



T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI
VE TEKLİĞİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

Okan DUMAN

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Ü. Serkan İLTER

II. DANIŞMAN
Doç. Dr. Hülya DURU

Haziran, 2019

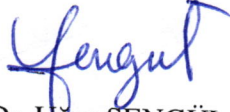
İSTANBUL

Bu çalışma 20.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

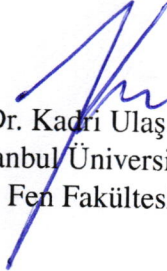
Tez Jürisi



Dr. Öğr. Ü. Serkan İLTER (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL
Marmara Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Doç. Dr. Kadri Ulaş AKAY
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın tamamlanmasında, yaklaşık yedi yıldır değerli bilgilerini bana aktaran, kendisine danıştığım her zaman güler yüzüyle, büyük sabrıyla ve içtenliğiyle yardımda bulunan, matematiksel bilginin dışında çalışmayı, azmi, saygıyı ve dürüstlüğün önemini öğrendiğim, gerçek bir bilim insanı olan sevgili hocam Hülya DURU'ya teşekkürü bir borç biliyorum. Yüksek lisansıma başladığımda tanıştığım, samimi, içten, sevecen tavırlarıyla motivasyonumu arttıran, çalışmamdaki konuyu, kaynakları ve yöntemleri sabırla bana öğreten ve hiç bir zaman desteğini esirgemeleyen kıymetli hocam Serkan İLTER'e teşekkürlerimi sunuyorum. Öğrenciliğimin yanı sıra bana ailem gibi davrandıkları, verdikleri tavsiyeler ve yönlendirmeleri ile birlikte beni koruyup kolladıkları için her ikisine de ayrıca teşekkür ederim. Seminerlerde ve sıcak matematiksel tartışmaların sonundaki molalarda, dünyanın neresinde olursa olsun asla unutmayacağım çay ve kahve ikramları ile birlikte hoş sohbetleri için her iki hocama da ayrıca teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca bana destek olan annem Ergül ve babam Şenol DUMAN'a, güzel düşünceleriyle her zaman iyiliğimi ve mutluluğumu isteyen babaannem Mükerrerem DUMAN'a, bir arkadaş ve dost gibi olabilen, iyi kalpli biricik halam Şenay İSMAİLOĞLU'na, mutsuz ve umutsuz olduğum zamanlarda beni neşelendiren ve hiç bir şekilde desteğini esirgemeyen sevgili Tuğçe ÖZTÜRK'e, liseden bu yana birlikte büyüdüğüm ve saatler süren bilimsel tartışmalarda bulunduğum, iyi bir fizikçi olacağına inandığım kadim dostum M.Haluk SEÇUK'a teşekkür ederim.

Haziran, 2019

Okan DUMAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	iv
ÖZET	vi
SUMMARY	1
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	5
2.1. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.2. CAUCHY PROBLEMİ	7
2.2.1. Klasik Anlamda Çözüm Kavramı	8
2.2.2. Genelleştirilmiş Anlamda Çözüm Kavramı	9
2.2.3. Cauchy Probleminin Klasik Anlamda Çözümünün Varlığı ve Tekliği ile İlgili Teoremler	10
3. MALZEME VE YÖNTEM	26
4. BULGULAR	27
4.1. CAUCHY PROBLEMİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ANLAMDA ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ İLE İLGİLİ TEOREMLER	27
4.1.1. Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler İle İlgili Teoremler ..	35
4.1.2. Cauchy Probleminin Genelleştirilmiş Bir Hali	37
4.1.3. Örnekler	46
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	50
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1: $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesine kısıtlanması için Cauchy probleminin (t_0, x_0) noktasından geçen integral eğrisinin bulunduğu bölge 17



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler

Açıklama

$\mathbf{P}(X)$: X kümesinin kuvvet kümesi
\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{Q}	: Rasyonel sayılar kümesi
$B_\varepsilon(x)$: x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$B_\varepsilon[x]$: x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar
\bar{A}	: A kümesinin kapanışı
$C(X)$: Tanım kümesi X ve değer kümesi \mathbb{R}^n olan sürekli fonksiyonlar uzayı
$C(I; \mathbb{R}^n)$: Tanım kümesi I ve değer kümesi \mathbb{R}^n olan sürekli fonksiyonlar uzayı

Kısaltmalar

Açıklama

<i>h.h.</i>	: Hemen her yerde
<i>g.y.k.</i>	: Gerek ve yeter koşul

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLIĞI İLE İLGİLİ TEOREMLER

Okan DUMAN

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Ü. Serkan İLTER

II. Danışman: Doç. Dr. Hülya DURU

Bu tez çalışmasında, sağ-tarafı süreksiz adi diferansiyel denklem sistemi için Cauchy problemi ile ilgilenilmektedir. Bu problemin genelleştirilmiş anlamda çözümünün varlık ve tekliği ile ilgili teoremler ifade edilerek ispatlanmaktadır. Özel olarak Lipschitz koşulunu sağlayan çözümün varlık ve tekliği araştırılmaktadır.

Bu çalışmayı, ilk ikisi hazırlık aşaması şeklinde olan dört bölüme ayırmak mümkündür. Birinci bölüm, temel kavramlardan, Cauchy probleminin klasik anlamdaki ve genelleştirilmiş anlamdaki çözüm kavramlarından ve yardımcı teoremlerden oluşmaktadır. İkinci bölüm, Cauchy probleminin klasik anlamdaki çözümünün varlık ve tekliği ile ilgili teoremlerden oluşmaktadır. Bu bölümdeki ispatlarda, Banach sabit nokta teoremi, Arzelá-Ascoli teoreminden yararlanılmakta ve Euler kırık doğruları yöntemi ile Picard yaklaşımları yöntemi kullanılmaktadır. Üçüncü bölümde, sağ-tarafı süreksiz adi diferansiyel denklem sistemi için Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine çalışılmaktadır. Çalışmanın son bölümünde, yüksek mertebeden bir adi diferansiyel denklemin söz konusu olduğu problemin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmektedir. Yine bu bölümde, Cauchy probleminin çözümünün genelleştirilmiş bir hali üzerinde çalışılmaktadır.

Haziran 2019, 62 sayfa.

Anahtar kelimeler: Cauchy problemi, varlık ve teklik teoremleri, sağ-tarafı süreksiz adi diferansiyel denklem, genelleştirilmiş anlamda çözüm.

SUMMARY

M.Sc. THESIS

THEOREMS ABOUT EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS

Okan DUMAN

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Ü. Serkan İLTER

Co-Supervisor: Doç. Dr. Hülya DURU

In this thesis, Cauchy problem is investigated for ordinary differential equations system with discontinuous right-hand sides. The theorems about the existence and uniqueness of the solution of this problem in the generalized sense are expressed and proved. Specifically, the existence and uniqueness of the solution that satisfies the Lipschitz condition is examined.

This thesis has four parts which the first two are related to the preliminary process. The first part consists of the basic concepts, the Cauchy problem in the classical sense and the generalized solution concepts and auxiliary theorems. The second part consists of theorems about the existence and uniqueness of the classical solution of the Cauchy problem. In the proofs in this section, Banach fixed point theorem, Arzelá-Ascoli theorem is used and the Euler fracture line method and Picard approach method are used. In the third part, the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations with discontinuous right-hand sides are studied. In the last part of the study, the existence and uniqueness of the solution of the problem of a higher order ordinary differential equation is examined. Also in this section, a generalized state of the solution of the Cauchy problem is investigated.

June 2019, 62 pages.

Keywords: Cauchy problem, existence and uniqueness theorems, differential equation with discontinuous right-hand sides, generalized solution.

1. GİRİŞ

Daha çok fizik, kimya ve mühendislik alanlarında öne çıkan temel kural ve yasaların matematiksel bir dil olarak ifade edilmesi, ilgili süreçlerin modellenmesi, diferansiyel denklemler ve genel manada diferansiyel denklem sistemleri ile mümkün olmaktadır.

Birçok matematik tarihçesine göre diferansiyel denklem teorisinde yayınlanan ilk çalışma olarak, $\int s ds = \frac{1}{2}s^2 + c$ integral eşitliğinin ifade edildiği Gottfried Wilhelm von Leibniz'in 11 Kasım 1675 yılındaki çalışması gösterilir. Diferansiyel denklem ifadesi ilk kez, 1676 yılında Leibniz tarafından, x, y değişkenleri ile dx ve dy diferansiyelleri arasında bir ilişki şeklinde tanımlanarak kullanılmıştır [8]. Aynı zamanda Leibniz, dy/dx ve integral sembolünün ilk kullanan matematikçidir. Buna karşın diferansiyel denklem teorisi ile ilgili ilk önemli sonuçlara ulaşan matematikçi Isaac Newton'dur. Newton'un bu sonuçları, Leibniz'in çalışmalarından daha sonra yayınlanmıştır. 1671 yılında yazdığı ancak 1736 yılında basılmış olan kitabında Isaac Newton, flüksiyon denklemler adını verdiği günümüzde birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler olarak bilinen; bir tek bağımsız değişken, bir bağımlı değişken ve onun birinci mertebe türevinden oluşan denklemleri ilk olarak sınıflandırmıştır [1]. Newton, denklemin sağ tarafındaki fonksiyonun bir polinom şeklinde olduğu durum için serileri kullanarak bir çözüm yöntemi geliştirmiştir. Yöntemdeki sabit katsayılardan ilkinin keyfi seçilebilmesi sebebiyle denklemin sonsuz sayıda çözümünün olduğu sonucunun elde edilmesine karşın 18.yüzyılın ortalarına kadar birinci mertebe adi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin keyfi bir sabite bağlı olduğu tam olarak fark edilememiştir. Leibniz, 1682 ve 1684 yıllarındaki çalışmaları ile diferansiyel denklem teorisi ile ilgili temel birçok sonuç elde etmiştir. Daha sonraki yıllarda, İsviçreli matematikçilerden Bernoulli kardeşler, 18. yüzyılda Euler, Clairaut, Lagrange, D'Alembert, Laplace ile 19. yüzyılda da, Cauchy, Jacobi, Ampere, Darboux, Picard ve Frobenius, (adi) diferansiyel denklem teorisini ileri seviyeye taşıyan matematikçiler olmuşlardır.

