$ *ve* M_K *kümesi (3.1) ifadesi ile tanımlansın. Öyleyse,* $m(M_K) > 0 \Leftrightarrow m_{(n-1)}(M) > 0$ *sağlanır.*

$X(K_i)$ BFU, $(K_i; m_{(n-1)})$ ölçü uzayı üzerinde

$$\left\|g\right\|_{X(K_i)} = \left\|g_k\right\|_{X_K}$$

normu ile tanımlansın. Burada, $m_{(n-1)}$, $\mathbb{R}^{n-1}$ uzayında Lebesgue ölçüsüdür. Lemma 3.4 den yararlanarak $\|.\|_{X(K_i)}$ ifadesinin bir fonksiyonel normu olduğu gösterilebilir. $Tg = g_k, \forall g \in X(K_i)$ olduğu kabul edilsin. $T \in \left[X(K_i); X(K)\right]$

operatörü izometrik dönüşümdür. Yani, $\|Tg\|_{X(K)} = \|g\|_{X(K_i)}, \forall g \in X(K_i)$ dir. Aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 3.1. *$X(K_i)$ uzayı $(K_i; \mathscr{L}_{K_i}; m_{(n-1)})$ ölçü uzayı üzerinde BFU 'dur ve $X(K_i) \subset X(K)$ izometrik kapsaması doğrudur.*

İleriki adımlar için kullanılacak bazı gösterimler aşağıda verilmiştir. $I \subset \{1; \ldots; n\}$ alt kümesi için $I^c = \{1; \ldots; n\} \setminus I$ kabul edilsin. Buna uygun olarak,

$$K_I = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : 0 < x_k < 1, \forall k \in I \ \& \ x_i = 0, \forall i \in I^c\}$$

ile gösterilsin ve $K_I^c =: I_{I^c}$ olsun. $|I| = cardI$ olarak kabul edilsin ve m_I, $\mathbb{R}^n$ 'de Lebesgue ölçüsü olsun. Lemma 3.4 'ten yararlanarak kolaylıkla $(K_I; \mathscr{L}_{K_I}; m_{|I|})$ ölçü uzayı üzerinde $X(K_I)$ BFU tanımlansın ve bu uzayın normu $\|.\|_{X(K_I)}$ ile gösterilsin. Diğer yandan, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ için $K_{(k)} = K_{\{k\}}$ ve $K_{(k)}^c = K_{\{k\}^c}$ olsun. $X(K)$ BFU aşağıdaki özelliğe sahip olsun.

Özellik (α) $\exists c > 0$:

$$\left\| \int_0^1 |f(x_i'; x_i)| dx_i \right\|_{X(K_i)} \leq c\|f\|_{X(K)}, \forall f \in X(K), \forall i = \overline{1, n}.$$

Φ_{ij} ile bütün $\varphi : \overline{K}_i \leftrightarrow \overline{K}_j$ diffeomorfizmler kümesi (yani hem φ hem de φ^{-1} sürekli differansiyellenebilirdir) gösterilsin.

Tanım 3.2. Eğer $\forall i; j \in \{1; \ldots; n\}$ ve $\forall \varphi \in \Phi_{ij}$ için $\|f\|_{X(K_{(j)})} \sim \|f \circ \varphi\|_{X(K_{(i)})}$ olursa $X(K)$ uzayına homojen BFU denir(kısaca h-BFU ile gösterilecektir).

Kabul edelim ki, $\Omega \subset\subset K$ (yani $\overline{\Omega} \subset K$) : $\partial\Omega \in C^{(m)}$ herhangi bir domain olsun ve $X(K)$ BFU, 3.1 Genişleme Teoremi başlığında verilen özellik (φ)'yi sağlasın. $\forall f \in W_X^m(\Omega)$ fonksiyonu alınsın. Buradan, $f \in W_1^m(\Omega)$ olduğu açıktır.

Klasik sonuçlara göre f fonksiyonunun $\forall S \subset \overline{\Omega} : S \in C^{(m)}$ ile verilen $(n-1)$ boyutlu yüzeyi üzerinde $f_S \in L_1(S; d\sigma)$ olacak şekilde izi vardır. Buradan, $f \to f_S$ dönüşümü doğrudur. f_S fonksiyonuna $f \in W_X^m(\Omega)$ fonksiyonunun S yüzeyi(manifoldu) üzerinde izi denir. Bir f fonksiyonunun izi $\Gamma_S f$ ile gösterilecektir.

3.2.1 İz Operatörü

Γ_S operatörüne iz operatörü denir ve $W_X^m(\Omega) \to L_1(S; d\sigma)$ ile lineer bir operatördür. $(S; \mathscr{L}_S; d\sigma)$ ölçü uzayı üzerinde tanımlı izleri içeren $X(S)$ BFU

klasik hale uygun olarak tanımlanacaktır. Kabul edelim ki, S 'nin bir küçük parçası olarak alınan $\widetilde{S} \subset S$ manifoldunu, $\{x_i = 0\}$ hiper düzleminde belirli $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ domainine diffeomorfizm dönüşümü vardır. Bu domanin üzerinde yüzeyin $\widetilde{S}$ parçasının aşikar gösterilişi

$$x_n = \varphi(x^{'}),\ \forall x^{'} \in \overline{D},\ \varphi \in C^{(1)}(\overline{D}),\ (x^{'} = (x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

şeklindedir. Dolayısıyla, 3.1 teoreminden yararlanarak g fonksiyonunun $\widetilde{S}$ üzerinde $X(\widetilde{S})$ normu

$$\|g\|_{X(\widetilde{S})} = \|g \circ \varphi\|_{X(D)} \tag{3.2}$$

ile tanımlansın. Burada,

$$\big\|f\big\|_{X(D)} = \big\|f\chi_D\big\|_{X(K_n)}$$

şeklindedir. S manifoldunu sonlu sayıda $\widetilde{S}$ parçaları ile örtmek mümkündür. Bu şekildeki bütün örtüler sistemi τ_S ile gösterilsin. $\{S_k\} \in \tau_S$, S manifoldunun herhangi bir örtüsü olsun. Öyleyse $(S; \mathscr{L}_S; d\sigma)$ ölçü uzayı üzerinde $X(S; d\sigma)$ BFU

$$\big\|g\big\|_{X(S)} = \sum_k \big\|g\big\|_{X(S_k)}, \tag{3.3}$$

normu ile tanımlanır. $X(K)$ BFU 'nda S manifoldunun keyfi iki $\{S_k^i\} \in \tau_S,\ i = 1, 2$ örtüsü için

$$\big\|g\big\|_{X(S)}^{(i)} = \sum_k \big\|g\big\|_{X(S_k^{(i)})},\ i = 1, 2$$

normları denktir, yani $\|.\|_{X(S)}^{(1)} \sim \|.\|_{X(S)}^{(2)}$ dir. Bu sonuçların doğruluğu direkt olarak (3.2) ve (3.3) ifadelerinden görülebilir. Bu da (3.3) ile $\|.\|_{X(S)}$ normunun tanımlanmasının doğru olduğunu gösterir. Buradan aşağıdaki önermenin doğru olduğu söylenir.

Önerme 3.2. *Kabul edelim ki, $X(K)$ h-BFU 'dur, $\Omega \subset\subset K : \Omega \in C^{(1)}$ herhangi bir domaindir ve $S \subset \overline{\Omega} : S \in C^{(1)}$, $(n-1)$ boyutlu manifolddur. Öyleyse S 'nin keyfi $\{S_k\} \in \tau_S$ sonlu örtüsü $(S; \mathscr{L}_{\mathscr{S}}; d\sigma)$ üzerinde (3.3) normu ile tanımlanan $X(S)$ BFU üretir. Buna ek olarak, $X(S) \subset L_1(S; d\sigma)$ sürekli gömmesi doğrudur.*

İspat. Önermenin ilk kısmı açıktır. Bu yüzden, $X(S) \subset L_1(S; d\sigma)$ kısmı ispatlanacaktır. Öncelikle, $\widetilde{S} \subset S$ parçası için $X(\widetilde{S}) \subset L_1(\widetilde{S}; d\sigma)$ sürekli gömmesi gösterilecektir. Bu gösterim, direkt olarak (3.2) 'den alınır. Yani

$$\big\|g\big\|_{L_1(\widetilde{S}; d\sigma)} = \int_{\widetilde{S}} \big|g(\xi)\big| d\sigma_\xi = \int_D \big|g(\varphi(x'))\big|$$

$$\big|J_p(x')\big|dx' \leq C\int_D \big|g(\varphi(x'))\big|dx' \leq$$

olur ve $X(K_n)$ bir BFU olduğundan

$$\leq C\|g\circ\varphi\|_{X(D)} = C\|g\|_{X(\widetilde{S})}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\|.\|_{X(S)}$ normundan yararlanarak $\|f_S\|_{X(S)}$ göz önüne alınsın ve $X(\Omega)$ uzayının Özellik (α) 'yı sağladığı varsayılsın. Öyleyse, Teorem 3.2 'ye göre $f \in W_X^m(\Omega)$ fonksiyonunun $W_{X;0}^m(K)$ uzayına genişlemesi vardır ve $f(.)$ ile gösterilecektir. $W_{X;0}^m(K) \subset \overset{0}{W}{}_1^m(K)$ sürekli gömmesinin sağlandığı açıktır. Dolayısıyla, $f\big|_{\partial K} = 0$ olur ve sonuç olarak aşağıdakiler doğrudur.

$$f(x';\varphi(x')) = \int_0^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x';\xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n \ , \ \forall x' \in D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big\|f(x';\varphi(x'))\big\|_{X(\widetilde{S})} = \left\| \int_0^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x';\xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n \right\|_{X(D)} \leq \left\| \int_0^1 \left| \frac{\partial f(x';\xi_n)}{\partial \xi_n} \right| d\xi_n \right\|_{X(D)}$$

Kabul edelim ki, $X(K)$ BFU Özellik (α) 'yı sağlasın. Öyleyse, yukarıdaki eşitsizlikten yararlanarak

$$\big\|f(x';\varphi(x'))\big\|_{X(\widetilde{S})} \leq C\big\|\partial_n f(x';x_n)\big\|_{X(K)} \leq C\big\|f\big\|_{W_X^1}(K) \ , \ \forall f \in W_X^1(\Omega)$$

elde edilir. S manifoldunun sonlu sayıda $\widetilde{S}$ tipli manifoldlarla örtüldüğü göz önüne alınsın. Öyleyse,

$$\big\|f_S\big\|_{X(S)} \leq C\big\|f\big\|_{W_X^1(K)} \ , \ \forall f \in W_X^1(\Omega)$$

olduğu görülür. Burada, Teorem 3.2 uygulanırsa

$$\big\|f_S\big\|_{X(S)} \leq C\big\|f\big\|_{W_X^1(\Omega)} \ , \ \forall f \in W_X^1(\Omega)$$

alınır. ■

Dolayısıyla, aşağıda iz ile ilgili verilen teorem doğrudur.

Teorem 3.3. *$X(K)$ h-BFU için Özellik (φ) ve Özellik (α) sağlansın. $\Omega \subset\subset K$: $\partial\Omega \in C^{(m)}$ herhangi bir domain olsun. Kabul edelim ki, $S \subset \overline{\Omega}$: $S \in C^{(m)}$, $(n-1)$ boyutlu manifolddur ve $X(S)$ Önerme 3.2 'de belirtilen şekilde*

$(S;\mathscr{L}_S;d\sigma)$ *üzerinde bir BFU 'dur. Öyleyse,* $\forall f \in W_X^1(\Omega)$ *fonksiyonunun* S *üzerinde* $f_S = \Gamma_S f\ ,\ f_S \in X(S)$ *izi vardır ve* $\Gamma_S \in [W_X^1(\Omega); X(S)]$ *olur.*

Yorum 3.1. Γ_S iz operatörü için $\Gamma_S \in \left[W_X^1(\Omega); L_1(S;d\sigma)\right]$ olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer bir ifade ile

$$\left\|f_S\right\|_{L_1(S;d\sigma)} \leq C\left\|f\right\|_{W_X^1(\Omega)}\ ,\ \ f \in W_X^1(\Omega)$$

eşitsizliği doğrudur. Teorem 3.3 'den ise

$$\left\|f_S\right\|_{X(S)} \leq C\left\|f\right\|_{W_X^1(\Omega)}\ ,\ \ f \in W_X^1(\Omega) \tag{3.4}$$

şeklinde daha güçlü eşitsizlik alınır. Buradan, Teorem 3.3 ile ifade edilenin klasik sonuçlardan alınamayacağı görülür.

3.2.2 İz Uzayı

Şimdi ise $\Gamma_S(W_X^1(\Omega))$ iz uzayının bir karakterizasyonu verilecektir. Bunun için öncelikle Γ_S operatöründen yararlanarak $W_X^1(\Omega)$ uzayının aşağıda verilen $\overset{0}{W}{}_X^1(\Omega)$ alt uzayı tanımlanacaktır.

$$\overset{0}{W}{}_X^1(\Omega;S) = \left\{u \in W_X^1(\Omega)\ :\ \Gamma_S u\ =\ 0\ \right\}.$$

$\overset{0}{W}{}_X^1(\Omega;S)$ uzayının alt uzay olduğunu göstermek için ($W_X^1(\Omega)$ 'nda) kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki, $W_X^1(\Omega)$ uzayında $\{u_n\} \subset \overset{0}{W}{}_X^1(\Omega;S)\ :\ u_n \to u_0\ ,\ n \to \infty\ ,$ dır. $\Gamma_S \in \left[W_X^1(\Omega); X(S)\right]$ olduğundan $\Gamma_S u_n = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$ olduğu açıktır. $\Gamma_S u_0 = 0$ olduğundan $u_0 \in \overset{0}{W}{}_X^1(\Omega)$ 'dır ve buradan $\overset{0}{W}{}_X^1(\Omega;S)$ lineer alt uzayının $W_X^1(\Omega)$ 'nda kapalı olduğu görülür.

Aşağıda verilen bölüm uzayı göz önüne alınsın.

$$\mathscr{F}_X^1(\Omega;S) = W_X^1(\Omega)\Big|_{\overset{0}{W}{}_X^1(\Omega;S)}\ .$$

Bu uzayda bölüm normu aşağıdaki şekildedir.

$$\|F\|_{\mathscr{F}_X^1(\Omega;S)} = \inf_{f\in F}\left\|f\right\|_{W_X^1(\Omega)}\ .$$

Burada $F \in \mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$ bir bölüm sınıfıdır.

Aynı zamanda $W_X^1(\Omega)$ uzayının Γ_S görüntüsü $W_X^1(S)$ ile gösterilsin. Diğer bir ifade ile $W_X^1(S) = \Gamma_S\big(W_X^1(\Omega)\big)$. Bir sonraki lemma doğrudur.

Lemma 3.5. *Teorem 3.3 'ün tüm şartlarının sağlandığı kabul edilsin. Öyleyse, $W_X^1(S)$ ve $\mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$ lineer uzayları izomorfdurlar.*

İspat. $u \in \overset{0}{W}{}_X^1(\Omega;S)$ iken $\Gamma_S u = 0$ olduğu açıktır. $F \in \mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$ keyfi bir bölüm sınıfı olsun ve $f_1; f_2 \in \mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$ alınsın. $f = f_1 - f_2$ olsun. Buradan $f \in \overset{0}{W}{}_X^1(\Omega;S)$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $\Gamma_S f = 0$ ancak ve ancak $\Gamma_S f_1 = \Gamma_S f_2$ dır. Buradan, $F_S = \Gamma_S(F)$ ifadesi $\forall g \in F$ için tek türlü karşılık gelen $\Gamma_S(g) \in W_X^1(S)$ fonksiyonunu belirler ve bu dönüşüm γ_S ile gösterilsin, öyle ki $\gamma_S : \overset{0}{W}{}_X^1(\Omega;S) \to W_X^1(S)$ dır. γ_S operatörünün lineer bir operatör olduğu açıktır. $Ker\gamma_S = \{0\}$ olduğunu göstermek için $\gamma_S F = 0,\ F \in \mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$ olduğu kabul edilsin. Öyleyse, F bölüm sınıfı sıfır elemanını içerir ve buradan F sınıfı $\mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$ sınıfının elemanı olur. Dolayısıyla $Ker\gamma_S = \{0\}$ dır. Diğer yandan, $R(\gamma_S) = W_X^1(S)$ olduğunu göstermek için $f \in W_X^1(S)$ keyfi elemanı alınsın. Buradan, $\exists\ u \in W_X^1(\Omega)$ vardır; öyle ki $\Gamma_S u = f$ olur. $F_u \in \mathscr{F}_X^1(\Omega;S),\ u \in F_u$ alınsın. Öyleyse, $\gamma_S F_u = \Gamma_S u = f$ iken $R(\gamma_S) = W_X^1(S)$ olduğu görülür. ■

Bu lemmadan yararlanarak $W_X^1(S)$ uzayı için aşağıdaki norm verilsin.

$$\|f\|_{W_X^1(S)} = \|\gamma_S^{-1} f\|_{\mathscr{F}_X^1(\Omega;S)}\ ,\ \forall f \in W_X^1(S). \tag{3.5}$$

$W_X^1(S)$ uzayının (3.5) ile verilen norma göre bir Banach uzayı olduğu gösterilecektir. $\{f_n\} \subset W_X^1(S)$ bir Cauchy dizisi olsun. $u_n = \gamma_S^{-1} f_n$ olduğu kabul edilsin. Buradan, $\{u_n\}$ dizisi $\mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$ bölüm uzayında Cauchy dizisi olur, yani $\exists\, u \in \mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$, $u_n \to u$, $n \to \infty$, olur. $f = \gamma_S u$ olsun. Buradan, $f \in W_X^1(S)$ ve $f_n \to f$, $n \to \infty$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $W_X^1(S)$ bir Banach uzayıdır.

