T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKIŞKANLAR MEKANİĞİNDE BAZI ÖZEL KISMİ VE İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİ

Hicran Arzu DENİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN

Haziran, 2025

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKIŞKANLAR MEKANİĞİNDE BAZI ÖZEL KİSMİ VE İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİ

Hicran Arzu DENİZ tarafından hazırlanan tez çalışması 20.06.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Özgür YILDIRIM, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üyesi Meltem UZUN, Üye
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Akışkanlar Mekaniğinde Bazı Özel Kısmi ve İntegro Diferansiyel Denklemlerin İncelenmesi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Hicran Arzu DENİZ

İmza

Bu çalışma, "Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü'nün FYL-2024-6546" numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Bu çalışma, canım anneme
ithaf edilmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca bana yol gösteren, bilimsel bilgi ve deneyimiyle desteğini esirgemeyen, kıymetli danışmanım Sayın Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte manevi desteğini her zaman yanımda hissettiğim, hayatım boyunca attığım her adımda yanımda olan, sabrı, fedakarlıkları ve dualarıyla beni daima destekleyen annem Gülçin DENİZ'e sonsuz teşekkür ederim.

Varlıklarıyla bana huzur veren, iyi günde kötü günde moral kaynağım olan kıymetli arkadaşlarım Çağlanur YILDIZ, Ecehan ÜZGÜN ve Mehtap TOPAL'a ayrıca teşekkür ederim.

Tezimin gerçekleşmesinde 2210-A numaralı Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında sağladığı maddi destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Hicran Arzu DENİZ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ viii

KISALTMA LİSTESİ ix

ŞEKİL LİSTESİ x

ÖZET xii

ABSTRACT xiii

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

2 KESİRLİ TÜREV TANIMLARI VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ 5

2.1 Kesirli Türev Tanımları 5

2.1.1 Uyumlu Türev 5

2.1.2 Beta Türev 6

2.2 Yöntemler 7

2.2.1 Modifiye $\frac{W}{G}$ Yöntemi 7

2.2.2 Modifiye Sardar Alt Denklem Yöntemi 11

3 YÖNTEMLERİN UYGULANMASI 15

3.1 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel KP Hiyerarşi Denkleminin Analitik Çözümleri 15

3.1.1 Modifiye G'-Genişleme Yönteminin Uygulanması 16

3.1.2 Uyumlu Kesirli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme 18

3.1.3 Beta Kesirli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme 21

3.2 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel CDGKS Denkleminin Analitik Çözümleri 23

3.2.1 Modifiye Sardar Alt Denklem Yönteminin Uygulaması . . . 24

3.2.2 Uyumlu Kesirli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme 27

3.2.3 Beta Kesirli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme 30

4 ANALİZLER **33**

4.1 Kararlılık Analizi 33

4.1.1 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel KP Hiyerarşi Denkleminin Kararlılık Analizi 33

4.1.2 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel CDGKS Denkleminin Kararlılık Analizi 34

4.2 Modülasyon Kararsızlığı 34

4.2.1 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel KP Hiyerarşi Denkleminin Kararlılık Analizi 35

4.2.2 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel CDGKS Denkleminin Modülasyon Kararsızlığı 36

5 SONUÇ **37**

KAYNAKÇA **39**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **43**

SİMGE LİSTESİ

α	Alfa
β	Beta
ε	Epsilon
$\Gamma(\beta)$	Gama fonksiyonu
$\sum$	Toplam Sembolü

KISALTMA LİSTESİ

ADD	Adi Diferansiyel Denklem
CDGKS	Caudrey-Dodd-Gibbon-Kotera-Sawada
DKDD	Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
KdV	Korteweg de Vires
KP	Kadomtsev-Petviashili

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 Uyumlu kesirli türev için $v_2(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 19
Şekil 3.2 Uyumlı kesirli türev için $v_4(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 19
Şekil 3.3 Uyumlu kesirli türev için $v_6(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 20
Şekil 3.4 Uyumlu kesirli türev için $v_2(x,y,t)$, $v_4(x,y,t)$ ve $v_6(x,y,t)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen 2D grafikleri 20
Şekil 3.5 Uyumlu kesirli türev için $v_2(\epsilon), v_4(\epsilon)$ ve $v_6(\epsilon)$ çözümünün farklı t değerlerinde elde edilen 2D grafikleri 20
Şekil 3.6 Beta kesirli türev için $v_2(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 21
Şekil 3.7 Beta kesirli türev için $v_4(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 22
Şekil 3.8 Beta kesirli türev için $v_6(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 22
Şekil 3.9 Beta kesirli türev için $v_2(x,y,t)$, $v_4(x,y,t)$ ve $v_6(x,y,t)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen 2D grafikleri 22
Şekil 3.10 Beta kesirli türev için $v_2(\epsilon), v_4(\epsilon)$ ve $v_6(\epsilon)$ çözümünün farklı t değerlerinde elde edilen 2D grafikleri 23
Şekil 3.11 Uyumlu kesirli türev için $\phi_1^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 27
Şekil 3.12 Uyumlu kesirli türev için $\phi_3^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 28
Şekil 3.13 Uyumlu kesirli türev için $\phi_5^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 28
Şekil 3.14 Uyumlu kesirli türev için $\phi_{10}^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 29
Şekil 3.15 Uyumlu kesirli türev için farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafiklerinin 29
Şekil 3.16 Beta kesirli türev için $\phi_1^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 30

Şekil 3.17 Beta kesirli türev için $\phi_3^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 30
Şekil 3.18 Beta kesirli türev için $\phi_5^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 31
Şekil 3.19 Beta kesirli türev için $\phi_{10}^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri 31
Şekil 3.20 Beta kesirli türev için farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafiklerinin 32

ÖZET

Akışkanlar Mekaniğinde Bazı Özel Kısmi ve İntegro Diferansiyel Denklemlerin İncelenmesi

Hicran Arzu DENİZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lİsans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN

Bu çalışmada kesirli integro-diferansiyel Caudrey, Dodd, Gibbon, Kotera ve Sawada (CDGKS) denklemi ve kesirli integro-diferansiyel Kadomtsev-Petviashvili (KP) hiyerarşi denklemi ele alınmıştır. Bu denklemleri incelemek için uyumlu ve beta kesirli türev tanımları kullanılmıştır. Çözüm zenginliği ve karmaşık yapıları nedeniyle analitik çözümler elde etmek için Modifiye G'-Genişleme yöntemi ve Modifiye Sardar Alt-Denklem yöntemi kullanılmıştır. Türetilen çözümlerin geçerliliğini ve tutarlılığını incelemek için kararlılık analizi ve modülasyon kararsızlığı incelemesi yapılmıştır. Bu incelemeler, çözümlerin küçük pertürbasyonlara maruz kaldıklarında bile kararlı kaldıkları göstermiştir. Bu çalışma, doğrusal olmayan zaman kesirli denklemlerin daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamayı, analitik çözüm tekniklerinin bu tür denklemlere uygulanabilirliğini göstermeyi ve kararlılık analizinin uygulamalarını göstermeyi amaçlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: KP hiyerarşi denklemi, CDGKS denklemi, Uyumlu kesirli türev, Beta kesirli türev, Modifiye $\frac{W}{G}$-Genişleme yöntemi, Modifiye G'-Genişleme yöntemi, Modifiye Sardar Alt-Denklem yöntemi, Kararlılık analizi, Modülasyon kararsızlığı.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Examination of Some Special Partial and Integro Differential Equations in Fluid Mechanics

Hicran Arzu DENİZ

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN

In this study, the fractional integro-differential Caudrey, Dodd, Gibbon, Kotera and Sawada (CDGKS) equation and the fractional integro-differential Kadomtsev-Petviashvili (KP) hierarchy equation are considered. The definitions of conformal and beta fractional derivatives are used to analyse these equations. Due to their richness of solutions and complexity, the Modified G'-Expansion method and the Modified Sardar Sub-Equation method are used to obtain analytical solutions. Stability analysis and modulation instability analysis were performed to examine the validity and consistency of the derived solutions. These investigations show that the solutions remain stable even when subjected to small perturbations. This paper aims to contribute to a better understanding of nonlinear time fractional equations, to demonstrate the applicability of analytical solution techniques to such equations and to show the applications of stability analysis.

Keywords: KP hierarchy equation, CDGKS equation, Conformable fractional derivative, Beta fractional derivative, Modified $\frac{W}{G}$-Expansion method, Modified G'-Expansion method, Modified Sardar Sub-Equation method, Stability analysis, Modulation instability.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler (DKDD'ler), çeşitli bilimsel ve mühendislik disiplinlerinde karmaşık dinamik sistemlerin modellenmesinde kritik bir rol oynadıkları için uzun süreli yoğun bir araştırma konusu olmuştur [1–3]. Bu denklemler, birden fazla değişken arasındaki karmaşık ilişkileri yakalayarak, yaygın olan doğrusal olmayan olguların temsilinin tanınmasına olanak tanır.

Son yıllarda, gelişmiş programlama tekniklerinin geliştirilmesi ve derin öğrenme çözümlerinin karşılaştırılması ile DKDD'lerin incelenmesinde önemli ilerlemeler sağlanmıştır [4]. Bu karmaşık sistemleri simüle etme ve analiz etme yeteneği, akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve kuantum fiziği gibi alanlarda yeni olanaklar açmış, çığır açan gelişmelere ve pratik uygulamalara yol açmıştır.

DKDD'ler, gerçek dünya fenomenlerini modellemede vazgeçilmezdir. Akışkanlar dinamiğinde, Navier-Stokes denklemleri, doğrusal olmayan terimlerin baskın olduğu türbülanslı akışları yönetmede [5, 6], kuantum alan teorisinde, doğrusal olmayan Klein-Gordon veya Schrödinger denklemlerinin soliton çözümleri, solitonlar [7], görüntü işleme, doğrusal olmayan difüzyon denklemleri gibi birçok alanda uygulaması görülmektedir [8]. Bu tür uygulamalar, doğa ve kapsamlı anlama çabalarımızda DKDD'ler hayati bir rol oynamaktadır.

Sonuç olarak, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler, matematiksel araştırmanın temel taşları olarak, doğal karmaşıklığın güzelliğini ve titiz analizin zorluklarını bünyesinde barındırmaktadır. Bu çalışma, yalnızca teorik matematiği zenginleştirmekle kalmıyor, aynı zamanda çeşitli alanlarda bilimsel ve teknolojik ilerlemeleri de güçlendiriyor.

Kesirli kalkülüs, diferansiyel ve integral kavramını tam sayı olmayan derecelere genişleten matematiksel analiz dalıdır. Geleneksel kalkülüsün yalnızca tam sayı dereceli türevler ve integrallerle ilgilendiği gibi, kesirli kalkülüs, türev alma veya integral alma işlemlerinin herhangi bir reel veya hatta karmaşık sayı olabileceği

durumları kapsar [9, 10].
Kesirli kalkülüsün kökleri, 18. yüzyılın başlarına kadar uzanır; Leibniz, Euler ve Laplace gibi öncüler, tam sayı olmayan türev alma ve integral hesaplama olasılığını düşünmüşlerdir. Ancak, kesirli hesaplamanın sistematik bir ilgi görmeye başlaması 20. yüzyıla kadar gerçekleşmemiştir. Kesirli hesaplamanın resmileşmesi ve modern gelişimi, 20. yüzyılın ikinci yarısında matematikçiler ve fizikçilerin çabaları sayesinde gerçekleşmiştir. [11, 12]
Kesirli kalkülüs, matematiksel modellere bellek, uzun vadeli bağımlılıklar ve fraktal geometrilerle karakterize edilen fenomenleri yakalama yeteneği kazandırarak, tanımlayıcı gücünü artırır. Teorik çerçevesi, kesirli diferansiyel denklemler, kesirli integraller ve fonksiyonel analizdeki kesirli operatörler gibi çeşitli alanları kapsamaktadır. Özellikle, kesirli operatörler, türev ve integral işlemlerinin geleneksel kavramlarını zorlayan ilginç özellikler sergilemektedir. Bu özellikler, kesirli hesaplamanın karmaşık sistemleri modellemek için birleşik bir çerçeve sağladığı matematik, fizik, biyoloji, mühendislik ve finans gibi çeşitli alanlardaki uygulamalarını desteklemektedir.
Kesirli kalkülüsün etkisi, disiplinler arasında yayılmakta ve fizik alanındaki anlayışımızı ve modelleme yeteneklerimizi devrim niteliğinde değiştirmektedir. Viskoelastik, plazma, optik lifler, sinyal işleme, elektromanyetik dalgalar, akışkanlar dinamiği, tıbbi bilimler ve difüzyon süreçleri gibi birçok bilimsel fenomen, artık kesirli diferansiyel denklemler sayesinde kolayca çözülebilmektedir.

Kadomtsev-Petviashvili (KP) hiyerarşisi, matematiksel fizik alanında önemli bir entegrasyon sistemleri sınıfıdır. Bu hiyerarşi, tanınmış Korteweg-de Vries (KdV) denklemini daha yüksek boyutlara genişletmekte ve hem kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD'ler) hem de integral denklemlerin entegrasyon özelliklerini içermektedir. KP hiyerarşisi, 1970'lerde Boris Kadomtsev ve Vladimir Petviashvili'nin öncü çalışmasından kaynaklanmakta olup, KdV denkleminin entegrasyon yapıları üzerine inşa edilmiştir. Standart KP hiyerarşisi tamamen diferansiyel denklemlerle ilgilenirken, integro-diferansiyel KP hiyerarşisi bu çerçeveyi integral terimleri ekleyerek zenginleştirir ve böylece fiziksel sistemlerdeki yerel olmayan etkileşimleri ve bellek etkilerini kapsar. [13, 14]
KP hiyerarşisi, başlangıçta zayıf doğrusallık ve dağılım ile iki boyutlu su dalgalarını tanımlamak için geliştirilmiş olup, yerel olmayan etkileşimleri hesaba katan integral terimleri içerecek şekilde genişletilmiştir. Kesirli hesaplamanın bu çerçeveye dahil edilmesi, bellek etkileri ve yerel olmayan bağımlılıkları olan karmaşık sistemlerin tanımlanmasına olanak tanıyarak kapsamını daha da genişletmektedir. Kesirli integro-diferansiyel KP hiyerarşi denklemi, kesirli türevler ve integral operatörlerini içeren bağlı denklemler dizisi olarak formüle

edilmiştir. Klasik karşıtının yalnızca tam sayı dereceli türevlerle ilgilendiği durumun aksine, kesirli KP hiyerarşisi, birçok fiziksel ve matematiksel sistemde gözlemlenen uzun menzilli etkileşimleri ve bellek etkilerini yansıtan tam sayı olmayan dereceli kesirli türevleri içermektedir. [15, 16]
Kesirli integro-diferansiyel KP hiyerarşisi, çeşitli bilimsel disiplinlerde uygulama alanı bulmaktadır. Akışkanlar dinamiğinde, katmanlı akışkanlardaki karmaşık dalga etkileşimlerini ve sığ su sistemlerindeki doğrusal olmayan dağıtıcı dalgaları modellemektedir. Plazma fiziğinde, hiyerarşi, manyetize olmuş plazmalardaki dalgaların dinamiklerini karmaşık parçacık etkileşimleri ve dalga-parçacık rezonansları ile tanımlar. Ayrıca, değişken yoğunluklu ortamlarda dalga yayılımını incelemek için jeofizik bilimlerinde ve anormal difüzyon süreçlerini ve bellek etkileriyle nüfus dinamiklerini modellemek için matematiksel biyolojide fayda sağlamaktadır. [17]
Kesirli integro-diferansiyel Kadomtsev-Petviashvili hiyerarşisi, entegre edilebilir sistemler teorisinde önemli bir ilerlemeyi temsil eder; diferansiyel, kesirli ve integral hesaplamayı bir araya getirerek doğrusal olmayan dalga dinamiklerinin karmaşıklıklarını yakalamaktadır. Entegre edilebilirlik özellikleri ve zengin soliton çözümleri, çeşitli fiziksel fenomenleri modellemedeki önemini vurgulamakta ve bilimsel disiplinler arasında karmaşık sistemleri anlama konusunda birleşik bir çerçeve sunmaktadır. Araştırmacılar matematiksel temellerini ve pratik uygulamalarını çözmeye devam ederken, KP hiyerarşisi, doğrusal olmayan bilim ve matematiksel fizik alanında keşif için yeni yollar aydınlatmaya devam ediyor.