Diferansiyel denklem teorisi ile ilgili ilk çalışmalar, daha çok denklemleri sınıflandırmak, formüle etmek ve uygun çözüm yöntemleri belirleme üzerine yapılmıştır. 1687 yılında Newton, bir cisim üzerine etki eden kuvvetler ve cismin hareketi arasındaki

ilişkileri açıklayan hareketin üç yarasını keşfetti. Bu yasalar ile birlikte bir fiziksel sürecin diferansiyel denklemleri kurulurken, sürecin başlangıç anında belirli değere sahip olması sebebiyle başlangıç koşullu diferansiyel denklemler konusu önem kazanmıştır. Bu problemin çözüm yöntemlerinin araştırılması aşamasından önce ilk akla gelen soru, çözümün var olup olmadığı ile ilgiliydi. Sonraki süreçte, başlangıç koşullu diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği problemi, diferansiyel denklemler teorisinin temel problemleri arasında yerini almıştır. Bu problemlerin çözümlerinin varlığı ile ilgili ilk çalışmaları matematikçi Augustin Louis Cauchy'dir. Cauchy çalışmalarından birinde,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.1)$$

diferansiyel denklemler sistemindeki eşitliğin sağ tarafı, bir (t_0, x_0) noktasının bir komşuluğunda analitik ise bu durumda bu sistemin,

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

başlangıç koşulunu sağlayan bir tek çözümünün var olduğunu ispatlamıştır. Üstelik bu çözümün, t_0 noktasının bir komşuluğunda yakınsak olan,

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (t - t_0)^i$$

şeklinde bir kuvvet serisi ile ifade edilebildiğini göstermiştir. Bu çalışmadan sonra, (1.1)-(1.2) başlangıç değer problemi artık sıklıkla Cauchy Problemi olarak adlandırılmıştır.

1886 yılında Giuseppe Peano, (1.1) sistemindeki eşitliğin sağ tarafındaki fonksiyonun, (t_0, x_0) noktasının bir komşuluğunda sürekli olması hipotezini kullanarak Cauchy Probleminin çözümünün varlığı ile ilgili Peano varlık teoremi olarak bilinen teoreminin ispatını vermiştir (düzeltilmiş ispatı 1890 yılında yayınlanmıştır [2], [3]). Sonraki yıllardaki önemli bir gelişme de, Rudolf Lipschitz'in 1864 yılındaki Fourier Serilerinin yakınsaklığı ile ilgili çalışmasında ortaya koyduğu Lipschitz koşulunun uygulamaları olmuştur. 1890 yılında Charles Émile Picard, analitiklikten daha zayıf koşullar altında Cauchy Probleminin çözümünün var olduğunu göstermiştir [4]. Picard bunu, (1.1) sistemindeki eşitliğin sağ tarafındaki fonksiyonun, (t_0, x_0) noktasının bir komşuluğunda

sürekli ve (x değişkeni üzerinden) Lipschitz olması koşullarından yararlanıp, daha sonra problemin bir çözümüne düzgün yakınsak olacak

$$\varphi_0(t) = x_0, \varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds, n \geq 0$$

şeklinde $(\varphi_n)_n$ yaklaşımlar dizisi tanımlayarak yapmıştır. Bu yöntem, Picard'ın Yaklaşımlar Yöntemi olarak bilinir. 1894 yılında Ernst Leonard Lindelöf'ün aynı teorem üzerindeki çalışmaları ile Picard-Lindelöf varlık ve teklik teoremi olarak bilinen teoremin son hali ifade edilmiştir. 1898 yılında William F. Osgood, Arzelà-Ascoli teoremi yardımıyla Peano teoreminin farklı bir ispatını vermiştir [5].

1950'li yılların sonlarına doğru, (1.1) sistemindeki eşitliğin sağ tarafındaki fonksiyonun süreksiz olduğu adi diferansiyel denklem sistemleri ile çalışılmıştır ve güncel olarak bu çalışmalar devam etmektedir. [6], [9], [11], [13], [14], [19], [20], [24] ve [25] çalışmaları bunlardan birkaçıdır. Bu denklem sistemlerinin elektrik mühendisliğinden mekaniğe kadar geniş bir uygulama alanı mevcuttur. Birçok fiziksel süreç süreksiz fonksiyonlar yardımıyla açıklanmaktadır. Örneğin, eğimli bir rampada aşağı yönde kayan tuğlanın hareketinin hızını tanımlayan diferansiyel denklem,

$$v'(t) = g \sin \alpha - \eta g \cos \alpha \operatorname{sign}(v(t))$$

şeklinde dir. Burada, tuğlanın hızı v , yer çekimi ivmesi g , rampanın eğimi $\alpha > 0$, sürtünme katsayısı η olmak üzere, bu sistemin sağ-tarafı hızın süreksiz bir fonksiyondur. Bir diğer örnek olarak, paraşüt problemi olarak bilinen problem verilebilir. Paraşüt probleminde, paraşütçünün düşey olarak düştüğü ve bir $t = t_0$ anında paraşütünün açıldığı kabul edilerek, Newton'ın ikinci yasası gereği meydana gelen hareketin hızını tanımlayan diferansiyel denklem,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v$$

şeklinde dir. Burada paraşütçünün kütlesi m , düşüş hızı v , $0 \leq t < t_0$ için $\alpha = \alpha_1$ olmak üzere paraşütçü serbest düşüşteyken hava direncinden kaynaklı sürtünme kuvveti $F_s = -\alpha_1 v$ ve $t \geq t_0$ için $\alpha = \alpha_2$ olmak üzere $t = t_0$ anında paraşütün açılmasıyla oluşan sürtünme kuvveti $F_s = -\alpha_2 v$ olacak biçimde tanımlıdır. Dolayısıyla bu sistemin sağ-tarafı süreksiz bir fonksiyondur. Ayrıca, kontrol teorisindeki değişken yapıları objelerin

modellenmesi ya da kaydırma hareketlerini ifade eden bazı diferansiyel denklemler süreksiz fonksiyonlar aracılığı ile inşa edilmektedir. Klasik anlamda çözüm kavramı, bu tarz denklemler için yeterli olmayacağından genelleştirilmiş anlamda bir çözüm kavramına ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde temel kavramlar ve yardımcı teoremlerden bahsedilerek Cauchy Problemi ifade edilecektir. Bu problem için, klasik anlamda ve genelleştirilmiş anlamda çözüm kavramları verilecektir. Daha sonra teoremlerde kullanılacak hipotezler verilip, klasik anlamda çözümün varlık ve tekliği ile ilgili teoremler ifade edilerek bu teoremler ispatlanacaktır. Bu ispatlarda, Banach sabit nokta teoreminden, Euler kırık doğrularından, Picard yaklaşımlar yönteminden yararlanılacaktır.

Bulgular bölümünde sağ-tarafı süreksiz adi diferansiyel denklemler sistemi ile çalışılacaktır. Cauchy probleminin genelleştirilmiş anlamda çözümünün varlık ve tekliği ile ilgili teoremler ifade edilip ispatlanacaktır. Ek olarak, çözümün Lipschitz koşulunu sağlayacağı uygun hipotezler belirlenecektir. Daha sonra problemde denklem sistemi yerine yüksek mertebeden bir diferansiyel denklemin söz konusu olduğu Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği verilecek ve Cauchy probleminin çözümünün genelleştirilmiş bir hali incelenecektir. Son olarak elde edilenlerin örneklerle uygulamaları yapılacaktır. Bu uygulamalar sonucunda, Cauchy problemlerinin aşağıdaki bilinen özellikleriyle ilgili örnekler verilmiş olacaktır.

- (i) Bir Cauchy probleminin çözümünün daima var olduğu söylenemez (Örnek 4.21).
- (ii) Klasik anlamda çözümün olmadığı fakat genelleştirilmiş anlamda çözümün var olduğu örnekler mevcuttur (Örnek 4.20 ve Örnek 4.22).
- (iii) Varlık teoremlerindeki hipotezler (klasik anlamda veya genelleştirilmiş anlamda) çözümün varlığı için gerek koşullardır. Bu hipotezlerin sağlanmadığı fakat çözümün var olduğu problemler mevcuttur (Örnek 4.20, klasik durum için $k = 0$, genelleştirilmiş durum için $k \notin \{-\alpha, \alpha, 0\}$).

