

İstatistiksel İşaret İşleme 2. Ödev

Problem 1: Aşağıda verilen denklem takımı için minimum-norm ve en küçük kareler çözümlerinin her ikisini de bulunuz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problem 2: Aşağıda verilen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ şeklindeki çakışan denklem takımını

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- En küçük kareler yöntemiyle çözünüz.
- Projeksiyon matrisi \mathbf{P}_A 'yı bulunuz.
- En iyi çözümü $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{P}_A \mathbf{b}$ hesaplayınız
- $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_A$ şeklinde tanımlı matrisi ele alalım. $\mathbf{b}^\perp = \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{b}$ vektörünü bulun ve bunun $\hat{\mathbf{b}}$ vektörüne ortogonal (dikgen) olduğunu gösterin. \mathbf{P}_A^\perp matrisi neyi göstermektedir?

Problem 3: Bir $x(n)$ dizisini aşağıda verildiği gibi sabit bir sayı artı frekansı ω_0 olan bir karmaşık bir üstelin toplamı şeklinde modellediğimizi düşünelim,

$$\hat{x}(n) = c + ae^{jn\omega_0}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Burada a ve c sabitleri bilinmemektedir. Aşağıda verilen denklem takımıyla a ve c katsayılarını çözmeye çalıştığımızda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{j\omega_0} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j(N-1)\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

- c ve a sabitleri için en küçük kareler çözümü nedir?
- Eğer N tek sayıysa ve $\omega_0 = 2\pi k/N$ ise (k tamsayı) c ve a için en küçük kareler çözümünü bulunuz.

Problem 4: Aşağıda verilen matrisin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Problem 5: $n \times n$ 'lik kare \mathbf{A} matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ve özvektörleri $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ise

- \mathbf{A}^2 matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.
- \mathbf{A}^{-1} matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Problem 6. Aşağıda verilen z_1 and z_2 fonksiyon

$$f(z_1, z_2) = 3z_1^2 + 3z_2^2 + 4z_1z_2 + 8$$

İçin $f(z_1, z_2)$ fonksiyonunu $z_1 + z_2 = 1$ koşulunu sağlayacak şekilde minimize edecek z_1 ve z_2 değerlerini bulup $f(z_1, z_2)$ 'nin minimum değerini

- z_1 ve z_2 gerçel değişkenler ise ve hesaplayınız.
- z_1 ve z_2 karmaşık değişkenler ise