Yüksek Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Önceki bölümlerde birinci mertebeden adi türev içeren diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgilenilmiştir. Bu kısımda yüksek mertebeden adi türevli diferansiyel denklemlerim çözümleri ele alınacaktır.

1. Lineer Diferansiyel Denklemlerin Esas Teorisi

Tanım: n. mertebeden lineer diferansiyel denklem,

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x) \qquad (1)$$

denkleminde $a_0(x),a_1(x),...,a_n(x)\in C_{[a,b]}$ sürekli fonksiyonlardır. Burada $a_0(x)\neq 0$ ve $\forall x\in[a,b]$ dir. (1) denklemindeki $b(x)$ fonksiyonuna, diferansiyel denklemin inhomojen kısmı denir. Eğer $b(x)\equiv 0$ ise,

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0 \qquad (2)$$

diferansiyel denklemine homojen diferansiyel denklem denir.

$\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+x^3y=e^x$, 2. mertebeden inhomojen (homojen olmayan) diferansiyel denklemdir.

$\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{d^2y}{dx^3}+3x^2\frac{dy}{dx}-5y=0$, 3. mertebeden homojen diferansiyel denklemdir.

Tanım:

1. n. mertebeden lineer inhomojen diferansiyel denklem,

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x) \qquad (3)$$

denkleminde $a_0(x),a_1(x),...,a_n(x)\in C_{[a,b]}$ sürekli fonksiyonlardır. Burada $a_0(x)\neq 0$

2. $\forall x_0\in[a,b]$ ve $C_0,C_1,...C_{n-1}$ n adet keyfi sabit olsun.

Bu durumda, (3) denkleminin bir $y=y(x)$ çözümü vardır ve

$y(x_0)=C_0$, $y'(x_0)=C_1,...,y^{(n-1)}(x_0)=C_{n-1}$ Koşullarını sağlayan bir çözümü vardır.

Örnek 1

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+x^3y=e^x$$
$$y(1)=2$$
$$y'(1)=-5$$

Başlangıç değer problemidir. Katsayı fonksiyonları; $1; 3x; x^2$, inhomojen kısmı e^x ve tanım aralığı $-\infty < x < \infty$ dir.

Örnek 2

$$2\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{d^2y}{dx^2}+3x^2\frac{dy}{dx}-5y=\sin x$$
$$y(4)=3$$
$$y'(4)=5$$
$$y''(4)=-\tfrac{7}{2}$$

3. mertebeden lineer diferansiyel denkleminde katsayı fonksiyonları $2; x; 3x^2; -5$, inhomojen kısmı $\sin x$ ve tanım aralığı $-\infty < x < \infty$ dir.

Teorem. Verilen bir y(x) fonksiyonu

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0\ \left(a_0(x)\neq 0\right) \tag{4}$$

denkleminin $y(x_0)=0, y'(x_0)=0,..., y^{(n-1)}(x_0)=0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $y(x)\equiv 0$ dir.

Örnek 3

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+x^2y=0$$
$$y(2)=0$$
$$y'(2)=0$$
$$y''(2)=0$$

verilmektedir. Buna göre $\forall x \in [a,b]$ için $y(x) \equiv 0$.

2. *Homojen Diferansiyel Denklemler*

Farzedelim ki, $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ verilen homojen diferansiyel denklemin m tane çözümü olsun. Bu durumda,

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_m f_m(x)$$

fonksiyonu da verilen homojen diferansiyel denkleminin çözümüdür.

Tanım: Eğer verilen homojen diferansiyel denklemin $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ fonksiyonları m tane çözüm fonksiyonu ve $C_1, C_2, ..., C_m$ m adet sabit olsun. Burada,

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_m f_m(x)$$

oluşturulan toplama $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ fonksiyonlarının lineer kombinezonu denir ve bu lineer kombinezon da verilen homojen diferansiyel denklemi sağlar.

Örnek 4

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ homojen diferansiyel denklemi için $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ çözüm fonksiyonları için $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ lineer kombinezonu da çözüm olur.