2. GENEL KISIMLAR

2.1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve kavramlar verilecektir. Aksi söylenmedikçe X boştan farklı bir kümeyi gösterecektir.

Tanım 2.1. $\theta : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\theta(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x noktasına θ fonksiyonunun bir sabit noktası denir.

Tanım 2.2. (X, d) bir metrik uzay ve $\theta : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in X$ için

$$d(\theta(x), \theta(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde x ve y noktalarından bağımsız bir $0 < \alpha < 1$ sayısı varsa θ fonksiyonuna bir *daralma* denir.

Önerme 2.3 (Banach Sabit Nokta Teoremi). [16] Tam bir metrik uzay üzerinde tanımlı her daralmanın bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir.

Tanım 2.4. (X, d) bir metrik uzay ve E bir Banach uzayı olmak üzere $\mathbf{F} \subseteq C(X; E)$ olsun.

(a) Eğer her pozitif ε sayısına karşılık, $d(x, y) < \delta$ koşulunu sağlayan herhangi iki $x, y \in X$ noktaları ve her $f \in \mathbf{F}$ fonksiyonu için $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ sağlayacak şekilde noktalardan ve fonksiyondan bağımsız bir $\delta > 0$ sayısı varsa, \mathbf{F} fonksiyonlar ailesine X kümesi üzerinde eş süreklidir denir.

(b) Herhangi bir $f \in \mathbf{F}$ ve herhangi bir $x \in X$ için, $\|f(x)\| \leq K$ koşulunu sağlayan, fonksiyondan ve noktadan bağımsız bir $K > 0$ sayısı varsa, \mathbf{F} fonksiyonlar ailesine düzgün sınırlıdır denir.

Teorem 2.5 (Arzelá-Ascoli). [16] Bir $\mathbf{F} \subseteq C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ailesi düzgün sınırlı ve eş süreklidir ise bu aileye ait herhangi bir fonksiyon dizisinin $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak bir alt dizisi vardır.

Önerme 2.6 (Gronwall Lemması). [20] z fonksiyonu bir $[x_0, x_1]$ kompakt aralığı üzerinde tanımlı ve pozitif değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Öyle C, L pozitif sayıları ve her $x \in [x_0, x_1]$ için

$$z(x) \leq C + L \int_{x_0}^x z(s) ds$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise,

$$z(x) \leq C \cdot e^{L(x-x_0)}$$

eşitsizliği de gerçekleşir.

Tanım 2.7 (Mutlak Süreklilik). Bir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$) fonksiyonu verilsin. Eğer her pozitif ε sayısına karşılık, $[a, b]$ aralığının $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ koşulunu sağlayan her sonlu tane ikişerli kesişimleri boş olan $]a_1, b_1[, \dots,]a_n, b_n[$ alt aralıkları için $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığı üzerinde *mutlak sürekli* denir.

Önerme 2.8. [12] Her bir bileşen fonksiyonu mutlak sürekli olan $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ şeklindeki vektör değerli fonksiyon *mutlak sürekli*dir.

Önerme 2.9. [15] (a) Lipschitz koşulunu gerçekleyen her fonksiyon mutlak sürekli

(b) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonları verilsin. Bu durumda $f + g$, αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f g$ ve $|f|$ fonksiyonları da mutlak sürekli

Teorem 2.10. [23] $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

(a) F mutlak sürekli

(b) Aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde bir $f \in L^1[a, b]$ fonksiyonu vardır

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f d\mu, \quad \forall x \in [a, b].$$

(c) $F' = f$ h.h.

(d) $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli her fonksiyon hemen-her yerde diferansiyellenebilir ve türev fonksiyonu integrallenebilir.

Burada $(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c)$ ve $(a) \Rightarrow (d)$ gerektirmeleri gerçekleşir.

Teorem 2.11. [30] (X, Σ_X) ölçülebilir bir uzay ve $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ Borel ölçülebilir bir uzay olsun. $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $x \in X$ ve $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ olmak üzere, her bir bileşen fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.

Teorem 2.12. [29] (X, Σ) ölçülebilir bir uzay ve $f : X \rightarrow [0, \infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ basit fonksiyon dizisi vardır,

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \rightarrow [0, \infty[$ ölçülebilir,

(b) $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$

(c) Her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Sonuç 2.13. $f : X \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda öyle bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ basit ve ölçülebilir fonksiyon dizisi vardır ki, her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ olur.

Teorem 2.14. [29] (X, Σ) ölçülebilir bir uzay ve $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ bir $E \subseteq X$ kümesi üzerinde tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar dizisi olmak üzere, h.h. $x \in E$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olsun. Eğer h.h. $x \in E$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n| \leq g$ olacak şekilde bir Lebesgue integrallenebilir g fonksiyonu var ise, f fonksiyonu E üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$ gerçekleşir.

2.2. CAUCHY PROBLEMİ

Adi diferansiyel denklemlerin 1.mertebe normal sistemini yani,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

sistemi göz önüne alınsın. Bu sistem vektör formda,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu gösterimlerde, $I \subseteq \mathbb{R}$ herhangi bir aralık, $(a, b) \subseteq I$ ve $t \in I$ olmak üzere,

$$f = (f_1, \dots, f_n) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n ,$$

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) \quad \text{ve}$$

$$\int_a^b x(t) dt = \left(\int_a^b x_1(t) dt, \dots, \int_a^b x_n(t) dt \right)$$

özellikleri geçerlidir. Dikkat edilecek olursa, (2.1) sisteminin sağ tarafındaki fonksiyon $F_x : t \rightarrow f(t, x(t))$ şeklinde tanımlı bir bileşke fonksiyondur ve (2.1) sistemi $x'(t) = F_x(t)$ şeklinde ifade edilebilir.

Şimdi I aralığının herhangi bir t_0 iç noktası alınsın ve I_0 ile t_0 noktasının açık bir yuvarı gösterilsin. Bu durumda $x^0 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x^0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

başlangıç değer problemine *Cauchy Problemi* denir. Ayrıca (2.2) eşitliklerini sağlayan $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu varsa, bu fonksiyona *Cauchy probleminin I_0 üzerindeki bir çözümü* denir.

2.2.1. Klasik Anlamda Çözüm Kavramı

(2.2) eşitliklerini sağlayan ve I_0 üzerinde sürekli türevi olan bir $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna, (2.2) probleminin I_0 üzerinde *klasik anlamda çözümü* denilir. Diğer bir deyişle, klasik anlamda çözüm ile (2.2) probleminin C^1 sınıfı üzerindeki çözümü araştırılacaktır. Bu durumda her bir x çözümü için, $t \rightarrow f(t, x(t))$ bileşke fonksiyonu sürekli olacaktır.

Daha sonraki bölümlerde detaylı bir şekilde açıklanacağı üzere, f fonksiyonunun sürekli olması hipotezi altında çalışılarak, (2.2) probleminin klasik anlamda çözümü için varlık teoremleri elde edilebilecektir ve bu teoremlerdeki hipotezler, klasik anlamda çözümün varlığı için gerek koşullar olacaktır. Bu hipotezlerin sağlanmadığı fakat klasik çözümlerin var olduğu örnekler vardır.

2.2.2. Genelleştirilmiş Anlamda Çözüm Kavramı

Diferansiyel denklemler teorisinde, f fonksiyonunun sürekli olmadığı birçok (2.2) problemi vardır. Literatürde bu denklemler daha çok *sağ-tarafı süreksiz diferansiyel denklemler* olarak adlandırılır.

Sağ-tarafı süreksiz olan diferansiyel denklem sistemlerinin elektrik mühendisliğinden mekaniğe kadar çok geniş bir uygulama alanı mevcuttur. Çünkü çoğu fiziksel kanun süreksiz fonksiyonlar yardımıyla açıklanabilir. Örneğin, bazı elektronik aletlerin kuru sürtünme kuvvetinin ifade edilmesi gibi. Ayrıca kontrol teorisindeki değişken yapılı objelerin modellenmesi ya da kaydırma hareketlerini ifade eden bazı diferansiyel denklemler süreksiz fonksiyonlar aracılığı ile inşa edilir. Klasik anlamda çözüm kavramı, bu tarz denklemler için yeterli olmayacağından genelleştirilmiş bir çözüm kavramına ihtiyaç duyulur.

Örnek 2.15. $n = 2$ durumu için

$$x_1'(t) = \begin{cases} -1 & , x_1(t) < 0 \\ 1 & , x_1(t) > 0 \\ 2 & , x_1(t) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$x_2'(t) = 0 \quad , \quad x(0) = 0 \quad (2.4)$$

problemi göz önüne alınsın(bu örnek, Örnek 4.20'nin özel bir halidir). Bu problemin klasik anlamda çözümü yoktur. Özel olarak, $T > 0$ olmak üzere $x_1(t) = t$ fonksiyonu düşünülürse, $(x_1(t), x_2(t)) = (t, 0)$ fonksiyonu $[0, T]$ üzerinde, $t = 0$ noktası dışında verilen denklemleri ve başlangıç koşulunu sağlar. Ayrıca (2.3) eşitliğinin sağ-tarafındaki fonksiyon $t = 0$ noktasında tanımlı olmayacak şekilde verilmiş olsaydı, yine klasik çözüm kavramından bahsedilemezdi.