$f \in W_X^1(\Omega)$ ve $f_S = \Gamma_S f$ olduğu kabul edilsin. Buradan, $f_S \in W_X^1(S)$ olduğu görülür. f elemanını içeren $F \in \mathscr{F}_X^1(\Omega;S)$ sınıfı F_f ile gösterilsin. $\forall g \in F_f$ için (3.4) eşitsizliği doğrudur.

$$\|f_S\|_{X(S)} \le C\|g\|_{W_X^1(\Omega)}\ ,\ \forall g \in F_f.$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında g 'ye göre F_f üzerinde infimum alınırsa,

$$\|f_S\|_{X(S)} \le C\|f\|_{W_X^1(S)}$$

elde edilir. Buradan $W_X^1(S) \subset X(S)$ sürekli gömmesinin doğru olduğu görülür. Sonuç olarak, aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.4. *Teorem 3.3 'ün bütün şartlarının sağlandığı kabul edilsin. Öyleyse,* $W_X^1(S)$ *iz uzayı bir Banach uzayıdır ve* $W_X^1(S) \subset X(S)$ *sürekli gömmesi ile* $\Gamma_S \in \left[W_X^1(\Omega); W_X^1(S)\right]$ *doğrudur.*

İspat. $\Gamma_S \in [W_X^1(\Omega); W_X^1(S)]$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall f \in W_X^1(\Omega)$ alınsın ve $f \in F_f \in \mathscr{F}_X^1(\Omega; S)$ olsun. Öyleyse, $\Gamma_S f = \gamma_S F_f$ olduğu aşikardır. Buradan,

$$\left\|\Gamma_S f\right\|_{W_X^1(S)} = \left\|\gamma_S^{-1}(\Gamma_S f)\right\|_{\mathscr{F}_X^1(\Omega;S)} =$$

$$= \left\|F_f\right\|_{\mathscr{F}_X^1(\Omega;S)} = \inf_{g \in F_f} \left\|g\right\|_{W_X^1(\Omega)} \leq \left\|f\right\|_{W_X^1}$$

elde edilir. ■

Yorum 3.2. Özel durumda S manifoldu, $S = \partial\Omega$ şeklinde alınabilir. Bu durumda da, S manifolduna ait bütün sonuçlar benzer şekilde ifade edilebilir. $S = \partial\Omega$ için $\overset{0}{W}{}_X^1(\Omega; \partial\Omega) = \overset{0}{W}{}_X^1(\Omega)$; $\mathscr{F}_X^1(\Omega; \partial\Omega) = \mathscr{F}_X^1(\Omega)$ gösterilişi kabul edilecektir.

3.2.3 $X(\Omega)$ Uzayı için Özel Durumlar

Bu başlıkta, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı domaini üzerinde n-boyutlu m Lebesgue ölçüsüne sahip $(\Omega; L_\Omega; m)$ ölçülebilir uzay üzerinde tanımlanan $X(\Omega)$ BFU için bazı özel durumlar verilecektir.

3.2.3.1 $X(K) = L_p(K)$, $1 \leq p < \infty$, Lebesgue uzayı

$L_p(K)$ Lebesgue uzayı

$$\left\|f\right\|_{L_p(K)} = \left(\int_K |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile tanımlanır. $S \subset \overline{\Omega} \subset K$: $S \in C^{(1)}$ yüzeyi $(n-1)$ boyutlu bir manifold olsun. Teorem 3.3 'te belirtildiği şekilde $S_1 \subset S$ bir basit parça ve $\varphi : D \leftrightarrow S_1$ bir dönüşüm olsun. Genelliği kaybetmeden, S_1 parçasının denklemi $x_n = \varphi(x')$, $\forall x' \in \overline{D}$, $D \subset K_{(n)} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ olarak alınsın. Buradan, $\varphi \in C^{(1)}(\overline{D})$ ve $\varphi^{-1} \in C^{(1)}(\overline{S}_1)$ olur ve

$$\left\|g\right\|_{X(S_1)} = \left\|g \circ \varphi\right\|_{X(D)} \Rightarrow \left\|g\right\|_{X(S_1)} = \left\|(g \circ \varphi)\chi_D\right\|_{X\left(K_{(n)}\right)}$$

elde edilir.

$L_p(K)$ normundan yararlanarak $\|.\|_{X(K_n)}$ normu için bir ifade bulunmalıdır. $\forall f \in \mathscr{F}(K_n)$ için

$$f_k(x';x_n) = f(x')\ ,\ \forall (x';x_n) \in K$$

olur. Buradan,

$$\big\|f\big\|_{X(K_n)} = \big\|f_K\big\|_{X(K)} = \left(\int_K \big|f_K\big|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{K_n} \big|f\big|^p dx'\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.6}$$

elde edilir. $d\sigma$, S_1 'in bir alan elemanı olmak üzere $d\sigma = \sqrt{1+\varphi'^2_{x_1}+\cdots+\varphi'^2_{x_{n-1}}}dx'$ dır. $c > 0$, $x' \in \overline{D}$ 'den bağımsız bir sabit olmak üzere $\overline{D}$ üzerinde $dx' \leq d\sigma \leq cdx'$ olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\big\|g\big\|^p_{X(S_1)} &= \big\|(g\circ\varphi)\chi_D\big\|^p_{L_p(K_n)} = \int_D \big|g\big(\varphi(x')\big)\big|^p dx' \\
&\sim \int_D \big|g\big(\varphi(x')\big)\big|^p \sqrt{1+\varphi'^2_{x_1}+\cdots+\varphi'^2_{x_{n-1}}}dx' \\
&= \int_{S_1} \big|g\big|^p d\sigma \Rightarrow \big\|g\big\|_{X(S_1)} \sim \big\|g\big\|_{L_p(S_1;d\sigma)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $L_p(S_1;d\sigma)$ uzayı S_1 üzerinde ölçülebilir fonksiyonların

$$\|g\|_{L_p(S_1;d\sigma)} = \left(\int_{S_1} |g|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile tanımlanan Lebesgue uzayıdır. Sonuç olarak, $X(S)$ uzayının $L_p(S;d\sigma)$ uzayı ile aynı olduğu görülür. $L_p(K)$ uzayı için Özellik (α) 'nın sağlandığı gösterilebilir. Gerçekten de,

$$\left\|\int_0^1 \big|f(x'_i;x_i)\big|dx_i\right\|^p_{L_p(K_i)} \leq \int_{K_i}\int_0^1 \big|f(x'_i;x_i)\big|^p dx_i dx'_i = \int_K \big|f\big|^p dx$$

olduğu görülür. Böylelikle, $L_p(K)$ homojen uzaydır ve Teorem 3.3 'ten yararlanarak aşağıdaki sonuç alınır.

Teorem 3.5. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir domaindir ve $S \subset \overline{\Omega} : S \in C^{(1)}$ -$(n-1)$ boyutlu manifolddur. Öyleyse, $W^1_p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$, uzayına uygun $W^1_p(S;d\sigma)$ iz uzayı $L_p(S;d\sigma)$ uzayına sürekli gömülür ve $\Gamma_S \in [W^1_p(\Omega);W^1_p(S;d\sigma)]$ doğrudur.*

3.2.3.2 $X(K) = L_{p)}(K)$ grand Lebesgue Uzayı

$L_{p)}(K)$, $1 < p < +\infty$, uzayı K üzerinde ölçülebilir fonksiyonların

$$\|f\|_{L_{p)}(K)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_K |f|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

normuna sahip oldukları bir Banach uzayıdır. Lebesgue uzayına benzer olarak, $\forall g \in \mathscr{F}(K_i)$, $i = \overline{1,n}$, için

$$\|g\|_{X(K_i)} = \|g_K\|_{L_{p)}(K)} = \|g\|_{L_{p)}(K_i)}$$

olur. $S \subset \overline{\Omega}$, $(n-1)$ boyutlu düzgün manifoldu için

$$\|f\|_{L_{p)}(S;d\sigma)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_S |f|^{p-\varepsilon} d\sigma \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \tag{3.7}$$

olduğu kabul edilsin. S üzerinde ölçülebilir fonksiyonların (3.7) şeklinde verilen norma göre Banach uzayı $L_{p)}(S;d\sigma)$ ile gösterilsin. Lebesgue uzayına benzer şekilde $X(S)$ uzayı $L_{p)}(S;d\sigma)$ uzayı ile aynıdır. Özellik (α) 'nın sağlandığını göstermek için $\forall \varepsilon \in (0, p-1)$ alınsın ve $p_\varepsilon = p - \varepsilon$ kabul edilsin. Öyleyse,

$$\varepsilon \int_{K_i} \left(\int_0^1 \left| f(x_i'; x_i) \right| dx_i \right)^{p_\varepsilon} dx_i' \le \int_{K_i} \int_0^1 \left| f(x_i'; x_i) \right|^{p_\varepsilon} dx_i dx_i' = \int_K |f|^{p_\varepsilon} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| \int_0^1 \left| f(x_i'; x_i) \right| dx_i \right\|_{L_{p)}(K_i)} \le \|f\|_{L_{p)}(K)}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Özellik (α) doğrudur.

$L_{p)}(K)$ homojen bir uzay olduğundan Teorem 3.3 'ten aşağıdaki sonuç alınır.

Sonuç 3.2. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir domain olsun. $S \subset \overline{\Omega} : S \in C^{(1)}$ yüzeyi $(n-1)$ boyutlu bir manifold olsun. Öyleyse, $W_{p)}^1(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, grand Sobolev uzayına uygun $W_{p)}^1(S;d\sigma)$ iz uzayı $L_{p)}(S;d\sigma)$ grand Lebesgue uzayına sürekli gömülür ve $\Gamma_S \in \left[W_{p)}^1(\Omega); W_{p)}^1(S;d\sigma) \right]$ doğrudur.*

3.2.3.3 $X(K) = L_{p,\lambda}(K)$ Morrey Uzayı

$L_{p,\lambda}(K)$, $1 \le p < +\infty$, $0 < \lambda < n$, ölçülebilir fonksiyonların

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(K)} = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^{n-\lambda}} \int_{K_r} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile tanımlanan Banach uzayıdır. Burada, $K_r = K \cap B_r$, olmak üzere B_r , $\mathbb{R}^n$ 'de r yarıçaplı yuvardır.

$\Omega \subset\subset K$ bir domain ve $S \subset \overline{\Omega} : S \in C^{(1)}$ yüzeyi $(n-1)$ boyutlu manifold olsun. Bu manifold üzerinde $d\sigma$ ölçüsüne göre ölçülebilir fonksiyonların

$$\left\|g\right\|_{L_{q,\mu}} = \sup_{0<r<d\Omega} \left(\frac{1}{r^{n-1-\mu}} \int_{S_r} \left|f\right|^q d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}$$

normu ile tanımlanan $L_{q,\mu}(S)$, $1 \leq q < +\infty$, $0 < \mu < n$, Morrey tipli uzayı olsun. Burada, $S_r = S \cap B_r$ olmak üzere B_r , $\mathbb{R}^n$ 'de r yarıçaplı yuvardır.

Bu durumda, $X(\Omega) = L_{p,\lambda}(S)$ olduğu gösterilecektir. Önceki uzaylarda olduğu gibi benzer şekilde $S_1 \subset S$ basit bir alan elemanı ve $D \subset \mathbb{R}^n$ bir domain olmak üzere $\varphi : \overline{S_1} \leftrightarrow \overline{D}$ uygun bir diffeomorfizm olsun. Dolayısıyla, $\left\|g\right\|_{X(S_1)} = \left\|(g \circ \varphi)\chi_D\right\|_{X(K_i)}$ olduğu görülür. Şimdi ise buna uygun $\|.\|_{X(K_i)}$ normu ifade edilecektir.

Bir kenarının uzunluğu d olan, kenarları koordinat eksenlerine paralel, n-boyutlu, keyfi bir Π_d kübü alınsın. Diğer taraftan,

$$\left\|f\right\|^{(1)}_{L_{p,\lambda}(K)} = \sup_{d>0} \left(\frac{1}{d^{n-1}} \int_{K_d} \left|f\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu göz önüne alınsın. Burada, $K_d = K \cap \Pi_d$ dir. Görüldüğü üzere, $\|.\|_{L_{p,\lambda}(K)}$ ve $\|.\|^{(1)}_{L_{p,\lambda}(K)}$ normları denktir. Dolayısıyla, sonraki adımların kolaylığı için $\|.\|^{(1)}_{L_{p,\lambda}(K)}$ normu kullanılacaktır. $\forall f \in \mathscr{F}(K_i)$ alınsın. Buradan,

$$\left\|f\right\|_{X(K_i)} = \left\|f_K\right\|_{X(K)} \sim \sup_{d>0} \left(\frac{1}{d^{n-\lambda}} \int_{K_d} \left|f_K\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

Π_d kübünün $\{x_i = 0\}$ düzlemi üzerinde izdüşümü Π'_d ile gösterilsin. Burada, $I_d(i)$, x_i koordinat ekseninde uzunluğu d 'den küçük ya da eşit olan bir aralık olmak üzere $K_d = K_d \times I_d(i)$ olur ve $K'_d = K' \cap \Pi'_d$, $K' = K \cap \{x_i = 0\}$ yazılır. Böylelikle,

$$\int_{K_d} \left|f_K\right|^p dx = \int_{K'_d} \int_{I_d(i)} \left|f_K\right|^p dx'_i dx_i \leq d \int_{K'_d} \left|f\right|^p dx'_i$$

elde edilir. Buradan,

$$\left\|f\right\|_{X(K_i)} \leq \left\|f\right\|^{(1)}_{L_{p,\lambda}(K_i)}$$

olduğu görülür.

$I_d(i)$ aralıklarının uzunlukları $|I_d(i)| = d$ olacak şekilde Π_d küpleri göz önüne alınsın. Öyleyse,

$$\|f\|_{X(K_i)} \sim \sup_{d>0} \left(\frac{1}{d^{n-\lambda}} \int_{K_d} |f_K|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq \sup_{\Pi_d : |I_d(i)|=d} \left(\frac{1}{d^{n-\lambda}} \int_{K_d} |f_K|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{K'_d} \left(\frac{1}{d^{n-1-\lambda}} \int_{K'_d} |f|^p dx'_i \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|^{(1)}_{L_{p,\lambda}(K_i)}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$\|f\|_{X(K_i)} \sim \|f\|^{(1)}_{L_{p,\lambda}(K_i)} \tag{3.8}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|g\|_{X(S_1)} = \|(g \circ \varphi)\chi_D\|_{X(K_i)} \sim \|(g \circ \varphi)\chi_D\|^{(1)}_{L_{p,\lambda}(K_i)}$$

olur. Diğer taraftan, D üzerinde $dx' \leq d\sigma \leq cdx'$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$\|g\|_{X(S_1)} \sim \|g\|_{L_{p,\lambda}(S_1)} = \sup_{d>0} \left(\frac{1}{d^{n-1-\lambda}} \int_{S_d} |g|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Burada, $S_d = S_1 \cap \Pi_d$ dir. Böylece, aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 3.6. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir domain ve $S \subset \overline{\Omega} : S \in C^{(1)}$ yüzeyi $(n-1)$ boyutlu bir manifold olsun. Öyleyse, $W^1_{p,\lambda}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, $0 < \lambda < n$, Morrey-Sobolev uzayına uygun $W^1_{p,\lambda}(S; d\sigma)$ iz uzayı $L_{p,\lambda}(S)$ Morrey tipli uzaya sürekli gömülür ve $\Gamma_S \in [W^1_{p,\lambda}(\Omega); W^1_{p,\lambda}(S; d\sigma)]$ olur.*

Gerçekten de, bu durumda Özellik (α) 'nın doğruluğu (3.1) ifadesinden görülür. Öyle ki,

$$\left\| \int_0^1 |f(x'_i; x_i)| dx_i \right\|_{X(K_i)} \leq c \sup_{d>0} \left(\frac{1}{d^{n-1-\lambda}} \int_{K'_d} \left| \int_0^1 |f(x'_i; x_i)| dx_i \right|^p dx'_i \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq c \sup_{d>0} \left(\frac{1}{d^{n-1-\lambda}} \int_{K'_d} \int_0^1 \left| f(x'_i; x_i) \right|^p dx_i dx'_i \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \sup_{d>0} \left(\frac{d}{d^{n-\lambda} \int_{K_d}} \left| f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Genelliği kaybetmeden, d_K köşegeni olmak üzere $0 < d \leq d_K$ alınsın. Öyleyse, buradan Özellik (α) 'nın doğru olduğu görülür.

Bir sonraki aşama olarak, $X(S) \sim L_{p,\lambda}(S)$ olduğu gösterilecektir. $\{S_K\}_{k=\overline{1,r}} \in \tau_S$ parçası S manifoldunun $X(S)$ uzayının tanımına uygun herhangi bir örtüsü olsun. $\forall f \in L_{p,\lambda}(S)$ için $\left|f\right| \leq \sum_{k=1}^{r} \left|f\right| \chi_{S_K}$ olduğu açıktır.

$$\left\|f\right\|_{L_{p,\lambda}(S)} \leq \sum_{k=1}^{r} \left\|f\chi_{S_K}\right\|_{L_{p,\lambda}(S)} = \sum_{k=1}^{r} \left\|f\right\|_{L_{p,\lambda}(S_K)} = \left\|f\right\|_{X(S)}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\forall K \in \{1, \ldots, r\}$ için

$$\left\|f\right\|_{L_{p,\lambda}(S_K)} = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^{n-\lambda}} \int_{S_K \cap B_r} \left|f\right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^{n-\lambda}} \int_{S \cap B_r} \left|f\right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} = \left\|f\right\|_{L_{p,\lambda}(S)}$$

olur. Buradan, $\left\|f\right\|_{X(S)} \leq r \left\|f\right\|_{L_{p,\lambda}(S)}$ olduğu görülür. Sonuç olarak, $\|.\|_{X(S)} \sim \left\|.\right\|_{L_{p,\lambda}(S)}$ sağlanır. Ayrıca, $L_{p,\lambda}(K)$ uzayının homojen olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

3.2.3.4 $X(K)$ Yeniden Düzenleme Altında Değişmez Uzay(Simetrik Uzay)

$X(K)$ uzayı, m Lebesgue ölçüsü olmak üzere $(K; \mathscr{L}_K; m)$ ölçü uzayı üzerinde simetrik bir uzay olsun. Bu durumda, 3.1 Genişleme Teoremi başlığında verilen Sonuç 3.1 'den $X(K)$ h-BFU olur. Eğer $X(K)$ uzayının normu Özellik (α) 'yı sağlarsa Teorem 3.3 'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.7. *$X(K)$ bir simetrik uzay olsun ve normu Özellik (α) 'yı sağlasın. $\Omega \subset K$ bir domain, $S \subset \overline{\Omega} : S \in C^{(1)}$ yüzeyi $(n-1)$ boyutlu manifold ve $X(S)$ uzayı $(S; \mathscr{L}_S; d\sigma)$ ölçü uzayı üzerinde (3.3) ile verilen norma sahip bir BFU olsun. Öyleyse, $W_X^1(\Omega)$ uzayına uygun $W_X^1(S)$ iz uzayı $X(S)$ uzayına sürekli gömülür ve $\Gamma_S \in [W_X^1(\Omega); W_X^1(S)]$ doğrudur.*

İz kavramı ile ilgili diğer bilgilere [62] çalışmasından ulaşılabilir.

3.3 Singüler Operatör

3.3.1 Singüler Operatörün Tanımı ve Özellikleri

Eliptik denklemlerin çözülebilirlik problemlerinin araştırılmasında singüler integraller ve uygun BFU'larda bu integral operatörlerin sınırlılık kavramları önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde singüler integral operatörler tanıtılacak, ilgili özellikler verilecek ve bunlarla ilgili çarpan kavramı ve bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca, Calderon-Zygmund singüler integral operatörlerinin bazı BFU'larında ve standart olmayan uzaylarda sınırlılığı ile ilgili bilgiler verilecektir. $S(\mathbb{R}^n)$ ile sonsuzda hızla azalan test fonksiyonları uzayı gösterilsin. Singüler integrallerin özelliklerinin incelenmesinde en çok uygulanan teknik Calderon-Zygmund ayrılış tekniğidir. Bu teknik, Calderon-Zygmund tarafından önce

$$(Tf)(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \Omega(y)|y|^{-n} f(x-y)dy$$

operatörüne değer vermek için uygulanmıştır. Burada Ω, sıfırıncı dereceden homojen ve birim yuvar üzerinde integrali sıfır olan fonksiyonlardır. Bu yaklaşım, geniş sınıf operatörleri için de geçerlidir.