Kesirli integro-diferansiyel Caudrey–Dodd–Gibbon–Kotera–Sawada (CDGKS) denklemi, doğrusal olmayan entegre sistemler teorisinin önemli bir uzantısı olarak kabul edilmektedir. Bu denklem, beşinci dereceden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin bir örneği olup, KdV hiyerarşisinin daha yüksek bir seviyesini temsil eder. KdV denkleminin klasik formuna benzer şekilde, CDGKS denklemi, doğrusal olmayan dispersif sistemlerin daha karmaşık davranışlarını modellemek için geliştirilmiştir. Ancak kesirli integro-diferansiyel versiyonu, denklemin yerel olmayan etkileşimleri ve bellek etkilerini ele alacak şekilde genişletilmesini sağlamaktadır. [18, 19]
CDGKS denklemi ilk olarak 1970'lerde Caudrey, Dodd, Gibbon, Kotera ve Sawada tarafından bağımsız olarak keşfedilmiştir. Denklem, beşinci dereceden doğrusal olmayan terimleri içermesi bakımından KdV denkleminin genel bir formu olarak görülebilir ve doğrusal olmayan sistemlerin dinamiklerini anlamak için daha derin çözümler sunmaktadır. Özellikle soliton çözümleri, CDGKS denkleminin en dikkat çekici özelliklerinden biri olup, doğrusal olmayan dalga dinamiklerinin belirli koşullar altında kararlı çözümler üretmesine olanak tanır. [20]

Kesirli integro-diferansiyel CDGKS denklemi, doğrusal olmayan dalga denklemleri teorisinde önemli bir yer tutmakta ve dispersif dalgaların analizi, plazma fiziği, su dalgaları ve optik solitonlar gibi çeşitli uygulama alanlarına sahip bulunmaktadır. [21, 22] Bu bağlamda, kesirli integro-diferansiyel CDGKS denklemi, hem teorik matematik hem de uygulamalı fizik alanında önemli bir araştırma konusudur. Doğrusal olmayan dispersif etkilerin ve soliton çözümlerinin analizi, yalnızca matematiksel fizik açısından değil, aynı zamanda mühendislik ve diğer bilimsel disiplinlerde de büyük önem taşımaktadır. Kesirli kalkülüs ve integro-diferansiyel operatörlerin bu sistemlere entegre edilmesi, doğrusal olmayan dinamiklerin ve sistemlerin daha geniş bir perspektiften incelenmesine olanak tanımaktadır.

2
KESİRLİ TÜREV TANIMLARI VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

2.1 Kesirli Türev Tanımları

Bu bölümde, kesirli türev kavramını ele alarak Uyumlu türev ve Beta türev tanımlarını sunacak ve temel özelliklerini inceleyeceğiz.

2.1.1 Uyumlu Türev

Kesirli kalkülüs, klasik kalkülüsün bir genellemesi olarak, integrallerin ve türevlerin kavramını tam sayı olmayan derecelere genişletir. Bu alan, fizik, mühendislik ve finans gibi çeşitli alanlardaki uygulanabilirliği nedeniyle önemli bir ilgi toplamıştır [23, 24]. Kesirli türevlerin sayısız tanımı arasında, uyumlu kesirli türev, basitliği ve klasik türevin birçok özelliğini koruma yeteneği ile öne çıkmaktadır [25]. Uyumlu kesirli türevlerin basit tanımı ve klasik türev özelliklerini karşılama yeteneği, onu modelleme ve analizde güçlü bir araç haline getiriyor.

Birçok farklı kesirli türev tanımı mevcut olsa da, Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov türevleri gibi [26, 27], uyumlu kesirli türev genellikle basitliği ve klasik türev özelliklerini koruması nedeniyle tercih edilmektedir [25]. Bu özellik, hem teorik hem de pratik uygulamalarda daha sezgisel ve kolayca yorumlanabilir sonuçlara yol açabilir. Uyumlu kesirli türev, klasik ve kesirli türev arasındaki boşluğu kapatarak kesirli hesaplamaya umut verici bir yaklaşım sunmaktadır. Kullanım kolaylığı ve geniş uygulanabilirliği, çeşitli bilimsel ve mühendislik disiplinlerinde kesirli hesaplamanın avantajlarından yararlanmak isteyen araştırmacılar ve uygulayıcılar için çekici bir seçenek haline getiriyor [28, 29].

Tanım 2.1. Bir $g(t)$ fonksiyonu için, uyumlu kesirli türev, $T^{\alpha}(g)(t)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$T^{\alpha}(g)(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{g(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\epsilon}, \tag{2.1}$$

burada $0 < \alpha \leq 1$.
Bu tanım, tam sayı dereceli ve kesirli sayı dereceli türev arasında sorunsuz bir geçiş sağlıyor. α 1'e yaklaşırken, uyumlu türev klasik türevi basitleştirir ve türev almanın sezgisel anlayışını korur.

Teorem 2.1. *$\alpha \in (0, 1]$ parametresi ve $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Eğer f ve g fonksiyonları α -dereceden uyumlu türevlenebilir ise, aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1. $T^\alpha(af(t) + bg(t)) = mT^\alpha(f(t)) + nT^\alpha(g(t)), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$
2. $T^\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, \quad \forall p \in \mathbb{R},$
3. $T^\alpha(c) = 0$ *(c : sabit),*
4. $T^\alpha(f(t).g(t)) = f(t).T^\alpha(g(t)) + g(t).T^\alpha(f(t)).$
5. $T^\alpha\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)T^\alpha(f(t)) - f(t)T^\alpha(g(t))}{g(t)^2},$
6. $T^\alpha(f(t)) = T^\alpha(f(t)) = t^{1-\alpha}\frac{df(t)}{dt},$
7. $T^\alpha\{(f \circ g)(t)\} = t^{1-\alpha}g(t)f(g(t)).$

2.1.2 Beta Türev

Beta türev, beta fonksiyonu ve entegrasyon tekniklerini kullanarak türev alma kavramını tam sayı olmayan derecelere genelleştiren matematiksel bir kavramdır. Özellikle sinyal işleme, viskoelastik ve kesirli mertebe kontrol sistemleri gibi kesirli mertebe davranışı sergileyen fenomenlerin bulunduğu alanlarda faydalıdır [9, 24]. Beta kesirli türev, özellikle gama fonksiyonlarının oranlarını içeren integraller üzerine Euler'in çalışmalarına dayanan beta fonksiyonunu içerir [26]. Beta fonksiyonunun kesirli türevleri tanımlamada kullanımı, türev almayı tam sayı olmayan sıralara genişletmek için sağlam bir matematiksel çerçeve sunarak, çeşitli bilimsel disiplinlerdeki uygulanabilirliğini artırmaktadır [27]
Beta kesirli türev, türevi tam sayılı sıraların ötesine taşıyarak karmaşık sistemlerin ve süreçlerin daha esnek ve hassas bir tanımını mümkün kılar. Tam sayı dereceli türevlerin yalnızca fonksiyonun mevcut durumuna bağlı olmasının aksine, kesirli türevler fonksiyonun tarihinin daha geniş bir aralığından bilgi içerir. Bu da onları bellek ve kalıtsal özelliklere sahip sistemlerin modellenmesi için uygun hale getirir [28]. Bu yetenek, kesirli türevleri karmaşık dinamiklerin ve tarihsel bağımlılıkların modellenmesini gerektiren alanlarda özellikle faydalı hale getirir.
Beta fonksiyonunu kesirli türevlerin tanımına dahil ederek, beta kesirli türevi, geniş

bir bilim ve mühendislik disiplini yelpazesinde modelleme ve analiz için güçlü ve esnek bir araç sunar [30]. Bu yaklaşım, kesirli sıra dinamikleri sergileyen sistemlerin daha ayrıntılı ve doğru bir temsilini sağlar ve kesirli kalkülüsün potansiyel uygulamalarını daha da genişletir [31].

Tanım 2.2. Bir $g(t)$ fonksiyonu için, beta türev, $T^{\beta}(g)(t) = \frac{\partial^{\beta} g(t)}{\partial t^{\beta}}$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$T^{\beta} g(t) = \frac{\partial^{\beta} g(t)}{\partial t^{\beta}} = \lim_{\delta \to 0} \frac{g(t + \delta(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)})^{1-\beta}) - g(t)}{\delta}, \tag{2.2}$$

burada $t > 0$ ve $\beta \in (0, 1]$.
Verilen tanımda, kesirli bir aralıkta fonksiyonların davranışını yakalayarak türev kavramını tam sayı olmayan sıralara genişletmektedir.

Teorem 2.2. *Bir f fonksiyonu için, beta türev, $T^{\beta} g(t) = \frac{\partial^{\beta} g(t)}{\partial t^{\beta}}$ ile gösterilir, $f(t)$ ve $g(t)$, $\forall t > 0$ ve $\beta \in (0, 1]$ için β-türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere özellikler şu şekilde tanımlanır:*

1. $T^{\beta}\{a_0 f(t) + a_1 g(t)\} = a_0 \frac{\partial^{\beta}}{\partial t^{\beta}}(f(t)) + a_1 \frac{\partial^{\beta}}{\partial t^{\beta}}(g(t)), \forall a_0, a_1 \in \mathbf{R}$,
2. $T^{\beta}(c_0) = 0, \quad (c_0 : sabit)$,
3. $T^{\beta}(f(t)g(t)) = g(t)T^{\beta}(f(t)) + f(t)T^{\beta}(g(t))$,
4. $T^{\beta}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)T^{\beta}(f(t)) - f(t)T^{\beta}(g(t))}{g(t)^2}$,
5. $T^{\beta} f(t) = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \frac{df(t)}{dt}$,
6. $T^{\beta}\{(f \circ g)(t)\} = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(t)g'((t))$.

2.2 Yöntemler

Bu bölümde Modifiye $\frac{W}{G}$ yöntemini ve Modifiye Sardar Alt Denklem yöntemini tanımlayacağız.

2.2.1 Modifiye $\frac{W}{G}$ Yöntemi

Bu alt bölümde, kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümü için güçlü bir yöntem olarak geliştirilen Modifiye $\frac{W}{G}$-Genişleme yönteminin temel çerçevesini sunacağız.

$\frac{W}{G}$-Genişleme yöntemi, doğrusal olmayan KDD'leri çözmek için güçlü bir analitik tekniktir.Bu yöntem, KDD'lere kesin çözümler bulmak için sistematik bir yaklaşım olarak geliştirilmiştir. Diğer çözüm teknikleri arasında, basitliği ve geniş bir yelpazedeki doğrusal olmayan denklemleri ele almadaki etkinliği ile öne çıkmaktadır. Yöntem, uygun bir dalga dönüşümü tanıtarak orijinal doğrusal olmayan KDD'yi daha basit bir forma dönüştürmeyi içerir; bu dönüşüm, doğrusal olmayan KDD'yi adi diferansiyel denkleme (ADD) dönüştürür. Bu dönüştürülmüş ADD, çözümün $\frac{W}{G}$ fonksiyonları cinsinden ifade edildiği bir rasyonel fonksiyon genişlemesi kullanılarak çözülür.

$\frac{W}{G}$-Genişleme yöntemi, geleneksel yöntemlere göre birkaç avantaj sunmaktadır. Öncelikle, genellikle yaklaşık veya sayısal çözümlerden daha anlamlı olan kesin çözümler elde etmek için basit bir çerçeve sunar. Kesin çözümler, temel fiziksel süreçleri anlamaya ve sayısal modelleri doğrulamaya yardımcı olur. İkincisi, bu yöntem çok yönlüdür ve dalga yayılımı, akışkanlar dinamiği ve diğer fiziksel sistemleri tanımlayan çeşitli doğrusal olmayan KDD türlerine uygulanabilir.

$\frac{W}{G}$-Genişleme yönteminin en önemli güçlü yönlerinden biri, pratik problemlerde sıkça karşılaşılan karmaşık sınır ve başlangıç koşullarını ele alma yeteneğidir. Bu yöntemi kullanarak, araştırmacılar hem denklemleri hem de belirlenen koşulları karşılayan açık çözümler elde edebilirler. Bu, $\frac{W}{G}$-Genişleme yöntemini, kesin çözümlerin doğruluğu ve yorumlanabilirliği açısından yüksek değer taşıdığı uygulamalı matematik ve mühendislik disiplinlerinde özellikle faydalı hale getirir.

$\frac{W}{G}$-Genişleme yönteminin etkinliği, birçok doğrusal olmayan KDD'ye uygulanmasıyla gösterilmiştir. Örneğin, KdV denklemini, Modifiye KdV denklemini, Sine-Gordon denklemini ve çeşitli diğer doğrusal olmayan dalga denklemlerini çözmede başarıyla kullanılmıştır [32, 33]. Bu uygulamalar, yöntemin sağlamlığını ve zorlu doğrusal olmayan problemlere yeni kesin çözümler bulma potansiyelini vurgulamaktadır.

Özetle, $\frac{W}{G}$-Genişleme yöntemi, doğrusal olmayan KDD'lerin analitik incelenmesinde değerli bir araçtır. Karmaşık doğrusal olmayan denklemleri görece kolaylıkla dönüştürme ve çözme yeteneği, onu araştırmacılar ve uygulayıcılar için cazip bir seçenek haline getiriyor. $\frac{W}{G}$-Genişleme yönteminin gücünden yararlanarak, bilim ve mühendislik disiplinleri arasında doğrusal olmayan fenomenlerin anlaşılması ve modellenmesinde önemli ilerlemeler kaydedilebilir.

Modifiye $\frac{W}{G}$-Genişleme yöntemi, doğrusal olmayan KDD'leri çözmek için geliştirilmiş sağlam bir analitik tekniktir. Bu yöntem, tam çözümler elde etme konusundaki uygulanabilirliğini ve verimliliğini artıran değişiklikler getirerek geleneksel $\frac{G'}{G}$-Genişleme yönteminin üzerine inşa edilmektedir [34, 35]. Yöntemin özü, karmaşık doğrusal olmayan KDD'leri daha basit ADD'lere dönüştürmekte ve bunları rasyonel fonksiyon genişlemeleri kullanarak çözmektir [36, 37].

Bir doğrusal olmayan KDD'nin genel formu şu şekilde ifade edilebilir:

$$F\left(u, u_t, u_x, \ldots, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \ldots\right) = 0. \tag{2.3}$$

Burada, $u = U(x,t)$, F ise $u = U(x,t)$ ve onun çeşitli kısmi türevleri cinsinden bir polinomdur.