Şimdi bu örnekten yola çıkılarak, klasik çözümlerin mümkün olmadığı durumlarda da çözümün olabileceği genelleştirilmiş bir çözüm kavramı verilsin.

Tanım 2.16. (2.2) problemindeki başlangıç koşulunu ve türevle ilgili eşitliği hemen

her $t \in I_0$ noktasında sağlayan, I_0 yuvarında veya uygun $T > 0$ için $[t_0, T], [-T, 0]$ aralıklarından biri üzerinde tanımlı, değer bölgesi \mathbb{R}^n olan mutlak süreklı x fonksiyonuna, (2.2) probleminin tanım kümesi üzerinde *genelleştirilmiş anlamda çözüm*ü denir.

2.2.3. Cauchy Probleminin Klasik Anlamda Çözümünün Varlığı ve Tekliği ile İlgili Teoremler

Bu bölüm boyunca (2.2) Cauchy Probleminin klasik anlamdaki çözümü ile ilgilenilecektir. Bunun için öncelikle teoremlerde yararlanılacak hipotezlerden söz edilecektir. Daha sonra varlık ve teklik teoremleri ifade edilecek, son olarak teoremlerin ispatları verilecektir. İlk olarak ispatlarda kullanılacak a, b, L, M sayıları ve hipotezler verilsin; t_0 noktası I aralığının bir iç noktası olduğundan $B_a[t_0] \subseteq I$ olacak şekilde bir $a > 0$ reel sayısı vardır. $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesine kısıtlanışı için aşığıdaki hipotezler kullanılacaktır.

(H1) f fonksiyonu $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesinde süreklıdir.

(H2) Herhangi bir $t \in B_a[t_0]$ için $f(t, \cdot)$ fonksiyonu, $B_b[x^0]$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlar. Bunun anlamı, her $x, y \in B_b[x^0]$ için

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad (2.5)$$

koşulunu sağlayacak şekilde noktalardan bağımsız bir L pozitif sayısının olmasıdır.

(H3) $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesinde f_x kısmi türevi var ve süreklıdir.

Dikkat edilecek olursa, (H1) koşulunu gerçekeleyen f fonksiyonu için $M = \sup \left\{ \|f(t, x)\| : t \in B_a[t_0] \text{ ve } x \in B_b[x^0] \right\} < \infty$ gerçeklenir.

Önerme 2.17. (H3) hipotezi geçerli olsun. Bu durumda (H2) gerçeklenir.

Önerme 2.18. [7] (H1) hipotezi geçerli olsun. Bir $x : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun (2.2) probleminin bir çözümü olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun aşığıdaki

integral denkleminin bir çözümü olmasıdır

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds .$$

Tanım 2.19 (Picard Yaklaşımları Metodu). Bu metod, (2.2) probleminin çözümüne yakınsayacak bir $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi kullanılarak çözümün bulunması ilkesine dayanır.

Buradaki $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyonları, t_0 noktasının bir komşuluğunda sürekli olacak şekilde seçilen fonksiyonlardır. Genellikle ilk yaklaşım fonksiyonu $x^0(t) = x^0$ olarak seçilir. Diğer terimler ise, $m \in \mathbb{N}$ için,

$$x^m(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x^{m-1}(s)) ds$$

şeklinde belirlenir.

Şimdi teoremleri ifade edelim.

Teorem 2.20 (Peano). [7] (H1) hipotezi geçerli olsun. Bu durumda

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

olmak üzere, (2.2) probleminin $B_\alpha[t_0]$ üzerinde bir çözümü vardır.

Teorem 2.21 (Picard-Lindelöf). [21] (H1) ve (H2) hipotezleri geçerli olsun. Bu durumda, $0 < r < \min \left\{ \frac{1}{2L}, a, \frac{b}{M} \right\}$ olacak şekilde belirlenen r sayısı için (2.2) probleminin $B_r[t_0]$ üzerinde bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

Teorem 2.22. (H1) ve (H2) hipotezleri geçerli olsun. Bu durumda

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

olmak üzere, (2.2) probleminin $B_\alpha[t_0]$ üzerinde bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

Teorem 2.23. (H1) ve (H3) hipotezleri geçerli olsun. Bu durumda (2.2) probleminin t_0 noktasının bir kapalı yuvarı $B_\delta[t_0]$ üzerinde çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

Teorem 2.24. [21] (a) (H2) hipotezi geçerli olsun. Bu durumda (2.2) probleminin çözümü varsa tektir.

(b) (H3) hipotezi geçerli olsun. Bu durumda (2.2) probleminin çözümü varsa tektir.

Teoremlerin İspatları

(2.2.3.) başlığı altındaki kavramlar geçerli olmak üzere, yukarıda ifade edilen teoremleri sırasıyla ispatlayalım.

Teorem 2.20'in İspatı

Teoremin ispatı $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığı üzerinde gösterilirse, $[t_0 - \alpha, t_0]$ için de aynı yöntem geçerli olacaktır.

f fonksiyonu $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ kompakt kümesi üzerinde sürekli olduğundan bu küme üzerinde düzgün süreklidir. Dolayısıyla, herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\eta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır ki,

$$\begin{aligned} |t - \bar{t}| &< \eta(\varepsilon) \\ \|x - \bar{x}\| &< \eta(\varepsilon) \end{aligned}$$

bağıntılarını gerçekleyen her $(t, x), (\bar{t}, \bar{x}) \in B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ için,

$$\|f(t, x) - f(\bar{t}, \bar{x})\| < \varepsilon$$

gerçeklenir.

Şimdi, $h_\varepsilon = \frac{\alpha}{N(\varepsilon)} \leq \min\{\eta(\varepsilon), \frac{\eta(\varepsilon)}{M}\}$ ve $t_j = t_0 + j.h_\varepsilon$, $j = 0, 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ olmak üzere, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N(\varepsilon)} = t_0 + \alpha$ düzgün parçalanışı alınsın ve buradan Euler poligonal doğruları aşağıdaki şekilde inşa edilsin.

Bunun için öncelikle kırık doğruları ifade etmek gerekir.

(t_0, x^0) noktasından geçen, eğimi $f(t_0, x^0)$ olan doğru üzerinden, t_1 noktasının görüntüsü olan noktaya $\varphi_\varepsilon(t_1)$ denilsin ve aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$\varphi_\varepsilon(t_1) = \varphi_\varepsilon(t_0) + h_\varepsilon \cdot f(t_0, x^0) .$$

(Dikkat edilirse , $\varphi_\varepsilon(t_0) = x^0$ ve $h_\varepsilon = (t_1 - t_0)$ olur.)

Aynı şekilde , $(t_1, \varphi_\varepsilon(t_1))$ noktasında geçen, eğimi $f(t_1, \varphi_\varepsilon(t_1))$ olan doğru üzerinden, x_2 noktasının görüntüsü olan noktaya $\varphi_\varepsilon(t_2)$ denilsin ve aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$\varphi_\varepsilon(t_2) = \varphi_\varepsilon(t_1) + h_\varepsilon \cdot f(t_1, \varphi_\varepsilon(t_1)) .$$

Bu şekilde devam edilirse,

$$\varphi_\varepsilon(t_{N(\varepsilon)+1}) = \varphi_\varepsilon(t_{N(\varepsilon)}) + h_\varepsilon \cdot f(t_{N(\varepsilon)}, \varphi_\varepsilon(t_{N(\varepsilon)}))$$

olacak biçimde tanımlanır.

Buradan Euler poligonal doğrusu, $\varphi_\varepsilon : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(t) &= \varphi_\varepsilon(t_j) + (t - t_j)f(t_j, \varphi_\varepsilon(t_j)) \\ \varphi_\varepsilon(t_0) &= x^0 \quad t_j < t \leq t_{j+1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlı, parçalı doğrusal fonksiyondur.

Şimdi, herhangi bir $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için,

$$\| \varphi_\varepsilon(t) - x^0 \| \leq M\alpha \leq b$$

ifadesi gerçekleşir. Yani, $t_j < t \leq t_{j+1}$ ve $j = 0, 1, \dots, N(\varepsilon)$ olmak üzere

$$\| \varphi_\varepsilon(t_j) + (t - t_j)f(t_j, \varphi_\varepsilon(t_j)) - x^0 \| \leq b$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü,

(i) $j = 0$ ve $t_0 < t \leq t_1$ için ;

$$\begin{aligned} \| \varphi_\varepsilon(t_0) + (t - t_0)f(t_0, \varphi_\varepsilon(t_0)) - x^0 \| &= |t - t_0| \cdot \| f(t_0, \varphi_\varepsilon(t_0)) \| \\ &\leq \alpha M \leq \frac{b}{M} \cdot M = b \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) $j = 1$ ve $t_1 < t \leq t_2$ için ;

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon(t_1) + (t - t_1)f(t_1, \varphi_\varepsilon(t_1)) - x^0\| &= \|\varphi_\varepsilon(t_0) + h_\varepsilon \cdot f(t_0, x^0) + (t - t_1)f(t_1, \varphi_\varepsilon(t_1)) - x^0\| \\ &\leq |t_1 - t_0| \cdot M + |t_2 - t_1| \cdot M \leq M\alpha \leq b \end{aligned}$$

bulunur ve bu şekilde devam edilirse, herhangi bir $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için $\|\varphi_\varepsilon(t) - x^0\| \leq b$ olduğu gösterilir. Böylece, her $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için $(t, \varphi_\varepsilon(t)) \in B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesinde olduğu ispatlanır.