Örnek 5

$\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ homojen diferansiyel denklemi için e^x, e^{-x}, e^{2x} fonksiyonlarının her biri çözüm fonksiyonudur. Aynı zamanda $C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ lineer kombinezonu da çözüm olur.

Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık

Tanım: $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$, $\forall x \in [a,b]$ tanımlı olsun.

$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x) = 0$

Bu eşitlik $x \in [a,b]$ için $C_1, C_2, ..., C_n$ hepsi aynı anda sıfır olduğunda sağlanıyorsa, $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ fonksiyonları kendi arasında lineer bağımsızdır, aksi halde lineer bağımlıdır denir.

Örnek 6

1) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$ fonksiyonları lineer bağımsız mıdır? Gösteriniz.

   $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = C_1 x + C_2 2x = 0$ $\Rightarrow$ $C_1 = -2C_2$ bulunur. Bu durumda $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ kendi aralarında lineer bağımlıdır. Örneğin $C_2 = 1$ için $C_1 = -2$ olur. Bu durumda $f_2(x) = -2 f_1(x)$ bulunur.

2) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ fonksiyonları lineer bağımsız mıdır? Gösteriniz.

   $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = C_1 x + C_2 x^2 = 0$ eşitliği $C_1 = C_2 = 0$ için sağlanabilir. Bu durumda $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ kendi aralarında lineer bağımsızdır denir.

Teorem: n. mertebede lineer homojen bir diferansiyel denklemin n tane lineer bağımsız çözümü vardır.

Eğer $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ fonksiyonları verilen lineer homojen diferansiyel denklemin n adet lineer bağımsız çözümleri ise, bu fonksiyonların keyfi lineer kombinezonu da bu lineer homojen diferansiyel denklemin çözümüdür. $C_1, C_2, ..., C_n$ keyfi sabitleri için bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x)$$

olarak verilebilir.

Örnek 7

e^x, e^{-x}, e^{2x} fonksiyonları $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$ lineer homojen diferansiyel denkleminin çözümleridir. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü, C_1, C_2, C_3 keyfi sabitler için,

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

dir.

Tanım: Verilen $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)\ \left(x\in[a,b]\right)$ fonksiyonlar kullanılarak oluşturulan

$$W\left(f_1, f_2,..., f_n\right)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ fonksiyonlarının Wronskian'ı denir.

Teorem: $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)\ \left(x\in[a,b]\right)$ n adet fonksiyon, lineer homojen diferansiyel denklemin çözümü olsun. Bu fonksiyonlara ait Wronskian $W\left(f_1, f_2,..., f_n\right)$ için,

1. Eğer, $W\left(f_1, f_2,..., f_n\right)\neq 0$ ise $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ fonksiyonları kendi arasında lineer bağımsızdır.
2. Eğer, $W\left(f_1, f_2,..., f_n\right)=0$ ise $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ fonksiyonları kendi arasında lineer bağımlıdır.

Örnek 8

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ homojen diferansiyel denklemi için $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$ çözüm fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar lineer bağımsız mıdır? Gösteriniz.

$W\left(f_1, f_2\right)=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-1 \Rightarrow W\left(f_1, f_2\right)\neq 0$ olduğundan $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$ lineer bağımsız fonksiyonlardır.

Örnek 9

$\dfrac{d^3y}{dx^3}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ lineer homojen diferansiyel denkleminin çözümleri e^x, e^{-x}, e^{2x} fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar lineer bağımsız mıdır? Gösteriniz.

$$W(f_1, f_2, f_3) = W\left(e^x, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0$$

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = e^{2x}$ lineer bağımsız çözümlerdir.

3. *Diferansiyel Denklemin Mertebesinin Düşürülmesi*

Verilen $f(x)$ fonksiyonu,

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

lineer homojen diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda, $y(x) = f(x).u(x)$ için verilen diferansiyel denklemin türev mertebesi bir mertebe aşağı düşürülebilir.

