İSTATİSTİK'TE BAZI OLASILIK EŞİTSİZLİKLERİNİN UYGULAMALARI

Atıf EVREN

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü,

Davutpaşa Yerleşkesi, 34210, Esenler,İstanbul,

aevren@yildiz.edu.tr

ÖZET

Anakütle dağılımının bilinmediği durumlarda örnek büyüklüğünün elvermesi halinde merkezi limit teoremleri aracılığı ile parametre tahmincilerinin örnekleme dağılımları asimptotik olarak incelenebilmektedir. Anakütle dağılımının bilinmesi halinde çekilen örnek istatistiklerinin olasılık dağılımları anakütle dağılımlarından türetilebilmektedir. Bunların sözkonusu olmadığı hallerde ise dağılımdan bağımsız yöntemler kullanılmaktadır.

Çebişev türü eşitsizlikler genellikle matematiksel istatistik kitaplarında "Büyük Sayılar Yasası" gibi teorik konuların tartışılmasında gündeme gelmektedir. Bununla birlikte Çebişev vb eşitsizlikleri dağılımdan bağımsız yöntemlerin içerisinde ele almak da mümkündür. . Bu türden eşitsizlikler hiç şüphesiz aralık tahmini, hipotez testi gibi temel konularda fayda sağlayabilir. Nitekim son yıllarda bu tür eşitsizliklere yönelik yaygın bir literatür oluşmuştur. Bu çalışmada bazı (tek ya da çok değişkenli) olasılık eşitsizliklerine değinildikten sonra seçilmiş bazı temel istatistiksel konulardaki uygulama alanlarına değinilecektir.

1.İSTATİSTİK'TE NOKTA VE ARALIK TAHMİNİ

İstatistik'te anakütleler belirli sabitleri bulunan olasılık dağılımları ile belirlenmeye çalışılır. Parametreler olarak da adlandırılan bu sabitler olasılık dağılımını belirler. Klasik yaklaşımda parametreler sabitler olarak, Bayesçi yaklaşımda ise her biri kendi olasılık dağılımına sahip rastlantı değişkenleri olarak değerlendirilir. Hangi yaklaşım benimsenirse benimsensin istatistikler, gözlem değerlerinin reel değerli fonksiyonlarıdırlar. Dolayısıyla istatistiklerin (ya da parametre tahmincilerinin) örnekten örneğe alacağı farklı değerlerin dağılımının (örnekleme dağılımının) belirlenmesi sözkonusu sabitlerin tahmin edilmesinde

özel önem kazanmaktadır.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, θ parametreli bir f olasılık fonksiyonuna sahip bir anakütleden çekilmiş n bağımsız gözlem olsun . $\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, θ 'nın bir tahmincisi , $s(\hat{\theta})$ da $\hat{\theta}$ 'nın örnekleme dağılımının standart hatası olsun. Bu durumda θ için tipik bir %100(1- α) aralık tahmini $\hat{\theta} \pm k.s(\hat{\theta})$ formundadır. Başka bir ifade ile

$$P(\hat{\theta} - k.s(\hat{\theta}) \le \theta \le \hat{\theta} + k.s(\hat{\theta})) = 1 - \alpha \quad (1.1)$$

Buradaki k değeri bir sabittir ve anakütle dağılımının türüne göre değerler almaktadır. Örneğin normal dağılım için buradaki k değeri $Z_{\alpha/2}$ değerine eşittir. Anakütle dağılımının bilinmediği durumlarda ise (örnek sayısı göreli olarak büyük değilse) bu yöntem çok sağlıklı sonuçlar vermez. Dolayısıyla dağılımdan bağımsız yollarla aralık tahminine gidilmeye çalışılır.