Diğer taraftan, $t_j < t \leq t_{j+1}$ için $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(t_j) + (t - t_j)f(t_j, \varphi_\varepsilon(t_j))$ ve $\varphi_\varepsilon(t_0) = x^0$ olduğu biliniyor. Bundan yararlanılarak, herhangi $t, \bar{t} \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için

$$\|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(\bar{t})\| \leq M|t - \bar{t}| \quad (2.7)$$

bağıntısı elde edilir.

(2.7) eşitsizliği yardımıyla, $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ fonksiyonlar ailesinin, $[t_0, t_0 + \alpha]$ üzerinde eş sürekliliği olduğu sonucuna ulaşılır.

Yine (2.7) ifadesinde, $\bar{t} = t_0$ alınıp eşitsizlik uygulanırsa

$$\|\varphi_\varepsilon(t)\| \leq M\alpha + \|x^0\|$$

bulunur. Buradan ise $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ fonksiyonlar ailesinin düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Dolayısıyla $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ fonksiyonlar ailesi; hem eş sürekliliği hem de düzgün sınırlıdır.

Şimdi, $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine karşılık gelen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Böylece Arzelà-Ascoli Teoreminden, öyle bir $\varphi : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu ve öyle bir $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır ki, $[t_0, t_0 + \alpha]$ üzerinde $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ olacak şekilde düzgün yakınsar.

Elde etmiş olduğumuz φ fonksiyonu (2.2) denkleminin bir çözümüdür. Bunu ise, aşağıda tanımlanan fonksiyon dizisi yardımıyla gösterebiliriz.

$$g_{n_k}(t) := \begin{cases} \varphi'_{n_k}(t) - f(t, \varphi_{n_k}(t)) & , t_j^k < t < t_{j+1}^k \\ 0 & , t \in P_k \end{cases} \quad (2.8)$$

Burada, $j = 0, 1, \dots, N(n_k)$ olmak üzere, $P_k = \{t_0^k, t_1^k, \dots, t_n^k\}$ parçalanışını göstermektedir.

Euler poligonal doğrusu tanımından,

$$\begin{aligned} \varphi_{n_k}(t) &= \varphi_{n_k}(t_j^k) + (t - t_j^k) \cdot f(t_j^k, \varphi_{n_k}(t_j^k)) \\ \varphi_{n_k}(t_0) &= x^0 \quad , t_j^k < t \leq t_{j+1}^k \end{aligned}$$

bulunur. Buradan türev alınırsa, her $]t_j^k, t_{j+1}^k[$ için

$$\varphi'_{n_k}(t) = f(t_j^k, \varphi_{n_k}(t_j^k))$$

elde edilir.

Bununla beraber, $h_\varepsilon = \frac{\alpha}{N(\varepsilon)} \leq \min\{\eta(\varepsilon), \frac{\eta(\varepsilon)}{M}\}$ bilgisi ve f fonksiyonunun düzgün sürekliliği kullanılarak, her $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için

$$\|g_{n_k}(t)\| \leq \frac{1}{n_k} \quad (2.9)$$

ifadesi elde edilir.

Bunlara ilaveten, g_{n_k} fonksiyonu sürekli olmamasına rağmen, $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığında Riemann integrallenebilir. Çünkü süreksizlik noktaları kümesi

$$\{t_j^k\}_{0 \leq j \leq N(n_k)}$$

sonludur. Dolayısıyla, (2.8) ifadesinin her iki tarafının da integrali alınırsa, her $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için,

$$\varphi_{n_k}(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{n_k}(s)) ds + \int_{t_0}^t g_{n_k}(s) ds$$

ifadesi elde edilir ve buradan $k \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t) = x^0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{n_k}(s)) ds + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t g_{n_k}(s) ds$$

bulunur.

Buradan f fonksiyonunun $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesinde düzgün sürekliliği, (φ_{n_k}) fonksiyon dizisinin $[t_0, t_0 + \alpha]$ üzerinde düzgün yakınsaklığı ve bu aralık üzerindeki her eleman için $|g_{n_k}(t)| \leq \frac{1}{n_k}$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\varphi(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

integral denkleminde ulaşılır. Bu ise, φ fonksiyonunun $[t_0, t_0 + \alpha]$ aralığı üzerinde (2.2) denkleminin bir çözümü olduğunu söyler.

Böylelikle ilk teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 2.21'un İspatı

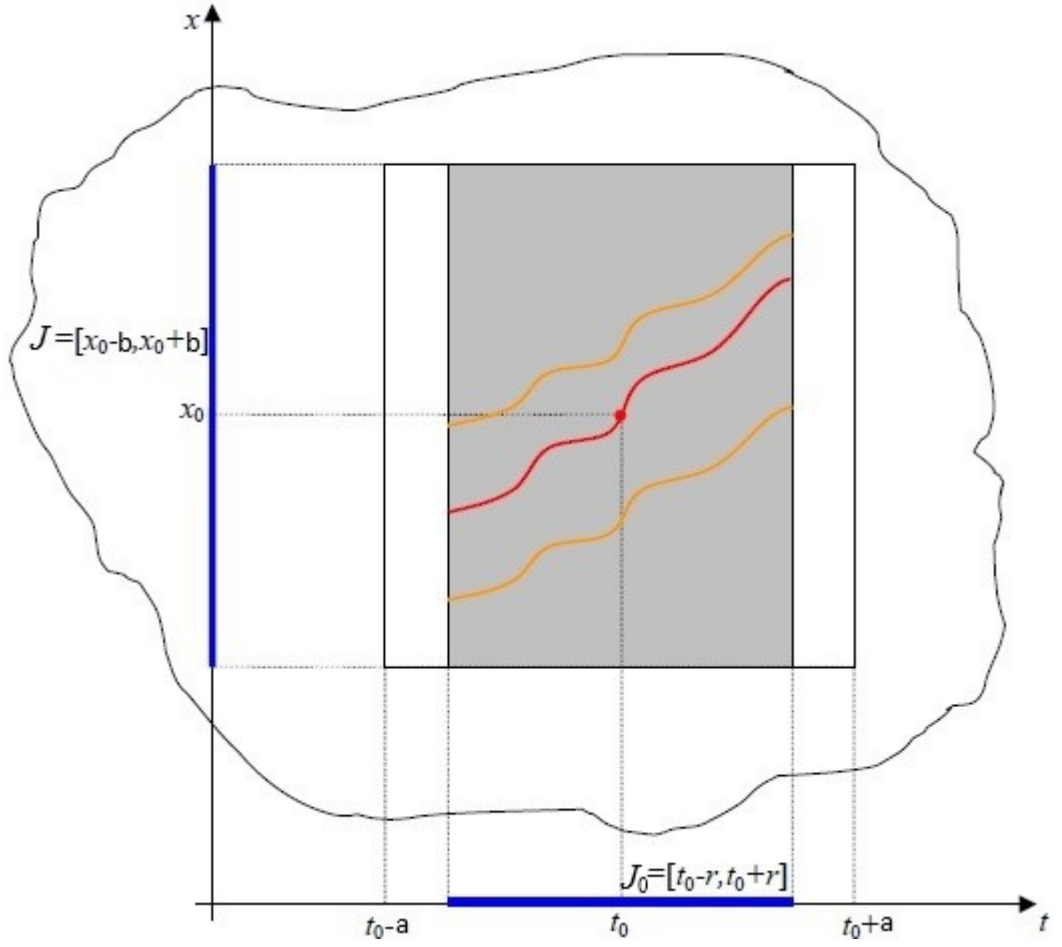
Herhangi bir $0 < r < \min \left\{ \frac{1}{2L}, a, \frac{b}{M} \right\}$ gerçekleyen r sayısı seçelim ve

$$\mathbf{X} = \left\{ x : B_r[t_0] \rightarrow B_b[x^0] : x \text{ süreklili} \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Notasyonda kolaylık açısından $B_r[t_0] = J_0$ ve $B_b[x^0] = J$ diyelim. Dikkat edilecek olursa, \mathbf{X} kümesi, $C(B_r[t_0])$ tam uzayının kapalı bir alt kümesi olduğundan düzgün yakınsaklık metriğine göre bir tam alt uzaydır. Şimdi, $T : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ fonksiyonunu

$$Tx(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

olacak şekilde tanımlayalım. $Tx(J_0) \subseteq J$ olduğunu ispatlayalım. Herhangi $t \in J_0$ için,



Şekil 2.1: $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $B_a[t_0] \times B_b[x_0]$ bölgesine kısıtlanışı için Cauchy probleminin (t_0, x_0) noktasından geçen integral eğrisinin bulunduğu bölge

$$\begin{aligned}
\|Tx(t) - x^0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \sup\{\|f(s, x(s))\| : s \in I, x \in J\} ds \\
&= \sup\{\|f(s, x(s))\| : s \in I, x \in J\} |t - t_0| \\
&= M|t - t_0| \leq Mr \leq M \frac{b}{M} = b
\end{aligned}$$

olur. Yani $\|Tx(t) - x^0\| \leq b$ bulunur. Buradan $Tx(J_0) \subseteq J$ elde edilir ve son olarak f fonksiyonu J_0 aralığında sürekli olduğundan dolayı Tx fonksiyonu da sürekli dir. Dolayısıyla her $x \in \mathbf{X}$ için $Tx \in \mathbf{X}$ gösterilmiş olur.