Adım 1: Seyahat eden dalga dönüşümü:

$$u = U(\varepsilon), \quad \varepsilon = x \pm kt \tag{2.4}$$

olmak üzere burada k sabittir. (2.4) dönüşümünü (2.3) denkleminde uygulayarak aşağıdaki doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$Q\left(U, U', U'', \ldots\right) = 0. \tag{2.5}$$

Adım 2: Diyelim ki (2.5) denkleminin çözümü, $\frac{W}{G}$ ifadesinin sonlu bir toplamı biçiminde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$U(\varepsilon) = \sum_{i=-N}^{N} a_i \left(\frac{W(\varepsilon)}{G(\varepsilon)}\right)^i. \tag{2.6}$$

Burada $a_i (i = \pm 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ keyfi sabitlerdir ve $W = W(\varepsilon)$, $G = G(\varepsilon)$ aşağıdaki ilişkiyi sağlar.

$$\left(\frac{W}{G}\right)' = a + b\left(\frac{W}{G}\right) + c\left(\frac{W}{G}\right)^2 \tag{2.7}$$

ya da

$$W'G - WG' = aG^2 + bWG + cW^2. \tag{2.8}$$

Burada a, b, c keyfi sabitlerdir.

Adım 3: Adım 1'de elde edilen (2.5) denklemi, doğrusal olmayan terim(ler)deki en yüksek kuvvet ile denklemin en yüksek mertebeden türevindeki kuvveti eşitleyerek pozitif tam sayı olan denge sabiti N'yi belirleyin.

Denge sabiti N aşağıdaki şekilde bulunur. $U(\epsilon)$'un derecesi $D(U(\epsilon)) = N$ olsun.

$$\begin{aligned} D\left(\frac{d^pU}{d\epsilon^p}\right) &= N + p, \\ D\left(U^q\left(\frac{d^pU}{d\epsilon^p}\right)^r\right) &= Nq + r(N+p). \end{aligned}$$

Adım 4: Denklem (2.6)'yı (2.5) ve (2.7) ile birleştirerek $\left(\frac{W}{G}\right)$'nin aynı kuvvetteki terimlerini toplayın ve sıfıra eşitleyin. Ardından $a_i (i = \pm 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ ve k için

bir cebirsel denklem sistemi ortaya çıkarın.
Adım 5: Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için yazılım programlarından yararlanarak $a_i(i = \pm 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ ve k katsayılarını belirleyin.
Adım 6: Yukarıdaki adımlarda elde edilen sonuçları kullanarak, (2.3) doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemin temel çözümlerinden bir seriyi türetin.

Bu yöntem üzerinde farklı W seçimleriyle farklı yöntemler elde edilebilir. Eğer $W = GG'$ alırsak Modifiye G'-genişleme yöntemini elde ederiz. Bu yöntemin analitik çözümleri aşağıdaki şekilde elde edilecektir:

$$U(\varepsilon) = \sum_{i=-N}^{N} a_i \left(G'\right)^i, \tag{2.9}$$

(2.5) denkleminin çözümü olmak üzere burada $a_i(i = \pm 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ keyfi sabitlerdir ve G aşağıdaki doğrusal olmayan ikinci dereceden adi diferansiyel denklemi sağlar:

$$G'' = a + bG' + c(G')^2. \tag{2.10}$$

Burada a, b ve c keyfi sabitlerdir.
(2.10) denkleminin genel çözümü ile elde edilen tam çözümler aşağıdaki üç ailede elde edilecektir:
Aile 1: Eğer $\delta = 4ac - b^2 > 0$ ise,

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{2c}\left[\ln(1 + \tan^2(\frac{1}{2}\sqrt{\delta}\varepsilon)) - b\varepsilon\right], \tag{2.11}$$

ve

$$G' = \frac{1}{2c}\left[\sqrt{\delta}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta}\varepsilon\right) - b\right]. \tag{2.12}$$

Aile 2: Eğer $\delta = 4ac - b^2 < 0$ ise,

$$G(\varepsilon) = -\frac{1}{2c}\left[\ln(\tanh^2(\frac{1}{2}\sqrt{-\delta}\varepsilon) - 1) - b\varepsilon\right], \tag{2.13}$$

ve

$$G' = -\frac{1}{2c}\left[\sqrt{-\delta}\tanh(\frac{1}{2}\sqrt{-\delta}\varepsilon) + b\right]. \tag{2.14}$$

Aile 3: Eğer $\delta = 4ac - b^2 = 0$ ise,

$$G(\varepsilon) = -\frac{1}{c}\left[\ln(\varepsilon) + \frac{b}{2}\varepsilon\right], \tag{2.15}$$

ve

$$G' = -\frac{1}{c}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{b}{2}\right]. \tag{2.16}$$

2.2.2 Modifiye Sardar Alt Denklem Yöntemi

Sardar Alt Denklem yöntemi, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (KDE) çözümünde önemli bir analitik yaklaşım olarak öne çıkmaktadır. Bu yöntem, farklı bilimsel disiplinlerdeki karmaşık fiziksel fenomenleri açıklamak amacıyla geliştirilmiştir ve analitik çözümler elde etmek için güçlü bir araçtır. Sardar Alt Denklem yöntemi, özellikle Korteweg-de Vries (KdV) ve benzeri denklemler gibi doğrusal olmayan denklemlerin analizi için önemli bir temel oluşturmaktadır.

Sardar Alt Denklem yöntemi, bir denklemin karakteristik çözüm biçimlerini belirlemek ve bu çözümleri daha karmaşık problemlere uygulamak amacıyla geliştirilmiştir. Yöntem, belirli dönüşümler ve çözüm teknikleri kullanarak, karmaşık doğrusal olmayan denklemleri daha basit formda ifade etmeyi mümkün kılar. Bu, özellikle fiziksel süreçlerin daha anlaşılır bir şekilde analiz edilmesine olanak tanır. Çeşitli çalışmalar, bu yöntemin KdV, Modifiye KdV ve sine-Gordon denklemleri gibi birçok doğrusal olmayan dalga denklemini çözme konusunda etkinliğini ortaya koymuştur. [38]

Sardar Alt Denklem yöntemi, matematiksel modelleme alanında sağladığı avantajlarla dikkat çekmektedir. Diğer çözüm yöntemleri ile karşılaştırıldığında, kesin çözümler elde etmek için sunduğu sistematik yaklaşım, hem teorik hem de pratik uygulamalarda daha sezgisel ve yorumlanabilir sonuçlar elde edilmesine olanak tanımaktadır [36]. Bu özellik, yöntemi, karmaşık sınır ve başlangıç koşullarını ele alma yeteneği ile güçlü bir hale getirmektedir.

Sardar Alt Denklem Yöntemi, geleneksel çözüm tekniklerinin ötesine geçerek, daha karmaşık fiziksel sistemlerin dinamiklerini anlamak için yeni bir perspektif sunmaktadır. Bu bağlamda, metodolojinin geliştirilmesi ve farklı disiplinlere adaptasyonu üzerine devam eden çalışmalar, gelecekte daha geniş bir uygulama yelpazesine ulaşma potansiyeli taşımaktadır. Özellikle plazma fiziği, akışkanlar dinamiği ve optik alanlarında yapılan uygulamalar, Sardar Alt Denklem yönteminin bilimsel araştırmalara katkısını net bir şekilde göstermektedir. [39–41]

Sonuç olarak, Sardar Alt Denklem yöntemi, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünde değerli bir araç olarak öne çıkmaktadır. Bu yöntem, karmaşık dinamiklerin incelenmesine olanak tanıyarak, hem teorik hem de uygulamalı alanlarda önemli ilerlemeler kaydedilmesine yardımcı olmaktadır. Bu nedenle, yöntemin daha geniş bir bilim ve mühendislik disiplinleri arasında benimsenmesi, doğrusal olmayan fenomenlerin anlaşılması ve modellenmesi açısından kritik bir adım olacaktır.

Bir doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemin (KDD) genel formu şu şekilde ifade edilebilir:

$$K\left(v, v_t, v_x, \ldots, v_{tt}, v_{xx}, v_{xt}, \ldots\right) = 0. \tag{2.17}$$

Burada, $v = V(x,t)$, K ise $v = V(x,t)$ ve onun çeşitli kısmi türevleri cinsinden bir polinomdur.

Adım 1: Seyahat eden dalga dönüşümü:

$$v = V(\varepsilon), \quad \varepsilon = x + y \pm kt \tag{2.18}$$

olmak üzere burada k sabittir. (2.18) dönüşümünü (2.17) denkleminde uygulayarak aşağıdaki doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$S\left(V, V', V'', \ldots\right) = 0. \tag{2.19}$$

Adım 2: Diyelim ki (2.19) denkleminin çözümü, ϕ ifadesinin sonlu bir toplamı biçiminde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$V(\epsilon) = \sum_{i=-N}^{N} \alpha_i \phi_i(\epsilon). \tag{2.20}$$

Burada $a_i (i = \pm 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ keyfi sabitlerdir ve $\phi = \phi(\varepsilon)$ aşağıdaki ilişkiyi sağlar.

$$(\phi''(\epsilon))^2 = a + b\phi^2(\epsilon) + \phi^4(\epsilon). \tag{2.21}$$

Burada a ve b keyfi sabitlerdir.

(2.10) denkleminin genel çözümü ile elde edilen tam çözümler aşağıdaki dört ailede elde edilecektir:

Aile 1: Eğer $b < 0$ ve $a = 0$ ise,

$$\phi_1^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{-slb}\,\mathrm{sec}_{sl}\left(\sqrt{-b}(\epsilon)\right),$$

$$\phi_2^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{-slb}\,\mathrm{csc}_{sl}\left(\sqrt{-b}(\epsilon)\right).$$

Aile 2: Eğer $b > 0$ ve $a = 0$ ise,

$$\phi_3^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{-slb}\,\mathrm{sech}_{sl}\left(\sqrt{b}(\epsilon)\right),$$

$$\phi_4^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{slb}\,\mathrm{csch}_{sl}\left(\sqrt{b}(\epsilon)\right).$$

Aile 3: Eğer $b < 0$ ve $a = \frac{b^2}{4}$ ise,

$$\phi_5^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\,\tanh_{sl}\left(\sqrt{-\frac{b}{2}}(\epsilon)\right),$$

$$\phi_6^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\,\coth_{sl}\left(\sqrt{-\frac{b}{2}}(\epsilon)\right),$$

$$\phi_7^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\left(\tanh_{sl}\left(\sqrt{-2b}(\epsilon)\right) + i\sqrt{sl}\,\mathrm{sech}_{sl}\left(\sqrt{-2b}(\epsilon)\right)\right),$$

$$\phi_8^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\left(\coth_{sl}\left(\sqrt{-2b}(\epsilon)\right) + i\sqrt{sl}\,\mathrm{csch}_{sl}\left(\sqrt{-2b}(\epsilon)\right)\right),$$

$$\phi_9^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{-\frac{b}{8}}\,\tanh_{sl}\left(\sqrt{-\frac{b}{8}}(\epsilon)\right) + i\sqrt{sl}\,\coth_{sl}\left(\sqrt{-\frac{b}{8}}(\epsilon)\right).$$

Aile 4: Eğer $b > 0$ ve $a = \frac{b^2}{4}$ ise,

$$\phi_{10}^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{\frac{b}{2}}\,\tan_{sl}\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(\epsilon)\right),$$

$$\phi_{11}^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{\frac{b}{2}}\,\cot_{sl}\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(\epsilon)\right),$$

$$\phi_{12}^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{\frac{b}{2}}\left(\tan_{sl}\left(\sqrt{2b}(\epsilon)\right) + \sqrt{sl}\,\sec_{sl}\left(\sqrt{2b}(\epsilon)\right)\right),$$

$$\phi_{13}^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{\frac{b}{2}}\left(\cot_{sl}\left(\sqrt{2b}(\epsilon)\right) + \sqrt{sl}\,\csc_{sl}\left(\sqrt{2b}(\epsilon)\right)\right),$$

$$\phi_{14}^{\pm}(\epsilon) = \pm\sqrt{\frac{b}{8}}\left(\tan_{sl}\left(\sqrt{\frac{b}{8}}(\epsilon)\right) + \sqrt{sl}\,\cot_{sl}\left(\sqrt{\frac{b}{8}}(\epsilon)\right)\right).$$

Burada

$$\sec_{sl}(\epsilon) = \frac{2}{se^{i\epsilon} + le^{-i\epsilon}}, \quad \csc_{sl}(\epsilon) = \frac{2i}{se^{i\epsilon} - le^{-i\epsilon}},$$

$$\mathrm{sech}_{sl}(\epsilon) = \frac{2}{se^{\epsilon} + le^{-\epsilon}}, \quad \mathrm{csch}_{sl}(\epsilon) = \frac{2}{se^{\epsilon} - le^{-\epsilon}},$$

$$\tanh_{sl}(\epsilon) = \frac{se^{\epsilon} - le^{-\epsilon}}{se^{\epsilon} + le^{-\epsilon}}, \quad \coth_{sl}(\epsilon) = \frac{se^{\epsilon} + le^{-\epsilon}}{se^{\epsilon} - le^{-\epsilon}},$$

$$\tan_{sl}(\epsilon) = -i\frac{se^{i\epsilon} - le^{-i\epsilon}}{se^{i\epsilon} + le^{-i\epsilon}}, \quad \cot_{sl}(\epsilon) = i\frac{se^{i\epsilon} + le^{-i\epsilon}}{se^{i\epsilon} - le^{-i\epsilon}},$$

hepsi özel genelleştirilmiş trigonometrik fonksiyonlardır.

Adım 3: Adım 1'de elde edilen (2.19) denklemi, doğrusal olmayan terim(ler)deki en yüksek kuvvet ile denklemin en yüksek mertebeden türevindeki kuvveti eşitleyerek pozitif tam sayı olan denge sabiti N'yi belirleyin.

Denge sabiti N aşağıdaki şekilde bulunur. $V(\epsilon)$'un derecesi $D(V(\epsilon)) = N$ olsun.

$$\begin{aligned} D\left(\frac{d^pV}{d\epsilon^p}\right) &= N + p, \\ D\left(V^q\left(\frac{d^pV}{d\epsilon^p}\right)^r\right) &= Nq + r(N + p). \end{aligned}$$

Adım 4: Denklem (2.20)'yı (2.19) ve (2.21) ile birleştirerek $\left(\frac{W}{G}\right)$'nin aynı kuvvetteki terimlerini toplayın ve sıfıra eşitleyin. Ardından $a_i (i = \pm 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ ve k için bir cebirsel denklem sistemi ortaya çıkarın.

Adım 5: Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için yazılım programlarından yararlanarak $a_i (i = \pm 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ ve k katsayılarını belirleyin.

Adım 6: Yukarıdaki adımlarda elde edilen sonuçları kullanarak, (2.17) doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemin temel çözümlerinden bir seriyi türetin.