Basitlik için diferansiyel denklemde n=2 alarak bunu gösterelim.

$$a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

$y(x) = f(x).u(x)$ için,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}u + f\frac{du}{dx} \ ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}u + f\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}u + 2\frac{df}{dx}\frac{du}{dx} + f\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$a_0(x)\left(\frac{d^2 f}{dx^2}u + 2\frac{df}{dx}\frac{du}{dx} + f\frac{d^2u}{dx^2}\right) + a_1(x)\left(\frac{df}{dx}u + f\frac{du}{dx}\right) + a_2(x)y = 0$$

$$\underbrace{\left(a_0(x)\frac{d^2 f}{dx^2} + a_1(x)\frac{df}{dx} + a_2(x)f\right)}_{=0}u + a_0(x)f\frac{d^2u}{dx^2} + \left(2a_0(x)\frac{df}{dx} + a_1(x)f\right)\frac{du}{dx} = 0$$

$$a_0(x)f\frac{d^2u}{dx^2} + \left(2a_0(x)\frac{df}{dx} + a_1(x)f\right)\frac{du}{dx} = 0,$$

$\frac{du}{dx} = w \ ve \ \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dw}{dx}$ işaretlemeleri yapılırsa,

$$a_0(x) f\frac{dw}{dx}+\left(2a_0(x)\frac{df}{dx}+a_1(x) f\right)w=0$$

$$\frac{dw}{w}=-\left(\frac{2}{f}\frac{df}{dx}+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)dx=-\left(2\frac{f'}{f}+\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)dx$$

$$w=\frac{Ce^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}}{f^2} \quad \Rightarrow \quad w=\frac{du}{dx}=\frac{Ce^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}}{f^2} \quad \Rightarrow \quad u(x)=\int\left(\frac{Ce^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}}{f^2}\right)dx+C_1$$

Buradan $y(x)=f(x).u(x)$ için çözüm

$$y(x)=f(x)\left\{\int\frac{Ce^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}}{f^2}dx+C_1\right\}$$

bulunur.

Ödev

1. $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$ diferansiyel denkleminin $y(x)=f(x)$ ve $y(x)=f(x).u(x)$ çözümleri olsun. Bu durumda bu çözümlerin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
2. $\left(x^2+1\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$ diferansiyel denkleminin $y(x)=x$ bu denklemin bir çözümü ise mertebe indirme yöntemini kullanarak diğer çözümünü bulunuz.

4. *Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemler*

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x) \qquad (b(x)\neq 0)$$

Diferansiyel denklemine homojen olmayan diferansiyel denklem denir. Eğer $b(x)=0$ olursa, homojen diferansiyel denklem olur.

Verilen diferansiyel denklemin homojen halinin genel çözümü $y_c(x)$ ve homojen olmayan halinin özel çözümü $y_p(x)$ ise,

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

Homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

Örnek 10

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x$ diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ homojen diferansiyel denklemin genel çözümü: $y_c(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x$ homojen olmayan diferansiyel denklemin özel çözümü: $y_p(x) = x$ ise bu durumda,

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x$$

Verilen homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

5. *Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemlerin Çözümü*

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \quad a_i \in R \quad (a_0 \neq 0 \text{ ve i=1,2,…,n)}$$

Sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemin çözümleri $y = e^{mx}$ şeklinde aranır.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{mx}\right) = me^{mx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(e^{mx}\right)\right) = m^2 e^{mx}, \dots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{mx}\right)\right) = m^n e^{mx}$$

Türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n\right) e^{mx} = 0$$

veya

$$\left(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n\right) = 0$$

olur. Bu denkleme, verilen diferansiyel denklemin karakteristik denklemi denir. Karekteristik denklemin kökleri yardımıyla, diferansiyel denklemin çözümleri elde edilir.

Birbirinden Farklı Köklerin Bulunması Durumu:

Yukarıda verilen

$$\left(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + ... + a_{n-1} m + a_n\right) = 0$$

denkleminin m adet birbirinden farklı kökleri $m_1, m_2, ..., m_n$ olsun. Bu durumda çözüm fonksiyonları

$f_1 = e^{m_1 x}$, $f_2 = e^{m_2 x}$, …, $f_n = e^{m_n x}$ olur. Bu çözüm fonksiyonları yardımıyla genel çözüm:

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + ... + C_n e^{m_n x}$$

olur. Burada $C_1, C_2, ..., C_n$ aralarında lineer bağımsız bilinmeyen sabitlerdir ve başlangıç koşullarından belirlenirler.