Şimdi T fonksiyonunun bir daralma olduğunu gösterelim. Herhangi $x, y \in \mathbf{X}$ ve $t \in J_0$ alalım. Tanımı gereği $x(t), y(t) \in J$ gerçekleşir ve

$$\begin{aligned}
\|Tx(t) - Ty(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)| ds \right\| \\
&\leq L \int_{t_0}^t \sup\{\|x(t) - y(t)\| : t \in J_0\} ds \\
&\leq L|t - t_0| \sup_{t \in J_0} \|x(t) - y(t)\| \leq Lr \sup_{t \in J_0} \|x(t) - y(t)\| < \frac{1}{2} \sup_{t \in J_0} \|x(t) - y(t)\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Banach Sabit Nokta Teoreminden, T fonksiyonunun $x \in \mathbf{X}$ olacak şekilde bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Böylece çözümün varlığı ve tekliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.22'nin İspatı

Herhangi bir $t \in B_\alpha[t_0]$ için $x^0(t) = x^0$ sabit fonksiyonu süreklidir ve grafiği $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesinde bulunur.

$$x^1(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x^0(s)) ds$$

fonksiyonu incelenirse,

$$\begin{aligned} \|x^1(t) - x^0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x^0(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x^0(s))\| ds \\ &\leq M|t - t_0| \leq M \frac{b}{M} = b \end{aligned}$$

olduğundan fonksiyonun grafiği $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesine aittir ve fonksiyon süreklidir.

Benzer şekilde

$$x^2(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x^1(s)) ds$$

şeklinde tanımlı $x^2(t)$ fonksiyonunun grafiği de $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesine aittir ve fonksiyon süreklidir. Bu yolla devam edilirse, her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$x^k(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x^{k-1}(s)) ds$$

fonksiyonunun grafiği de $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesindedir ve fonksiyon süreklidir. Böylece yukarıdaki şekilde tanımlı olan $(x^k(t))_k$ fonksiyonlar dizisi oluşturulur. Tümevarım yöntemi ile bu dizinin her bir teriminin $B_\alpha[t_0]$ kapalı yuvarında tanımlı, sürekli, grafiği (t_0, x^0) noktasından geçmekte ve bu fonksiyonların grafiklerinin $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesine ait olduğu görülür.

Şimdi herhangi $t \in B_\alpha[t_0]$ için,

$$\begin{aligned} \|x^{k+1}(t) - x^k(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x^k(s)) - f(s, x^{k-1}(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x^k(s)) - f(s, x^{k-1}(s))\| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|x^k(s) - x^{k-1}(s)\| ds \end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir.

İddia. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in B_\alpha[t_0]$ için,

$$\|x^{n+1} - x^n\| \leq b \frac{(L|t - t_0|)^n}{n!}$$

eşitsizliğin gerçeklendiğini tümevarım yöntemi ile gösterelim. (2.10) eşitsizliğinden, $n = 1$ için,

$$\|x^2 - x^1\| \leq bL|t - t_0|$$

bağıntısı sağlanır. Tümevarım hipotezi altında,

$$\begin{aligned} \|x^{n+2} - x^{n+1}\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x^{n+1}(s)) - f(s, x^n(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|x^{n+1}(s) - x^n(s)\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t Lb \frac{(L|s - t_0|)^n}{n!} ds \\ &\leq b \frac{L^{n+1}}{n!} \frac{(|t - t_0|)^{n+1}}{n+1} \\ &= b \frac{(L|t - t_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

sağlandığından, eşitsizlik her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = x^0 + (x^1 - x^0) + (x^2 - x^1) + \dots + (x^n - x^{n-1})$ olduğundan, yukarıda ispatlanan iddia kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|x^n\| &= \left\| x^0 + (x^1 - x^0) + (x^2 - x^1) + \dots + (x^n - x^{n-1}) \right\| \\ &\leq \|x^0\| + \|(x^1 - x^0)\| + \|(x^2 - x^1)\| + \dots + \|(x^n - x^{n-1})\| \\ &\leq \|x^0\| + b + \frac{bL\alpha}{1!} + \frac{b(L\alpha)^2}{2!} + \dots + \frac{b(L\alpha)^n}{n!} \\ &= \|x^0\| + b \left(1 + \frac{L\alpha}{1!} + \frac{(L\alpha)^2}{2!} + \dots + \frac{(L\alpha)^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^n}{n!} = e^{L\alpha}$ olduğundan sağ taraftaki kısmi toplamlar dizisi $\|x^0\| + b e^{L\alpha}$ sayısına yakınsar.

Buradan Weierstrass M.Testini kullanılırsa,

$$\|x^0 + (x^1 - x^0) + (x^2 - x^1) + \dots + (x^n - x^{n-1})\|$$

kısmi toplamlar dizisi $B_\alpha[t_0]$ yuvarı üzerinde bir x fonksiyonuna düzgün yakınsar. Uzay tam olduğundan, bu yuvar üzerinde $x^n \rightarrow x$ olacak şekilde düzgün yakınsamış olur. Buradan, $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sürekli fonksiyonlar dizisi $B_\alpha[t_0]$ üzerinde bir x fonksiyonuna düzgün yakınsadığından, x fonksiyonu bu aralıkta sürekli dir. Bunlara ilaveten, $(x^n(t))_n$ dizisi $B_\alpha[t_0]$ üzerinde x fonksiyonuna düzgün yakınsadığından,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall t \in B_\alpha[t_0] \|x^n(t) - x(t)\| < \varepsilon$$

olur. Buradan x fonksiyonunun grafiğinin $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesinde olduğu görülür. Çünkü,

$$\begin{aligned} \varepsilon > \|x^n(t) - x(t)\| &= \|x(t) - x^n(t) - x^0 + x^0\| \\ &\geq \left| \|x(t) - x^0\| - \|x^n(t) - x^0\| \right| \end{aligned}$$

olur ve

$$\|x(t) - x^0\| < \varepsilon + \|x^n(t) - x^0\| \leq \varepsilon + b$$

sağlanır. Yani, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|x(t) - x^0\| < \varepsilon + b$ gerçekleştiğinden istenen gösterilmiş olur. Dolayısıyla her $t \in B_\alpha[t_0]$ için ,

$$(t, x(t)), (t, x^n(t)) \in B_a[t_0] \times B_b[x^0] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

olduğundan, Lipschitz koşuluna göre

$$\|f(t, x^n(t)) - f(t, x(t))\| \leq L \|x^n(t) - x(t)\| \quad (2.11)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca dizinin düzgün yakınsamasından,

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall t \in B_\alpha[t_0] \|x^n(t) - x(t)\| < \frac{\varepsilon}{L}$$

bulunur ve (2.11) ifadesinden dolayı,

$$\exists N \forall n \geq N \forall t \in B_\alpha[t_0] \left\| f(t, x^n(t)) - f(t, x(t)) \right\| < \varepsilon$$

elde edilir.

Buradan ise, $(f(t, x^n(t)))_n$ sürekli fonksiyonlar dizisinin bu aralık üzerinde $f(t, x(t))$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı sonucuna ulaşılır. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t, x^n(t)) = f(t, x(t))$ olacak şekilde düzgün yakınsar. Böylece $f(t, x(t))$ fonksiyonu $B_\alpha[t_0]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Son olarak,

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x^{n-1}(s)) ds \right] \\ &= x^0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x^{n-1}(s)) ds \\ &= x^0 + \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, x^{n-1}(s)) ds = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır.

$f(t, x(t))$ fonksiyonu bulunan kapalı yuvar üzerinde sürekli olduğundan dolayı $x'(t) = f(t, x(t))$ elde edilir ve ayrıca $x(t_0) = x^0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds = x^0$ olduğundan teoremin varlık kısmı tamamlanır.

Teoremin teklik kısmına gelinirse, ilk kısımda varlığı ispatlanan $x(t)$ çözümü (2.2) probleminin bu kapalı yuvar üzerindeki tek özel çözümüdür. (2.2) probleminin başka bir $g(t)$ özel çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} g'(t) &= f(t, g(t)) \\ g(t_0) &= x^0 \end{aligned}$$

ifadesi sağlanır. Bu ifade integre edilirse

$$g(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds$$

olur. Ayrıca

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

olduğu bilindiğinden, herhangi bir $t \in B_\alpha[t_0]$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\begin{aligned} \|g(t) - x(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, g(s)) - f(s, x(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, g(s)) - f(s, x(s))\| ds . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Teoremin varlık kısmında $x(t)$ çözüm fonksiyonunun grafiğinin $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesinde olduğu ispatlandı. Aynı şekilde, $g(t)$ fonksiyonunun $B_\alpha[t_0]$ üzerinde sürekli ve grafiği $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesindedir. Bundan dolayı, her $t \in B_\alpha[t_0]$ için $(t, x(t))$, $(t, g(t)) \in B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ ifadesi sağlanır.