3
YÖNTEMLERİN UYGULANMASI

3.1 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel KP Hiyerarşi Denkleminin Analitik Çözümleri

Bu bölümde, zaman kesirli integro-diferansiyel KP hiyerarşi denklemine uyumlu ve beta kesirli türevler ayrı ayrı uygulanmış, her iki tanım altında elde edilen analitik çözümler karşılaştırılmıştır.

$$\partial_t^\beta v = \frac{1}{2} v_{xxy} + \frac{1}{2}\partial_x^{-2} v_{yyy} + 2v_x \partial_x^{-1} v_y + 4vv_y, \tag{3.1}$$

$\beta \in (0,1]$ ve $\partial_x^{-1} = \int_0^x dx$'dir. $v(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t)$ dönüşümü Denklem (3.1)'de uygulanır, kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\partial_t^\beta u_{xx} = \frac{1}{2} u_{xxxxy} + \frac{1}{2} u_{yyy} + 2u_{xxx}u_{xy} + 4u_{xx}u_{xxy}. \tag{3.2}$$

İncelenen diferansiyel denklemin analitik çözümünü elde etmek amacıyla, klasik gezici dalga dönüşümü uygulanmıştır. Bu dönüşümle zamana ve uzaya bağlı çözüm tek bir bağımsız değişkene indirgenir.
Beta türev için gezici dalga denklemi:

$$u = U(\varepsilon), \quad \varepsilon = x + y - \frac{k}{\beta}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta, \tag{3.3}$$

ve uyumlu türev için gezici dalga denklemi:

$$u = U(\varepsilon), \quad \varepsilon = x + y - \frac{k}{\beta} t^\beta, \tag{3.4}$$

olmak üzere k sabit değerdir. Her iki tanımda da gezici dalga dönüşümü uygulanarak, problem adi türevlere indirgenmiştir. Her iki türevin dönüşümleri çözüm yönteminin yapısını değiştirmemekte, ancak elde edilen sonuç fonksiyonlarının biçiminde farklılıklara yol açmaktadır. Bu nedenle adi diferansiyel

denklem aynı kalsa da sonuçlar türev tanımına duyarlıdır.
Gezici dalga denklemleri Denklem (3.2)'de uygulanır ve adi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$(k+\frac{1}{2})U''+\frac{1}{2}U^{(4)}+3(U'')^2+c_0=0, \tag{3.5}$$

burada c_0 integral sabitidir. Denklem (3.5)'de $U''=S$ dönüşümü uygulanırsa,

$$(k+\frac{1}{2})S+\frac{1}{2}S''+3S^2+c_0=0. \tag{3.6}$$

denklemi elde edilir.

3.1.1 Modifiye G'-Genişleme Yönteminin Uygulanması

Bu alt bölümde Denklem (3.6)'nin analitik çözümlerini elde etmek için Modifiye G'-Genişleme yöntemi uygulanmıştır.
Doğrusal olmayan terimdeki en yüksek kuvvet olan S^2 ile denklemin en yüksek mertebeden türevindeki kuvveti olan S'' eşitlenerek pozitif tam sayı olan denge sabiti $N=2$ olarak bulunur ve Denklem (3.6)'nin çözümü aşağıdaki forma sahiptir:

$$S(\varepsilon)=\alpha_0+\alpha_1G'+\alpha_2(G')^2+\alpha_{-1}(G')^{-1}+\alpha_{-2}(G')^{-2}, \tag{3.7}$$

burada $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{-1}$, ve α_{-2} keyfi sabitlerdir.
Denklem sistemi, (3.7) ve (2.10) adi diferansiyel denklem (3.6)'de yerine koyarak ve G''nün tüm kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
(G')^0 \quad & :\frac{1}{2}\alpha_0+3\alpha_0^2+6\alpha_1\alpha_{-1}+6\alpha_2\alpha_{-2}+\alpha_2a^2+\alpha_{-2}c^2+\frac{1}{2}\alpha_{-1}bc \\
& +\frac{1}{2}\alpha_1ba+c_1+k\alpha_0=0, \\
(G')^1 \quad & :\frac{1}{2}\alpha_1+3\alpha_2ba+\alpha_1ca+6\alpha_1\alpha_0+6\alpha_2\alpha_{-1}+\frac{1}{2}\alpha_1b^2+k\alpha_1=0, \\
(G')^2 \quad & :\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{3}{2}\alpha_1cb+4\alpha_2ca+3\alpha_1^2+6\alpha_0\alpha_2+2\alpha_2b^2+k\alpha_2=0, \\
(G')^3 \quad & :5bc\alpha_2+c^2\alpha_1+6\alpha_1\alpha_2=0, \\
(G')^4 \quad & :3c^2\alpha_2+3\alpha_2^2=0, \\
(G')^{-1} \quad & :\frac{1}{2}\alpha_{-1}+3\alpha_{-2}cb+\alpha_{-1}ac+6\alpha_0\alpha_{-1}+6\alpha_1\alpha_{-2}+\frac{1}{2}\alpha_{-1}b^2+k\alpha_{-1}=0, \\
(G')^{-2} \quad & :\frac{1}{2}\alpha_{-2}+4\alpha_{-2}ca+\frac{3}{2}\alpha_{-1}ba+3\alpha_{-1}^2+6\alpha_0\alpha_{-2}+2\alpha_{-2}b^2+k\alpha_{-2}=0, \\
(G')^{-3} \quad & :a^2\alpha_{-1}+5ab\alpha_{-2}+6\alpha_{-1}\alpha_{-2}=0, \\
(G')^{-4} \quad & :3a^2\alpha_{-2}+3\alpha_{-2}^2=0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Maple yardımıyla, ortaya çıkan cebirsel sistem hesaplanarak aşağıdaki iki durum elde edilir:

Durum 1:

$$\begin{aligned} k =& k, \alpha_0 = -\frac{2ca}{3} - \frac{b^2}{12} - \frac{k}{6} - \frac{1}{12}, \alpha_1 = -bc, \alpha_2 = -c^2, \alpha_{-1} = 0, \alpha_{-2} = 0, \\ c_0 =& -\frac{1}{3}a^2c^2 + \frac{1}{6}b^2ac + \frac{1}{48} + \frac{1}{12}k^2 + \frac{1}{12}k - \frac{1}{48}b^4 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Durum 2:

$$\begin{aligned} k =& k, \alpha_0 = -\frac{2ca}{3} - \frac{b^2}{12} - \frac{k}{6} - \frac{1}{12}, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_{-1} = -cb, \alpha_{-2} = -c^2, \\ c_0 =& -\frac{1}{3}a^2c^2 + \frac{1}{6}b^2ac + \frac{1}{48} + \frac{1}{12}k^2 + \frac{1}{12}k - \frac{1}{48}b^4. \end{aligned} \tag{3.10}$$

burada $a, b, c,$ ve k keyfi sabitlerdir.

Daha önce $v(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t), u = U(\epsilon)$ ve $U'' = S$ dönüşümleri uygulanarak denklemimiz adi diferansiyel denkleme indirgenmişti, dönüşümlerin ters yönde uygulanmasıyla bu ifade aşağıdaki çözümlere ulaşılır.

Aile 1, Durum 1 için:

$$\begin{aligned} v_1(x, y, t) =& -\frac{2ca}{3} - \frac{b^2}{12} - \frac{k}{6} - \frac{1}{12} \\ & -\frac{b}{2}\left(\sqrt{4ac - b^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4ac - b^2}\,(\epsilon)\right) - b\right) \\ & -\frac{1}{4}\left(\sqrt{4ac - b^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4ac - b^2}\,(\epsilon)\right) - b\right)^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aile 1, Durum 2 için:

$$\begin{aligned} v_2(x, y, t) =& -\frac{2ca}{3} - \frac{b^2}{12} - \frac{k}{6} - \frac{1}{12} \\ & -\frac{2abc}{\sqrt{4ac - b^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4ac - b^2}\,(\epsilon)\right) - b} \\ & -\frac{4a^2c^2}{\left(\sqrt{4ac - b^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4ac - b^2}\,(\epsilon)\right) - b\right)^2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Aile 2, Durum 1 için:

$$\begin{aligned} v_3(x,y,t) &= -\frac{2ca}{3} - \frac{b^2}{12} - \frac{k}{6} - \frac{1}{12} \\ &+\frac{b}{2}\left(\sqrt{-4ac+b^2}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4ac+b^2}\,(\epsilon)\right)+b\right) \\ &-\frac{1}{4}\left(\sqrt{-4ac+b^2}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4ac+b^2}\,(\epsilon)\right)+b\right)^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Aile 2, Durum 2 için:

$$\begin{aligned} v_4(x,y,t) &= -\frac{2ca}{3} - \frac{b^2}{12} - \frac{k}{6} - \frac{1}{12} \\ &+\frac{2abc}{\sqrt{-4ac+b^2}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4ac+b^2}\,(\epsilon)\right)+b} \\ &-\frac{4a^2c^2}{\left(\sqrt{-4ac+b^2}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4ac+b^2}\,(\epsilon)\right)+b\right)^2} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Aile 3, Durum 1 için:

$$\begin{aligned} v_5(x,y,t) &= -\frac{2ca}{3} - \frac{b^2}{12} - \frac{k}{6} - \frac{1}{12} \\ &+b\left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{2}\right) - \left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Aile 3, Durum 2 için:

$$\begin{aligned} v_6(x,y,t) &= -\frac{2ca}{3} - \frac{b^2}{12} - \frac{k}{6} - \frac{1}{12} \\ &+\frac{abc}{\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{2}} - \frac{a^2c^2}{\left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{b}{2}\right)^2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

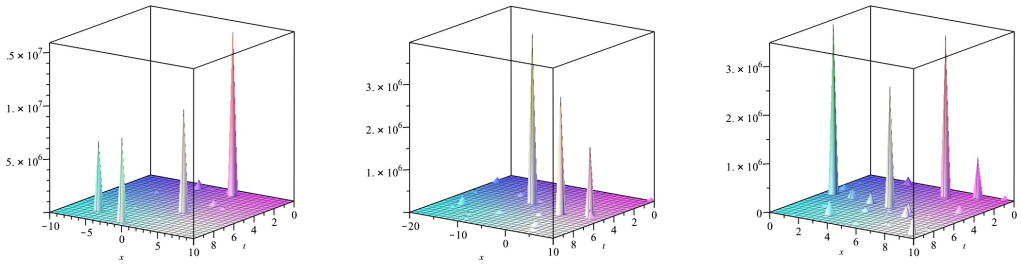
Bu alt bölümde elde edilen analitik çözümler, ϵ parametresi cinsinden kapalı formda bırakılmıştır, böylece iki farklı kesirli türev tanımı ile karşılaştırmalı analiz yapılabilir. Bu nedenle, her iki tanımda da aynı gezici dalga dönüşümüne karşılık gelen çözümler doğrudan karşılaştırılabilir.

3.1.2 Uyumlu Kesirli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme

Bu alt bölümde, uyumlu kesirli türev tanımı altında elde edilen analitik çözüm, daha önce tanımlanan gezici dalga dönüşümü ile ifade edilmiştir ve bu çözümün farklı β değerleri altında davranışı grafiksel olarak incelenmekte ve elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır.

Elde edilen analitik çözüm yöntemi sonucunda, diferansiyel denklem için birden

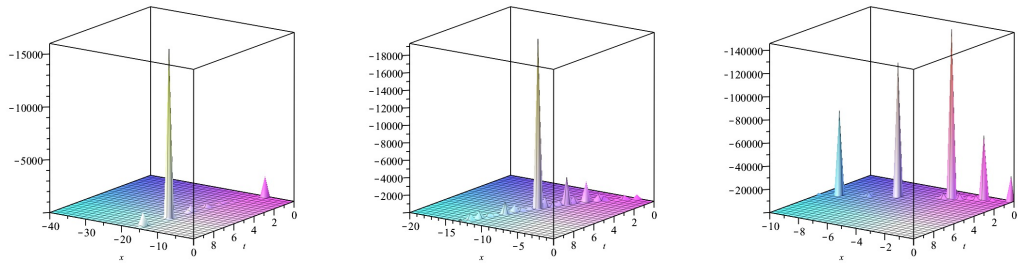
fazla parametre seti altında geçerli olan çeşitli çözüm ifadeleri bulunmuştur. Ancak bu tez kapsamında, çözüm kümesinin tamamının uygulanması yerine, karakteristik yapıları temsil eden Durum 2 seçilmiştir.



(a) $\beta = 0.2$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.9$ için

Şekil 3.1 Uyumlu kesirli türev için $v_2(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

İlk olarak, Şekil 3.1 $v_2(\epsilon)$ çözümünün 3D bir gösterimini sunmaktadır. Denklem (3.12)'nin $\beta = 0.2, \beta = 0.5, \beta = 0.9$ değerleri altında grafiği incelenmiştir. Bu görüntü, fonksiyonun $a = 4, b = 2, c = 1, k = -2$ ve $y = 0$ değerlerindeki trigonometrik çözümlerini göstermektedir.



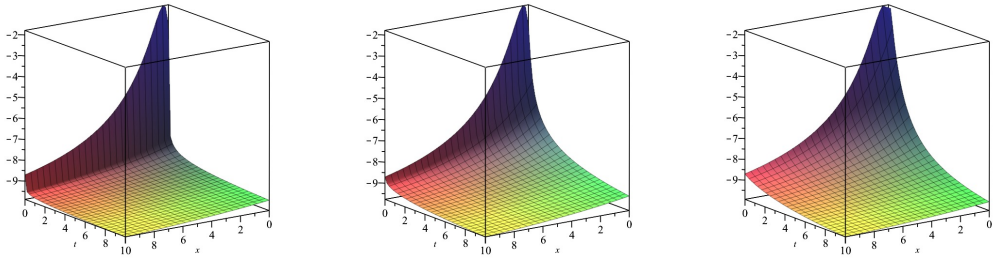
(a) $\beta = 0.2$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.9$ için

Şekil 3.2 Uyumlı kesirli türev için $v_4(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

Şekil 3.2, $v_4(\epsilon)$ çözümünün $\beta = 0.2, \beta = 0.5, \beta = 0.9$ değerleri için 3D grafikleri göstermektedir. Bu grafik, (3.14) çözümünün $a = 4, b = 2, c = 1, k = -2$ ve $y = 0$ değerlerindeki hiperbolik çözümlerini göstermektedir.

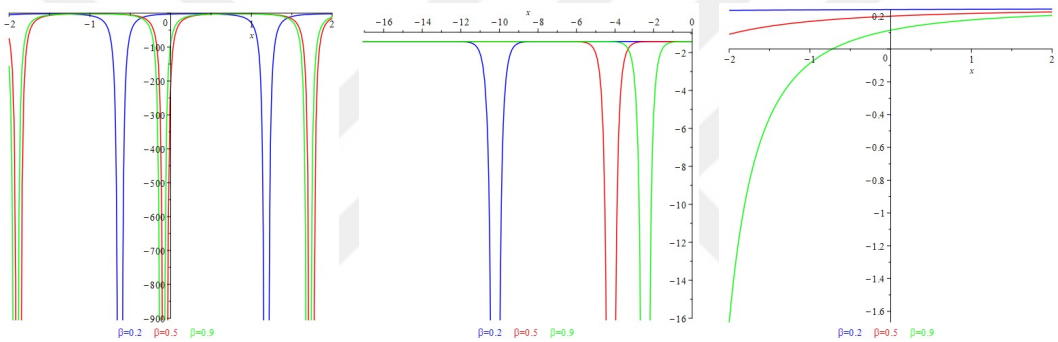
Şekil 3.3, $v_6(\epsilon)$ çözümünün bazı değerleri için 3D grafikleri göstermektedir. Bu grafik, (3.16) çözümünün $a = 4, b = 2, c = 1, k = -2$ ve $y = 0$ değerlerindeki rasyonel çözümlerini göstermektedir.

Şekil 3.4'te $v_2(x, y, t)$, $v_4(x, y, t)$ ve $v_6(x, y, t)$ fonksiyonlarının $\beta = 0.2, \beta = 0.5$ ve $\beta = 0.9$ değerleri için çizilmiş 2D grafikleri görülmektedir.