Tanım 3.3. Hızla azalan genelleştirilmiş K fonksiyonu için

$$(Tf)(x) = (K * f)(x), f \in (\mathbb{R}^n) \tag{3.9}$$

ile tanımlı konvolüsyon operatörü verilsin. Aşağıdaki şartlar göz önüne alınsın.

(i) $\widehat{K} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, ($\widehat{K}$ bir Fourier dönüşümüdür);

(ii) K genelleşmiş fonksiyonu $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 'da lokal integrallenebilen $K(x)$ fonksiyonu ile çakışır ve bu fonksiyon aşağıda verilen Hörmander şartını sağlar.

$$\int_{|x|>2|y|} \big|K(x-y) - K(x)\big| dx \leq B_K \,, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Eğer (3.9) ile verilen konvolüsyon operatörü $(i) - (ii)$ şartlarını sağlarsa singüler operatördür denir.

Plancherel teoremine göre (i) şartından

$$\big\|Tf\big\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq \big\|\widehat{K}\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \big\|f\big\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \ , \ f \in S\big(\mathbb{R}^n\big)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan T operatörünün $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olduğu görülür. Ek olarak, (ii) şartı diğer eşitsizliklerin alınmasına da yardımcı olur. Öyle

ki, $K \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n\backslash 0)$ ve $a \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, $\operatorname{supp} a \subset Q$ ve $\int_Q a(x)dx = 0$ olsun. Dolayısıyla,

$$(K * a)(x) = \int_Q K(x-y)a(y)dy = \int_Q \big(K(x-y) - K(x)\big)a(y)dy$$

ile verilen konvolüsyon $x \in Q$ noktaları için anlamlıdır ve Q 'dan uzakta lokal integrallenebilir bir fonksiyondur. Burada Q, merkezi orijinde, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan bir küptür.

Q^b ile; merkezi Q 'nun merkezi ile aynı olan, kenarları Q 'nun kenarlarının b katı ve koordinat eksenlerine paralel olan bir küp gösterilsin. Eğer $\widetilde{Q} = Q^{2\sqrt{n}}$ alınırsa ve $y \in Q$ ile $x \notin \widetilde{Q}$ olursa $|x| > 2|y|$ olur. Öyleyse (ii) şartından

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash\widetilde{Q}} \big|\big(K*a\big)(x)dx \leq \int_Q \int_{|x|>2|y|} \big|K(x-y)-K(x)\big|\big|a(y)\big|dxdy \leq B_k \int_Q |a(y)|dy.$$

elde edilir. Kaydırma işleminin değişmezliği ile aynı sonuçların herhangi bir küp için de alınabilir. Buradan aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 3.6. *Eğer K fonksiyonu (ii) şartını sağlarsa ve $a \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} a \subset Q$, $\int_Q a(y)dy = 0$ olursa*

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash\widetilde{Q}} \big|\big(K * a\big)(x)dx \leq B_k \big\|a\big\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}, \ \widetilde{Q} = Q^{2\sqrt{n}}$$

elde edilir.

Aşağıda birkaç örnek verilmiştir.

I) Baş değer $(p.v.)$ anlamında konvolüsyon operatörü:
Bu tür genelleşmiş $K = p.v.\ K(x)$ şeklindeki fonksiyonlar

$$K(\Phi) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K(x)\Phi dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} K(x)\Phi(x)dx$$

olarak düşünülür. Burada, $K \in L_1^{loc}\big(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\big)$, $K(.)$ fonksiyonu aşağıdaki artış şartını sağlar.

$$\int_{r<|x|<2r} \big|K(x)\big|dx \leq c_1, \ \forall r > 0. \tag{3.10}$$

Bu şart sağlanırsa, $K(\Phi)$ ile gösterilen Φ-Schwarz fonksiyonları $\big(S(\mathbb{R}^n)\big)$ için

doğru tanımlanmış olur ve bu durumda K azalan genelleşmiş fonksiyon olur ve

$$\begin{cases} \left| \int_{r<|x|<R} K(x)dx \right| \leq c_2, \qquad 0 < r < R \\ \exists \lim_{r\to+0} \int_{r<|x|<1} K(x)dx \end{cases} \tag{3.11}$$

şartları sağlanır.

(3.10) ve (3.11) şartlarının sağlandığı kabul edilsin ve diğer yandan

$$l = p.v. \int_{|x|<1} K(x)dx$$

olsun. Öyleyse,

$$K(\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \Phi(0) \int_{\varepsilon<|x|<1} K(x)dx \right\} + \int_{\varepsilon<|x|<1} K(x)\big[\Phi(x)-\Phi(0)\big]dx + \int_{|x|\geq 1} K(x)\Phi(x)dx =$$

$$= l\,\Phi(0) + \int_{|x|<1} K(x)\big[\Phi(x)-\Phi(0)\big]dx + \int_{|x|\geq 1} K(x)\Phi(x)dx = l\,\Phi(0) + I_1 + I_2$$

elde edilir. I_1 ve I_2 integrallerinin mutlak yakınsak olduğu açıktır ve diğer yandan

$$\big|I_1\big| \leq \big\|\nabla\Phi\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}\leq|x|\leq 2^{-k}} \big|K(x)\big||x|dx \leq 2c_1 \big\|\nabla\Phi\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

$$\big|I_2\big| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big(|x||\Phi(x)|\big) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\leq|x|\leq 2^{k+1}} \big|K(x)\big|2^{-k}dx \leq 2c_1 \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big(\big|x\big|\big|\Phi(x)\big|\big)$$

olur. Bu sonuçlardan, Hörmander şartının sağlandığı görülür. Öyleyse aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 3.3. *Eğer $K \in L_1^{loc}\big(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\big)$ fonksiyonu (ii) , (3.10) ve (3.11) şartlarını sağlarsa ve $K = p.v.\,K(x)$ ise,*

$$Tf(x) = K * f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)f(y)dy\ ,\ f \in S(\mathbb{R}^n)$$

ile tanımlanan operatör bir singüler operatördür.

II) Genel anlamda konvolüsyon operatörü:
Bu tür $K(x)$ fonksiyonları $(-n)$ dereceden homojen bir fonksiyonlardır ve

$$K(x) \;=\; \Omega(x)\,|x|^{-n} \;=\; \Omega(x')\,|x|^{-n}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Burada, $x' = \dfrac{x}{|x|}$ ve $\Omega(\cdot)$ sıfır dereceden homojen fonksiyondur. $K(\cdot)$ fonksiyonu ile konvolüsyonun ürettiği T operatörü çarpmaya göre öteleme altında değişmezdir. Yani

$$T(f^{\delta}) = (Tf)^{\delta} \ , \ \forall \delta > 0$$

dir. Burada, $f^{\delta}(x) = f(\delta x)$ dır.
Konvolüsyon operatörünün genel anlamda incelenişinde (3.10) ve (3.11) şartları uygun olarak aşağıdaki şartlara denktir.

$$\big\|\Omega\big\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int_{|x'|=1} \big|\Omega(x')\big| d\sigma(x') < +\infty$$

ve

$$\int_{|x'|=1} \Omega(x') d\sigma(x') = 0.$$

Burada, $d\sigma$ birim küre üzerinde $(n-1)$ boyutlu Lebesgue ölçüsüdür.

Bunlara ek olarak, (ii) şartının sağlanması için bazı süreklilik şartlarına ihtiyaç vardır. Öyle ki, aşağıdaki L_1 süreklilik modülü göz önüne alınsın.

$$\omega_1(\Omega; t) = \sup_{h \in \mathbb{R}^n : |h| \leq t} \int_{|x'|=1} \big|\Omega(x'+h) - \Omega(x')\big| d\sigma(x').$$

Aşağıdaki önerme doğrudur.

Önerme 3.4. *Ω fonksiyonu sıfır dereceden homojen, birim küre üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun ve*

$$\int_{|x'|=1} \Omega(x') d\sigma(x') = 0$$

ifadesini sağlasın. Eğer L_1-Dini

$$\int_0^1 \omega_1(\Omega; t) \frac{dt}{t} < +\infty$$

şartı sağlanırsa

$$Tf(x) = p.v. \int_{R^n} \Omega(y) |y|^{-n} f(x-y) dy \ , \ f \in S(\mathbb{R}^n)$$

integrali bir singüler integraldir.

Ek olarak, eğer Ω bir tek fonksiyon ise T 'nin $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayına genişlemesi Fourier dönüşümü yardımı ile verilebilir. Yani $(\widehat{Tf})(\xi) = f(\xi) m(\xi)$ olarak yazılabilir.

Burada,

$$m(\xi) = -\frac{\pi i}{2} \int_{|x'|=1} \Omega(x')\ sign(x'\xi) d\sigma(x')$$

dır ve $x'\xi$ ifadesi $\mathbb{R}^n$ 'de bir skaler sonuçtur. $m(\xi) = (p.v.\ \widehat{\Omega(x)|x|^{-n}})(\xi)$ fonksiyonu sıfır dereceden homojen bir fonksiyondur.

Eğer Ω Hölder şartını sağlarsa L_1-Dini şartının sağlandığı açıktır.

Singüler integral operatörlerin Lebesgue uzaylarında sınırlılığı ile ilgili aşağıda verilen teorem doğrudur.

Teorem 3.8. *Her bir singüler integral için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.*

i) $\big\|Tf\big\|_{L_p(R^n)} \leq c_p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \forall \in L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n)$

ii) $\big|\big\{x \in \mathbb{R}^n : \big|Tf(x)\big| > t\big\}\big| \leq c_1 t^{-1} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\ ,\ \forall f \in L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$

iii) $\big\|Tf\big\|_{BMO} \leq c_\infty \big\|\big\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\ ,\ f \in L_2(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$

burada $c_p\ ,\ 1 \leq p \leq \infty$ *sabitleri yalnız* $p; n; \|\widehat{K}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$ *ve* B_k *sabitlerine bağlıdır.*

Görüldüğü üzere, her bir singüler integral operatörü sınırlı operatör gibi $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayına; $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından w-$L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $L_\infty^c = \big\{f \in L_\infty\ :\ \operatorname{supp} f\ \subset\ \mathbb{R}^n$ kompakttır.$\big\}$ uzayından BMO uzayına devam ettirmek mümkündür.

Teorem 3.8 'i ispatlamak için kullanılan şema şöyledir: Öncelikle en temel olan $ii)$ eşitsizliği ispatlanır. Sonra Marcinkiewicz interpolasyon teoreminden yararlanarak $ii)$ 'den ve L_2 sınırlılığından $i)$ elde edilir. Ardından $iii)$ ispatlanır ve yine Marcinkiewicz teoremi uygulanır.

Singüler integral operatörlerin sınırlılığının gösterilmesinde multiplikatörlerden yararlanılır. Şimdiye kadar çekirdeği integrallenemeyen konvolüsyon operatörlerinin L_p eşitsizlikleri incelenmiştir. Eğer $K \in L_1(\mathbb{R}^n)$ olursa

$$\|\widehat{K}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|K\|_{L_1}$$

sağlandığından $Tf = K * f$ operatörü de singüler operatör olur. Burada, B_k sabiti (ii)-Hörmander şartına göre bir sabittir. Bu durumda, Young eşitsizliği L_p-eşitsizliklerini bütün $p : 1 \leq p \leq +\infty$ sayıları için elde edilmeye imkan verir. Böylece, bu eşitsizliğe göre

$$\|K * f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|K\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\ ,\ 1 \leq p \leq \infty$$

olur ve sonuç olarak Teorem 3.8 'in sağlandığı açıkça görülür.

3.3.2 Singüler Operatörün Bazı Standart Olmayan Fonksiyon Uzaylarında Sınırlılığı

Sonraki bölümlerde, eliptik denklemlerin simetrik ve standart olmayan uzayların normlarının ürettiği Sobolev uzaylarında bazı çözülebilirlik problemleri incelenecektir. Bu problemlerin incelenmesinde singüler integrallerin önemliliği göz önüne alınırsa bu bölümde Calderon-Zigmund singüler integral operatörlerin simetrik ve standart olmayan uzaylarda sınırlılığı hakkında bazı bilgiler verilecektir. Öncelikle singüler integrallerin ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığı ve Muckenhoupt şartı verilecektir.

3.3.2.1 $L_{p;w}(\mathbb{R}^n)$ Ağırlıklı Lebesgue Uzayları

$w : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ bir ağırlık fonksiyonu olsun, yani $|w^{-1}\{0; +\infty\}| = 0$ dir. Ağırlık fonksiyonlarının A_p , $1 \leq p \leq +\infty$ Muckenhoupt sınıflarının tanımı verilecektir. Bu sınıfların belirlenmesi $L_{p;w}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Lebesgue uzaylarının tanımına bağlıdır. Genel olarak, ağırlıklı BFU 'ların tanımına uygun olarak $L_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ uzayları da aşağıdaki norm aracılığı ile tanımlancaktır.

$$\|f\|_{L_{p,w}(\mathbb{R}^n)} = \|fw\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |fw|^p dx \right)^{1/p} , \ 1 \leq p < +\infty.$$

Tanım 3.4. A_p , $1 < p < +\infty$, Muckenhoupt sınıfı $w(\cdot)$ ağırlık fonksiyonlarından oluşur, öyle ki

$$[w]_{A_p} = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \left\| w\chi_{B_r} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \left\| w^{-1}\chi_{B_r} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

olsun.

A_1 Muckenhoupt sınıfı farklı şekilde tanımlanır. Öncelikle Mf Hardy-Littlewood maksimal operatörünü(veya fonksiyonunu) tanmı verilecektir. $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $\forall x \in \mathbb{R}^n$ noktasında $(Mf)(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\big(Mf\big)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q \big|f(y)\big| dy$$

burada supremum x 'i içeren ve kenarları koordinat eksenlerine paralel olan bütün küpler üzerinden alınmaktadır.

Bu tanımda kübün yerine x 'i içeren yuvar da alınabilir.

Ağırlık fonksiyonu için

$$[w]_{A_1} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{(Mw)(x)}{w(x)} \tag{3.12}$$

olsun ve A_1 sınıfı, $[w]_{A_1} < +\infty$ şartını sağlayan $w(.)$ ağırlıklarından oluşsun.

Tanım 3.4 aynı zamanda 3.12 ifadesine denktir, öyle ki

$$Mw(x) \leq [w]_{A_1}\, w(x)\ ,\ h.h.y\ x \in \mathbb{R}^n$$

sağlanır.

Bütün $A_p\ ,\ p \geq 1$ sınıflarının birleşimi A_∞ sınıfını oluşturur, yani

$$A_\infty = \bigcup_{p\geq 1} A_p$$

Bu sınıfların özellikleri aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.5. $1 \leq p < \infty$ *olsun.*

a) $p > 1$ *ve* $w \in A_p$ *ise* $w^{-1} \in A_{p'}$ *;*

b) $p < q < +\infty$ *ise* $A_p \subset A_q$ *;*

c) $p > 1$ *ve* $w \in A_p$ *ise* $\exists \varepsilon > 0 : w \in A_{p-\varepsilon}$.

Şimdi ise bu başlıkta incelenecek olan singüler integraller verilecektir. Singüler integraller bir Hilbert dönüşümüdür, yani

$$Hf(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)dy}{x-y}\ ,\ f \in L_p(\mathbb{R})\ ,\ 1 \leq p < \infty$$

dır.

Yüksek boyutlu durumlar için Hilbert dönüşümünün genellemesi $R_j\ ,\ j = \overline{1,n}$ Riesz dönüşümü olur, yani

$$\big(R;f\big)(x) = \frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y-x|\geq\varepsilon} \frac{x^j - y^j}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy.$$

$f \in S(\mathbb{R}^n)$ Schwarz fonksiyonları için bu dönüşümler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\big(\widehat{Hf}\big)(\xi) = -i\, sing\xi\, \widehat{f}\,(\xi);$$

$$\big(\widehat{R_j f}\big)(\xi) = -i\,\frac{\xi_j}{|\xi|}\,\widehat{f}\,(\xi)\ ,\ j = \overline{1,n}.$$

Bu operatörler, aşağıdaki genel formdaki singüler integral operatörlerin genel halidir.

Tanım 3.5. $K \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ fonksiyonu

i) $\big|K(x)\big| \leq \dfrac{c}{|x|^n}\ ,\ \forall x \neq 0;$

ii) $\big|\nabla K(x)\big| \leq \dfrac{c}{|x|^{n+1}}\ ,\ \forall x \neq 0;$

iii) $\left|\int_{r<|x|<R} K(x)dx\right| \leq c\ ,\ 0 < r < R;$

iv) $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1} K(x)dx$ limiti vardır.

şartlarını sağlasın. $f \in L_p(\mathbb{R}^n)\ ,\ 1 \leq < \infty$ için K çekirdeğine sahip T singüler integral operatör

$$\big(Tf\big)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(x-y)f(y)dy \tag{3.13}$$

ifadesi ile tanımlanır.

Teorem 3.9. *K çekirdeği Tanım 3.5 'in şartlarını sağlasın. Öyleyse (3.13) ile verilen limit; $L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $h.h.y\ \mathbb{R}^n$ olarak iki anlamda da vardır. Ayrıca,*

i) $\mu_f(t) \leq \dfrac{c}{t}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx\ ,\ \forall f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *;*

ii) $\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\ ,\ \forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$

ifadeleri doğrudur.

Ağırlıklı Lebesgue uzayları için Teorem 3.9 aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 3.10. *K çekirdeği Tanım 3.5 'in şartlarını sağlasın. Öyleyse,*

i) $w \in A_1 \Rightarrow \int_{E_{Tf}(t)} w(x)dx \leq \dfrac{c}{t}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|w(x)dx\ ,\ \forall t > 0$ *olur. Burada* $E_g(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > t\}$ *dır.*

ii) $w \in A_p\ ,\ 1 < p < +\infty \Rightarrow \|Tf\|_{L_{p;w}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L_{p;w}(\mathbb{R}^n)}$

ifadeleri sağlanır.

3.3.2.2 $L_{p(.)}(\mathbb{R}^n)$ Değişken Üslü Lebesgue Uzayları

Bu uzaylarda singüler operatörlerin sınırlılığı için $p(\cdot)$ toplanabilirlik derecesine göre bazı şartlar verilmesi gereklidir.