2.BAZI OLASILIK EŞİTSİZLİKLERİ

2.1 Markov eşitsizliği

X , negatif olmayan değerler alabilen bir rastlantı değişkeni ve t de t>0 koşulunu yerine getiren bir sabit olsun. k=1,2,3,… değerleri için $E(X^k)$ momentleri mevcut ise

$$P(X \ge t) \le E\frac{(X^k)}{t^k} \quad (2.1.1)$$ olur. Bazı kaynaklar (2.1.1)'in k=1 için aldığı özel hali Markov Eşitsizliği olarak ifade etmektedir. Yine de (2.1.1) daha genel olması nedeni ile tercih edilmelidir. [1]

Özel durum

Y ortalaması μ_Y ve varyansı $\sigma_Y{}^2$ olan bir rastlantı değişkeni olsun.

$X = |Y - \mu_Y|$ ve $\mu_4 = E((Y - \mu_Y)^4)$ olsun. Bu durumda

$P(|Y - \mu_Y| > t) \le \frac{\mu_4}{t^4}$ olur.

Eğer $Y \sim Normal(\mu_Y; \sigma_Y{}^2)$ varsayılacak olursa $\mu_4 = 3.\sigma_Y{}^4$ [2]

$$P(|Y - \mu_Y| > t) \le \frac{3.\sigma_Y{}^4}{t^4} \quad (2.1.2)$$

Yine eğer $t = k.\sigma_Y$ denecek olursa

$P(|Y-\mu_Y|>t) \le \frac{3}{t^4}$ ve $Z = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$

$P(|Z|>k) \le \frac{3}{k^4}$ (2.1.3)

elde edilir. k=1 için bu eşitsizlik yararsızdır. Ama sözgelimi k=2 için $P(|Z|>2) \le 0{,}1875$ (Gerçek olasılık değeri 0,0455 'e eşittir.) ve k=3 için $P(|Z|>3) \le 0{,}037$ (Gerçek olasılık değeri 0,0027'ye eşittir.) bulunur. (2.1.3) p-değerlerinin hesaplanmasında kullanılabilir**.**

2.2 Çebişev (Bienayme) eşitsizliği

X bir rastlantı değişkeni ve g(x): $R \to \Re^+$ olmak üzere pozitif reel değerli bir fonksiyon olsun. **t** bir pozitif sabit olmak üzere $P(g(x) \ge t) \le \frac{E(g(x))}{t}$ (2.2.1)

$g(X) = (X-\mu)^2$, $t = k^2.\sigma^2$ denecek olursa $P(|X-\mu| \le k\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$ (2.2.2)

2.3 Çebişev eşitsizliğinin asimetrik versiyonu

Bu formülasyon **Fréchet** tarafından gerçekleştirilmiştir. **X**'in beklenen değeri μ , standart sapması da σ olsun. t_1 ve t_2 iki pozitif sabit olmak üzere

$$P(\mu - t_1.\sigma_X < X < \mu + t_2.\sigma_X) \ge 1 - \frac{1+[(t_2-t_1)/2]^2}{[(t_1+t_2)/2]^2} \qquad (2.3.1)$$

$t_1 = t_2 = t$ için (2.2.2) elde edilir. [3]

Uygulama:

$X \sim Ki-Kare(n)$ olsun. E(X)=n ve Var(X)=2n

$t_1 = \frac{\mu}{\sigma} = \sqrt{n/2}$ olsun. Bu durumda $P(0 < X < \mu + t.\sigma_X) \ge 1 - \frac{1+[(t-\sqrt{n/2})/2]^2}{[(t+\sqrt{n/2})/2]^2}$

Sözgelimi 10 serbestlik dereceli bir Ki-kare değişkeninin 0 ile 20 arasında olma olasılığının 0,80'den büyük olacağı bu eşitsizlik yardımı ile tahmin edilebilir. Asıl olasılık ise 0,97'dir.