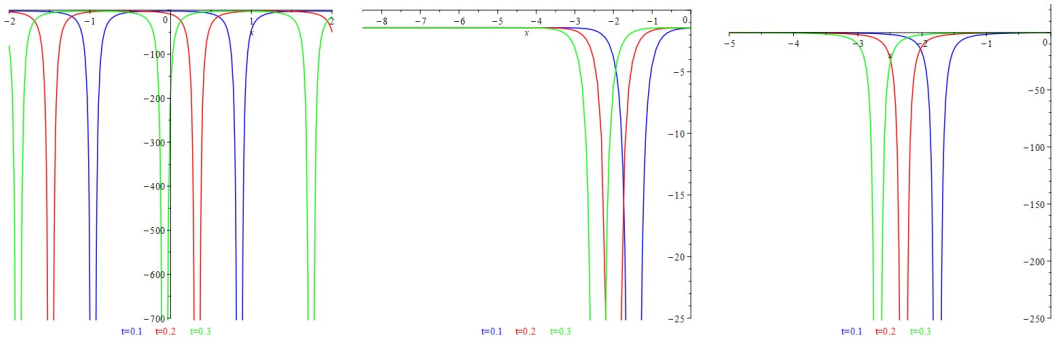
(a) $\beta = 0.2$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.9$ için

Şekil 3.3 Uyumlu kesirli türev için $v_6(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri



(a) $v_2(x, y, t)$ için (b) $v_4(x, y, t)$ için (c) $v_6(x, y, t)$ için

Şekil 3.4 Uyumlu kesirli türev için $v_2(x, y, t)$, $v_4(x, y, t)$ ve $v_6(x, y, t)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen 2D grafikleri



(a) $\beta = 0.2$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.9$ için

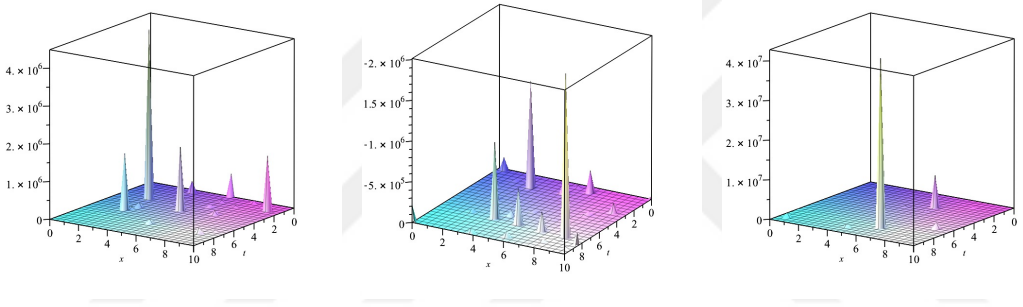
Şekil 3.5 Uyumlu kesirli türev için $v_2(\epsilon)$, $v_4(\epsilon)$ ve $v_6(\epsilon)$ çözümünün farklı t değerlerinde elde edilen 2D grafikleri

Son olarak, Şekil 3.5'te $v_2(x,y,t)$, $v_4(x,y,t)$ ve $v_6(x,y,t)$'nin $t = 0.1, t = 0.2$ ve $t = 0.3$ değerleriyle çizilmiş 2B grafikleri görülmektedir.

3.1.3 Beta Kesirli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme

Bu alt bölümde, beta kesirli türev tanımı altında elde edilen analitik çözüm, daha önce beta türev için tanımlanan gezici dalga dönüşümü ile ifade edilmiştir ve bu çözümün farklı β değerleri altında davranışı grafiksel olarak incelenmekte ve elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır.

Elde edilen analitik çözüm yöntemi sonucunda, diferansiyel denklem için birden fazla parametre seti altında geçerli olan çeşitli çözüm ifadeleri bulunmuştur. Ancak bu tez kapsamında, çözüm kümesinin tamamının uygulanması yerine, karakteristik yapıları temsil eden Durum 2 seçilmiştir.



(a) $\beta = 0.2$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.9$ için

Şekil 3.6 Beta kesirli türev için $v_2(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

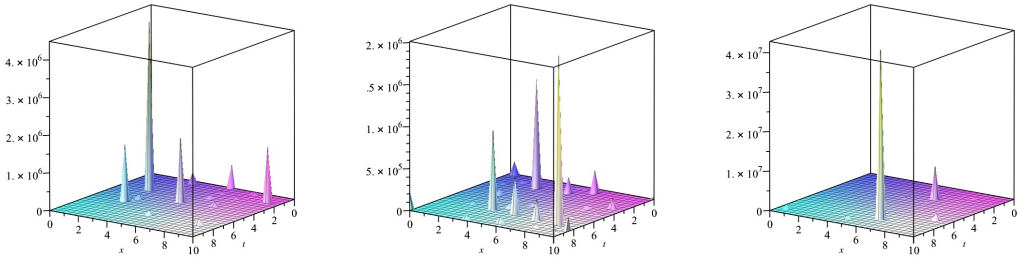
İlk olarak, Şekil 3.6 $v_2(\epsilon)$ çözümünün 3D bir gösterimini sunmaktadır. Denklem (3.12)'nin $\beta = 0.2, \beta = 0.5, \beta = 0.9$ değerleri altında grafiği incelenmiştir. Bu görüntü, fonksiyonun $a = 4, b = 2, c = 1, k = -2$ ve $y = 0$ değerlerindeki trigonometrik çözümlerini göstermektedir.

Şekil 3.7, $v_4(\epsilon)$ çözümünün $\beta = 0.2, \beta = 0.5, \beta = 0.9$ değerleri için 3D grafikleri göstermektedir. Bu grafik, (3.14) çözümünün $a = 4, b = 2, c = 1, k = -2$ ve $y = 0$ değerlerindeki hiperbolik çözümlerini göstermektedir.

Şekil 3.8, $v_6(\epsilon)$ çözümünün bazı değerleri için 3D grafikleri göstermektedir. Bu grafik, (3.16) çözümünün $a = 4, b = 2, c = 1, k = -2$ ve $y = 0$ değerlerindeki rasyonel çözümlerini göstermektedir.

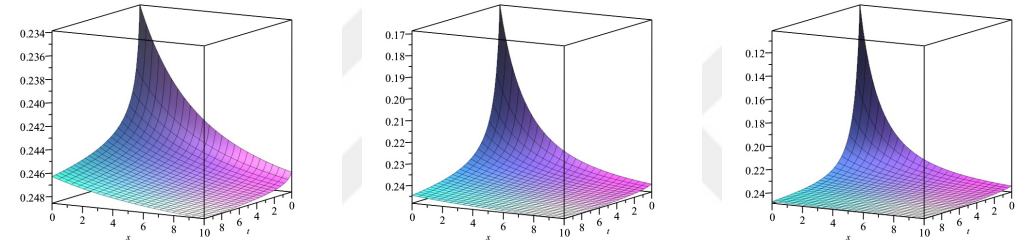
Şekil 3.9'te $v_2(x,y,t)$, $v_4(x,y,t)$ ve $v_6(x,y,t)$ fonksiyonlarının $\beta = 0.2, \beta = 0.5$ ve $\beta = 0.9$ değerleri için çizilmiş 2D grafikleri görülmektedir.

Son olarak, Şekil 3.10'te $v_2(x,y,t)$, $v_4(x,y,t)$ ve $v_6(x,y,t)$'nin $t = 0.1, t = 0.2$ ve $t = 0.3$ değerleriyle çizilmiş 2B grafikleri görülmektedir.



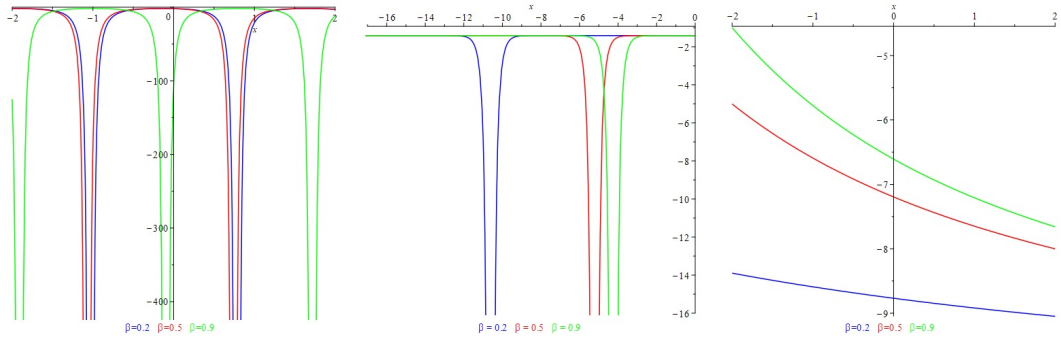
(a) $\beta = 0.2$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.9$ için

Şekil 3.7 Beta kesirli türev için $v_4(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri



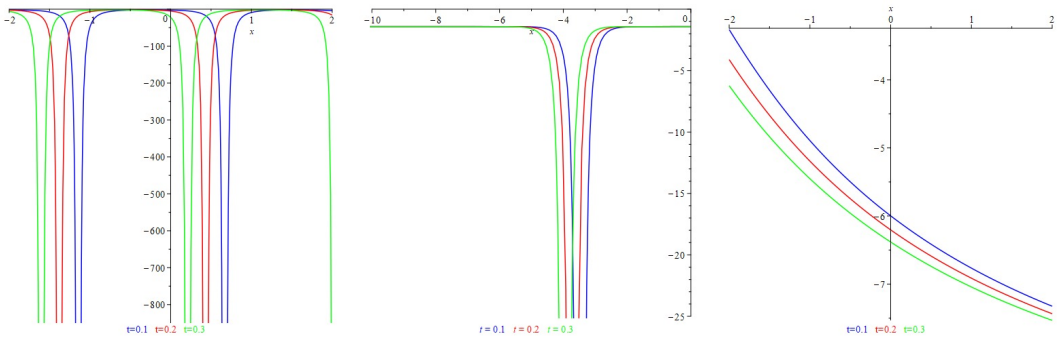
(a) $\beta = 0.2$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.9$ için

Şekil 3.8 Beta kesirli türev için $v_6(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri



(a) $v_2(x, y, t)$ için (b) $v_4(x, y, t)$ için (c) $v_6(x, y, t)$ için

Şekil 3.9 Beta kesirli türev için $v_2(x, y, t)$, $v_4(x, y, t)$ ve $v_6(x, y, t)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen 2D grafikleri



(a) $\beta = 0.2$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.9$ için

Şekil 3.10 Beta kesirli türev için $v_2(\epsilon), v_4(\epsilon)$ ve $v_6(\epsilon)$ çözümünün farklı t değerlerinde elde edilen 2D grafikleri

3.2 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel CDGKS Denkleminin Analitik Çözümleri

Bu bölümde, zaman kesirli integro-diferansiyel CDGKS denklemine uyumlu ve beta kesirli türevler ayrı ayrı uygulanmış, her iki tanım altında elde edilen analitik çözümler karşılaştırılmıştır.

$$\partial_t^\beta u = u_{xxxxx} + 5u_x u_{xx} + 5uu_{xxx} + 5u^2 u_x + 5u_{xxy} - 5\partial_x^{-1} u_{yy} + 5uu_y + 5u_x \partial_x^{-1} u_y \tag{3.17}$$

$\partial_x^{-1} = \int_0^x dx$'dir. $u(x,y,t) = v_x(x,y,t)$ dönüşümü Denklem (3.17)'de uygulanır, kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\partial_t^\alpha v_x = v_{xxxxxx} + 5v_{xx}v_{xxx} + 5v_x v_{xxxx} + 5{v_x}^2 v_{xx} + 5v_{xxxy} - 5v_{yy} + 5v_x v_{xy} + 5v_{xx} v_y \tag{3.18}$$

İncelenen diferansiyel denklemin analitik çözümü, klasik gezici dalga dönüşümü kullanılarak elde edildi. Bu değişiklik, zamana ve uzaya bağlı çözümün tek bir bağımsız değişkene indirgenmesine neden olur.
Beta türev için gezici dalga denklemi:

$$u = U(\varepsilon), \quad \varepsilon = x + y - \frac{k}{\beta}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta, \tag{3.19}$$

ve uyumlu türev için gezici dalga denklemi:

$$u = U(\varepsilon), \quad \varepsilon = x + y - \frac{k}{\beta} t^\beta, \tag{3.20}$$

olmak üzere k sabit değerdir. Her iki tanımda da gezici dalga dönüşümü uygulanarak, problem adi türevlere indirgenmiştir. Her iki türevin dönüşümleri çözüm yönteminin yapısını değiştirmemekte, ancak elde edilen sonuç fonksiyonlarının biçiminde farklılıklara yol açmaktadır. Bu nedenle adi diferansiyel

aynı kalsa da sonuçlar türev tanımına duyarlıdır. Gezici dalga denklemleri Denklem (3.18)'de uygulanır ve adi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$(k-5)V' + V^{(5)} + 5V'V''' + \frac{5}{3}(V')^3 + 5V''' + 5(V')^2 + c_1 = 0 \qquad (3.21)$$

burada c_1 integral sabitidir. Denklem (3.21)'de $V' = R$ dönüşümü uygulanırsa,

$$(k-5)R + R^{(4)} + 5RR'' + \frac{5}{3}R^3 + 5R'' + 5R^2 + C = 0 \qquad (3.22)$$

denklemi elde edilir.

3.2.1 Modifiye Sardar Alt Denklem Yönteminin Uygulaması

Bu alt bölümde Denklem (3.22)'nin çözümünü elde etmek için Modifiye Sardar Alt Denklem yöntemini uygulanmıştır.