Teorem 3.11. *K çekirdeği Tanım 3.5 'in şartlarını sağlasın ve $1 < p^- \leq p^+ < +\infty$ olsun. Öyleyse $M \in [L_{p(.)}(\mathbb{R}^n)]$ ise $T \in \left[L_{p(.)}(\mathbb{R}^n)\right]$ olur.*

$M \in [L_{p(.)}(\mathbb{R}^n)]$ durumunu incelemek için bazı kavramları vermek gereklidir. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir domain ve $p : \Omega \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\exists c_0 > 0$ için

$$\left|p(x) - p(y)\right| \leq \frac{c_0}{-\log|x-y|}\ ,\ \forall x, y \in \Omega : |x-y| < \frac{1}{2}$$

eşitsizliği sağlanırsa $p(\cdot)$ fonksiyonu lokal $\log$-Hölder süreklilik şartını $\left(p \in LH_0(\Omega)\right)$ sağlıyor denir. Eğer $\exists c_\infty > 0$ ve $p_\infty \in \mathbb{R}$ için

$$\left|p(x) - p_\infty\right| \leq \frac{c_\infty}{\log(e+|x|)}\ ,\ \forall x \in \Omega$$

eşitsizliği sağlanırsa $p(\cdot)$ fonksiyonu sonsuzlukta $\log$-Hölder süreklilik şartını $\left(p \in LH_\infty(\Omega)\right)$ sağlıyor denir.

$LH(\Omega) = LH_0(\Omega) \cap LH_\infty(\Omega)$ olsun. Öyleyse, aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.12. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir domain ve $p : \Omega \to [1, +\infty]$ ölçülebilir fonksiyon olsun. Öyleyse,*

i) Eğer $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH(\Omega)$ ise $\exists c > 0$ olur; öyle ki

$$\|t\chi_{\{x:Mf(x)>t\}}\|_{L_{p(.)}(\Omega} \leq c\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$$

sağlanır.

ii) $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH(\Omega)$ ve $p_- > 1$ ise $\exists c > 0$ olur; öyle ki

$$\|Mf\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq c\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$$

sağlanır.

Ağırlıklı durum verilmeden önce değişken üslü $A_{p(\cdot)}$ Muckenhoupt sınıfı için aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 3.6. $p : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ ölçülebilir fonksiyonu için eğer

$$[w]_{A_{p(\cdot)}} = \sup_{Q} \left|Q\right|^{-1} \left\|w\chi_Q\right\|_{L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|w^{-1}\chi_Q\|_{L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

sağlanırsa $w \in A_{p(\cdot)}$ olur.

Böylelikle, ağırlıklı durum için aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.13. *$p : \mathbb{R}^n \to [1, +\infty]$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun. $p_+ < \infty$ ve $p(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)$ alınsın. Öyleyse aşağıdaki özellikler denktir.*

i) $w \in A_{p(\cdot)}$ *dir.*

ii) $\exists c > 0$ *için*

$$\sup_{t>0} \left\|t\,\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>t\}}\, w\right\|_{L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq c\left\|fw\right\|_{L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

dir.

iii) $\exists c > 0$ *için*

$$\left\|(Mf)w\right\|_{L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|fw\right\|_{L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

dir.

3.3.2.3 $L_{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue Uzayları

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı domain olsun($d_\Omega < +\infty$). $L_{p)}(\Omega)$ uzayının normu

$$\|f\|_{L_{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_\Omega |f|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},\ 1 < p < +\infty$$

dır.

Teorem 3.14. *K çekirdeği Tanım 3.5 'in şartlarını sağlasın ve $1 < p < +\infty$ olsun. Öyleyse (3.13) ifadesi ile belirlenen K çekirdeği T singüler integral operatörü için $T \in \left[L_{p)}(\Omega)\right]$ doğrudur.*

3.3.2.4 $L_{p,\lambda}(\Omega)$ Morrey Uzayları

$\Omega \subset \mathbb{R}^n : d_\Omega < +\infty$ bir domain olsun. Ω domaini $\mathscr{A}$ sınıfına dahildir, yani $\exists\, A > 0$ için $\left|\Omega \cap B_r\right| \geq Ar^n, \forall r \in \left(0, d_\Omega\right]$ şartı sağlanır. Burada, r yarıçap olmak üzere

$B_r \subset \mathbb{R}^n$ bir yuvardır. $1 \leq p < +\infty$ ve $0 < \lambda < n$ olmak üzere Morrey uzayındaki norm

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{d_\Omega \geq r > 0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{\Omega_r} |f|^p dx \right)^{1/p}, \ (\Omega_r = \Omega \cap B_r)$$

dır.

Morrey uzaylarında singüler integral operatörü için aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.15. *K çekirdeği Tanım 3.5 'in şartlarını sağlasın ve T operatörü K çekirdekli (3.13) ile verilen singüler integral operatör olsun. Öyleyse $T \in \left[L_{p,\lambda}(\Omega)\right]$, $1 < p < +\infty$, $0 < \lambda < n$ 'dir.*

3.3.2.5 $X(\Omega)$ Simetrik Uzayları

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir domaindir ve $X(\Omega)$ ölçülebilir $(\Omega; \mathscr{L}_\Omega; m)$ uzayı üzerinde bir simetrik uzay olsun. Burada $\mathscr{L}_\Omega$ Lebesgue anlamında ölçülebilir kümelerin σ-cebiri ve m ifadesi $\mathbb{R}^n$ üzerinde Lebesgue ölçüsüdür. Bu uzayın alt ve üst Boyd indeksleri α_X ve β_X ile gösterilsin. Birçok diğer operatör gibi singüler integral operatörlerin sınırlılığının simetrik uzaylarda incelenmesinde aşağıda verilen Boyd teoremi temel bir teoremdir.

Teorem 3.16 (Boyd Teoremi)**.** *$1 \leq p < q \leq +\infty$ ve $X(\Omega)$ simetrik uzaydır. Öyleyse her bir zayıf $(p, p; q, q)$ tipli quasi lineer T operatörü $X(\Omega)$ uzayında sınırlıdır, yani $T \in \left[X(\Omega)\right]$ olur ancak ve ancak $X(\Omega)$ uzayının α_X ve β_X Boyd indeksleri $\frac{1}{q} < \alpha_X \leq \beta_X < \frac{1}{p}$ şartını sağlar.*

Boyd teoreminden aşağıdaki teoremin doğruluğu elde dilir.

Teorem 3.17. *K çekirdeği Tanım 3.5 'in şartlarını sağlasın. T singüler operatörü (3.13) ifadesi ile verilsin ve $X(\Omega)$ uzayı α_X ve β_X Boyd indekslerine sahip simetrik uzay olsun. Öyleyse, $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ ise $T \in \left[X(\Omega)\right]$ olur.*

Gerçekten de, teoremin bütün şartlarının sağlandığı ve $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ olduğu göz önüne alınsın. Dolayısıyla $\exists p; q : 1 < p < q < +\infty$ dir; öyle ki $\frac{1}{q} < \alpha_X \leq \beta_X < \frac{1}{p}$ sağlanır. Teorem 3.10 'dan T operatörünün zayıf $(p, p; q, q)$ tipli olduğu elde edilir. Bu durumda $w \equiv 1$ dir. Sonuç olarak, Boyd teoremin'den $T \in \left[X(\Omega)\right]$ olduğu görülür.

Yorum 3.3. Bundan önceki bütün teoremlerde eğer $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ olursa, T operatörü

$$\left(Tf\right) = p.v. \int_\Omega K(x-y) f(y) dy$$

ile tanımlanır ve bu operatör Ω domaini üzerinde tanımlanmış uzayda sınırlı olur. Örneğin; $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$ için $T \in [L_{p,w}(\Omega)]$ olur.

3.3.2.6 $M_{p,\lambda}(\Omega)$ Marcinkiewicz Uzayları

Bu uzayın normu

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{E \subset \Omega} \left(\frac{1}{|E|^{\lambda}} \int_E |f|^p dx \right)^{1/p} , \ 1 \leq p < +\infty , \ 0 < \lambda < 1$$

şeklindedir. Burada supremum bütün ölçülebilir $E \subset \Omega (|E| \neq 0)$ kümeleri üzerinden alınmıştır. Bu uzay simetrik uzaydır ve Boyd indeksleri hakkında bir sonraki lemma verilir.

Lemma 3.7. *$M_{p,\lambda}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < 1$ Marcinkiewicz uzayı simetriktir. Ayrıca, alt ve üst Boyd indeksleri eşittir ve $\alpha = \beta = \dfrac{1-\lambda}{p}$ sağlanır.*

Lemma 3.7 göz önüne alındığında Teorem 3.17 'den yararlanarak bir sonraki teorem elde edilir.

Teorem 3.18. *K çekirdeği Tanım 3.5 'in şartlarını sağlasın ve T singüler integral operatörü (3.13) ifadesi ile tanımlansın. Öyleyse, $T \in \left[M_{p;\lambda}(\Omega)\right]$, $1 \leq p < +\infty$, $0 < \lambda < 1$ olur.*

3.3.2.7 $L_{\Phi}(\Omega)$ Orlicz Uzayları

Φ bir Young fonksiyonu ve Φ^{-1} fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde Φ 'nin tersi olsun.

$$h(t) = \limsup_{x \to \infty} \frac{\Phi^{-1}(x)}{\Phi^{-1}(tx)} , \ t > 0$$

ifadesi verilsin. Diğer taraftan,

$$\alpha_{\Phi} = -\lim_{t \to \infty} \frac{\log h(t)}{\log t} ; \ \ \beta_{\Phi} = -\lim_{t \to +0} \frac{\log h(t)}{\log t}$$

tanımlansın. α_{Φ} ve β_{Φ} ifadeleri $L_{\Phi}(\Omega)$ uzayının alt ve üst Boyd indeksleridir. $L_{\Phi}(\Omega)$ uzayı bir simetrik uzaydır ve aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3.19. *$1 < q < p < +\infty$ ve $\frac{1}{p} < \alpha_{\Phi} \leq \beta_{\Phi} < \frac{1}{q}$ verilsin. Eğer $T \in \left[L_p(\Omega)\right] \bigcap \left[L_q(\Omega)\right]$ ise $T \in \left[L_{\Phi}(\Omega)\right]$ olur.*

Bu teorem, özel durumda (3.13) ifadesi ile verilen Tanım 3.5 'in şartlarını sağlayan K çekirdeğine sahip singüler integral operatör için de doğrudur.

4
ELİPTİK DENKLEMLER

4.1 Eliptik Denklemler ile İlgili Bilgiler

Bu bölümde, sınırlı bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaini üzerinde $L_{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayı normu tarafından oluşturulan standart olmayan $W^m_{p)}(\Omega)$ grand Sobolev uzayında düzgün olmayan katsayılara sahip, m-inci mertebeden bir eliptik L operatörü ele alınmıştır. Operatörün katsayıları üzerindeki daha zayıf kısıtlamalar altında, $W^m_{p)}(\Omega)$ uzayındaki lokal çözülebilirliği (güçlü anlamda) gösterilmiştir ve ayrıca bu uzaylar için iç Schauder tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizlikler, $Lu = f$ denklemi için Dirichlet probleminin Fredholm olma özelliğinin belirlenmesinde önemli bir yere sahiptir. Ele alınan uzaylar ayrılabilir değildir ve sonsuz türevlenebilir fonksiyonlar bu uzaylarda yoğun değildir. Bu nedenle, Sobolev uzaylarına ilişkin birçok klasik yöntem bu durumda uygulanamaz. Bununla birlikte, L operatörünün temel teriminin katsayılarının sürekli olduğu ve geri kalanların esasen Ω 'da sınırlı olduğu varsayımı altında ilgili sonuçları elde etmek mümkündür.

Diğer yandan, $L_{p),\rho}(\Omega)$ kuvvet ağırlıklı grand Lebesgue uzayları normu tarafından oluşturulan Sobolev uzayları ele alınmıştır. $\mathbb{R}^n$ 'deki sınırlı alanda düzgün olmayan katsayılara sahip m-inci mertebeden eliptik denklem ile ilgili sonuçlar gösterilmiştir. $L_{p),\rho}(\Omega)$ uzayı ayrılabilir değildir, bu sebeple öteleme operatörü kullanılarak sonsuz türevlenebilir fonksiyonların yoğun olduğu ayrılabilir alt uzayı tanımlanmıştır. Daha sonra ağırlıklı olmayan durum şemasına göre, $W^m_{p),\rho}(\Omega)$ kuvvet ağırlıklı grand Sobolev uzaylarında m 'inci mertebeden eliptik denklemlerde lokal çözülebilirlik sonuçları elde edilmiştir.

4.1.1 $m-inci$ Mertebeden Eliptik Operatör

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip bir domain(açık ve bağlantılı küme) olsun. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sıralı n-lisi $\alpha_k \in \mathbb{Z}_+$, $\forall k = \overline{1,n}$ koordinatlarına sahip bir multiindeks olsun. $\partial_i = \frac{\partial}{x_i}$ diferansiyel operatör olmak üzere $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanacaktır. Her $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ elemanı için

$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$ olduğu varsayılsın. $m-inci$ mertebeden L operatörü

$$L \;=\; \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha \tag{4.1}$$

ile tanımlanır. Burada $a_\alpha(\cdot) \in L_\infty(\Omega)$ katsayıları reel fonksiyonlardır. Ayrıca $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ dir. Diğer yandan, karakteristik form her pozitif ya da negatif $x \in \Omega$ için

$$Q(x,\xi) \;=\; \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, m mertebesinin bir çift sayıdır. $m = 2m'$ alınır ve genelliği kaybetmeden

$$(-1)^{m'}\,Q(x,\xi) \;>\; 0\,, \quad \forall\xi \neq 0\,, \quad \forall x \in \Omega$$

olduğu kabul edilir.

Sabit a_α^0 katsayılı L_0 operatörü

$$L_0 = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha^0\partial^\alpha \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1. *$m-inci$ mertebeden (4.2) formunda verilen sabit katsayılı keyfi L_0 eliptik operatörü için aşağıdaki özelliklere sahip $J(x)$ fonksiyonu oluşturulabilir[44].*

(i) Eğer n tek veya çift ve $n > m$ ise

$$J(x) = \frac{\omega(x)}{|x|^{n-m}}$$

dır. Burada, $\omega(x)$ pozitif, sıfırıncı dereceden(yani $\omega(tx) = \omega(x)\,,\ \forall\, t > 0$) homojen fonksiyondur. Eğer n çift ve $n \leq m$ ise

$$J(x) \;=\; q(x)\,\log|x| + \frac{\omega(x)}{|x|^{n-m}}$$

dır. Burada, q polinomu $(m-n)$-inci dereceden homojen bir polinomdur.

(ii) $J(x)$ fonksiyonu,

$$L_0\,J(x) \;=\; \delta(x)$$

denklemini, genel anlamda, sağlar(δ bir Dirac fonksiyonudur). Dolayısıyla,

aşağıdaki eşitlik sonsuz mertebeden türevlenebilir, kompakt destekli her $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu için doğrudur.

$$\varphi(x) = \int \left[L_0\varphi(y)\right] J(x-y)\, dy \;=\; L_0 \int \varphi(y)\, J(x-y)\, dy.$$

(4.1) ile verilen eliptik operatör göz önüne alınsın. Bu operatör için $x_0 \in \Omega$ noktasında

$$L_{x_0} \;=\; \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\, \partial^\alpha \tag{4.3}$$

bir teğet operatör tanımlansın. Teorem 4.1 'den yararlanarak $L_{x_0}\varphi \;=\; 0$ denkleminin temel çözümü $J_{x_0}(\cdot)$ ile gösterilsin. $J_{x_0}(\cdot)$ fonksiyonu, x_0 noktasında singülerliğe sahip $L\varphi = 0$ denklemi için bir parametrik olarak isimlendirilir. Diğer taraftan,

$$S_{x_0}\varphi \;=\; \psi(x) \;=\; \int J_{x_0}(x-y)\, \varphi(y)\, dy$$

ve

$$T_{x_0} \;=\; S_{x_0}\,(L_{x_0} - L) \tag{4.4}$$

operatörleri tanımlansın.

Eliptik operatör ile ilgili buraya kadar olan notasyonlar [44] kaynağında verilen şekilde kullanılmıştır.

$Lu \;=\; f$ denkleminin çözümünün varlığının gösterilmesinde aşağıdaki lemma önemli bir yere sahiptir.

Lemma 4.1. *φ kompakt destekli bir fonksiyon olsun. Öyleyse,*

$$\varphi = T_{x_0}\varphi + S_{x_0} L\varphi$$

dir. Eğer

$$\varphi = T_{x_0}\varphi + S_{x_0} f$$

ise $L\varphi = f$ dir[44].

Tanım 4.1 (P_{x_0}) Özelliği)**.** Eğer L operatörünün katsayıları aşağıdaki şartları sağlarsa

i) Herhangi bir r > 0 için $a_\alpha \in L_\infty(B_r(x_0))\ ,\ \forall |\alpha| \le m$, dır.

ii) Herhangi bir r > 0 için $a_\alpha(.)$ katsayıları $h.h.y$ $B_r(x_0)$ yuvarında x_0 noktasında sınırlı ve sürekli fonksiyonlarla üst üste düşer.

L operatörüne $x_0 \in \Omega$ noktasında P_{x_0}) özelliğine sahiptir denir[37].

Eğer $a_\alpha \in C(\Omega)$, $\forall |\alpha| \leq m$ ise L operatörünün $\forall x_0 \in \Omega$ için P_{x_0}) özelliğine sahip olduğu açıktır.

Basitlik açısından, $\Omega = B_r$ olduğunda $L_{p)}(\Omega)$ ve $W^m_{p)}(\Omega)$ uzayları $L_{p)}(r)$ ve $W^m_{p)}(r)$ ile gösterilecektir. $W^m_{p)}(\Omega)$ uzayında bu uzayın normuna denk olan

$$\|f\|_{W^m_{p)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} d_\Omega^{|\alpha| - \frac{n}{p}} \|\partial^\alpha f\|_{L_{p)}(\Omega)}$$

normu göz önüne alınsın ve bu norma karşılık gelen uzay $N^m_{p)}(\Omega)$ ile gösterilsin. Burada d_Ω ifadesi Ω domainin çapını göstermektedir.

$W^m_{p)}(\Omega)$ ve $N^m_{p)}(\Omega)$ uzaylarının normlarının denk olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla, $W^m_{p)}(\Omega)$ uzayında $Lu = f$ denkleminin lokal çözümünün varlığının ispatının $N^m_{p)}(\Omega)$ uzayı için gösterilmesi yeterlidir.

Tanım 4.2. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaininin yeterince küçük her bir parçası, pozitif bir Jakobiyen ile $y(x) = (y_1(x); \ldots; y_n(x))$, $\forall i = \overline{1,n}$, $y_i \in C^{(k)}$, koordinat dönüşümü kullanılarak $x_n = 0$ hiperdüzleminin bir parçasına eşlenebiliyorsa $\partial\Omega$ sınırı $C^{(k)}$ sınıfına aittir denir[37].

4.2 Grand Sobolev Uzaylarında Ayrılabilir Olmayan Durumda Lokal Çözülebilirlik ve İç Schauder tip Eşitsizlikler

Aşağıdaki verilen lemma sonlu genişleme üzerinedir. Lemmada basitlik açısından, $\overset{0}{W}{}^m_{p)}(\Omega;\, S)$ uzayı, $S = \partial\Omega$ için $\overset{0}{W}{}^m_{p)}(\Omega)$ ile gösterilmiştir.