2.4 Çebişev eşitsizliğinin tek taraflı versiyonu (Cantelli eşitsizliği)

E(Y)=0 ve $Var(Y)=\sigma^2<\infty$ olsun. Herhangi bir sıfırdan büyük "a" sabiti için

$$P(Y\geq a)\leq\frac{\sigma^2}{(\sigma^2+a^2)} \qquad (2.4.1)\ [4]$$

$X=Y+\mu$ olsun. Herhangi bir k>0 sabiti için $a=k\sigma$ ve dolayısıyla

$$P(X-\mu\geq k\sigma)\leq\frac{1}{(1+k^2)} \qquad (2.4.2)$$

Bu eşitsizlik Cantelli Eşitsizliği olarak bilinir. $k=1$ için $P(X\geq\mu+\sigma)\leq 1/2$ ve (X'in ve μ'nün cebirsel işaretini değiştirerek) $P(X\leq\mu-\sigma)\leq 1/2$. bulunur. Bu eşitsizlik medyanın neden $\mu\pm\sigma$ aralığına düşmesi gerektiğini açıklamaktadır.

2.5 Dağılım fonksiyonu ile ilgili bir eşitsizlik

X 'in ortalaması μ , varyansı σ^2 ve dağılım fonksiyonu da F(x) olsun. Bu durumda

$$F(x)\leq\frac{1}{1+((X-\mu)/\sigma)^2} \quad x<\mu \text{ için}$$

$$F(x)\geq\frac{1}{1+(\sigma/(X-\mu))^2} \quad x>\mu \text{ için} \qquad (2.5.1)$$

olduğu gösterilebilir.[5] Bu eşitsizlik de p-değerlerinin hesaplanmasında kullanılabilir.

2.6 Kolmogorov eşitsizliği

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, ortalamaları sıfır ve varyansları sırasıyla $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ olan n bağımsız rastlantı değişkeni olsun. $c_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$. ve λ pozitif değerli bir sabit olsun. Bu durumda $P(\left|\sum_{i=1}^{\alpha}X_i\right|<\lambda C_n)\geq 1-\frac{1}{\lambda^2}$ α=1,2,…,n için (2.6.1)

n=1 için bu eşitsizliğin Çebişev Eşitsizliğine dönüşeceği açıktır. Bununla birlikte Kolmogorov Eşitsizliğinin Çebişev Eşitsizliğinin daha genel bir versiyonu olduğunu da vurgulamak gerekir.

2.7 Bazı çok değişkenli eşitsizlikler

Literatürde Çebişev Eşitsizliği'nin çok değişkenli versiyonları mevcuttur. Bu bağlamda

[6]'ya bakılabilir. Yine de değişken sayısı arttıkça olasılık ifadelerindeki belirsizlik artmakta ve bu türden eşitsizliklerin uygulanabilirliği kısıtlanmaktadır. Nisbeten daha yalın iki değişkenli haller için [7] 'ye bakılabilir.

2.7.1 Çebişev eşitsizliğinin çok değişkenli biçimi

$X_1, X_2, .., X_m$ değişkenleri, ortalamaları sırası ile $E(X_1), E(X_2), ..., E(X_m)$ ve varyansları da $Var(X_1), Var(X_2), ..., Var(X_m)$ olan rastlantı değişkenleri olsunlar. Yine $k_1, k_2, .., k_m$ pozitif sabitler ve $A_1, A_2, .., A_m$ olayları da örnek uzay S içerisinde $A_j = \{X_j \| X_j - E(X_j)| < k_j \sqrt{Var(X_j)}\}$ j=1,2,…,m şeklinde tanımlansınlar.

Bu durumda Boole Eşitsizliğinden yararlanarak Çebişev Eşitsizliğinin çok değişkenli versiyonu $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 .. \cap A_m) \geq 1 - \sum_{j=1}^{m} k_j^{-2}$ (2.7.1) şeklinde elde edilir.

2.8 Diğer versiyonlar

$X_1, X_2, .., X_k$ rastlantı değişkenleri, ortalamaları sırası ile $\mu_1, \mu_2, .., \mu_k$ olan ve varyans-kovaryans matrisleri de $\|\sigma_{ij}\|$ olan k tane rastlantı değişkeni olsun. $\|\sigma^{ij}\|$ 'de sözkonusu varyans-kovaryans matrisinin tersi olsun. λ bir sabit olmak üzere

$P(\sum_{i,j=1}^{k} \sigma^{ij}(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) < \lambda^2) \geq 1 - \frac{k}{\lambda^2}$ (2.8.1) eşitsizliği geçerlidir.