Örnek 11

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözümleri $y = e^{mx}$ şeklinde aranır. Bu fonksiyondan türevler alınır ve diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, karakteristik denklem,

$m^2 - 3m + 2 = 0$ olur. Bu denklemin kökleri $m_1 = 1,\ m_2 = 2$ için çözüm fonksiyonları $f_1 = e^x$ ve $f_2 = e^{2x}$ olur. Bu çözüm fonksiyonlarının birbirinden bağımsız olduğu Wronskian yardımıyla gösterilebilir ve $W\left(f_1, f_2\right) \neq 0$ bulunduğundan, verilen diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

olur.

Örnek 12

$\dfrac{d^3y}{dx^3} - 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözümleri $y = e^{mx}$ şeklinde aranır. Bu fonksiyondan türevler alınır ve diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, karakteristik denklem,

$m^3-4m^2+m+6=0$ ve kökleri $m_1=-1$, $m_2=2$ ve $m_3=3$ için $W\left(e^{-x},e^{2x},e^{3x}\right)\neq 0$ olur. Dolayısıyla genel çözüm;

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$$

olur.

Tekrarlı (Katlı) Köklerin Bulunması Durumu:

Bu durum aşağıdaki örnek yardımıyla açıklanacaktır.

<u>Örnek 13</u>

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+9y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözümleri $y=e^{mx}$ şeklinde aranır. Bu fonksiyondan türevler alınır ve diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, karakteristik denklem,

$m^2-6m+9=0$ ve kökleri $m_{1,2}=3$ olur. Dolayısıyla , $f_1=e^{3x}$ ve $f_2=e^{3x}$ olduğundan çözüm fonksiyonları için $W\left(f_1,f_2\right)=0$ bulunur ve bu fonksiyonlar lineer bağımlı olur.

Diğer lineer bağımsız çözümü bulmak için diferansiyel denklemin derecesini düşürme metodunu kullanalım. Yani, $y=f_1=e^{3x}$ bir çözüm, diğer çözüm için $y=f_1(x)u(x)$ şeklinde u(x) fonksiyonunu arayalım. Bu durumda,

$$y=f_1(x)u(x)=e^{3x}u(x),$$

$$y'=\frac{d}{dx}\left(e^{3x}u(x)\right)=3e^{3x}u(x)+e^{3x}\frac{du(x)}{dx},$$

$$y''=\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{3x}u(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(3e^{3x}u(x)+e^{3x}\frac{du(x)}{dx}\right)=9e^{3x}u(x)+6e^{3x}\frac{du(x)}{dx}+e^{3x}\frac{d^2u(x)}{dx^2}$$

Diferansiyel denklemde yerine konur düzenlenirse,

$$e^{3x}\frac{d^2u}{dx^2}=0 \quad\Rightarrow\quad u(x)=C_1x+C_2 \text{ ve } y(x)=f_1(x)u(x)=\left(c_1x+c_2\right)e^{3x}$$

bulunur. Bu durumda genel çözüm,

$$y(x)=C_1 f_1+C_2 f_1 u(x)=C_1 e^{3x}+C_2\left(c_1 x+c_2\right)e^{3x}=\left(K_1 x+K_2\right)e^{3x}$$

bulunur.

Genel durumda, verilen n. mertebeden homojen diferansiyel denklemin n adet kökünden birinin iki katlı kök olduğunu farzedelim. Bu durumda çözüm fonksiyonları:

$$e^{mx}, xe^{mx}, e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots, e^{m_{n-2} x}$$

olarak seçilir ve genel çözüm;

$$y(x)=\left(C_1+C_2 x\right)e^{mx}+C_3 e^{m_1 x}+C_4 e^{m_2 x}+\ldots+C_n e^{m_{n-2} x}$$

bulunur. Eğer bu n adet kökten bir tanesi 3 katlı kök ise bu durumda çözüm fonksiyonları