Lemma 4.2. *$\Omega;\, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\Omega \subset\subset \Omega'$ sınırlı bir domain ve $\partial\Omega \in C^{(m)}$ alınsın. Öyleyse, $\forall f \in W^m_{p)}(\Omega)$ için*

$$\|F\|_{W^m_{p)}(\Omega')} \leq c\|f\|_{W^m_{p)}(\Omega)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $F \in \overset{0}{W}{}^m_{p)}(\Omega')$ genişlemesi vardır. Burada $c > 0$, f 'den bağımsız bir sabittir[37].

İspat. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir sınırlı domain, $\partial\Omega \in C^{(1)}$ ve $\Omega \subset\subset \Omega'$ olsun. Burada, $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$, yeterince düzgün $\partial\Omega'$ sınırına sahip bir domaindir. Böylece, $r = \rho(\partial\Omega; \partial\Omega') > 0$

olur. $\forall \delta \in \left(0, \frac{r}{2}\right)$ için

$$\Omega_\delta = \left\{x \in \Omega' : \rho(x;\Omega) < \delta\right\}$$

alınsın. Dolayısıyla, $\Omega \subset \Omega_\delta \subset \Omega'$ olur. Keyfi bir

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \in \Omega, \\ 0 \ , & x \in \Omega' \setminus \Omega_\delta \end{cases}$$

ile tanımlı $\eta \in C^\infty(\Omega')$ fonksiyonu ele alınsın. $\forall m \in N$ için

$$\|\partial^\alpha \eta\|_{L_\infty(\Omega')} \leq c, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_n^+ : |\alpha| \leq m$$

olduğu açıktır. Burada $c > 0$ bir mutlak sabittir. $f \in W_{p)}^m(\Omega)$ keyfi bir fonksiyon olsun. Genişleme teoremine(Teorem (3.2)) göre f fonksiyonu $W_{p)}^m(\Omega')$ Sobolev uzayına genişletilebilir. Karşılık gelen genişleme fonksiyonu $F \in W_{p)}^m(\Omega')$ olarak alınsın. $\Phi = \eta F$ ile gösterilsin.

$$|\partial^\rho \Phi| \ \leq \ c \sum_{\forall \alpha : |\alpha| \leq |\rho|} \left|\partial^\alpha F\right|$$

eşitsizliği sağlanır. $c > 0$, F 'den bağımsız bir sabittir. Buradan $\Phi \in W_{p)}^m(\Omega')$ olduğu görülür ve

$$\|\Phi\|_{W_{p)}^m(\Omega')} \ \leq \ c\|F\|_{W_{p)}^m(\Omega')} \ \leq \ c\|f\|_{W_{p)}^m(\Omega)}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $c > 0$, f 'den bağımsız bir sabittir. Diğer taraftan, $\Omega' \setminus \Omega_\delta$ kümesinde $\Phi \equiv 0$ olur ve buradan $\Phi_{\partial\Omega'} = 0$ elde edilir. Böylece, $\Phi \in \overset{0}{W}_{p)}^m(\Omega'; \partial\Omega')$ olur. ■

4.2.1 Ana Lemma ve Lokal Varlık Teoremi

(4.1) ile verilen $m - inci$ mertebeden, $a_\alpha(x)$ katsayılı L eliptik operatörü ve bu operatöre karşılık gelen (4.4) ile tanımlanan T_{x_0} operatörü ele alınsın. $x_0 = 0$ noktası için S_{x_0}, L_{x_0} ve T_{x_0} operatörleri sırasıyla S_0, L_0 ve T_0 ile gösterilsin.

İç eşitsizlikleri oluşturabilmek için daha önce alınan neticelerden yararlanarak aşağıda verilen ana lemma ifade ve ispat edilecektir.

Lemma 4.3 (Ana lemma). *L, $a_\alpha \in L_\infty(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m$ katsayılı bir eliptik operatör ve $x_0 \in \Omega$ noktasında L 'ye karşılık gelen teğet(tangential) operatör L_{x_0} olsun. Teorem 4.1 'den $L_{x_0}u = 0$ denkleminin temel çözümü J_{x_0} ve $S_{x_0}\varphi = J_{x_0} * \varphi$;*

$T_{x_0} = S_{x_0}(L_{x_0} - L)$ *olsun. Eğer* $\varphi \in W^m_{p)}\big(B_r(x_0)\big)$, $\big(B_r(x_0) \subset \Omega, r > 0\big)$, *ise* $\varphi = T_{x_0}\varphi + S_{x_0}L\varphi$ *olur. Ayrıca, eğer herhangi bir* $f \in L_{q)}\big(B_r(x_0)\big)$ *fonksiyonu için* $\varphi = T_{x_0}\varphi + S_{x_0}f$ *eşitliği* $B_r(x_0)$ *yuvarında* $h.h.y$ *sağlanırsa* φ *fonksiyonu* $L\varphi = f$ *denkleminin* $W^m_{p)}\big(B_r(x_0)\big)$ *uzayında güçlü çözümüdür[37].*

Genelliği kaybetmeden $x = x_0$ noktasında eliptiklik şartının sağlandığı farz edilebilir. Öyleyse, $x = x_0$ noktasında J_{x_0} temel çözümü ve T_{x_0} ; S_{x_0} operatörleri $h.h.y$ iyi tanımlı olurlar.

İspat. Genelliği kaybetmeden, $x_0 = 0 \in \Omega$ olarak kabul edilecektir. L operatörünün $W^m_{p)}(r)$ uzayından $L_{p)}(r)$ uzayına sınırlı olduğu göz önünde bulundurulmalıdır, yani $L \in \big[W^m_{p)}(r); L_{p)}(r)\big]$ dir. $\varepsilon \in (0, p-1)$ keyfi bir sayısı verilsin ve $p_\varepsilon = p - \varepsilon$ ile gösterilsin. $\forall \varphi \in W^m_{p)}(r)$ fonksiyonu alınsın. $\varphi \in W^m_{p_\varepsilon}(r)$ olduğu açıktır. Lemma 4.2 'den yeterince küçük bazı $\delta > 0$ sayıları için $\varphi \in \overset{0}{W}{}^m_{p_\varepsilon}(r+\delta)$ olduğu görülür. Dolayısıyla, φ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ 'de kompakt desteklidir. Öyleyse, [44] kaynağında verilen lemmadan $W^m_{p_\varepsilon(r)}$ uzayında $\varphi = T_0\varphi + S_0L\varphi$ ilişkisi vardır, yani $W^m_{p_\varepsilon(r)}$ uzayında $I = T_0 + S_0L$ dir. $\phi = (L_0 - L)\varphi$ olduğu varsayılsın. Böylece,

$$\chi(x) = T_0\varphi = S_0(L - L_0)\varphi = S_0\phi = \int_{B(r+\delta)} J_0(x-y)\phi(y)dy\,, \quad x \in B(r+\delta)$$

elde edilir. $\phi \in L_{q_\varepsilon}(r+\delta)$. Düzgün ϕ fonksiyonları için $|\alpha| = m$ iken diferansiyel formülü

$$\partial^\alpha\chi(x) = \int_{B(r+\delta)} \partial^\alpha_x J_0(x-y)\phi(y)dy + C\phi(x) \tag{4.5}$$

sağlanır. Burada, C sabiti ϕ 'den bağımsızdır. Bu formül ile ilgili [44] kaynağına bakılabilir. $\partial^\alpha_x J_0(x-y)$ bir singüler çekirdektir ve $L_{p_\varepsilon}(r+\delta)$ uzayında singüler operatörün sınırlılığı (4.5) ifadesini $\phi \in L_{p_\varepsilon}(r+\delta)$ fonksiyonları için sağlar. Aynı şekilde $h.h.y\ x \in B(r+\delta)$ için de sağlanır. $L_{p_\varepsilon}(r+\delta)$ uzayında singüler operatörün sınırlılığı göz önüne alınırsa (4.5) formülü $h.h.y\ x \in B(r+\delta)$ üzerinde $\forall \phi \in L_{p)}(r+\delta)$ fonksiyonu için sağlanır. Öyleyse

$$\big\|\partial^\alpha\chi\big\|_{L_{p)}(r)} \le \big\|\partial^\alpha\chi\big\|_{L_{p)}(r+\delta)} \le c\big\|\phi\big\|_{L_{p)}(r+\delta)} \le c\big(\|L_0\varphi\|_{L_{p)}(r+\delta)} + \|L\varphi\|_{L_{p)}(r+\delta)}\big) \tag{4.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $c > 0$ sabiti φ 'den bağımsızdır. $|a_\alpha(0)| \le \|a_p\|_{L_\infty(r+\delta)}$, $\forall\alpha : |\alpha| \le m$ ve $B(r+\delta) \subset \Omega$ olduğu varsayılsın. Öyleyse (4.6) 'dan

$$\big\|\partial^\alpha\chi\big\|_{L_{p)}(r)} \le c\big\|\varphi\big\|_{W^m_{p)}(r+\delta)}\,,\ \forall\alpha : |\alpha| = m$$

elde edilir. Bu ilişkiden yararlanarak ve genişleme teoremi göz önüne alınarak

$$\left\|\partial^{\alpha}\chi\right\|_{L_{p)}(r)} \leq c\left\|\varphi\right\|_{W_{p)}^{m}(r)} \, , \, \forall\alpha : |\alpha| = m$$

sağlanır. $|\alpha| < m$ için $\partial^{\alpha} J_0$ türevleri singüler çekirdek olmadıklarından klasik duruma benzer şekilde, yani $W_p^m(\Omega)$ uzayındaki duruma benzer olarak, aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\left\|\partial^{\alpha}\chi\right\|_{L_{p)}(r)} \leq c\left\|\varphi\right\|_{W_{p)}^{m}(r)} \, , \, \forall\alpha : |\alpha| < m. \tag{4.7}$$

(4.7) ile verilen eşitsizlikten yararlanarak

$$\left\|T_0\varphi\right\|_{W_{p)}^{m}(r)} = \left\|\chi\right\|_{W_{p)}^{m}(r)} \leq c\left\|\varphi\right\|_{W_{p)}^{m}(r)}$$

elde edilir. Burada c, φ 'den bağımsız bir sabittir. Sonuç olarak, $T_0 \in \left[W_{p)}^{m}(r)\right]$ dır.

Benzer şekilde $S_0 \in [L_{p)}(r); W_{p)}^{m}(r)]$ olduğu görülebilir ve dolayısıyla $S_0 L \in \left[W_{p)}^{m}(r)\right]$ olduğu açıktır. Öyleyse, $W_{p_\varepsilon}^{m}(r)$ uzayında sağlanan $\varphi = T_0\varphi + S_0 L\varphi$ ifadesi, $W_{p)}^{m}(r)$ uzayında da benzer şekilde $I = T_0 + S_0 L$ olarak sağlanır. Böylelikle, lemmanın ilk kısmı ispatlanmış olur.

Bazı $f \in L_{p)}(r)$ fonksiyonları için $\varphi = T_0\varphi + S_0 f$ ifadesi sağlanır. Burada $\varphi \in W_{p)}^{m}(r)$ dır. $\varphi = T_0\varphi + S_0 L\varphi$ olduğu göz önüne alınırsa $S_0 L\varphi = S_0 f$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$L\varphi = L_0 S_0 L\varphi = L_0 S_0 f$$

olur. $B_r(x_0)$ üzerinde $h.h.y$ $L_0 S_0 f = f$ sağlanır(Teorem 4.1 ve $f \in L_{p_\varepsilon(r)}$ 'den görülür). Buradan, $S_0 \in \left[L_{p)}(r); W_{p)}^{m}(r)\right]$ ve $L_0 \in \left[W_{p)}^{m}(r); L_{p)}(r)\right]$ bilgilerinden yararlanarak $L_{p)}(r)$ uzayında $L_0 S_0 = I$ sağlandığı görülür. Sonuç olarak, $L\varphi = f$ elde edilir. ■

Bir sonraki lemma [34] makalesindeki ispat şemasına benzer şekilde ispatlanabilir.

Lemma 4.4. *L operatörü $x_0 \in \Omega$ noktasında $m - inci$ mertebeden, $P_{x_0})$ özelliğine sahip bir eliptik operatör ve $\varphi \in W_{p)}^{m}(B_r(x_0)), r > 0$ olsun. Öyleyse,*

$$\left\|T_{x_0}\varphi\right\|_{W_{p)}^{m}(B_r(x_0))} \leq \, \sigma(r) \, \left\|\varphi\right\|_{W_{p)}^{m}(B_r(x_0)}$$

olur. Burada, $\sigma(r) \to 0$, $r \to 0$ sabiti, sadece L_{x_0} operatörünün eliptiklik katsayılarına ve L operatörünün katsayılarına bağlıdır[37].

Lemma 4.4, [34] makalesine benzer şekilde, aşağıda verilen lokal güçlü çözümün

varlık teoreminin ifade edilmesini mümkün kılar.

Teorem 4.2. *L operatörü $x_0 \in \Omega$ noktasında $m-inci$ mertebeden, $P_{x_0})$ özelliğine sahip bir eliptik operatör ve $f \in L_{p)}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$ olsun. Öyleyse, yeterince küçük $r > 0$ için $Lu = f$ denkleminin $W^m_{p)}(B_r(x_0))$ uzayında bir güçlü lokal çözümü vardır[37].*

4.2.2 İç Schauder tip Eşitsizlikler

İç eşitsizliklerin ifade edilmesinde bir sonraki lemmadan yararlanılacaktır. Bu lemma, ayrılabilir duruma benzer bir yol ile ispatlanır[ispat için bakınız [34]]. Öncelikle, $\omega(.)$ fonksiyonu verilecektir. $\omega(.)$, $[0,1]$ üzerinde sonsuz mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve

$$\omega(t) \equiv \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{1}{3}\,, \\ 0, & \frac{2}{3} < t \le 1\,. \end{cases}$$

ile verilsin. $\forall\, R_1, R_2 : 0 < R_1 < R_2$ için

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R_1\,, \\ \omega\left(\dfrac{|x| - R_1}{R_2 - R_1}\right), & R_1 < |x| < R_2\,. \end{cases}$$

olarak alınacaktır. Buradan, aşağıdaki lemma geçerlidir.

Lemma 4.5. *$0 < R_1 < R_2$ olacak şekilde her R_1 için*

$$\|\xi\|_{C^m(R_2)} \;\le\; C\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}$$

eşitsizliğini sağlayan $C > 0$ sabiti vardır. Burada C, sadece R_2 ve $\omega(\cdot)$ 'ya bağlıdır[34].

Bu lemmayı ve alınan ilgili diğer sonuçları kullanarak [34] makalesine benzer şekilde aşağıdaki lemma ifade edilir.

Lemma 4.6. *$m-inci$ mertebeden L eliptik operatörünün katsayıları $a_\alpha \in C(\overline{B_{R_2}})$, $\forall \alpha : |\alpha| = m$; $a_\alpha \in L_\infty(B_{R_2})$, $\forall \alpha : |\alpha| < m$ şartını sağlasın. Öyleyse, $\forall R_1 \in (0, R_2)$ ve $\forall u \in W^m_{p)}(R_2)$ için*

$$\|u\|_{W^m_{p)}(R_1)} \le c\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)^{-m}\left(\|Lu\|_{L_{p)}(R_2)} + \|u\|_{W^{m-1}_{p)}(R_2)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $c > 0$ sabiti, R_1 ve u 'dan bağımsız bir sabittir, sadece R_2 'ye bağımlı olabilir[37].

Benzer şekilde, [34] makalesinde olduğu gibi, Teorem 4.1 göz önüne alınırsa bir sonraki lemma ispatlanabilir.

Lemma 4.7. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir domain ve sınırı $\partial\Omega \in C^{(m)}$ olsun. Öyleyse, $\forall k = \overline{1, m-1}$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için*

$$\big\|\varphi\big\|_{W^k_{p)}(\Omega)} \leq \varepsilon \big\|\varphi\big\|_{W^{k+1}_{p)}(\Omega)} + c\,\varepsilon^{-k}\big\|\varphi\big\|_{L_{p)}(\Omega)}\,, \quad \forall \varphi \in W^m_{p)}(\Omega)$$

eşitsizliğini sağlayan ve sadece n , p ve Teorem 4.1 'deki katsayılara bağlı olan bir $c > 0$ sabiti vardır[37].

Bu sonuç, [34] makalesinde Teorem 3.5'in ispat akışına benzer olarak, bir sonraki ana teoremin ispatlanmasında kullanılır.

Teorem 4.3. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir sınırlı domain olsun ve L eliptik operatörün katsayıları*

(i) $a_\alpha \in C(\overline{\Omega})\,,\ \forall \alpha : |\alpha| = m$

(ii) $a_\alpha \in L_\infty(\Omega)\,,\ \forall \alpha : |\alpha| < m$

şartlarını sağlasın. $\Omega_0 \subset \Omega$ keyfi kompakt küme olsun. Öyleyse,

$$\|u\|_{W^m_{p)}(\Omega_0)} \leq c\big(\|Lu\|_{L_{p)}(\Omega)} + \|u\|_{L_{p)}(\Omega)}\big)\,, \quad \forall u \in W^m_{p)}(\Omega)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $c > 0$ sabiti sadece m , Ω_0 , Ω ve eliptiklik sabiti ile L operatörünün katsayılarına bağlıdır[37].

4.3 Ağırlıklı Grand Sobolev Uzaylarında Ayrılabilir Durumda Lokal Çözülebilirlik

Bölüm 1' den hatırlanacağı üzere; $\rho : \Omega \to [0, +\infty]$ bir ağırlık fonksiyonu için, ρ ölçülebilir bir fonksiyon ve $\big|\rho^{-1}\{0; +\infty\}\big| = 0$, $L_{p),\rho}(\Omega)$ ağırlıklı grand Lebesgue uzayının normu

$$\big\|f\big\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega \big|f\big|^{p-\varepsilon}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

ve $L_{p),\rho}(\Omega)$ uzayına karşılık gelen $W^m_{p),\rho}(\Omega)$ Sobolev uzayının normu

$$\left\|f\right\|_{W^m_{p),\rho}(\Omega)} \;=\; \sum_{|\alpha|\leq m} \left\|\partial^\alpha f\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)}$$

idi[38].

Tanım 4.3 (Borel Ölçüsü)**.** $(M;\tau)$ bir Hausdorff topolojik uzayı ve $\mathscr{B}$ kümesi, M 'nin Borel kümelerinin bir σ-cebiri olsun.

i) Her kompakt K kümesi için $\mu(K) < \infty$ dır.

ii) $A \in \mathscr{B}$ ise

$$\mu\,(A) \;=\; \inf\,\left\{\,\mu\,(C) : C \text{ bir açık küme ve } B \subset C\right\}$$

dır.

iii) C kümesi M 'nin bir açık alt kümesi ise

$$\mu\,(C) \;=\; \inf\,\left\{\,\mu\,(K) : K \text{ bir kompakt küme ve } K \subset C\right\}$$

özelliklerini sağlayan bir $\mu : \mathscr{B} \to [0,\infty]$ ölçüsüne düzgün Borel ölçüsü denir[38].