Buradan Lipschitz koşulu ve (2.12) eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\|g(t) - x(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|g(s) - x(s)\| ds . \quad (2.13)$$

g ve x fonksiyonları $t \in B_\alpha[t_0]$ kompakt kümesi üzerinde sürekli olduğundan,

$$D = \max \{ \|g(t) - x(t)\| : t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \} < \infty$$

ve buradan,

$$\|g(t) - x(t)\| \leq DL \left| \int_{t_0}^t ds \right| = DL|t - t_0| \quad (2.14)$$

bağıntısı bulunur.

(2.13) ifadesindeki integrant yerine (2.14) ifadesi uygulanırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned} \|g(t) - x(t)\| &\leq L \int_{t_0}^t \|g(s) - x(s)\| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t DL |s - t_0| ds \\ &= DL^2 \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = DL^2 \frac{|t - t_0|^2}{2!} \end{aligned}$$

Aynı şekilde en son bulunan eşitsizlik yine (2.13) ifadesine uygulanırsa,

$$\|g(t) - x(t)\| \leq DL^3 \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^2}{2!} ds = DL^3 \frac{|t - t_0|^3}{3!}$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilirse , her $t \in B_\alpha[t_0]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} \|g(t) - x(t)\| &\leq DL^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \\ &\leq \frac{DL^n \alpha^n}{n!} = D \frac{(L\alpha)^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan limite geçilirse, her $t \in B_\alpha[t_0]$ için $g(t) = x(t)$ elde edilir.

(2.2) probleminin çözümünün tek olduğunu göstermek için Önerme 2.6'da verilen Gronwall Lemmasından yararlanalım. Yukarıdaki (2.13) bağıntısı kullanılırsa,

$$\|g(t) - x(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|g(s) - x(s)\| ds$$

buradan,

$C = 0$ ve $z(t) = \|g(t) - x(t)\|$ olarak alınsın.

$$z(t) = \|g(t) - x(t)\| \leq 0 + L \int_{t_0}^t \|g(s) - x(s)\| ds$$

olmak üzere, her $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için

$$z(t) = \|g(t) - x(t)\| \leq 0 \cdot e^{L \cdot (t - t_0)} = 0$$

bulunur. Aynı şekile $t \in [t_0 - \alpha, t_0]$ için yapılırsa

$$z(t) = \|g(t) - x(t)\| \leq 0$$

bulunur. Dolayısıyla, her $t \in B_\alpha[t_0]$ için $g(t) = x(t)$ gerçekleşir.

Teorem 2.23'in İspatı

(H3) hipotezi sağlandığından, Önerme 2.17 kullanılırsa, (H2) hipotezi geçerli olacaktır. Dolayısıyla, bu teoremin ispatı Teorem 2.21 veya Teorem 2.22'den elde edilir.

Teorem 2.24'nin İspatı

- (a) Teorem 2.22'de çözümün tek olduğunu göstermek için kullanılan ispat ile elde edilir.
- (b) Önerme 2.17 ve (a) şikkının bir sonucudur.



3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, adi diferansiyel denklem sistemi için Cauchy problemi ile ilgilenilmiştir. Bu sistem ile ilgili klasik anlamda çözüm ve genelleştirilmiş anlamda çözüm kavramlarından, ölçü teorisinden, fonksiyonel analizden ve topolojinin bazı konularından yararlanılmıştır.

Teoremlerin ispatlarında, Banach sabit nokta teoremi, Arzelá-Ascoli teoremi, Picard yaklaşımları yöntemi ve Euler kırık doğruları yöntemi kullanılmıştır. Bunlara ek olarak, [7], [14] ve [20] kaynakları ile birlikte [6], [10], [12], [18], [21], [23], [27], [26], [28], [29], [30] ve [31] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tezin döküman haline getirilmesinde ise LateX adlı program kullanılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. CAUCHY PROBLEMİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ANLAMDA ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde (2.2) Cauchy Probleminin genelleştirilmiş anlamdaki çözümünü incelenecektir. Kontrol teorisi ve mühendislikte çok sık rastlanan mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı üzerinde genelleştirilmiş çözümün varlığı ve teklığı araştırılacaktır. Bunun için ilk kısımda teoremlerde yararlanılacak hipotezler verilecek, daha sonra çözümün varlığı ve teklığı ile ilgili teoremler ifade edilecektir. [14], [20] ve [21] kaynaklarında var olan teoremlerin farklı gözlem ve detaylı incelemeler ile ispatları verilecektir. Özel olarak Lipschitz koşulunu gerçekleyen çözümün varlığı ve teklığı ile ilgili bir sonuç elde edilecektir.

İkinci kısımda sırasıyla, (2.2) probleminde denklem sistemi yerine yüksek mertebeden bir diferansiyel denklemin söz konusu olduğu Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve teklığı verilecek ve Cauchy probleminin genelleştirilmiş bir hali incelenecektir. Son olarak, elde edilen sonuçların uygulandığı örnekler verilerek bazı gözlemler yapılacaktır.

$B_a[t_0] \subseteq I$ olmak üzere, $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ bölgesine kısıtlanışı için aşağıdaki hipotezleri göz önüne alalım.

- (G1) H.h. $t \in B_a[t_0]$ ve her $x \in B_b[x^0]$ için $x \mapsto f(t, x)$ fonksiyonu süreklidir.
- (G2) Herhangi bir $x \in B_b[x^0]$ ve h.h. $t \in B_a[t_0]$ için $t \mapsto f(t, x)$ fonksiyonu Lebesgue ölçülebilirdir.
- (G3) Her $x \in B_b[x^0]$ ve her $t \in B_a[t_0]$ için $\|f(t, x)\| \leq M(t)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $M : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu vardır.
- (G4) Her $x \in B_b[x^0]$ ve her $t \in B_a[t_0]$ için $\|f(t, x)\| \leq M$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.
- (G5) Herhangi bir $t \in B_a[t_0]$ için $f(t, \cdot)$ fonksiyonu, $B_b[x^0]$ üzerinde $\ell : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}$

Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu ile Lipschitz koşulunu sağlar. Bunun anlamı, öyle $\ell : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu vardır ki, herhangi iki $(t, x), (t, y) \in B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ için,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \ell(t)\|x - y\| \quad (4.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

(G6) Herhangi bir $t \in B_a[t_0]$ için $f(t, \cdot)$ fonksiyonu, $B_b[x^0]$ üzerinde $\ell : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu ile bir-yanlı Lipschitz koşulunu sağlar. Bunun anlamı, öyle $\ell : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu vardır ki, herhangi iki $(t, x), (t, y) \in B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ için,

$$(f(t, x) - f(t, y)) \cdot (x - y) \leq \ell(t)\|x - y\|^2 \quad (4.2)$$

eşitsizliği sağlanır (buradaki çarpım, iç çarpımdır).

Dikkat edilecek olursa, (G5) hipotezinin sağlanması durumunda (G6)'nın sağlandığı açıktır.

Lemma 4.1. [14] $f : B_a[t_0] \times B_b[x^0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (G1),(G2),(G3) hipotezlerini sağlasın ve $x : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu Lebesgue ölçülebilir olsun. Bu durumda $f(t, x(t))$ fonksiyonu Lebesgue integrallenebilirdir.

İspat. $x : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Sonuç 2.13 gereği, öyle bir $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ basit ve ölçülebilir fonksiyon dizisi vardır ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n(t) = x(t)$ olur. Böylece (G1) hipotezinden $f(t, x^n(t)) \rightarrow f(t, x(t))$ (h.h.) olur ve (G2) hipoteziden dolayı $f(t, x(t))$ fonksiyonu ölçülebilirdir. Son olarak, (G3) hipotezinden $f(t, x(t))$ fonksiyonu integrallenebilirdir.

Lemma 4.2. (G3) hipotezi sağlansın ve $t \in [t_0, t_0 + a]$ için $\Phi(t) = \int_{t_0}^t M(s) ds$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

(a) Φ fonksiyonu düzgün süreklidir.

(b) Φ fonksiyonu artandır.

(c) $\Phi(t_0 + r) \leq b$ olacak şekilde en az bir $0 < r \leq a$ sayısı vardır.

İspat. (a) $\Phi : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $t \in [t_0, t_0 + a]$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [t_0, t_0 + a]$ ve $t_n \rightarrow t$ için $\Phi(t_n) \rightarrow \Phi(t)$ olmasıdır.

Buradan herhangi bir $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [t_0, t_0 + a]$ için $t_n \rightarrow t$ olsun. $\Phi(t_n) \rightarrow \Phi(t)$ olduğunu, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_n} M(s) ds = \int_{t_0}^t M(s) ds$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_n} M(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int M \chi_{[t_0, t_n]}$$

olur.