$$e^{mx}, xe^{mx}, x^2 e^{mx}, e^{m_1 x}, \ldots, e^{m_{n-3} x}$$

olarak seçilir ve genel çözüm;

$$y(x)=\left(C_1+C_2 x+C_3 x^2\right)e^{mx}+C_4 e^{m_1 x}+C_5 e^{m_2 x}+\ldots+C_n e^{m_{n-3} x}$$

bulunur. Eğer bu n adet kök birbirine eşit yani, bir tane kök, n katlı kök ise bu durumda çözüm fonksiyonları

$$e^{mx}, xe^{mx}, x^2 e^{mx}, \ldots, x^{n-1} e^{mx}$$

olarak seçilir ve genel çözüm;

$$y(x)=\left(C_1+C_2 x+C_3 x^2+\ldots+C_n x^{n-1}\right)e^{mx}$$

olur.

Teorem: Sabit katsayılı n. mertebeden adi diferansiyel denklemin ele alalım. Bu diferansiyel denklem için yazılan karakteristik denklemin n adet kökü vardır.

i) n adet $m_1, m_2, \ldots, m_n$ kökleri birbirinden bağımsız ve $C_1, C_2, \ldots, C_n \in R$ için genel çözüm,

$$y(x)=C_1 e^{m_1 x}+C_2 e^{m_2 x}+\ldots+C_n e^{m_n x}$$

ii) Köklerden bir tanesi $m_1=m_2=\ldots=m_k=m, m_{k+1}, \ldots, m_n$, k kez tekrarlı kök ise genel çözüm

$$y(x)=\left(C_1+C_2 x+\ldots+C_k x^{k-1}\right)e^{mx}+C_{k+1} e^{m_{k+1} x}+\ldots+C_n e^{m_n x}$$

olarak belirlenir.

Örnek 14

$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+18y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$m^3-4m^2-3m+18=0$ ve kökleri $m_1=3$, $m_2=3$ ve $m_3=-2$ için genel çözüm;

$$y(x)=\left(C_1+C_2x\right)e^{3x}+C_3e^{-2x}$$

olur.

Örnek 15

$\frac{d^4y}{dx^4}-5\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-8y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$m^4-5m^3+6m^2+4m-8=0$ ve kökler $m_{1,2,3}=2$, $m_4=-1$ için genel çözüm;

$$y(x)=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)e^{2x}+C_4e^{-x}$$

olur.

Kompleks Eşlenik Köklerin Bulunması Durumu:

$a+bi$ ve $a-bi$ kompleks eşlenik sayları verilen diferansiyel denkleme ait karakteristik denklemin kökleri olsun. Bu durumda çözüm

$$y(x)=K_1e^{(a+bi)x}+K_2e^{(a-bi)x}=e^{ax}\left(K_1e^{ibx}+K_2e^{-ibx}\right)=e^{ax}\left(C_1\sin bx+C_2\cos bx\right)$$

olur. Eğer bu kökler k defa tekrarlanıyor ise çözüm,

$$y(x)=e^{ax}\left(C_1+C_2x+...+C_kx^{k-1}\right)\sin bx+e^{ax}\left(C_{k+1}+C_{k+2}x+...+C_{2k}x^{k-1}\right)\cos bx$$

olur.

Örnek 16

$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$m^2+1=0$ ve kökleri $m_{1,2}=\pm i$ için genel çözüm;

$y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$

olur.

Örnek 17

$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+25y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$m^2-6m+25=0$ ve kökler $m_{1,2}=3\pm 4i$ için genel çözüm;

$y(x)=e^{3x}\left(C_1\sin 4x+C_2\cos 4x\right)$

olur.

Örnek 18

$\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+14\frac{d^2y}{dx^2}-20\frac{dy}{dx}+25y=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$m^4-4m^3+14m^2-20m+25=0$ ve kökler $m_{1,2,3,4}=1\pm 2i$ için genel çözüm;

$y(x)=e^{x}\left[\left(C_1+C_2x\right)\sin 2x+\left(C_3+C_4x\right)\cos 2x\right]$

olur.