Doğrusal olmayan terimdeki en yüksek kuvvet olan R^3 ile denklemin en yüksek mertebeden türevindeki kuvveti olan $R^{(4)}$ eşitleyerek pozitif tam sayı olan denge sabiti $N = 2$ olarak bulunur ve Denklem (3.22)'nin çözümü aşağıdaki forma sahiptir:

$$R(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1\phi + \alpha_2(\phi)^2 + \alpha_{-1}(\phi)^{-1} + \alpha_{-2}(\phi)^{-2}, \qquad (3.23)$$

burada $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{-1}$, ve α_{-2} keyfi sabitlerdir.
Denklem sistemi, (3.23) ve (2.21) adi diferansiyel denklem (3.22)'de yerine koyarak ve ϕ'nin tüm kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
(\phi)^0 :\ & k\alpha_0 + 10\alpha_0\alpha_{-1}\alpha_1 + 10\alpha_0\alpha_2\alpha_{-2} + 8ab\alpha_2 + 10a\alpha_2 + 10\alpha_1\alpha_{-1}b + 40\alpha_2\alpha_{-2}b + \frac{5}{3}\alpha_0^3 \\
& + 10\alpha_0 a\alpha_2 + 5\alpha_1^2\alpha_{-2} + 5\alpha_2\alpha_{-1}^2 + C + 10\alpha_0\alpha_{-2} + 8\alpha_{-2}b + 10\alpha_1\alpha_{-1} + 10\alpha_2\alpha_{-2} \\
& + 5\alpha_0^2 + 10\alpha_{-2} - 5\alpha_0 = 0, \\
(\phi)^1 :\ & 10a\alpha_1\alpha_2 + b^2\alpha_1 + 5b\alpha_0\alpha_1 + 25b\alpha_2\alpha_{-1} + 5\alpha_0^2\alpha_1 + 10\alpha_0\alpha_2\alpha_{-1} + 5\alpha_1^2\alpha_{-1} + 10\alpha_1\alpha_2\alpha_{-2} \\
& + 12a\alpha_1 + 5b\alpha_1 + k\alpha_1 + 10\alpha_0\alpha_1 + 20\alpha_1\alpha_{-2} + 10\alpha_2\alpha_{-1} - 5\alpha_1 = 0, \\
(\phi)^2 :\ & 10a\alpha_2^2 + 16b^2\alpha_2 + 20b\alpha_0\alpha_2 + 5b\alpha_1^2 + 5\alpha_0^2\alpha_2 + 5\alpha_0\alpha_1^2 + 10\alpha_1\alpha_2\alpha_{-1} + 5\alpha_2^2\alpha_{-2} + 72a\alpha_2 \\
& + 20b\alpha_2 + k\alpha_2 + 10\alpha_0\alpha_2 + 5\alpha_1^2 + 10\alpha_1\alpha_{-1} + 40\alpha_2\alpha_{-2} - 5\alpha_2 = 0, \\
(\phi)^3 :\ & 10\alpha_1\alpha_2\alpha_0 + 25\alpha_1\alpha_2 b + 20\alpha_1 b + 10\alpha_0\alpha_1 + 30\alpha_2\alpha_{-1} + \frac{5}{3}\alpha_1^3 + 10\alpha_1 + 5\alpha_2^2\alpha_{-1} + 10\alpha_1\alpha_2 = 0, \\
(\phi)^4 :\ & 20b\alpha_2^2 + 5\alpha_0\alpha_2^2 + 5\alpha_1^2\alpha_2 + 120b\alpha_2 + 30\alpha_0\alpha_2 + 10\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + 30\alpha_2 = 0, \\
(\phi)^5 :\ & 5\alpha_1\alpha_2^2 + 40\alpha_1\alpha_2 + 24\alpha_1 = 0, \\
(\phi)^6 :\ & 120\alpha_2 + 30\alpha_2^2 + \frac{5}{3}\alpha_2^3 = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\phi)^{-1}: \quad & 20a\alpha_2\alpha_{-1} + b^2\alpha_{-1} + 5b\alpha_0\alpha_{-1} + 25b\alpha_1\alpha_{-2} + 5\alpha_0^2\alpha_{-1} + 10\alpha_0\alpha_1\alpha_{-2} + 5\alpha_1\alpha_{-1}^2 + 10\alpha_2\alpha_{-1}\alpha_{-2} \\
& + 12a\alpha_{-1} + 5b\alpha_{-1} + k\alpha_{-1} + 10\alpha_0\alpha_{-1} + 10\alpha_1\alpha_{-2} + 10\alpha_{-1}\alpha_{-2} - 5\alpha_{-1} = 0, \\
(\phi)^{-2}: \quad & 10a\alpha_1\alpha_{-1} + 40a\alpha_2\alpha_{-2} + 16b^2\alpha_{-2} + 20b\alpha_0\alpha_{-2} + 5b\alpha_{-1}^2 + 5\alpha_0^2\alpha_{-2} + 5\alpha_0\alpha_{-1}^2 + 10\alpha_1\alpha_{-1}\alpha_{-2} \\
& + 5\alpha_2\alpha_{-2}^2 + 72a\alpha_{-2} + 20b\alpha_{-2} + k\alpha_{-2} + 10\alpha_0\alpha_{-2} + 5\alpha_{-1}^2 + 10\alpha_{-2}^2 - 5\alpha_{-2} = 0, \\
(\phi)^{-3}: \quad & 10\alpha_0\alpha_{-1}\alpha_{-2} + 10\alpha_{-1}a + 10\alpha_0\alpha_{-1}a + 30\alpha_1\alpha_{-2}a + 25\alpha_{-1}\alpha_{-2}b + 20\alpha_{-1}ba + \frac{5}{3}\alpha_{-1}^3 + 5\alpha_1\alpha_{-2}^2 \\
& + 10\alpha_{-1}\alpha_{-2} = 0, \\
(\phi)^{-4}: \quad & 120ab\alpha_{-2} + 30a\alpha_0\alpha_{-2} + 10a\alpha_{-1}^2 + 20b\alpha_{-2}^2 + 5\alpha_0\alpha_{-2}^2 + 5\alpha_{-1}^2\alpha_{-2} + 30a\alpha_{-2} + 5\alpha_{-2}^2 = 0, \\
(\phi)^{-5}: \quad & 24a^2\alpha_{-1} + 40a\alpha_{-1}\alpha_{-2} + 5\alpha_{-1}\alpha_{-2}^2 = 0, \\
(\phi)^{-6}: \quad & 120\alpha_{-2}a^2 + 30\alpha_{-2}^2a + \frac{5}{3}\alpha_{-2}^3 = 0.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Maple yardımıyla, ortaya çıkan cebirsel sistem hesaplanarak aşağıdaki altı durum elde edilir:

Durum 1:

$$
\begin{aligned}
k \quad &= -16b^2 - 20b\alpha_0 - 5\alpha_0^2 - 12a - 20b - 10\alpha_0 + 5, \\
c_1 \quad &= \frac{10}{3}\alpha_0^3 + 48ba + 16b^2\alpha_0 + 20b\alpha_0^2 + 72a\alpha_0 + 20b\alpha_0 + 5\alpha_0^2 + 60a, \\
\alpha_0 \quad &= \alpha_0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_{-2} = -6a.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Durum 2:

$$
\begin{aligned}
k \quad &= -16b^2 - 20b\alpha_0 - 5\alpha_0^2 - 12a - 20b - 10\alpha_0 + 5, \\
c_1 \quad &= \frac{10}{3}\alpha_0^3 + 48ba + 16b^2\alpha_0 + 20b\alpha_0^2 + 72a\alpha_0 + 20b\alpha_0 + 5\alpha_0^2 + 60a, \\
\alpha_0 \quad &= \alpha_0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -6, \quad \alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_{-2} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Durum 3:

$$
\begin{aligned}
k \quad &= -16b^2 - 20b\alpha_0 - 5\alpha_0^2 + 48a - 20b - 10\alpha_0 + 5, \\
c_1 \quad &= -1344ba - 288a\alpha_0 + \frac{10}{3}\alpha_0^3 - 240a + 16b^2\alpha_0 + 20b\alpha_0^2 + 20b\alpha_0 + 5\alpha_0^2, \\
\alpha_0 \quad &= \alpha_0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -6, \quad \alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_{-2} = -6a.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Durum 4:

$$
\begin{aligned}
k \quad &= -16b^2 + 48a + 10, \\
c_1 \quad &= \frac{5}{3} + \frac{128}{3}b^3 - 16b^2 - 192ba + 48a, \\
\alpha_0 \quad &= -4b - 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_{-2} = -12a.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Durum 5:

$$\begin{aligned} k &= -16b^2 + 48a + 10, \\ c_1 &= -192ba - 48a + \frac{5}{3} + \frac{128}{3}b^3 - 16b^2, \\ \alpha_0 &= -4b - 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -12, \quad \alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_{-2} = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Durum 6:

$$\begin{aligned} k &= -16b^2 - 192a + 10, \\ c_1 &= -1536ba - 192a + \frac{5}{3} + \frac{128}{3}b^3 - 16b^2, \\ \alpha_0 &= -4b - 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -12, \quad \alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_{-2} = -12a. \end{aligned} \tag{3.30}$$

burada a, b ve k keyfi sabitlerdir.

Elde edilen analitik çözüm yöntemi sonucunda, diferansiyel denklem için birden fazla parametre seti altında geçerli olan çeşitli çözüm ifadeleri bulunmuştur. Ancak bu tez kapsamında, çözüm kümesinin tamamının uygulanması yerine, karakteristik yapıları temsil eden Durum 6 seçilmiştir. Modifiye Sardar Alt Denklem yönteminde kullanılan yardımcı denklemin farklı çözüm formlarından dolayı ortaya çıkan bu özel durumda özellikle $\phi_1^{\pm}(\epsilon), \phi_3^{\pm}(\epsilon), \phi_5^{\pm}(\epsilon)$ ve $\phi_{10}^{\pm}(\epsilon)$ çözümlerinin denkleme uygulanmasıyla elde edilen sonuçlara odaklanılmıştır. Bu seçim, denklemin doğrusal olmayan terimleriyle etkileşime giren çeşitli fonksiyonel formlardaki dalga yapılarının incelenmesine olanak tanır.
Daha önce $u(x, y, t) = v_x(x, y, t), v = V(\epsilon)$ ve $V' = R$ dönüşümleri uygulanarak denklemimiz adi diferansiyel denkleme indirgenmişti, dönüşümlerin ters yönde uygulanmasıyla bu ifade aşağıdaki çözümlere ulaşılır.

Aile 1, Durum 6 için:

$$\begin{aligned} \phi_1^{\pm}(\epsilon) &= -4b - 1 - 12(\pm\sqrt{-slb}\,\mathrm{sec}_{sl}\left(\sqrt{-b}(\epsilon)\right))^2 \\ &\quad -12a(\pm\sqrt{-slb}\,\mathrm{sec}_{sl}\left(\sqrt{-b}(\epsilon)\right))^{-2} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Aile 2, Durum 6 için:

$$\begin{aligned} \phi_3^{\pm}(\epsilon) &= -4b - 1 - 12(\pm\sqrt{-slb}\,\mathrm{sech}_{sl}\left(\sqrt{b}(\epsilon)\right))^2 \\ &\quad -12a(\pm\sqrt{-slb}\,\mathrm{sech}_{sl}\left(\sqrt{b}(\epsilon)\right))^{-2} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Aile 3, Durum 6 için:

$$\begin{aligned}\phi_5^{\pm}(\epsilon) &= -4b-1-12(\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\,\tanh_{sl}\left(\sqrt{-\frac{b}{2}}(\epsilon)\right))^2 \\ &\quad -12a(\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\,\tanh_{sl}\left(\sqrt{-\frac{b}{2}}(\epsilon)\right))^{-2}\end{aligned} \tag{3.33}$$

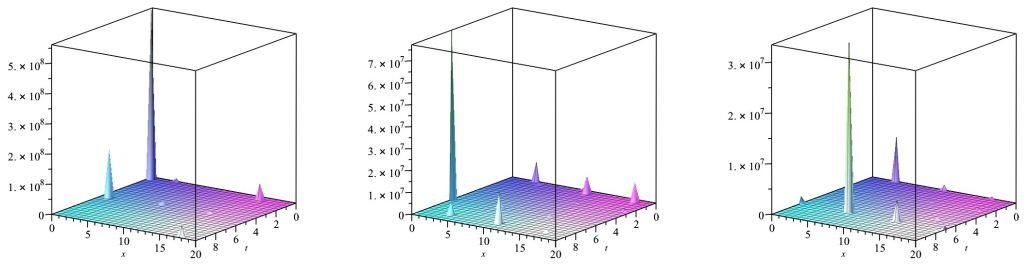
Aile 4, Durum 6 için:

$$\begin{aligned}\phi_{10}^{\pm}(\epsilon) &= -4b-1-12(\pm\sqrt{\frac{b}{2}}\,\tan_{sl}\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(\epsilon)\right))^2 \\ &\quad -12a(\pm\sqrt{\frac{b}{2}}\,\tan_{sl}\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(\epsilon)\right))^{-2}\end{aligned} \tag{3.34}$$

Bu alt bölümde elde edilen analitik çözümler, ϵ parametresi cinsinden kapalı formda bırakılmıştır, böylece iki farklı kesirli türev tanımı ile karşılaştırmalı analiz yapılabilir. Bu nedenle, her iki tanımda da aynı gezici dalga dönüşümüne karşılık gelen çözümler doğrudan karşılaştırılabilir.

3.2.2 Uyumlu Kesirli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme

Bu alt bölümde, uyumlu kesirli türev tanımı altında elde edilen analitik çözüm, daha önce uyumlu türev için tanımlanan gezici dalga dönüşümü ile ifade edilmiştir ve bu çözümün farklı β değerleri altında davranışı grafiksel olarak incelenmekte ve elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır.

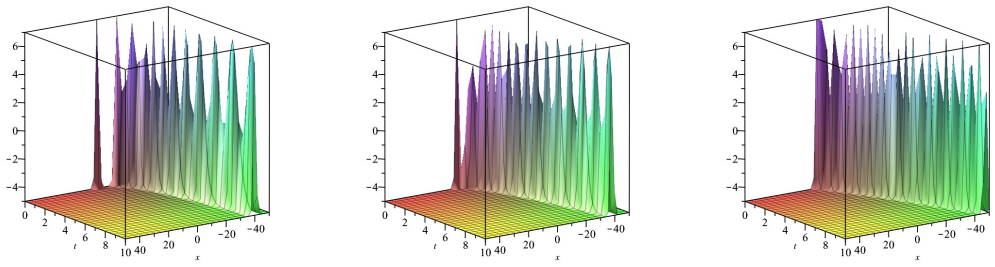


(a) $\beta = 0.3$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.8$ için

Şekil 3.11 Uyumlu kesirli türev için $\phi_1^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

İlk olarak, Şekil 3.11, $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.8$ değerleri için (3.31) denkleminin 3D görselleştirmesini sunmaktadır. Bu şekil, fonksiyonun $s = 1, l = 1, b = -2,$ ve

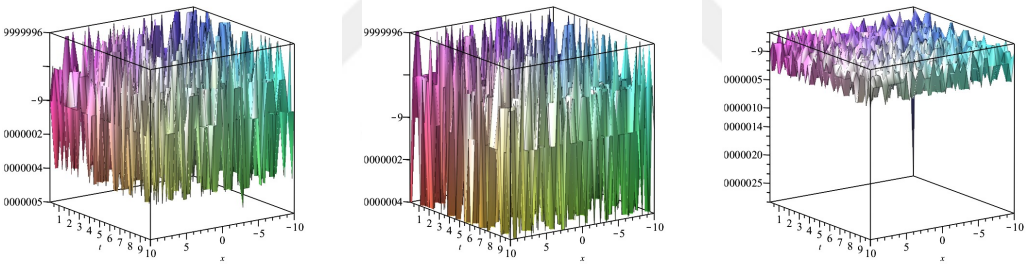
$a = 0$ sabit parametre değerleri için elde edilen çözümlerini göstermektedir.



(a) $\beta = 0.3$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.8$ için

Şekil 3.12 Uyumlu kesirli türev için $\phi_3^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

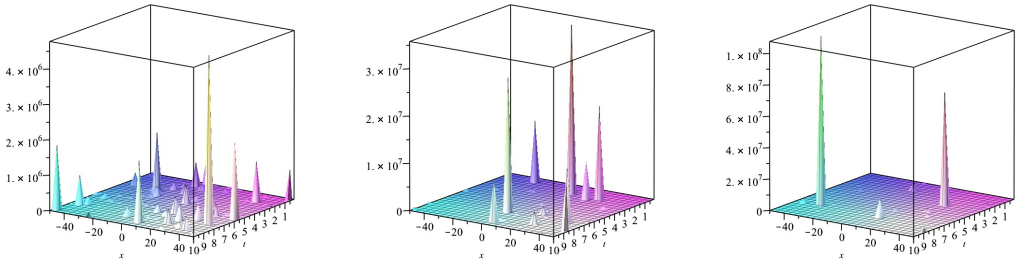
Şekil 3.12, $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.8$ değerleri için (3.32) denkleminin 3D çizimlerini göstermektedir. Bu şekil, $s = 1, l = 1, b = 1$, ve $a = 0$. sabit parametre değerleri için elde edilen fonksiyon çözümlerini göstermektedir.