Bundan sonraki kısımda kaynak [69] sayfa 262'de verilen sonuçtan yararlanılacaktır.

Teorem 4.4. *μ fonksiyonu, bir M lokal kompakt Hausdorff topolojik uzayı üzerinde bir düzgün Borel ölçüsü olsun. Öyleyse; $L_p(\mu)\ ,\ 1 \leq p < \infty\ ,$ uzayında kompakt destekli tüm sürekli fonksiyonlar ailesi norm yoğundur. Burada,*

$$\left\|f\right\|_{L_p(\mu)} \;=\; \left(\int_M |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile tanımlanan $L_p(\mu)$ uzayı M üzerinde ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayıdır[69].

Bu başlıkta; bundan sonraki tanım, teorem ve diğer ifadelerde Ω üzerinde tanımlı her fonksiyonun $\mathbb{R}^n\backslash\overline{\Omega}$ kümesine sıfır ile genişletilmiş olduğu varsayılacaktır. $\delta \in \mathbb{R}^n$ keyfi bir vektör olmak üzere T_δ bir öteleme operatörü, yani $\big(T_\delta f\big)(x) = f(x+\delta)\ ,\ \forall x \in \Omega$, olsun.

$${}_sL_{p),\rho}(\Omega) \;=\; \left\{\, f \in L_{p),\rho}(\Omega) : \|T_\delta f - f\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \;\to 0\ ,\ \delta \;\to 0\,\right\}$$

uzayı tanımlansın. $\|.\|_{L_{p),\rho}}$ normu ile ${}_sL_{p),\rho}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı ve dolayısıyla $L_{p),\rho}(\Omega)$ 'nın bir alt uzayı olur. Ayrıca, eğer $\rho \in L_1(\Omega)$ ise $\forall \varepsilon \in (0, p-1)$ için

$$L_{p,\rho}(\Omega) \subset {}_sL_{p),\rho}(\Omega) \subset L_{p),\rho}(\Omega) \subset L_{p_\varepsilon,\,\rho}(\Omega), \quad p_\varepsilon = p - \varepsilon$$

sürekli gömmeleri sağlanır. Bu ve diğer sonuçlar için detaylı bilgiye [70–72] kaynaklarından ulaşılabilir.

Grand Sobolev uzayı için

$$W_{p)}(\Omega) = \bigcup_{\varepsilon \in (0,\, p-1)} L_{p'_\varepsilon}(\Omega)$$

olduğu kabul edilsin. Bir sonraki lemma doğrudur.

Lemma 4.8. *$\rho^{-1} \in W_{p)}(\Omega)$ olsun. Öyleyse, $L_{p),\rho}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ sürekli gömmesi doğrudur[38].*

İspat. $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ için $\rho \in L_{p'_{\varepsilon_0}}(\Omega)$ olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\int_\Omega |f|dx = \int_\Omega |f\rho|\rho^{-1}dx \le \varepsilon_0^{\frac{1}{p_\varepsilon}} \|f\rho\|_{L_{p_{\varepsilon_0}}(\Omega)} \varepsilon_0^{-\frac{1}{p_{\varepsilon_0}}} \|\rho^{-1}\|_{L_{p'_{\varepsilon_0}}(\Omega)} \le c_{\varepsilon_0} \|f\|_{L_{p),\rho}(\Omega)}$$

elde edilir. ■

Ağırlıksız duruma tamamiyle benzer şekilde, diferansiyellenebilir fonksiyonların ${}_sL_{p),\rho}(\Omega)$ uzayında yoğun olduğuna ilişkin bir sonraki lemma ispatlanmıştır.

Lemma 4.9. *$\rho \in L_1(\Omega)$ olsun. Öyleyse, $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = {}_sL_{p),\rho}(\Omega)$ dir. Burada, kapanış $\|.\|_{L_{p),\rho}}$ normuna göre alınmıştır[38].*

Bu lemmayı ispatlayabilmek için öncelikle $L_{p),\rho}(\Omega)$ uzayında Minkowski eşitsizliği ispatlanacaktır.

Önerme 4.1 (Minkowski Eşitsizliği)**.** *$\left(X; X_\sigma; \mu\right)$ uzayı, X 'in X_σ alt kümelerinin σ-cebiri üzerinde σ-toplamsal $\mu(\cdot)$ ölçüsüne sahip bir ölçülebilir uzay olsun. $\rho(\cdot)$ fonksiyonu Ω üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve $1 < p < +\infty$ olsun. Öyleyse,*

$$\left\| \int_X F(x;\cdot)\, d\mu(x) \right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \le \int_X \left\| F(x;\cdot) \right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} d\mu(x) \tag{4.8}$$

sağlanır[38].

İspat. $\varepsilon \in (0,\, p-1)$ keyfi bir sayı olsun. $p_\varepsilon = p-\varepsilon$ olmak üzere $L_{p_\varepsilon,\,\rho}(\Omega)$ uzayında sağlanmış olan integraller için Minkowski eşitsizliğini kullanarak

$$\left\| \int_X F(x;.)\, d\mu(x) \right\|_{L_{p_\varepsilon,\,\rho}(\Omega)} \leq \int_X \left\| F(x;.) \right\|_{L_{p_\varepsilon,\,\rho}(\Omega)} d\mu(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\varepsilon^{\frac{1}{p_\varepsilon}} \left\| \int_X F(x;.)\, d\mu(x) \right\|_{L_{p_\varepsilon,\,\rho}(\Omega)} \leq$$

$$\leq \int_X \sup_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\frac{1}{p_\varepsilon}} \left\| F(x;.) \right\|_{L_{p_\varepsilon,\,\rho}(\Omega)} d\mu(x) \,=\, \int_X \left\| F(x;.) \right\|_{L_{p),\,\rho}(\Omega)} d\mu(x)$$

olur. Buradan, (4.8) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. ■

(4.8) eşitsizliğinden yararlanarak Lemma 4.9 aşağıdaki gibi ispatlanır.

İspat. $\omega_\varepsilon(x)$ bir ε-şapka(ε-cap) olsun ve

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2} \right), & |x| < \varepsilon\,, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon\,. \end{cases}$$

ile verilsin. Burada c_ε bir sabittir ve

$$\int_{R^n} \omega_\varepsilon(x)\, dx \,=\, 1$$

sağlanır. $f \in {}_s L_{p),\rho}(\Omega)$ olsun ve

$$f_\varepsilon(x) \,=\, (f * \omega_\varepsilon)(x) = \int_{R^n} f(x-y)\omega_\varepsilon(y)\, dy$$

konvolüsyonu göz önüne alınsın. Buradan, $f_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\left\| f_\varepsilon - f \right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \,=\, \left\| \int_{R^n} \omega_\varepsilon(y) \big(f(\cdot - y) - f(\cdot) \big)\, dy \right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \leq$$

$$\leq \int_{R^n} \omega_\varepsilon(y) \left\| f(\cdot - y) - f(\cdot) \right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} dy \,\leq\, \sup_{|y|<\varepsilon} \left\| f(\cdot - y) - f(\cdot) \right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \to 0\,,\ \varepsilon \to 0.$$

elde edilir. Diğer taraftan, $f_\varepsilon \in L_{p,\rho}(\Omega)$ olduğundan eğer $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L_{p,\rho}(\Omega)$ ise

$\exists\{g_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ olur, öyle ki

$$\left\|f_\varepsilon - g_n\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \to 0\ ,\ n \to \infty$$

sağlanır. Sonuç olarak,

$$\left\|f - g_n\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \leq \left\|f_\varepsilon - g_n\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} + \left\|f_\varepsilon - f\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)}$$

olduğu görülür. $\exists c > 0$ olduğundan

$$\|\varphi\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \leq c\|\varphi\|_{L_{p),\rho}(\Omega)}\ ,\ \forall\varphi \in L_{p),\rho}(\Omega)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left\|f_\varepsilon - g_n\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \leq c\left\|f_\varepsilon - g_n\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \to 0\ ,\ n \to \infty$$

olur.

Ω üzerinde $\mu(E) = \int_E \rho dx$ ile verilen ölçü, $\rho \in L_1(\Omega)$ koşulu altında düzgün Borel ölçüsü olduğu açıktır. Sonuç olarak, Teorem 4.4 'ten C_0^∞ uzayı $L_{p,\rho}(\Omega)$ elde edilir. ■

Diğer taraftan, ayrılabilir ağırlıklı Sobolev uzayı da

$${}_sW_{p),\rho}(\Omega) = \left\{ f \in W_{p)}^m(\Omega) : \|T_\delta f - f\|_{W_{p)}^m(\Omega)} \to 0\ ,\ \delta \to 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Ana sonuçları alabilmek için ağırlık fonksiyonlarının $A_p(\Omega)$ Muckenhoupt sınıfını tanımlamak gereklidir. Eğer ρ ağırlık fonksiyonu

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1} \frac{1}{|E|}\left\|\rho^{\frac{1}{p}}\chi_E\right\|_{L_p(\Omega)}\left\|\rho^{-\frac{1}{p}}\chi_E\right\|_{L_{p'}(\Omega)} < +\infty$$

şartını sağlarsa $f \in A_p(\Omega)$ olur.

Aşağıda verilen

$$k(x) = \frac{\omega(x)}{|x|^n}$$

singüler çekirdeği göz önüne alınsın. Burada, $\omega(x)$ pozitif, sıfırıncı dereceden homojen, sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyondur ve

$$\int_{|x|=1} \omega(x)\, d\sigma = 0$$

koşulunu sağlar. Burada, $d\sigma$ birim küre üzerinde yüzey elemanıdır. Karşılık gelen singüler integral K ile gösterilsin ve

$$(Kf)(x) \,=\, k * f(x) \,=\, \int_{\Omega} f(y)k(x-y)\,dy$$

ile ifade edilsin.

Bir sonraki teorem [19] kaynağında ispatlanmıştır.

Teorem 4.5. $K \in \left[L_{p),\rho}(\Omega)\right]$ *ancak ve ancak* $\rho \in A_p(\Omega)$*[19].*

Teorem 4.6. $\rho \,\in\, A_p(\Omega)\,,\; 1 \,<\, p \,<\, +\infty$*, alınsın. Öyleyse,* $K \,\in\, \left[{}_s\, L_{p),\rho}(\Omega)\right]$ *olur[38].*

İspat. $\rho \,\in\, A_p(\Omega)$ alınsın. Buradan, $K \in \left[\, L_{p),\rho}(\Omega)\right]$ dır. Teoremi ispatlamak için

$$\left\|T_\delta Kf - Kf\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \to 0\;,\; \delta \to 0\;,\; \forall f \in {}_s\, L_{p),\rho}(\Omega) \tag{4.9}$$

$f(x) = 0\;,\; \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(T_\delta Kf\right)(x) = (Kf)(x+\delta) \,=\, \int_{\mathbb{R}^n} k\,(x+\delta-y) f(y)\,dy \,=$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} k\,(x-y) f(x+\delta)\,dy \,=\, \left(T_\delta Kf\right)(x)$$

olduğu görülür. Öyleyse (4.9) 'dan

$$\left\|T_\delta Kf - Kf\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \,=\, \|K(T_\delta f - f)\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \,\leq$$

$$\leq \left\|K\right\|_{[\,L_{p),\rho}(\Omega)]} \left\|T_\delta f - f\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)} \to 0\;,\; \delta \to 0$$

elde edilir. ■

Şimdi ağırlıklı Lebesgue uzayında konvolüsyonun sınırlılığı ile ilgili bilgiler verilecektir. $L_{p,\rho}(\Omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$\left\|f\right\|_{L_{p,\rho}(\Omega)} \,=\, \left(\int_{\Omega} \left|f(x)\right|^p \rho(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}\;,\; 1 \leq p < \infty$$

normu ile verilir. Bu uzay için $\Omega = \mathbb{R}^n$ durumunda $L_{p,\rho}$ gösterimi ve $\rho(x) = |x|^{\alpha p}$ için $L(p;\alpha)$ gösterimi kullanılacaktır. $\mathbb{R}^n$ 'de iki fonksiyon için

$$(\,f * g)\,(x) \,=\, \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\,dy\,,\; x \in R^n$$

ile verilen konvolüsyon göz önüne alınsın. X, Y, Z uzayları için $X * Y \subset Z$ şeklindeki ilişki kullanılacaktır. Yani $f \in X$, $g \in Y$ ise $f * g \in Z$ olur ve

$$\| f * g \|_Z \leq K \| f \|_X \| g \|_Y$$

sağlanır. Burada, K pozitif sabiti f ve g fonksiyonlarından bağımsızdır.

Teorem 4.7. *Eğer*

i) $\dfrac{1}{p_3} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3}{n} - 1 ;\ 1 < p_1, p_2, p_3 < \infty ;\ \dfrac{1}{p_3} \leq \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2};$

ii) $\tilde{p}_1 \leq n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) ;\ \tilde{p}_2 < n\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right) ;\ \tilde{p}_3 < \dfrac{n}{p_3};$

iii) $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 ,\ \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 ,\ \tilde{p}_3 + \tilde{p}_1 \geq 0$

koşulları sağlanırsa

$$L(p_1; \tilde{p}_1) * L(p_2; \tilde{p}_2) \subset L(p_3; -\tilde{p}_3)$$

olur[73].

$r > 0$ sabit bir sayı olsun ve

$$I(x) = \int_{|y|<r} |x - y|^{m-n-|\alpha|} \, |\psi(y)| \, dy \tag{4.10}$$

integrali göz önüne alınsın. Burada, $\alpha : |\alpha| < m$ herhangi bir multiindekstir. 4.7 teoremi (4.10) integraline uygulanacaktır. $\tilde{p}_{1,0} < n$ için

$$\int_{|x-y|<r} \frac{dy}{|x - y|^{\tilde{p}_{1,0}}} = \frac{|B_1|}{n - \tilde{p}_{1,0}} r^{n - \tilde{p}_{1,0}} , \ \forall x \in R^n$$

formülü kullanılacaktır. Burada $|B_1|$, R^n 'de B_1 birim yuvarının hacmidir(bakınız [49]).

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{m-n-|\alpha|} , & |x| < r , \\ 0, & |x| \geq r. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \psi(x) , & |x| < r , \\ 0, & |x| \geq r. \end{cases}$$

fonksiyonları tanımlansın. $\operatorname{supp}_{(f*g)} \subset B_{2r}$ ve $I(x) = (f * g)(x) \, , \forall x \in B_r$ olduğu açıktır. Yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı için $p = 1 + \delta$ olarak alınsın ve

$\tilde{p}_{1,1} = n - m + |\alpha|$ olsun. $n - m \le \tilde{p}_{1,1} \le n - 1$ olduğu açıktır.

$$\left\|f\right\|^{p_2}_{L(p_2;\tilde{p}_2)} = \int_{R^n} \left|f\right|^{p_2} |x|^{p_2\tilde{p}_2} dx = \int_{|x|<r} \frac{dx}{|x|^{(\tilde{p}_{1,1}-\tilde{p}_2)p_2}} = C_{\beta;p_2}\, r^{n-(\tilde{p}_{1,1}-\tilde{p}_2)p_2}$$

normu göz önüne alınsın. Burada, $C_{\tilde{p}_2;p_2} = \frac{|B_1|}{n-(\tilde{p}_{1,1}-\tilde{p}_2)p_2}$ dir. 4.7 teoremi (4.10) ile verilen $I(\cdot)$ integraline uygulanırsa

$$\left\|I(\cdot)\right\|_{L(p_3;-\tilde{p}_3)} \le C\left\|g\right\|_{L(p_1;\tilde{p}_1)}\left\|f\right\|_{L(p_2;\tilde{p}_2)} \tag{4.11}$$

elde edilir.

$p_k;\, \tilde{p}_k;\ k = \overline{1,3}$ parametreleri 4.7 teoremi $i) - iii)$ şartlarına göre seçilsin. $\tilde{p}_1 = -\tilde{p}_3;\, p_3 = p;\, p_1 = p - \varepsilon_0$ olarak alınsın. Burada, $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ ve $p > 1$ herhangi bir sayıdır. $\frac{1}{p} \le \frac{1}{p-\varepsilon_0} + \frac{1}{p_2}$ olduğu açıktır. Yeterince küçük $\delta_0 > 0$ sayısı için $\tilde{p}_2 = n\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) - \delta_0$ olsun. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p-\varepsilon_0} + \frac{1}{p_2} + 1 - \frac{1}{p_2} - \frac{\delta_0}{n} - 1 = \frac{1}{p-\varepsilon_0} - \frac{\delta_0}{n}$$

sağlanır. Dolayısıyla, bu ilişkiler dikkate alınarak $\varepsilon_0 = \frac{\delta_0 p^2}{n+\delta_0 p}$ şeklinde seçilir. Yeterince küçük δ_0 sayısı için $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ olur. $\tilde{p}_1$ parametresi için

$$\tilde{p}_3 < \frac{n}{p} \Rightarrow \tilde{p}_1 > -\frac{n}{p};$$

$$\tilde{p}_1 < n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \Rightarrow \tilde{p}_1 < n\left(1 - \frac{1}{p-\varepsilon_0}\right);$$

$$\theta \ge -\tilde{p}_2 \Rightarrow \tilde{p}_1 \ge -n\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) + \delta_0;$$

$$\tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 \ge 0 \Rightarrow -\tilde{p}_1 \ge -\tilde{p}_2 \Rightarrow \tilde{p}_1 \le \tilde{p}_2 \Rightarrow \tilde{p}_1 \le n\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) - \delta_0,$$

şartları elde edilir. $p_2 = p - \varepsilon_0$ alınsın. Öyleyse, sonuç olarak α için

$$A_{n;p} < \alpha \le n\left(1 - \frac{1}{p-\varepsilon_0}\right) - \delta_0$$

şartı elde edilir. Burada, $A_{n;p} = \max\left\{-\frac{n}{p}; -n\left(1 - \frac{1}{p-\varepsilon_0} + \delta_0\right)\right\}$ dır. Tüm bu şartlar

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta_0 p^2}{n+\delta_0 p}\ ; \qquad A_{n;p} < \alpha \le n\left(1 - \frac{1}{p-\varepsilon_0}\right) - \delta_0 \tag{4.12}$$

şeklinde özetlenebilir. Burada, $\delta_0 : 0 < \delta_0 < +\infty$ herhangi bir sayıdır. Sonuç

olarak, $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ ve $\tilde{p}_3$ parametreleri ile ilgili (4.12) 'den 4.7 teoreminin $i) - iii)$ şartlarının sağlandığı görülür.

$$n-(\tilde{p}_{1,1}-\tilde{p}_2)p_2 = n-\left(n-m+|\alpha|-n\left(1-\frac{1}{p_2}\right)+\delta_0\right)p_2 = \big(m-|\alpha|+\delta_0\big)p_2$$

ifadesi göz önüne alınsın. Eğer $|\alpha| < m$ ise

$$\left(n-m+|\alpha|-n\left(1-\frac{1}{p_2}\right)+\delta_0\right)p_2 \,>\, 0\,,\;\; 0<\delta_0<1$$

olur. (4.11) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\big\|I(\cdot)\big\|_{L(p;\tilde{p}_1)} \,\leq\, c\big\|f\big\|_{L(p_2;\tilde{p}_2)}\big\|g\big\|_{L(p-\varepsilon_0;\tilde{p}_1)} \,\leq\, cr^{m-|\alpha|+\delta_0}\big\|g\big\|_{L_{p),\tilde{p}_1}(B_r)} \qquad (4.13)$$

elde edilir. (4.12) 'den $\rho(x) = |x|^{\alpha p} \in L_1(B_r)$ olur. Her $\varepsilon_0 \in (0, p-1)$ için aşağıda verilen

$$L_{p,\rho}(\Omega) \,\subset\, L_{p),\rho}(\Omega) \,\subset\, L_{p-\varepsilon_0,\,\rho}(\Omega)$$

sürekli gömmelerinden

$$\big\|I(\cdot)\big\|_{L_{p),\rho}(r)} \,\leq\, C_r\big\|I(\cdot)\big\|_{L_{p,\rho}(r)}$$

sağlanır. Burada, C_r sabiti sadece $r > 0$ sayısına bağlıdır. Eğer $r \leq r_0$ ise C_r sabiti r 'den bağımsız olarak alınabilir. Aslında,

$$\big\|I(\cdot)\big\|_{L_{p),\rho}(r)} \,=\, \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_{B_r}\big|I(\cdot)\big|^{p-\varepsilon}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \,\leq$$

$$\leq \left|\tilde{p}_{1_\varepsilon} = \frac{p}{p-\varepsilon}\right| \leq \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_{B_r}\big|I(\cdot)\big|^{p}\rho\,dx\right)^{p}\left(\int_{B_r}\rho dx\right)^{\frac{1}{\alpha'_\varepsilon(p-\varepsilon)}}$$

olur. Burada,

$$\frac{1}{\tilde{p}_{1_\varepsilon}}+\frac{1}{\tilde{p}'_{1_\varepsilon}} = 1 \,\Rightarrow\, \frac{1}{\tilde{p}'_{1_\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{p} \,\Rightarrow\, \frac{1}{\tilde{p}'_{1_\varepsilon}(p-\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)} \leq \frac{p-1}{p^2}$$

şeklindedir. Sonuç olarak,

$$\big\|I(\cdot)\big\|_{L_{p),\rho}(r)} \,\leq\, C_{r_0}\big\|I(\cdot)\big\|_{L_{p,\rho}(r)}$$

elde edilir. Burada, $C_{r_0} \,=\, \big(p-1\big)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_{r_0}}\rho\,dx\right)^{\frac{p-1}{p^2}}$ dır.