3 BAZI ÇOK KULLANILAN ARALIK TAHMİNLERİ

Burada çok kullanılan iki örnekleme dağılımı (ortalamanın örnekleme dağılımı, oranın örnekleme dağılımı) ele alınacaktır. Şüphesiz tartışma bu iki örnekleme dağılımının ötesine taşınabilir . Bununla birlikte güven aralıklarının hesaplanmasındaki sistematik ortak olduğu için diğer dağılımlar için benzer sonuçlara rahatlıkla ulaşılabilir.

3.1. Ortalama için %100(1-α) güven aralığı tahmini

$X_1, X_2, .., X_n$ bağımsız gözlem değerlerinin ortalaması μ ve varyansı σ^2 olsun. $\bar{X}$ ve S^2 örnek ortalaması ve örnek varyansı olsun. Anakütle ortalaması için büyük

örneklem (n>=30 için) aralık tahmini $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (3.1.1) şeklindedir.

Ne anakütle dağılımının bilindiği ne de eldeki örnek büyüklüğünün Merkezi Limit Teoremi'nden yararlanmak için yeterli olmadığı durumlarda (3.1.1)'den hareketle bir aralık tahminine gitmek yanlış olacaktır. Çebişev Eşitsizliği ise dağılımdan bağımsız bir karakterde olması nedeniyle bu noktada yararlı olabilir.

$P(|\bar{X}-\mu| \le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \ge 1-\frac{1}{k^2}$ (3.1.2) $\alpha = \frac{1}{k^2}$ olsun.

$P(|\bar{X}-\mu| \le \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}) \ge 1-\alpha$ (3.1.3)

3.2 Anakütle oranı için %100(1-α)'lık aralık tahmini

Bernoulli dağılımına uyan bir anakütleden $X_{1,}X_{2,..},X_n$ n bağımsız gözlem değeri çekilsin. Örnek oranı $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ (3.2.1) ve örnek oranının standart hatası

$\hat{\sigma_p} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ (3.2.2) olsun. Büyük n değerleri için (n>=100) $\hat{p}$ nin örnekleme dağılımı bir normal dağılım yardımı ile modellenebilir. Böylelikle p için aralık tahmini $\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{p}}$ formunda elde edilir. Örnek büyüklüğünün az olması halinde ise Çebişev eşitsizliğinin işlevsel olabileceği düşünülebilir.[8]

$P(|\hat{p}-p| \le k\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}) \ge 1-\frac{1}{k^2}$ (3.2.3)

$\alpha = \frac{1}{k^2}$ için $P(\hat{p}-\sqrt{\hat{p}\frac{(1-\hat{p})}{n\alpha}} \le p \le \hat{p}+\sqrt{\hat{p}\frac{(1-\hat{p})}{n\alpha}}) \ge 1-\alpha$ (3.2.4)

Öte yandan bu aralığın genişliğini maksimum kılacak tahmini p değeri, $\hat{p} = 1/2$ olarak hesaplanabilir. Bu durumdaki aralık tahmini de

$P(\hat{p}-1/2\sqrt{\frac{1}{n\alpha}} \le p \le \hat{p}+1/2\sqrt{\frac{1}{n\alpha}}) \ge 1-\alpha$ (3.2.5) olarak elde edilebilir.

4 REGRESYON MODELLERİ

4.1.Doğrusal regresyon modelleri

Doğrusal regresyon modelleri $Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i$ (4.1.1) şeklindedir.