(a) $\beta = 0.3$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.6$ için

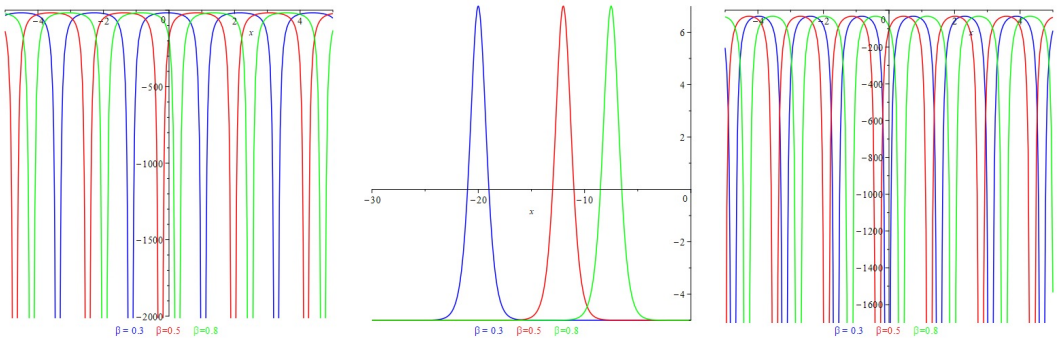
Şekil 3.13 Uyumlu kesirli türev için $\phi_5^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

Şekil 3.13, $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.6$ değerleri için (3.33) denkleminin 3D grafiklerini sunmaktadır. Bu şekil, fonksiyonun $s = 1, l = 1, b = -1$, ve $a = \frac{1}{4}$ sabit parametre değerleri için elde edilen çözümlerini göstermektedir.
Denklem (3.34), Şekil 3.14'te $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.8$ için 3D olarak gösterilmiştir. Fonksiyonun $s = 1, l = 1, b = 2$, ve $a = 1$ sabit parametre değerleri için elde edilen çözümleri gösterilmiştir.
Şekil 3.15, $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.8$ değerleri kullanılarak Denklem (3.31), Denklem (3.32), Denklem (3.33) ve Denklem (3.34)'ın $\beta = 0.3, \beta = 0.5$ ve $\beta = 0.8$ değerleri için 2D grafiklerini göstermektedir.



(a) $\beta = 0.3$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.8$ için

Şekil 3.14 Uyumlu kesirli türev için $\phi_{10}^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

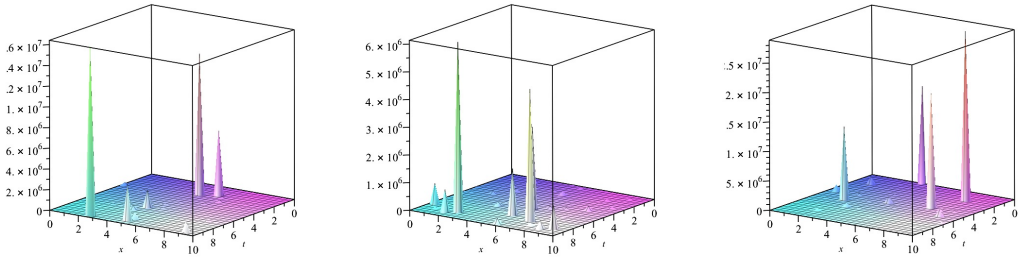


(a) $\phi_1^{\pm}(\epsilon)$ için (b) $\phi_3^{\pm}(\epsilon)$ için (c) $\phi_{10}^{\pm}(\epsilon)$ için

Şekil 3.15 Uyumlu kesirli türev için farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafiklerinin

3.2.3 Beta Kesirli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme

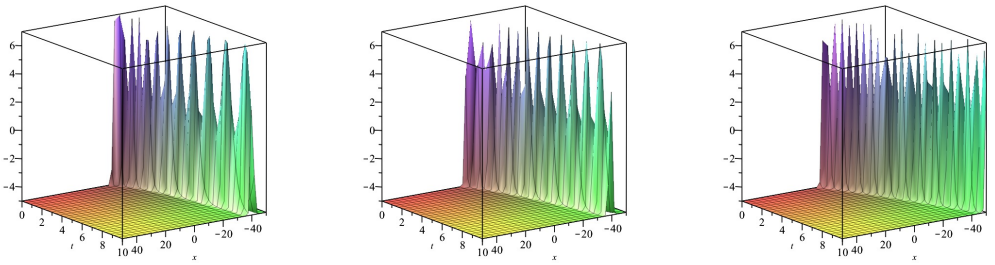
Bu alt bölümde, beta kesirli türev tanımı altında elde edilen analitik çözüm, daha önce tanımlanan gezici dalga dönüşümü ile ifade edilmiştir ve bu çözümün farklı β değerleri altında davranışı grafiksel olarak incelenmekte ve elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır.



(a) $\beta = 0.3$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.8$ için

Şekil 3.16 Beta kesirli türev için $\phi_1^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

İlk olarak, Şekil 3.16, $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.8$ değerleri için (3.31) denkleminin 3D görselleştirmesini sunmaktadır. Bu şekil, fonksiyonun $s = 1, l = 1, b = -2$, ve $a = 0$ sabit parametre değerleri için elde edilen çözümlerini göstermektedir.



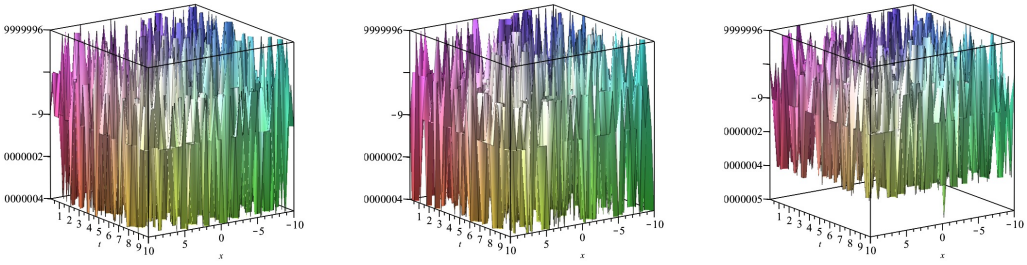
(a) $\beta = 0.3$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.8$ için

Şekil 3.17 Beta kesirli türev için $\phi_3^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

Şekil 3.17, $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.8$ değerleri için (3.32) denkleminin 3D çizimlerini göstermektedir. Bu şekil, $s = 1, l = 1, b = 1$, ve $a = 0$ sabit parametre değerleri için elde edilen fonksiyon çözümlerini göstermektedir.

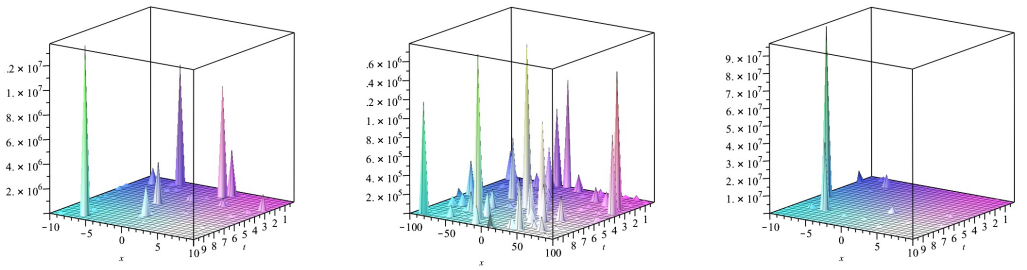
Şekil 3.18, $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.6$ değerleri için (3.33) denkleminin 3D grafiklerini sunmaktadır. Bu şekil, fonksiyonun $s = 1, l = 1, b = -1$, ve $a = \frac{1}{4}$ sabit parametre değerleri için elde edilen çözümlerini göstermektedir.

Denklem (3.34), Şekil 3.19'te $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.8$ için 3D olarak



(a) $\beta = 0.3$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.6$ için

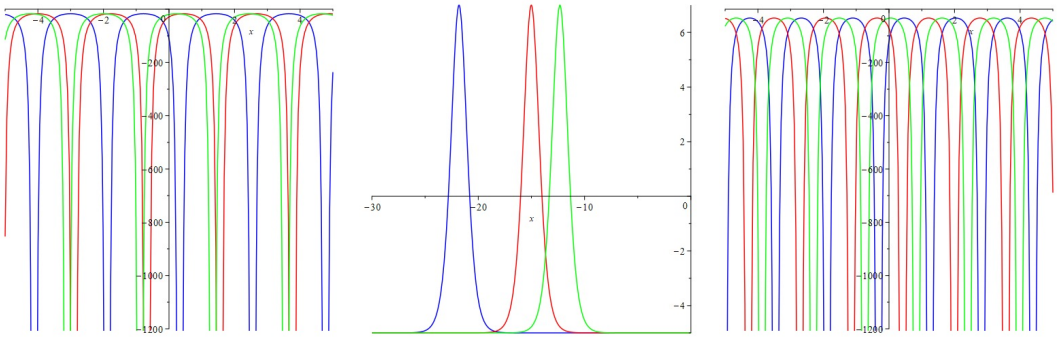
Şekil 3.18 Beta kesirli türev için $\phi_5^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri



(a) $\beta = 0.3$ için (b) $\beta = 0.5$ için (c) $\beta = 0.8$ için

Şekil 3.19 Beta kesirli türev için $\phi_{10}^{\pm}(\epsilon)$ çözümünün farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafikleri

gösterilmiştir. Fonksiyonun $s = 1, l = 1, b = 2$, ve $a = 1$ sabit parametre değerleri için elde edilen çözümleri gösterilmiştir.



(a) $\phi_1^{\pm}(\epsilon)$ için (b) $\phi_3^{\pm}(\epsilon)$ için (c) $\phi_{10}^{\pm}(\epsilon)$ için

Şekil 3.20 Beta kesirli türev için farklı β değerlerinde elde edilen çözüm grafiklerinin

Şekil 3.20, $\beta = 0.3, \beta = 0.5, \beta = 0.8$ değerleri kullanılarak Denklem (3.31), Denklem (3.32), Denklem (3.33) ve Denklem (3.34)'ın $\beta = 0.3, \beta = 0.5$ ve $\beta = 0.8$ değerleri için 2D grafiklerini göstermektedir.

4
ANALİZLER

Bu bölümde, zaman kesirli integro-diferansiyel KP hiyerarşi denkleminin ve zaman kesirli integro-diferansiyel CDGKS denkleminin hem kararlılık analizini hem de modülasyon kararsızlığını ele alacağız. Burada yapılan analizler $\beta = 1$ üzerinden yapılacaktır. [42–47]

4.1 Kararlılık Analizi

Dinamik ve fiziksel sistemlerde kararlılık analizi, Hamilton sistemlerinde uzun vadeli çözüm davranışının belirlenmesinde kritik bir rol oynar. Kararlılık analizi, sistemin sınırlı ve öngörülebilir kalıp kalmadığı veya küçük pertürbasyonların zaman içinde yayılarak kararsızlığa neden olup olmadığı konusunda fikir verir.

4.1.1 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel KP Hiyerarşi Denkleminin Kararlılık Analizi

Zaman kesirli integro-diferansiyel KP hiyerarşi denkleminin kararlılığı bu alt bölümde bir Hamilton sistemi kullanılarak incelenmiştir. Hamilton sistemi aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır:

$$M = \frac{1}{2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V^2(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{4.1}$$

Böylece, kararlılık gereksinimi aşağıdaki şekilde sağlanır:

$$\left. \frac{\partial M}{\partial k} \right|_{k=h} > 0, \tag{4.2}$$

burada k, h keyfi sabitlerdir.
Eşitlik çözümünün kararlılığını inceleyen bir örnek için Denklem (3.1)'i aşağıdaki sabit değerlerle ($a = 4, b = 2, c = 1, \beta = 1, y = 0$) kullanarak (3.11) çözümünü

elde edelim.

$$M = \frac{1}{2}\int_{-10}^{10} (v_1(x,y,t))^2\, dx \tag{4.3}$$

böylece, elde edilen

$$\left.\frac{\partial M}{\partial k}\right|_{k=-2} > 0. \tag{4.4}$$

Bu, denklemin kararlı olduğunu gösterir. Farklı çözümlerin kararlılığını belirlemek için benzer teknikler kullanılabilir.

4.1.2 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel CDGKS Denkleminin Kararlılık Analizi

Zaman kesirli integro-diferansiyel CDGKS denkleminin kararlılığı bu alt bölümde bir Hamilton sistemi kullanılarak incelenmiştir. Hamilton sistemi aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır:

$$\mu = \frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} V^2(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{4.5}$$

Böylece, kararlılık gereksinimi aşağıdaki şekilde sağlanır:

$$\left.\frac{\partial \mu}{\partial k}\right|_{k=z} > 0, \tag{4.6}$$

burada k, z keyfi sabitlerdir.

Eşitlik çözümünün kararlılığını inceleyen bir örnek için Denklem (3.17)'i aşağıdaki sabit değerlerle ($s = 1, l = 1, b = -2$, ve $a = 0$) kullanarak (3.31) çözümünü elde edelim.

$$M = \frac{1}{2}\int_{-10}^{10} \left(\phi_1^{\pm}(\epsilon)\right)^2\, dx \tag{4.7}$$

böylece, elde edilen

$$\left.\frac{\partial M}{\partial k}\right|_{k=-2} > 0. \tag{4.8}$$

Bu, denklemin kararlı olduğunu gösterir. Farklı çözümlerin kararlılığını belirlemek için benzer teknikler kullanılabilir.

4.2 Modülasyon Kararsızlığı

Modülasyon kararsızlığı, doğrusal olmayan dalga dinamiğinde, doğrusal olmama ve dağılma arasındaki etkileşim nedeniyle sürekli bir dalgadaki küçük perturbasyonların üstel büyümesinden kaynaklanan temel bir olgudur. Optik, akışkanlar mekaniği ve plazma fiziği gibi çeşitli fiziksel sistemlerde önemli bir yere sahiptir. Modülasyon kararsızlığını anlamak, solitonlar ve haydut dalgalar gibi yerelleştirilmiş yapıların oluşumunu tahmin etmeye yardımcı olur.

4.2.1 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel KP Hiyerarşi Denkleminin Kararlılık Analizi

Bu alt bölüm, doğrusal olmayan kesirli integro-diferansiyel KP Hiyerarşi denklemindeki modülasyon kararsızlığına odaklanmaktadır. Pertürize çözümü aşağıdaki gibi ele alalım:

$$v(x,y,t) = v_0 + \tau s(x,y,t), \tag{4.9}$$

burada Denklem (3.2) için kararlı bir çözüm anlamına gelir. Denklem (4.9)'i Denklem (3.2)'de yerine koyalım:

$$-\tau s_{xxt} + \frac{1}{2}\tau s_{xxxxy} + \frac{1}{2}\tau s_{yyy} + 2\tau^2 s_{xxx}s_{xy} + 4\tau^2 s_{xx}s_{xxy} = 0. \tag{4.10}$$

Denklem (4.10)'i doğrusal hale getirelim:

$$-\tau s_{xxt} + \frac{1}{2}\tau s_{xxxxy} + \frac{1}{2}\tau s_{yyy} = 0. \tag{4.11}$$

Kararsızlığı araştırmak için, aşağıda verilen üstel olarak büyüyen çözümler kullanılmıştır.

$$s(x,y,t) = s_1 e^{i(ax+by-\omega t)} + s_2 e^{-i(ax+by-\omega t)}, \tag{4.12}$$

burada s_1 ve s_2 sabittir ve a, b ve ω frekans ve dalga sayısını temsil eder. Denklem (4.12)'i Denklem (4.11)'de yerine koyalım:

$$\begin{aligned} &-i\tau s_1 a^2\omega e^{i(ax+by-\omega t)} + i\tau s_2 a^2\omega e^{-i(ax+by-\omega t)} + \frac{1}{2}i\tau s_1 a^4 b e^{i(ax+by-\omega t)} \\ &-\frac{1}{2}i\tau s_2 a^4 b e^{-i(ax+by-\omega t)} - \frac{1}{2}i\tau s_1 b^3 e^{i(ax+by-\omega t)} + \frac{1}{2}i\tau s_2 b^3 e^{-i(ax+by-\omega t)} = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Denklem (4.13)'u doğrusallaştırarak aşağıdaki denklemleri elde edelim.

$$i\tau s_1(-a^2\omega + \frac{1}{2}a^4 b - \frac{1}{2}b^3)e^{i(ax+by-\omega t)} = 0 \tag{4.14}$$

ve

$$i\tau s_2(a^2\omega - \frac{1}{2}a^4 b + \frac{1}{2}b^3)e^{-i(ax+by-\omega t)} = 0. \tag{4.15}$$

Denklemleri çözdükten sonra $\omega = \omega(s_1, s_2)$ dağılımını elde edelim.

$$\omega = \pm\frac{a^4 b - b^3}{2a^2} \tag{4.16}$$

Kararlı durumun doğrusal kararlılığı Denklem (4.16) ile verilir. Eğer ω reel ise çözüm kararlıdır; eğer ω imajiner ise, pertürbasyon üstel olarak artar ve çözüm kararsız hale gelir. Bu denklem için çözüm kararlıdır.