Dolayısıyla aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 4.10. *$\rho(x) = |x|^{\alpha p}$ ve $A_{n;p} = \max\left\{ -\frac{n}{p}; -n\left(1 - \frac{1}{p-\varepsilon_0}\right) + \delta_0 \right\}$ olsun. Burada, $\varepsilon_0 = \frac{\delta_0 p^2}{n+\delta_0 p}$ ve $\delta > 0$ yeterince küçük bir sayıdır. Eğer*

$$A_{n;p} < \alpha \leq n\left(1 - \frac{1}{p-\varepsilon_0}\right) - \delta_0$$

sağlanırsa her $r_0 > 0$ için $C_{r_0} : \forall r \in (0, r_0)$ sabiti vardır öyle ki

$$\left\|I(\cdot)\right\|_{L_{p),\rho}(B_r)} \leq C_{r_0}\, r^{m-|\alpha|+\delta_0} \left\|\psi\right\|_{L_{p),\rho}(B_r)}$$

eşitsizliği sağlanır[38].

Bu lemmanın doğruluğu (4.13) eşitsizliğinden ve $g(\cdot)$ ifadesinden görülür.

4.3.1 $N^m_{p),\rho}(\Omega)$ uzayı ve Ana Lemma

${}_sW_{p),\rho}(\Omega)$ uzayında $\|\cdot\|_{W^m_{p),\rho}(\Omega)}$ normu ile birlikte

$$\left\|f\right\|_{N^m_{p),\rho}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} d_\Omega^{|\alpha|-\frac{n}{p}} \left\|\partial^p f\right\|_{L_{p),\rho}(\Omega)}$$

normu göz önüne alınsın. Burada, $d_\Omega = diam\,\Omega$ dır ve bu normun ürettiği uzay $N^m_{p),\rho}(\Omega)$ ile gösterilecektir. $N^0_{p),\rho}(\Omega) = N_{p),\rho}(\Omega)$ olarak kabul edilecektir. $\|\cdot\|_{W^m_{p),\rho}(\Omega)}$ ile $\|\cdot\|_{N^m_{p),\rho}(\Omega)}$ uzaylarının normlarının denk olduğu açıktır ve dolayısıyla $W^m_{p),\rho}(\Omega)$ ile $N^m_{p),\rho}(\Omega)$ uzayları çakışır. Ayrıca,

$${}_sN_{p),\rho}(\Omega) = \left\{ f \in N^m_{p,\rho}(\Omega) : \left\|T_\delta f - f\right\|_{N^m_{p,\rho}(\Omega)} \to 0, \delta \to 0 \right\}$$

olduğu kabul edilecektir.

(4.1) ile verilen $a_\alpha(x)$ katsayılarına sahip $m - inci$ mertebeden L eliptik operatörü ve (4.4) ile verilen T_{x_0} operatörü göz önüne alınsın. $x_0 = 0$ noktası için S_{x_0}, L_{x_0} ve T_{x_0} operatörleri sırasıyla S_0, L_0 ve T_0 ile gösterilsin. Bu bilgiler kullanılarak aşağıdaki ana lemma ispatlanacaktır.

Lemma 4.11 (Ana Lemma). *$x_0 \in \Omega$ noktasında $m - inci$ mertebeden L eliptik operatörü $P_{x_0})$ özelliğine sahip olsun. $\varphi \in N^m_{p),\rho}(B_r(x_0))$ alınsın ve φ fonksiyonu $|x - x_0| = r$ komşuluğunda sıfıra eşit olsun. $\rho(x) = |x|^{\alpha p}$ ağırlık fonksiyonu Lemma 4.10 'un tüm şartlarını sağlasın. Öyleyse,*

$$\left\|T_{x_0}\varphi\right\|_{N^m_{p),\rho}(B_r(x_0))} \leq \sigma(r) \left\|\varphi\right\|_{N^m_{p),\rho}(B_r(x_0))}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\sigma(r) \to 0\,,\ r \to 0\,,$ *fonksiyonu sadece* L *operatörünün katsayıları üzerindeki* L_{x_0} *eliptiklik sabitine bağlıdır[38].*

İspat. [36] kaynağında kullanılan ispat şemasından yararlanılacaktır. $x_0 = 0$ noktasında $|\alpha| = m$ için $a_\alpha(\cdot)$ fonksiyonunun değerinden kastedilen bu noktada P_{x_0}) özelliğinden karşılık gelen fonksiyonun değeridir. Kolaylık açısından, $r < 1$ iken $n \geq 3$ ve tektir. [44] kaynağından yararlanarak

$$\psi = (L_0 - L)\varphi = \psi_1 + \psi_2,$$

$$\psi_1(x) = \sum_{|\alpha|=m} (a_\alpha(0) - a_\alpha(x))\partial^\alpha\varphi(x) = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)$$

olduğu varsayılacaktır. Burada, $b_\alpha(x) = a_\alpha(0) - a_\alpha(x)$ ve

$$\psi_2(x) = -\sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)$$

dir. $b_\alpha(0) = 0$ olduğu açıktır ve sonuç olarak $\sup_{|x|<r} |b_\alpha(x)| = \overline{\overline{o}}(1)\,,\ r \to 0$ dır. Buradan,

$$\|\psi_1\|_{L_{p),\rho}(r)} \leq \overline{\overline{o}}(1) \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^p\varphi\|_{L_{p),\rho}(r)}\,,\ \rho \to 0$$

olduğu görülür. $\chi = T_0\varphi$ ile gösterilsin. T_0 için verilen ifade göz önüne alınırsa

$$\chi = S_0\,(L_0 - L)\,\varphi = S_0\,\psi = \int_{B_r} J_0(x-y)\,\psi(y)\,dy$$

elde edilir. $|\alpha| < m$ için

$$\partial^\alpha\chi(x) = \int_{B_r} \partial_x^\alpha\, J_0(x-y)\psi(y)\,dy$$

olur. Bu durumda, $\partial^\alpha J_0$ türevleri için

$$\left|\partial^\alpha J_0(x)\right| \leq c\,|x|^{m-n-|p|}$$

sağlanır. Buradan, $\partial^\alpha\chi$ için

$$\left|\partial^\alpha\chi(x)\right| \leq c\int_{|y|<r} |x-y|^{m-n-|p|}\left|\,\psi(y)\right|dy \tag{4.14}$$

elde edilir.

Bu adımdan sonra $\alpha < n$ için

$$\int_{|x-y|<r} \frac{dy}{|x-y|^{\alpha}} = \frac{|B_1| r^{n-\alpha}}{n-\alpha}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.15}$$

formülü kullanılacaktır. Burada, $|B_1|$ ifadesi B_1 birim yuvarının $\mathbb{R}^n$ 'deki hacmidir [**35**]. $\varepsilon \in (0, p-1)$ herhangi bir sayı olsun. 4.7 teoremi bu integrale uygulanırsa

$$I(x) = \int_{|y|<r} |x-y|^{m-n-|\alpha|} |\psi(y)| dy$$

elde edilir. 4.10 lemması göz önüne alınırsa $\left\|\partial^{\alpha}\chi\right\|_{L_{p),\,\rho}(r)}$ için

$$\left\|\partial^{\alpha}\chi\right\|_{L_{p),\,\rho}(r)} \le c_{r_0}\, r^{m-|\alpha|+\delta_0} \left\|\psi\right\|_{L_{p),\,\rho}(r)}$$

olur. Burada, $\forall r \in (0, r_0)$ için $\delta_0 > 0$ yeterince küçük bir sayıdır ve c_{r_0} sabiti r 'den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten

$$r^{|\alpha|} \left\|\partial^{\alpha}\chi\right\|_{L_{p),\rho}(r)} \le C_{r_0} r^{m} \left\|\psi\right\|_{L_{p),\rho}(r)}\,,\ \forall \alpha : |\alpha| < m$$

elde edilir. $\|\psi_1\|_{L_{p)}(r)}$ için sağlanan eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$r^{|\alpha|} \left\|\partial^{\alpha}\chi\right\|_{L_{p),\rho}(r)} \le c r^{m} \big(\|\psi_1\|_{L_{p),\rho}(r)} + \|\psi_2\|_{L_{p),\rho}(r)} \big) \le$$

$$\le c r^{m} \left(\overline{\overline{o}}(1) \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^{\alpha}\varphi\|_{L_{p),\rho}(r)} + \sum_{|\alpha|<m} \|\partial^{\alpha}\varphi\|_{L_{p),\rho}(r)} \right)$$

$$r^{|p|-\frac{n}{p}} \left\|\partial^{\alpha}\chi\right\|_{L_{p),\,\rho}(r)} \le$$

$$\le c \left(\overline{\overline{o}}(1) \sum_{|\alpha|=m} r^{m-\frac{n}{p}} \left\|\partial^{\alpha}\varphi\right\|_{L_{p),\rho}(r)} + r^{m-1} \sum_{|\alpha|<m} r^{|\alpha|-\frac{n}{p}} \left\|\partial^{\alpha}\varphi\right\|_{L_{p),\rho}(r)} \right) =$$

$$= \overline{\overline{o}}(1)\, \|\varphi\|_{N_{p),\rho}(r)}\,,\ r \to 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$r^{|\alpha|-\frac{n}{p}} \left\|\partial^{\alpha}\chi\right\|_{L_{p),\rho}(r)} \le \overline{\overline{o}}(1) \left\|\varphi\right\|_{N_{p),\rho}(r)}\,,\ r \to 0\,,\ \forall |\alpha| < m \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

$|\alpha| = m$ için $\|\partial^{\alpha}\chi\|_{L_{p),\rho}(r)}$ bir eşitsizlik elde edilecektir. Bu durum için

$$\partial^{\alpha}\chi(x) = \int_{B_r} \partial^{\alpha} J_0(x-y)\, \psi(y)\, dy + c\psi(x) \tag{4.17}$$

ifadesi verilebilir[49]. Dolayısıyla $\partial^{\alpha} J_0(x)$ bir singüler çekirdek olur. 4.10 lemmasının α üzerindeki şartlarından $\rho \in A_p(r)$ olduğu görülür. Burada, $\rho(x) = |x|^{\alpha p}$ şeklindedir. Bu sonuçla ilgili detaylara [74] kaynağından ulaşılabilir. 4.5 teoreminden $K \in \left[L_{p),\rho}(r)\right]$ sağlanır. Teorem 4.5 uygulanırsa (4.17) 'den

$$\|\partial^{\alpha}\chi\|_{L_{p),\rho}(r)} \leq c\|\psi\|_{L_{p),\rho}(r)}\,,\ |\alpha| = m$$

olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$r^{m-\frac{n}{p}}\|\partial^{\alpha}\chi\|_{L_{p),\rho}(r)} \leq$$

$$\leq c\left(\overline{\overline{o}}(1)\sum_{|\alpha|=m} r^{m-\frac{n}{p}}\|\partial^{\alpha}\varphi\|_{L_{p),\rho}(r)} + r\sum_{|\alpha|<m} r^{|\alpha|-\frac{n}{p}}\|\partial^{\alpha}\varphi\|_{L_{p),\rho}(r)}\right) =$$

$$= \overline{\overline{o}}(1)\|\varphi\|_{N_{p),\rho}(r)}\,,\ r \to 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.16) ifadesinden

$$\|\chi\|_{N_{p),\rho}(r)} = \|T_0\varphi\|_{N_{p),\rho}(r)} \leq \overline{\overline{o}}(1)\|\varphi\|_{N_{p),\rho}(r)}\,,\ r \to 0$$

sonucu alınır ve böylece lemma ispatlanmış olur. ■

4.3.2 Lokal Varlık Teoremi

Öncelikle L eliptik operatörünün $N^m_{p),\rho}(\Omega)$ uzayından ${}_sL_{p),\rho}(\Omega)$ uzayına sınırlı olduğu gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki lemma ispatlanmıştır.

Lemma 4.12. *L eliptik operatörünün $a_{\alpha}(\cdot)$ katsayıları $a_{\alpha} \in L_{\infty}(\Omega)\,,\ \forall\alpha : |\alpha| \leq m$ şartını; $\rho(x) = |x|^{\alpha p}$ ağırlık fonksiyonu ise Lemma 4.10 'un tüm şartlarını sağlasın. Öyleyse, $L \in \left[N^m_{p),\rho}(\Omega);\, {}_sN_{p),\rho}(\Omega)\right]$ dır.*

İspat. Bu lemma [36] kaynağındaki Lemma 4.1 'in ispat şemasına benzer şekilde ispatlanacaktır. Tamlığı gösterebilmek için ispatın tamamı verilecektir. İspat için $f \in {}_sN_{p),\rho}(\Omega)$ ve $\varphi \in L_{\infty}(\Omega)$ 'nin $\varphi f \in {}_sN_{p),\rho}(\Omega)$ gerektirdiğini göstermek yeterlidir. $\varphi f \in N_{p),\rho}(\Omega)$ olduğu açıktır. Burada,

$$\left\|T_{\delta}(\varphi f) - \varphi f\right\|_{N_{p);\rho}(\Omega)} \to,\ \delta \to 0$$

ifadesinin sağlandığı gösterilmelidir. Ayrıca,

$$\left\|\varphi(\cdot+\delta)f(\cdot+\delta) - \varphi(\cdot)f(\cdot)\right\|_{N_{p);\rho}(\Omega)} \leq \left\|\varphi(\cdot+\delta)(f(\cdot+\delta) - f(\cdot))\right\|_{N_{p),\rho}(\Omega)} +$$

$$+ \left\|(\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot))f(\cdot)\right\|_{N_{p),\rho}(\Omega)} = \Delta_\delta^{(1)} + \Delta_\delta^{(2)}$$

yazılabilir. Burada, $\Delta_\delta^{(1)}$ ve $\Delta_\delta^{(2)}$ ifadeleri bu eşitsizliğin sağ tarafına karşılık gelen terimler olarak kullanılacaktır. $\Delta_\delta^{(1)}$ için

$$\Delta_\delta^{(1)} \leq \|\varphi\|_\infty \|f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\|_{N_{p),\rho}(\Omega)} \to 0\,,\ \delta \to 0$$

sağlanır. diğer taraftan, $\varepsilon > 0$ keyfi sayısı verilsin. $\overline{C_\infty^0(\Omega)} = {}_sN_{p),\rho}(\Omega)$ $(N_{p),\rho}(\Omega))$, olduğundan herhangi bir $g \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\|f-g\|_{N_{p),\rho}(\Omega)} < \varepsilon$$

yazılabilir. Sonuç olarak, $\Delta_\delta^{(2)}$ için

$$\Delta_\delta^{(2)} = \|(\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot))(f(\cdot)-g(\cdot)+g(\cdot))\|_{N_{p),\rho}(\Omega)} \leq 2\|\varphi\|_\infty \varepsilon + \Delta_\delta^{(3)}$$

ifadesi sağlanır. Burada,

$$\Delta_\delta^{(3)} = \|(\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot))g(\cdot)\|_{N_{p),\rho}(\Omega)}$$

olur. İspatı tamamlayabilmek için $\Delta_\delta^{(3)} \to 0$, , $\delta \to 0$ olduğu gösterilmelidir. $\varphi \in N_{p),\rho}(\Omega)$ olduğu açıktır. $L_p(\Omega) \subset L_{p),\rho}(\Omega)$ sürekli gömmesinden yararlanarak

$$\Delta_\delta^{(3)} \leq \|g\|_\infty \|\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot)\|_{N_{p),\rho}(\Omega} \leq c\|g\|_\infty \|\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot)\|_{N_{p),\rho}(\Omega)} \to 0\,,\ \delta \to 0$$

elde edilir. Burada, $c > 0$ sabiti δ 'dan bağımsızdır. Böylelikle lemma ispatlanmış olur. ■

Buraya kadar alınan sonuçlar, [36] kaynağındaki ispat şemasına benzer olarak, lokal çözülebilirlik ile ilgili aşağıdaki varlık teoreminin ispatlanmasında kullanılacaktır.