Burada Y_i , bağımlı değişkenin i. gözlem değeri, X_{ij} j. bağımsız değişkenin i. gözlem değeri , $\beta_0, \beta_{1,} .., \beta_j, ... \beta_p - 1$ sabitleri de modelin parametreleridir. ε de modele rassalllık özelliği kazandıran değişkendir. Modelde bu değişkenin genellikle normal dağıldığı varsayılmaktadır. Matris notasyonu ile

$Y_{nx1} = X_{nxp} \beta_{px1} + \varepsilon_{px1}$ (4.1.2)

$$Y_{nx1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ ... \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (4.1.3) \qquad \beta_{px1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ ... \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix} \quad (4.1.4) \qquad X_{nxp} = \begin{bmatrix} 1 & X_{1,1} & X_{1,2} & ... & X_{1,p-1} \\ 1 & X_{2,1} & X_{2,2} & ... & X_{2,p-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & X_{n,1} & X_{n,2} & ... & X_{n,\,p-1} \end{bmatrix}$$

(4.1.5)

ε ‘nin (bağımsız normal rastlantı değişkenleri vektörünün) beklenen değerinin sıfır vektörüne eşit olduğu ve varyans-kovaryans matrisinin

$$\sigma_{nxn}{}^2\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma^2 & ... & 0 \\ ... & ... & \sigma^2 & ... \\ 0 & ... & ... & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I \quad (4.1.6)$$ olduğu varsayılmaktadır.

Parametrelerin en küçük kareler tahmincileri, en küçük kareler (EKK) fonksiyonunu minimize eden $b_{px1} = (X'X)_{pxp}{}^{-1} X'Y_{px1}$ (4.1.7) değerleri ile bulunur. $\hat{Y}_i$ bağımlı değişkenin tahmini değerleri vektörü, **e** de kalıntılar vektörü olsun. $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ve

$$\hat{Y}_{nx1} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ ... \\ \hat{Y}_n \end{bmatrix} \quad (4.1.8) \qquad e_{nx1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \hat{e}_2 \\ ... \\ e_n \end{bmatrix} \quad (4.1.9)$$

Kalıntı kareleri toplamı $SSE = e'e$ (4.1.10)

ve kalıntı kareleri ortalaması $MSE = \frac{SSE}{(n-p)}$ (4.1.11)

ile bulunur. Parametrelerin tahmini varyans-kovaryans matrisi

$S(b)^2_{pxp} = MSE(X'X)^{-1}$ (4.1.12) ile bulunur. Normal regresyon modeli için

$\frac{(b_k - \beta_k)}{s(b_k)} \sim t(n-p)$ (4.1.13) olur.

Dolayısıyla parametrelerin güven aralığı tahminleri ve hipotez testi süreçleri normal dağılım ya da ondan türeyen dağılımlara dayandırılmış olur. Oysa uygulamada bu yaklaşım bazen sorunludur. Dolayısıyla Çebişev benzeri eşitsizliklerin kullanılması bazı durumlarda daha doğru olacaktır.

4.2.Doğrusal olmayan regresyon modelleri

Doğrusal olmayan bir model $Y_i = f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i$ (4.2.1) şeklindedir. Burada doğrusal modellerden farklı olan $Y_i = f(X_i, \gamma)$ 'in parametrelerin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olmasıdır. Hata terimleri yine sıfır ortalamalı ve genellikle sabit varyansa sahip korelasyonsuz değişkenler olarak ele alınmaktadır. Bunun yanısıra bu değişkenlerin normal dağıldığının varsayılması daha ileri analizi kolaylaştırmaktadır. EKK ölçütü

$Q = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - f(X_i, \gamma))^2$ 'nin minimize edilmesini hedeflemektedir.

Burada $X_i = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \dots \\ X_{iq} \end{bmatrix}$ (4.2.1) , $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \hat{\gamma}_1 \\ \dots \\ \gamma_{p-1} \end{bmatrix}$ (4.2.2) şeklindedir.