4.2.2 Zaman Kesirli İntegro-Diferansiyel CDGKS Denkleminin Modülasyon Kararsızlığı

Bu alt bölüm, doğrusal olmayan kesirli integro-diferansiyel CDGKS denklemindeki modülasyon kararsızlığına odaklanmaktadır. Pertürize çözümü aşağıdaki gibi ele alalım:

$$u(x,y,t) = u_0 + \tau r(x,y,t) \tag{4.17}$$

burada Denklem (3.18) için kararlı bir çözüm anlamına gelir. Denklem (4.17)'i Denklem (3.18)'de yerine koyalım:

$$\begin{aligned} - \quad & \tau r_{xt} + \tau r_{xxxxxx} + 5\tau^2 r_{xx} r_{xxx} + 5\tau^2 r_x r_{xxxx} \\ + \quad & 5\tau^3 {r_x}^2 r_{xx} + 5\tau r_{xxxy} - 5\tau r_{yy} + 5\tau^2 r_x r_{xy} + 5\tau^2 r_{xx} r_y = 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Denklem (4.18) doğrusal hale getirelim:

$$-\tau r_{xt} + \tau r_{xxxxxx} + 5\tau r_{xxxy} - 5\tau r_{yy} = 0. \tag{4.19}$$

Kararsızlığı araştırmak için, aşağıda verilen üstel olarak büyüyen çözümler kullanılmıştır.

$$r(x,y,t) = r_1 e^{i(ax+by-\omega t)} + r_2 e^{-i(ax+by-\omega t)}, \tag{4.20}$$

burada r_1 ve r_2 sabittir ve a, b ve ω frekans ve dalga sayısını temsil eder. Denklem (4.20)'i Denklem (4.19)'de yerine koyalım:

$$\begin{aligned} - \quad & \tau r_1 a\omega e^{i(ax+by-\omega t)} + \tau r_2 a\omega e^{-i(ax+by-\omega t)} - \tau r_1 a^6 e^{i(ax+by-\omega t)} \\ + \quad & \tau r_2 a^6 e^{-i(ax+by-\omega t)} + 5\tau r_1 a^3 b e^{i(ax+by-\omega t)} - 5\tau r_2 a^3 b e^{-i(ax+by-\omega t)} \\ + \quad & 5\tau r_1 b^2 e^{i(ax+by-\omega t)} - 5\tau r_2 b^2 e^{-i(ax+by-\omega t)} = 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Denklem (4.21)'u doğrusallaştırarak elde edelim:

$$\tau r_1(-a\omega - a^6 + 5a^3 b + b^2) e^{i(ax+by-\omega t)} = 0 \tag{4.22}$$

ve

$$\tau r_2(+a\omega + a^6 - 5a^3 b - b^2) e^{-i(ax+by-\omega t)} = 0. \tag{4.23}$$

Denklemleri çözdükten sonra $\omega = \omega(r_1, r_2)$ dağılımını elde edelim.

$$\omega = \pm \frac{-a^6 + 5a^3 b + b^2}{a} \tag{4.24}$$

Kararlı durumun doğrusal kararlılığı Denklem (4.24) ile verilir. Eğer ω reel ise çözüm kararlıdır; eğer ω imajiner ise, pertürbasyon üstel olarak artar ve çözüm kararsız hale gelir. Bu denklem için çözüm kararlıdır.

5
SONUÇ

Bu çalışmada, zaman kesirli integro-diferansiyel KP hiyerarşi denklemi ve zaman kesirli integro-diferansiyel CDGKS denkleminin analitik çözümleri, iki farklı çözüm yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Modifiye Sardar Alt Denklem yöntemi ve Modifiye G'-Genişleme yöntemi kullanılarak analitik çözümler elde edilmiştir. Bu yaklaşım, denklemin doğrusal olmayan yapısı ile uyumlu ve beta türevin etkileşimini incelemek için bir çerçeve sağlamaktadır. Analitik çözümler, uyumlu türev ve beta türev altında incelenmiştir. Türev dönüşümlerinin çözüm yapısını değiştirmemekte fakat grafiksel davranışları üzerinde farklar oluşturduğu görülmüştür. Elde edilen analitik çözümler grafiklerle ayrıntılı olarak incelenmiştir. Çalışmanın ana odak noktalarından biri, bu analitik çözümlerin kararlılık özelliklerini araştırmaktır. Bu amaçla, modülasyon kararsızlığı analizi ve kararlılık analizi yöntemleri uygulanmıştır. MI analizi, temel dalga çözümleri üzerindeki küçük frekans ve dalga sayısı pertürbasyonlarının büyüme oranlarını inceleyerek çözümlerin kararlılık sınırlarını belirlemeye odaklanmaktadır. Kararlılık analizi ise çözümlerin zaman içindeki evrimini inceler ve küçük başlangıç pertürbasyonlarına karşı davranışlarını değerlendirir.

Modülasyon kararsızlığı ve kararlılık analizleri sonucunda, elde edilen analitik çözümlerin kararlı olduğu gösterilmiştir. Bu önemli bulgu, doğrusal olmayan dalga yapılarının küçük pertürbasyonlara maruz kaldıklarında bile kararlı bir şekilde devam edebileceğini ve yayılabileceğini ortaya koymaktadır. Bu durum, fiziksel sistemlerde bu tür dalga yapılarını gözlemleme potansiyelini artırmakta ve modelin geçerliliğini desteklemektedir.

Elde edilen kararlı dalga çözümleri, enerjinin dağılmadan taşınabildiği ve sistemde düzenli modellerin korunabildiği fiziksel senaryoları temsil etmektedir. Bu sonuçlar, plazma fiziği, optik iletişim sistemleri ve diğer dağıtıcı ortamlar gibi alanlarda gözlemlenen kararlı doğrusal olmayan dalga olaylarının anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır.

Bu çalışma, zaman kesirli integro-diferansiyel KP hiyerarşi denklemi ve zaman kesirli integro-diferansiyel CDGKS denkleminin uyumlu ve beta türev ile analitik

çözümlerinin doğrudan Modifiye G'-Genişleme yöntemi ve Modifiye Sardar Alt denklem yöntemiyle elde edilebileceğini, bu çözümlerin modülasyon kararsızlığı ve kararlılık analizinden sonra kararlı olduğunu göstermektedir. Bu bulgular, uyumlu ve beta türevlerin doğrusal olmayan dinamikleri modellemek ve kararlı dalga yapılarını anlamak için etkili bir araç olabileceğini vurgulamaktadır.

KAYNAKÇA

[1] L. Debnath, "Linear partial differential equations," *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, ss. 1–148, 2005.

[2] L. C. Evans, *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2022, c. 19.

[3] W. A. Strauss, *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.

[4] M. Raissi, P. Perdikaris G. E. Karniadakis, "Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations," *arXiv preprint arXiv:1711.10561*, 2017.

[5] C. R. Doering J. D. Gibbon, *Applied analysis of the Navier-Stokes equations*. Cambridge university press, 1995.

[6] O. A. Ladyzhenskaya, "The mathematical theory of viscous incompressible flow," *Gordon & Breach*, 1969.

[7] C. Sulem P.-L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse*. Springer Science & Business Media, 2007, c. 139.

[8] P. Perona J. Malik, "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, c. 12, no. 7, ss. 629–639, 1990.

[9] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press, 1999.

[10] K. B. Oldham J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, 1974.

[11] B. Ross, "The development of fractional calculus 1695-1900," *Historia Mathematica*, c. 4, no. 1, ss. 75–89, 1977.

[12] A. R. Kirk, "A brief history of fractional calculus," *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, c. 9, no. 2, ss. 34–38, 2006.

[13] B. B. Kadomtsev V. I. Petviashvili, "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media," *Soviet Physics Doklady*, c. 15, no. 6, ss. 539–541, 1970.

[14] P. G. Drazin R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, 1989.

[15] A. Hasegawa Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*. Oxford University Press, 1995.

[16] M. Jimbo T. Miwa, "Solitons and infinite dimensional Lie algebras," *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, c. 19, no. 3, ss. 943–1001, 1983.

[17] A. Atangana D. Baleanu, "New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel," *Progress in Fractional Differential Equations*, c. 5, no. 1, ss. 1–13, 2016.

[18] P. J. Caudrey, "The inverse problem for a general N × N spectral equation," *Physics Letters A*, c. 61, no. 3, ss. 159–163, 1977.

[19] R. K. Dodd J. D. Gibbon, "A new integrable equation with soliton solutions," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, c. 352, no. 1671, ss. 325–338, 1977.

[20] K. Sawada T. Kotera, "A method for finding N-soliton solutions of the K.d.V. equation and K.d.V.-like equation," *Progress of Theoretical Physics*, c. 51, no. 5, ss. 1355–1367, 1974.

[21] M. J. Ablowitz P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[22] R. K. Bullough P. J. Caudrey, *Solitons*. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[23] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. San Diego, CA: Academic Press, 1999.

[24] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2006.

[25] R. Khalil, M. A. Horani, A. R. Yousef M. Sababheh, "A new definition of fractional derivative," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 264, ss. 65–70, 2014.

[26] K. B. Oldham J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. New York, NY: Academic Press, 1974.

[27] S. G. Samko, A. A. Kilbas O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Yverdon, Switzerland: Gordon ve Breach Science Publishers, 1993.

[28] R. Herrmann, *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2014.

[29] J. T. Machado, A. M. Lopes A. M. Galhano, "A review on fractional order signal processing techniques," *Signal Processing*, c. 107, ss. 192–209, 2015.

[30] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas J. J. Trujillo, *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2016.

[31] M. Caputo F. Mainardi, "A new dissipation model based on memory mechanism," *Pure and Applied Geophysics*, c. 91, no. 1, ss. 134–147, 1971.

[32] W.-X. Ma Y. You, "Solving the Korteweg-de Vries equation using the W/G-expansion method," *Applied Mathematics and Computation*, c. 170, ss. 399–406, 2005.

[33] J.-F. Zhang, Y.-T. Gao Z.-Y. Yan, "The (W/G)-expansion method and its application to travelling wave solutions of nonlinear evolution equations," *Physics Letters A*, c. 377, no. 16-17, ss. 1282–1285, 2013.

[34] H. Ma C. You, "The (G'/G)-expansion method for nonlinear evolution equations," *Physics Letters A*, c. 345, ss. 273–282, 2005.

[35] M. Wang X. Li, "The (G'/G)-expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics," *Physics Letters A*, c. 372, ss. 417–423, 2008.

[36] E. M. E. Zayed H. A. Zedan, "On the solitary wave solutions for nonlinear Hirota-Satsuma coupled KdV equations," *Chaos, Solitons & Fractals*, c. 22, ss. 553–560, 2010.

[37] M. E. E. Zayed A. H. Arnous, "The modified (W/G)-expansion method and its applications for solving the modified generalized Vakhnenko equation," *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 32, ss. 97–105, 2014.

[38] M. Sardar, "A Novel Approach to the Analytical Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations," *Journal of Applied Mathematics*, c. 2014, ss. 1–10, 2014.

[39] H. U. Rehman, I. Iqbal, S. Subhi Aiadi, N. Mlaiki M. S. Saleem, "Soliton solutions of Klein–Fock–Gordon equation using Sardar subequation method," *Mathematics*, c. 10, no. 18, s. 3377, 2022.

[40] R. Hussain, A. Imtiaz, T. Rasool, H. Rezazadeh M. İnç, "Novel exact and solitary solutions of conformable Klein–Gordon equation via Sardar-subequation method," *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2022.

[41] H. U. Rehman, R. Akber, A.-M. Wazwaz, H. M. Alshehri M. Osman, "Analysis of Brownian motion in stochastic Schrödinger wave equation using Sardar sub-equation method," *Optik*, c. 289, s. 171 305, 2023.

[42] M. Inc, A. Yusuf, A. I. Aliyu D. Baleanu, "Soliton solutions and stability analysis for some conformable nonlinear partial differential equations in mathematical physics," *Optical and Quantum Electronics*, c. 50, ss. 1–14, 2018.

[43] B. Ghanbari, M. İnç, A. Yusuf D. Baleanu, "New solitary wave solutions and stability analysis of the Benney-Luke and the Phi-4 equations in mathematical physics," 2019.

[44] M. N. Hossain, M. M. Miah, F. Z. Duraihem S. Rehman, "Stability, modulation instability, and analytical study of the confirmable time fractional Westervelt equation and the Wazwaz Kaur Boussinesq equation," *Optical and Quantum Electronics*, c. 56, no. 6, s. 948, 2024.

[45] M. N. Hossain, M. M. Miah, M. Abbas, K. El-Rashidy, J. Borhan M. Kanan, "An analytical study of the Mikhailov–Novikov–Wang equation with stability and modulation instability analysis in industrial engineering via multiple methods," *Symmetry*, c. 16, no. 7, s. 879, 2024.

[46] F. Badshah, S. Nikiforov, K. U. Tariq, M. Aslam R. N. Tufail, “Soliton solutions, stability and modulation instability analysis of the generalized Hirota–Satsuma–Ito model arising in shallow water waves,” *Optik*, c. 304, s. 171 758, 2024.

[47] H. A. Deniz, E. M. Özkan A. Özkan, “A study on analytical solutions of one of the important shallow water wave equations and its stability analysis,” *Physica Scripta*, c. 99, no. 12, s. 125 211, 2024.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. H. A. Deniz, E. M. Özkan A. Özkan, “A study on analytical solutions of one of the important shallow water wave equations and its stability analysis”, Physica Scripta, c. 99, no. 12, s. 125 211, 2024.

Konferans Bildirisi

1. H. A. Deniz, E. M. Özkan, “A Note on Analytical Solitions of one type of the special fractional integro-differential equation”, ICMASE 2024: International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Engineering, Polytechnic Institute of Coimbra, Coimbra, Portugal.

2. H. A. Deniz, E. M. Özkan, "Analytical Solutions of Nonlinear Conformable Time-Fractional CDGKS Equation via Modified Sardar Sub-Equation Method", ICOMAA 2025: 8th International Hybrid Conference on Mathematical Advances and Applications, İstanbul, Türkiye.

Proje

1. E. M. Özkan, H. A. Deniz, "Akışkanlar Mekaniğinde Bazı Özel Kısmi ve İntegro Diferansiyel Denklemlerin İncelenmesi", Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi (Tez Projesi, Yüksek Lisans), FYL-2024-6546, 2024-2025.