Teorem 4.8. *$m-inci$ mertebeden L eliptik operatörü $x_0 \in \Omega$ noktasında $P_{x_0})$ özelliğine sahip olsun. $\rho(x) = |x|^{\alpha p}$, $1 < p < +\infty$ ağırlık fonksiyonu Lemma 4.10 'un tüm şartlarını sağlasın. $\forall f \in {}_sN_{p),\rho}(\Omega)$ ve yeterince küçük $r > 0$ için $Lu = f$ denkleminin $N_{p),\rho}(B_r(x_0))$ sınıfında bir çözümü vardır.*

İspat. Genelliği kaybetmeden, $x_0 = 0$ (dolayısıyla $0 \in \Omega$) kabul edilsin. $L_0 S_0 \varphi = \varphi$, $\forall \varphi \in {}_sN_{p),\rho}(r)$ olduğu gösterilecektir. $\varphi \in {}_sN_{p),\rho}(r)$ keyfi fonksiyonu alınsın. Lemma 4.2 'ten yararlanarak

$$\exists\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(r) : \|\varphi_k - \varphi\|_{N_{p),\rho}(r)} \to 0\,,\ k \to \infty$$

yazılabilir. Teorem 4.1 yardımı ile $L_0 S_0 \varphi_k = \varphi_k\,,\ \forall k \in \mathbb{N}$ elde edilir. Dolayısıyla, $L_0 S_0 \in \left[{}_s N_{p),\rho}(r)\right]$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan,

$$L_0\, S_0\, \varphi_k \;=\; L_0 \int_{B_r} J_0\,(x-y)\,\varphi_k(y)\,dy$$

olduğu görülür. L_0 'ın $m-inci$ mertebeden homojen diferansiyel operatör olduğu göz önüne alınırsa, (4.17) ile verilen diferansiyellenebilme formülü ile $|\alpha| = m$ için

$$(L_0 S_0 \varphi_k)(x) = \int_{B_r} L_0 J_0(x-y)\varphi_k(y)dy + const\varphi_k(x)$$

elde edilir. $L_0 J_0(x)$ bir singüler çekirdek olduğundan 4.6 teoremi gereği $L_0 S_0$ operatörü $C_0^\infty(r)$ uzayından ${}_s N_{p),\rho}(r)$ uzayına sınırlıdır ve $\overline{C_0^\infty(r)} = {}_s N_{p),\rho}(r)$ eşitliği $L_0 S_0 \in \left[{}_s N_{p),\rho}(r)\right]$ olmasını gerektirir. Bu sebeple, ${}_s N_{p),\rho}(r)$ uzayında $L_0 S_0 = I_{{}_s N_{p),\rho}(r)}$ olur. Burada, $I_{{}_s N_{p),\rho}(r)}$ operatörü ${}_s N_{p),\rho}(r)$ uzayında birim operatördür. Buradan,

$$L_0 T_0 = L_0 S_0 (L_0 - L) = I_{{}_s N_{p),\rho}(r)}(L_0 - L) = L_0 - L$$

olur. Bu ifadeyi kullanarak, $Lu = f$ denklemi

$$L_0 u - L_0 T_0 u = f \Rightarrow L_0 (I_{N_{p),\rho}} - T_0) = f$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $I_{N_{p),\rho}}$ operatörü $N_{p),\rho}$ uzayının birim operatörüdür. Dolayısıyla,

$$(I_{N_{p),\rho}} - T_0)u = S_0 f$$

elde edilir. Ana lemma yardımı ile $\|T_0\|_{N_{p),\rho}} \to N_{p),\rho} = \overline{\overline{o}}(1)\,,\ r \to 0$ olur. Bu yüzden, yeterince küçük r için $\|T_0\|_{N_{p),\rho}} < 1$ elde edilir. Öyleyse, $(I_{N_{p),\rho}} - T_0)$ operatörü $N_{p),\rho}(r)$ uzayında sınırlı terslenebilir bir operatördür ve Lemma 4.2 gereği

$$u = (I_{N_{p),\rho}} - T_0)^{-1} S_0 f$$

fonksiyonu $Lu = f$ denkleminin bir çözümüdür. ■

5
SONUÇ

Grand Sobolev uzaylarında; $m-inci$ mertebeden L eliptik operatörü ve bu eliptik operatör ile tanımlanan diğer integral operatörler verilmiştir. Bu eliptik operatörün katsayıları ile ilgili $P_{x_0})$ özelliği tanımlanmıştır. Temel çözüm için gerekli olan J_{x_0} fonksiyonu verilmiştir. $m-inci$ mertebeden katsayları $P_{x_0})$ özelliğini sağlayan L eliptik operatörü ile verilen $Lu=f$ denkleminin J_{x_0} temel çözümünün var olduğu ifade edilmiştir. Grand Sobolev uzayında, $m-inci$ mertebeden eliptik denklemin bir $B_r(x_0)$ yuvarında lokal güçlü çözümünün var olduğu ana lemma ve teoremler yardımı ile "ayrılabilir olmayan durum"da ispatlanmıştır. Ayrıca çözümler için iç Schauder tip eşitsizlikler elde edilmiştir.

Ağırlıklı grand Lebesgue uzayında ise, $m-inci$ mertebeden eliptik denklemin çözümü için ${}_sL_{p),\rho}(\Omega)$ alt uzay tanımlanmıştır. Bu alt uzayda sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfının yoğun olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ağırlık fonksiyonunun Muckenhoupt sınıfı tanımlanarak singüler operatörün ${}_sL_{p),\rho}(\Omega)$ alt uzayında sınırlı olduğu ifade ve ispat edilmiştir. Son olarak, $\rho(x)=|x|^{\alpha p}$ ağırlık fonksiyonu seçilerek $P_{x_0})$ özelliğine sahip $m-inci$ mertebeden L eliptik operatörü ile verilen $Lu=f$ denkleminin lokal çözümün varlığı uygun ağırlıklı grand Sobolev uzayında gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde ifade edilen genişleme ve iz teoremleri ispatlanmış, iz uzayı ve karakterizasyonu yapılmıştır. Bu bölümde Banach-Sobolev fonksiyon uzayları için elde edilen genel sonuçlardan araştırma yapılacak herhangi bir standart olmayan uzay için yararlanılabilir. Ayrıca, ağırlıklı grand Sobolev uzayında $m-inci$ mertebeden eliptik denklemlerin çözümü "ayrılabilir olmayan durum"da incelenebilir.

KAYNAKÇA

[1] R. E. Castillo, H. Rafeiro, *An introductory course in Lebesgue spaces*. Springer, 2016.

[2] C. Bennett, R. C. Sharpley, *Interpolation of operators*. Academic press, 1988.

[3] W. Orlicz, "Über konjugierte exponentenfolgen," *Studia Mathematica*, vol. 3, no. 1, pp. 200–211, 1931.

[4] V. V. Zhikov, "Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory," *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 29, no. 1, pp. 33–66, 1987.

[5] V. V. Zhikov, "On passage to the limit in nonlinear variational problems," *Matematicheskii Sbornik*, vol. 183, no. 8, pp. 47–84, 1992.

[6] O. Kováčik, J. Rákosník, "On spaces $L_{p(x)}$ and $W^1_{p(x)}$," *Czechoslovak mathematical journal*, vol. 41, no. 4, pp. 592–618, 1991.

[7] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*. Springer, 2011.

[8] D. V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces: Foundations and harmonic analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.

[9] V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, S. Samko, *Integral operators in non-standard function spaces, Volume 1: Variable exponent Lebesgue and Amalgam spaces*. Springer, 2016.

[10] Z. Birnbaum, W. Orlicz, "Über die verallgemeinerung des begriffes der zueinander konjugierten potenzen," *Studia Mathematica*, vol. 3, no. 1, pp. 1–67, 1931.

[11] P. Harjulehto, P. Hästö, P. Harjulehto, P. Hästö, *Generalized Orlicz Spaces*. Springer, 2019.

[12] O. Méndez, J. Lang, *Analysis on function spaces of Musielak-Orlicz type*. CRC Press, 2019.

[13] C. B. Morrey, "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 43, no. 1, pp. 126–166, 1938.

[14] D. R. Adams, *Morrey spaces*. Springer, 2015.

[15] Y. Sawano, *Morrey Spaces: Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, Volume I*. CRC Press, 2020.

[16] T. Iwaniec, C. Sbordone, "On the integrability of the jacobian under minimal hypotheses," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 119, pp. 129–143, 1992.

[17] A. Fiorenza, "Duality and reflexivity in grand lebesgue spaces," *Collectanea Mathematica*, vol. 51, no. 2, pp. 131–148, 2000.

[18] C. Capone, A. Fiorenza, "On small lebesgue spaces," *Journal of Function Spaces*, vol. 3, pp. 73–89, 2005.

[19] V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, S. Samko, *Integral operators in non-standard function spaces, Volume 2: Variable exponent Hölder, Morrey-Campanato and Grand spaces*. Springer, 2016.

[20] B. Bilalov, T. Gasymov, A. Guliyeva, "On the solvability of the riemann boundary value problem in morrey–hardy classes," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 40, no. 5, pp. 1085–1101, 2016.

[21] B. T. Bilalov, Z. G. Guseynov, "Basicity of a system of exponents with a piecewise linear phase in variable spaces," *Mediterranean journal of mathematics*, vol. 9, no. 3, pp. 487–498, 2012.

[22] B. Bilalov, A. Guliyeva, "On basicity of the perturbed systems of exponents in morrey-lebesgue space," *International Journal of Mathematics*, vol. 25, no. 1450054, pp. 1–10, 2014.

[23] B. Bilalov, Z. Guseinov, "K-bessel and k-hilbert systems and k-bases," in *Doklady Mathematics*, Springer, vol. 80, 2009, pp. 826–828.

[24] B. T. Bilalov, "The basis property of a perturbed system of exponentials in morrey-type spaces," *Siberian Mathematical Journal*, vol. 60, no. 2, pp. 249–271, 2019.

[25] D. M. İsrafilov, N. P. Tozman, "Approximation in morrey-smirnov classes," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 99–113, 2011.

[26] I. I. Sharapudinov, "On direct and inverse theorems of approximation theory in variable lebesgue and sobolev spaces," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 4, no. 1, pp. 55–72, 2014.

[27] B. Bilalov, A. Huseynli, S. El-Shabrawy, "Basis properties of trigonometric systems in weighted morrey spaces," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 9, no. 2, pp. 200–226, 2019.

[28] B. Bilalov, F. Seyidova, "Basicity of a system of exponents with a piecewise linear phase in morrey-type spaces," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 4, pp. 1850–1866, 2019.

[29] Y. Zeren, M. Ismailov, C. Karacam, "Korovkin-type theorems and their statistical versions in grand lebesgue spaces," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 3, pp. 1027–1041, 2020.

[30] Y. Zeren, M. Ismailov, F. Şirin, "On basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem for second order differential equation for grand-lebesgue space," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 5, pp. 1595–1611, 2020.

[31] B. Bilalov, T. Muradov, F. Seyidova, "On basicity of perturbed exponential system with piecewise linear phase in morrey-type spaces," *Afrika Matematika*, vol. 32, no. 1-2, pp. 151–166, 2021.

[32] F. A. Guliyeva, S. R. Sadigova, "On some properties of convolution in morrey type spaces," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 8, no. 1, pp. 140–150, 2018.

[33] A. Huseynli, V. Mirzoyev, A. Quliyeva, "On basicity of the perturbed system of exponents in morrey-lebesgue space," *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 191–209, 2017.

[34] B. Bilalov, S. R. Sadigova, "Interior schauder-type estimates for higher-order elliptic operators in grand-sobolev spaces," *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, vol. 18, no. 2, pp. 129–148, 2021.

[35] B. Bilalov, S. Sadigova, "On the fredholmness of the dirichlet problem for a second-order elliptic equation in grand-sobolev spaces," *Ricerche di Matematica*, pp. 1–40, 2021.

[36] B. Bilalov, S. Sadigova, "On solvability in the small of higher order elliptic equations in grand-sobolev spaces," *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 66, no. 12, pp. 2117–2130, 2021.

[37] B. Bilalov, Y. Zeren, S. Sadigova, S. Cetin, "On solvability in the small and schauder-type estimates for higher order elliptic equations in grand sobolev spaces (nonseparable case)," *Applicable Analysis*, vol. 102, no. 11, pp. 3064–3077, 2023.

[38] B. Bilalov, Y. Zeren, S. Sadigova, Ş. Çetin, "Solvability in the small of m-th order elliptic equations in weighted grand sobolev spaces," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 46, no. 6, pp. 2078–2095, 2022.

[39] C. Miranda, *Partial differential equations of elliptic type*. Nauka, 1957.

[40] A. V. Bitsadze, *Boundary value problems for second order elliptic equations*. Nauka, 1966.

[41] I. Petrosvki, *Lectures on partial differential equations*. Fizmatgiz, 1961.

[42] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear equations of elliptic type*. Nauka, 1964.

[43] L. Hörmander, *On the theory of general partial differential operators*. IL, 1959.

[44] L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations*. American Mathematical Soc., 1971.

[45] S. L. Sobolev, *Some applications of functional analysis in mathematical physics*. Leningard State University, 1950.

[46] K. Moren, *Hilbert space methods*. Mir, 1965.

[47] V. Mikhailov, *Partial differential equations*. Nauka, 1976.

[48] L. Gl, E. Madjenes, *Non-homogeneous boundary value problems and their applications*. Mir, 1971.

[49] S. Mikhlin, *Linear partial differential equations*. Vysshaya Shkola, 1977.

[50] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates for solutions of elliptic equations near the boundary*. Inost. Lit., 1962.

[51] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 1977, vol. 224.

[52] D. K. Palagachev, L. G. Softova, "Singular integral operators, morrey spaces and fine regularity of solutions to pde's," *Potential Analysis*, vol. 20, pp. 237–263, 2004.

[53] C. Yemin, "Regularity of the solution to the dirichlet problem in morrey spaces," *Journal of Partial Differential Equaitons*, vol. 15, no. 2, pp. 37–46, 2002.

[54] G. Difazio, M. Ragusa, "Interior estimates in morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients," *Journal of Functional Analysis*, vol. 112, no. 2, pp. 241–256, 1993.

[55] L. G. Softova, "The dirichlet problem for elliptic equations with vmo coefficients in generalized morrey spaces," in *Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory: The Stefan Samko Anniversary Volume*, Springer, 2013, pp. 371–386.

[56] D. K. Palagachev, M. A. Ragusa, L. G. Softova, "Regular oblique derivative problem in morrey spaces," *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 39, pp. 1–17, 2000.

[57] S.-S. Byun, D. Palagachev, L. Softova, "Survey on gradient estimates for nonlinear elliptic equations in various function spaces," *St. Petersburg mathematical journal*, vol. 31, no. 3, pp. 401–419, 2020.

[58] L. Caso, R. D'Ambrosio, L. Softova, *et al.*, "Generalized morrey spaces over unbounded domains," *Azerb. J. Math*, vol. 10, no. 1, pp. 193–208, 2020.

[59] G. Di Fazio, D. K. Palagachev, M. A. Ragusa, "Global morrey regularity of strong solutions to the dirichlet problem for elliptic equations with discontinuous coefficients," *Journal of Functional Analysis*, vol. 166, no. 2, pp. 179–196, 1999.

[60] G. Di Fazio, "On dirichlet problem in morrey spaces," *Differential Integral Equations*, vol. 6, no. 2, pp. 383–391, 1993.

[61] L. C. Evans, *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1997.

[62] B. Bilalov, S. Sadigova, S. Cetin, "The concept of a trace and the boundedness of the trace operator in banach-sobolev function spaces," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 43, no. 9, pp. 1069–1094, 2022.

[63] B. T. Bilalov, C. Sadigova, "On local solvability of higher order elliptic equations in rearrangement invariant spaces," *Siberian Mathematical Journal*, vol. 63, no. 3, pp. 425–437, 2022.

[64] A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function spaces*. Springer Science & Business Media, 1977, vol. 3.

[65] M. M. Rao, Z. D. Ren, *Applications of Orlicz spaces*. CRC Press, 2002, vol. 250.

[66] S.-K. Chua, "Extension theorems on weighted sobolev spaces," *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 41, no. 4, pp. 1027–1076, 1992.

[67] Y. M. Berezansky, Z. G. Sheftel, G. Us, "Functional analysis, volume 2," *Operator Theory, Advances and Applications*, vol. 86, 1996.

[68] S. G. Krein, E. Semenov, *Interpolation of linear operators*. American Mathematical Soc., 2002, vol. 54.

[69] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Principles of real analysis*. Gulf Professional Publishing, 1998.

[70] P. Jain, A. Molchanova, M. Singh, S. Vodopyanov, "On grand sobolev spaces and pointwise description of banach function spaces," *Nonlinear Analysis*, vol. 202, p. 112 100, 2021.

[71] S. G. Samko, S. M. Umarkhadzhiev, "On iwaniec-sbordone spaces on sets which may have infinite measure: Addendum," *Azerb. J. Math*, vol. 1, no. 2, pp. 143–144, 2011.

[72] S. M. Umarkhadzhiev, "Generalization of the notion of grand lebesgue space," *Russian Mathematics*, vol. 58, no. 4, pp. 35–43, 2014.

[73] R. A. Kerman, "Convolution theorems with weights," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 280, no. 1, pp. 207–219, 1983.

[74] R. R. Coifman, C. Fefferman, "Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals," *Studia Mathematica*, vol. 51, pp. 241–250, 1974.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. B. Bilalov, Y. Zeren, S. Sadigova, S. Cetin, “On Solvability in the small and Schauder-type Estimates for higher order Elliptic Equations in grand-Sobolev Spaces(nonseparable case)”, *Applicable Analysis*, vol. 102, no. 11, pp. 3064-3077, 2023.

2. B. Bilalov, Y. Zeren, S. Sadigova, Ş. Çetin, “Solvability in the small of m-th order Elliptic Equations in weighted grand-Sobolev Spaces”, *Turkish Journal of Math*, vol. 46, no. 6, pp. 2078-2095, 2022.

3. B. Bilalov, S. Sadigova, S. Cetin, "The Concept of a Trace and the Boundedness of the Trace Operator in Banach Sobolev Function Spaces", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 43, no. 9, pp. 1069-1094, 2022.

Konferans Bildirisi

1. Bilalov B., Zeren Y., Sadigova, S., Cetin S., “On solvability in small of Higher Order Elliptic Equations in Symmetric Spaces”, ICOMAA-2021, İstanbul, Türkiye.

2. Bilalov B., Zeren Y., Sadigova, S., Cetin S., “On solvability in the small and Schauder-type estimates for higher order elliptic equations in grand Sobolev spaces”, ICOMAA-2022, İstanbul, Türkiye.

3. Bilalov B., Zeren Y., Sadigova, S., Cetin S., “Solvability in the small and Schauder-type estimates for higher order elliptic equations in Banach-Sobolev spaces”, ICOMAA-2023, İstanbul, Türkiye.

Proje

1. İkinci Mertebeden Süreksiz Diferansiyel Operatörün Özfonksiyon Sisteminin Frame(Çerçeve) Özellikleri, ANAS-TÜBİTAK-2542 İkili İşbirliği Programı(No: 118F447).

2. Standart Olmayan Banach-Sobolev Fonksiyon Uzaylarında Eliptik Denklemlerin Çözülebilirlik Problemleri, Bilimsel Araştırma Projesi(No: FDK-2023-5677), Yıldız Teknik Üniversitesi.

Ödül

1. 2211-A TÜBİTAK Yurt İçi Genel Doktora Bursu