Parametrelerin ilk tahmini değerleri vektörü

$g_{px1}^{(0)} = \begin{bmatrix} g_0^{(0)} \\ g_1^{(0)} \\ \dots \\ g_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix}$ (4.2.3) olsun. Notasyonu biraz daha basitleştirmek için

$f_i^{(0)} = f(X_i, g^{(0)})$ (4.2.4) $\beta_k^{(0)} = \gamma_k - g_k^{(0)}$ (4.2.5)

$$D_{ik}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma = g^{(0)}} \qquad (4.2.6) \qquad Y_i \simeq f_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} + \varepsilon_i \qquad (4.2.7)$$

$$Y_i^{(0)} = Y_i - f_i^{(0)} \qquad (4.2.8)$$

denecek olursa şu doğrusallaştırılmış regresyon modeli elde edilir.

$$Y_i^{(0)} \simeq \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} + \varepsilon_i \qquad (4.2.9) \qquad Y^{(0)} \simeq D^{(0)} \beta^{(0)} + \varepsilon \qquad (4.2.10)$$

$$Y_{nx1}^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^{(0)} \\ Y_2 - f_2^{(0)} \\ \cdots \\ Y_n - f_n^{(0)} \end{bmatrix} \qquad (4.2.11) \qquad D_{nxp}^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{1,0}^{(0)} & \cdots & D_{1,p-1}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n,0}^{(0)} & \cdots & D_{n,p-1}^{(0)} \cdots \end{bmatrix} \qquad (4.2.12)$$

$$\beta_{px1}^{(0)} = \begin{bmatrix} \beta_0^{(0)} \\ \beta_1^{(0)} \\ \cdots \\ \beta_{p-1}^{(0)} \end{bmatrix} \qquad (4.2.13) \qquad \varepsilon_{nx1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (4.2.14)$$

Bu da doğrusal modeller için kullanılan kalıbın aynısıdır. **D** türev matrisi doğrusal hallerde **X** matrisinin oynadığı rolü oynamaktadır. Dolayısıyla parametre tahminleri doğrusal hallerle analoji kurularak gerçekleştirilebilir: $b^{(0)} = (D^{(0)\prime} D^{(0)})^{-1} D^{(0)\prime} Y^{(0)}$ (4.2.15)

Doğrusal olmayan modellerde parametre tahmini iteratif yöntemlerle gerçekleştirilmektedir. Her iterasyon sonucunda parametre tahminleri vektörü

$g_k^{(i)} = g_k^{(i-1)} + b_k^{(i-1)}$ i=1,2,… (4.2.16) ile revize edilmektedir.

İterasyonlar parametre tahminleri arasındaki (ya da EKK fonksiyonunun aldığı değerler arasındaki) fark önemsiz hale geldiğinde bitirilmektedir. Doğrusal olmayan modellerde

σ^2 'nin EKK tahmincisi ise $MSE = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - f(X_i, g))^2}{(n-p)}$ (4.2.17) ile bulunmaktadır.

Hata terimleri ortalaması sıfıra, varyansı σ^2 'ya eşit bağımsız normal değişkenler olarak kabul edildiğinde **g** 'nin asimptotik örnekleme dağılımı da yaklaşık normal olmaktadır. Dolayısıyla $E(g) \simeq \gamma$ (4.2.18) $S^2(g) = MSE(D'D)^{-1}$ (4.2.19)

(4.2.19) ile bulunan asimptotik varyans-kovaryans matrisi aralık tahminleri ve hipotez testleri için kullanılmaktadır. Bununla birlikte bu yaklaşım doğrusal hallerdekine göre daha da sorunludur. Çünkü doğrusal olmayan hallerde parametre tahminleri gözlem değerlerinin doğrusal bir fonksiyonu değildir. Dolayısıyla bağımlı değişkenin anakütle dağılımının normal olması otomatik olarak parametre tahmincilerinin normal dağılıma (ya da normallikten türeyen student-t , Ki-Kare, Snedecor-F gibi bir dağılıma) uyacağını garanti edemez. [9] Öte yandan asimptotik normallik örnek büyüklüğünün fazla olmasını gerektirmektedir. Bu da çoğu doğrusal olmayan model için oldukça sıkıntılıdır. Çünkü doğrusal olmayan modellerle analizi yapılan veri genellikle laboratuar koşullarında elde edilmektedir. Şu halde istatistikçiler açısından sözgelimi örnek büyüklüğünün bir birim arttırılması deneyi yapanlar için yerine getirilmesi oldukça zahmetli bir istem olabilir. Dolayısıyla bu gibi durumlarda Çebişev vb. eşitsizliklerin kullanılması şüphesiz daha gerçekçi olacaktır.

SONUÇ

Parametrik tahmin yöntemleri, anakütle dağılımı hakkında bazı varsayımlara (anakütle dağılımının bilinmesi vb.) ihtiyaç duymaktadır. Bu bakımdan büyük ölçüde normal dağılıma dayandırılan klasik tahmin, hipotez testi yöntemleri her zaman işlevsel olamamaktadır. Bu gibi durumlarda anakütle dağılımı hakkında daha az varsayım gerektiren Çebişev eşitsizliği gibi nonparametrik sayabileceğimiz eşitsizlikler yararlı olabilir. Bununla birlikte bu türden eşitsizlikler daha belirsiz sonuçlara da yol açabilirler. Yine de dağılıma ait bazı ek varsayımlarla (rastlantı değişkeninin pozitif olması , dağılımın simetrik varsayılması vb.) elde edilen aralık genişlikleri daraltılabilir. Yine de parametrelere ilişkin aralık tahminlerinin genişliğini belirleyen temel etkenin örnekleme dağılımlarındaki değişkenliğin kendisi olduğunu da vurgulamak gerekir. Eşitsizlikler konusunda son yıllarda oluşmuş bulunan literatür bu türden güçlüklerin aşılması için oldukça elverişli bir konumda bulunmaktadır. Bu literatürün ulaştığı hacim ile ilgili olarak [10] , [11], [12], [13] , [14] ’e bakılabilir.

KAYNAKLAR

[1]EVREN, A.(2006); Olasılık ve Çok Değişkenli Olasılık Dağılımlarına Giriş, YTÜ Basım Merkezi, İstanbul,432

[2]BULMER, M.G. (1979), Principles of Statistics, Dover Publications, New York, 111

[3]BIRNBAUM, Z.W. (1964), Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Harper&Row, Second Printing , Japan, 87-88

[4]ROSS, S.(2002), A First Course in Probability, Prentice Hall, Pearson International Edition, Sixth Edition, NJ, 419

[5]WILKS, S.S.(1962), Mathematical Statistics, John Wiley&Sons, 92, 107-111

[6]KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. ; JOHNSON, N.L.(2000), Continuous Multivariate Distributions, Volume 1: Models and Applications, Second Edition, Wiley series in Probability and Statistics , 63-67

[7]PANIK, M.J.(2005), Advanced Statistics from an Elementary Point of View, Elsevier Academic Press, 169

[8]ROHATGI, Vijay K.(2003), Statistical Inference, Dover Publications , New York, 318, 378,424

[9] NETER J., WASSERMAN W., KUTNER M. H. (1985), Applied Linear Statistical Models, second edition,Richard D. Irwin, Illinois , 466-485

[10]DE GROOT M., SCHERVISH M.J. (2002), Probability and Statistics, Addison Wesley- International Edition, USA, 230-236

[11] WASSERMAN, L.(2004), All of Statistics, A Concise Course in Statistical Inference, Springer Texts in Statistics, 63-69

[12] STUART, A.; ORD , K.O.(2007), Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume One: Distribution Theory, Sixth Edition, Hodder Arnold, London , 110-124

[13] DASGUPTA A.(2008), Asymptotic Theory of Statistics and Probability, Springer, 35.Bölüm

[14]GALAMBOS J., SIMONELLI I,(1996); Bonferroni-type Inequalities with Applications, Springer, New York.