(G3) hipotezi gereği, $M \in L^1$ olduğundan $|M| \in L^1$ olur. Dolayısıyla

$$\left| \chi_{[t_0, t_n]}(s) M(s) \right| \leq |M(s)|$$

olduğu da düşünülürse, Teorem 2.14'den aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_n} M(s) ds = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[t_0, t_n]} M.$$

Burada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[t_0, t_n]}(s) = \chi_{[t_0, t]}(s)$$

eşitliği sağlanır sağlanır. Gösterelim.

(i) $t_0 \leq s < t$ için ise,

$t_0 \leq s < t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ demektir, yani öyle bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N_1$ için $s < t_n$ olur. Buradan, her $n \geq N_1$ için $\chi_{[t_0, t_n]}(s) = 1$ bulunur.

(ii) $s > t$ için ise,

$s > t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ demektir, yani öyle bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N_2$ için $s > t_n$ olur. Buradan, her $n \geq N_2$ için $\chi_{[t_0, t_n]}(s) = 0$ bulunur.

(iii) Ayrıca $\{t\}$ tek nokta kümesinin ölçüsü sıfırdır.

Yukarıda elde edilenlerden,

$$\mathcal{X}_{[t_0, t_n]} \longrightarrow \mathcal{X}_{[t_0, t]} \quad h.h.$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_n} M(s) ds &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_{[t_0, t_n]} M \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{X}_{[t_0, t]} M \\ &= \int_{t_0}^t M(s) ds \end{aligned}$$

sonucuna ulaşıp, süreklilik gösterilmiş olur. Φ fonksiyonu kompakt bir küme üzerinde sürekli olduğundan, bu küme üzerinde düzgün süreklidir. Dolayısıyla (a) şıkkının ispatı tamamlanır.

(b) $t_1 \leq t_2$ olacak şekilde herhangi iki $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + a]$ için $\Phi(t_1) \leq \Phi(t_2)$ gerçekleşir.

Çünkü,

$$\int_{t_0}^{t_1} M(s) ds - \int_{t_0}^{t_2} M(s) ds = - \left(\int_{t_1}^{t_2} M(s) ds \right) \leq 0$$

gerçeklenir ve istenen gösterilmiş olur.

(c) Φ fonksiyonu $[t_0, t_0 + a]$ üzerinde sürekli olduğundan bu aralık üzerinde düzgün süreklidir. Dolayısıyla, düzgün süreklilik tanımında b pozitif sayısına karşılık gelen pozitif sayı δ olmak üzere, $r = \min\{a, \frac{\delta}{2}\}$ alalım. Böylece $|t_0 + r - t_0| < \delta$ olduğundan $\Phi(t_0 + r) < b$ gerçekleşir.

Şimdi teoremleri ifade edelim.

Teorem 4.3. [14] $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $[t_0, t_0 + a] \times B_b[x^0]$ kümesi üzerine kısıtlaması (G1),(G2) ve (G3) hipotezlerini sağlasın ve $t \in [t_0, t_0 + a]$ için $\Phi(t) = \int_{t_0}^t M(s) ds$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda (2.2) probleminin f fonksiyonunun uygun bir kısıtlaması için mutlak sürekli bir çözümü vardır.

Teorem 4.4. Teorem 4.3'ün hipotezleri ve (G5) hipotezi gerçekleşsin. Bu durumda, (2.2) problemini sağlayan çözüm tektir.

Teorem 4.5. Teorem 4.3'ün hipotezleri ve (G6) hipotezi gerçekleşsin. Bu durumda, (2.2) problemini sağlayan çözüm tektir.

Teorem 4.6. Teorem 4.3'de (G3) hipotezi yerine (G4) hipotezi alınır, özel olarak Lipschitz koşulunu gerçekleyen çözümün varlığı elde edilmiş olur.

Teoremlerin İspatları

Teorem 4.3'ün İspatı

Lemma 4.2'deki gibi belirlenen bir r pozitif sayısı ve her $k \geq 1$ doğal sayısı için $h_k = rk^{-1}$ alalım.

$$t_0 + i h_k \leq t \leq t_0 + (i + 1) h_k \quad i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$$

aralıkları üzerinde, $t \leq t_0$ için $x^k(t) = x^0$ kabul ederek iterasyon ile yaklaşık bir çözüm inşa edelim,

$$x^k(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x^k(s-h)) ds \quad t_0 < t \leq t_0 + r. \quad (4.3)$$

Bu integral vardır ve Lemma 4.2'den Φ artan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \|x^k(t) - x^0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x^k(s-h)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x^k(s-h))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t M(s) ds = \Phi(t) \leq \Phi(t_0 + r) \leq b \end{aligned}$$

elde edilir, yani $\|x^k(t) - x^0\| \leq b$ bulunur.

Herhangi $\alpha, \beta \in [t_0, t_0 + r]$ alalım.

$$\|x^k(\beta) - x^k(\alpha)\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} M(s) ds = |\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)| \quad (4.4)$$

olur. Yine Lemma 4.2'den Φ fonksiyonu $[t_0, t_0 + r]$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \alpha, \beta \in [t_0, t_0 + r] \quad |\beta - \alpha| < \delta \quad \text{ise} \quad \|x^k(\beta) - x^k(\alpha)\| < \varepsilon$$

olur. Yani her $k \in \mathbb{N}^*$ için $(x^k)_k$ fonksiyonlar ailesi eş süreklidir.

Şimdi bu ailenin düzgün sınırlı olduğunu gösterelim. (4.4) eşitsizliğinde $\alpha = t_0 \in [t_0, t_0 + r]$ alınır, herhangi $\beta \in [t_0, t_0 + r]$ için

$$\begin{aligned} \|x^k(\beta) - x^0\| &\leq |\Phi(\beta) - x^0| \leq |\Phi(\beta)| + \|x^0\| = \Phi(\beta) + \|x^0\| \\ &\leq \Phi(t_0 + r) + \|x^0\| \leq b + \|x^0\| \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $(x^k)_k$ fonksiyonlar ailesi $[t_0, t_0 + r]$ üzerinde düzgün sınırlı olur. Böylece Arzelà-Ascoli teoreminden $(x^k)_k$ ailesinin düzgün yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt diziyeye $(x^{k_p})_p$ ve bu dizinin yakınsadığı noktaya x diyelim.

Yukarıda yapılanlara ilaveten,

$$\|x^{k_p}(s-h) - x(s)\| \leq \|x^{k_p}(s-h) - x^{k_p}(s)\| + \|x^{k_p}(s) - x(s)\|$$

olarak yazılabilir. Bu eşitsizlik dikkatle incelendiğinde, $(x^k)_k$ ailesinin eş sürekliliği ve her $k \in \mathbb{N}^*$ için $h = \frac{r}{k}$ olduğu göz önüne alınır, $h < \delta$ için $\|x^{k_p}(s-h) - x^{k_p}(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve bu alt dizinin düzgün yakınsak olmasından $\|x^{k_p}(s) - x(s)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ifadesi elde edilir. Buradan,

$$\|x^{k_p}(s-h) - x(s)\| < \varepsilon$$

bulunur. Yani $x^{k_p}(s-h)$ dizisi $x(s)$ noktasına yakınsar.

$f(t, x)$ fonksiyonunun ikinci değişkene göre sürekliliğinden ve $\|f(t, x)\| \leq M(t)$ olmasından dolayı (4.3) eşitliğinde limite geçilirse,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} x^{k_p}(t) &= x^0 + \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x^{k_p}(s-h)) ds \\ &= x^0 + \int_{t_0}^t \lim_{p \rightarrow \infty} f(s, x^{k_p}(s-h)) ds \\ &= x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \end{aligned}$$

bulunur. Bunun anlamı,

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad t_0 < t \leq t_0 + r$$

olmasıdır. Teorem 2.10'dan dolayı, x fonksiyonu mutlak süreklidir. Böylece varlık teoreminin ispatı tamamlanır.

Dikkat edilecek olursa, Φ fonksiyonu artan olduğundan (2.2) probleminin gerçekleştiği sonsuz sayıda çözüm aralığı bulunmuş olur.

Teorem 4.4'ün İspatı

$t_0 \leq t$ için problemin $x(t)$ ve $y(t)$ gibi iki çözümü olsun.

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ve $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ olmak üzere,

$$z(t) = \|x(t) - y(t)\|^2 = \sum_{k=1}^n [x_k(t) - y_k(t)]^2 \geq 0$$

denilsin. Buradan, her iki tarafın da türevi alınırsa

$$\begin{aligned} z'(t) &= \sum_{k=1}^n 2[x'_k(t) - y'_k(t)] [x_k(t) - y_k(t)] \\ &= 2[x'(t) - y'(t)] [x(t) - y(t)] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, Shwarz eşitsizliği ve teorem hipotezi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} z'(t) &\leq \|z'(t)\| = 2 \left\| [x'(t) - y'(t)] \cdot [x(t) - y(t)] \right\| \\ &\leq \left\| x'(t) - y'(t) \right\| \cdot \left\| x(t) - y(t) \right\| \\ &\leq 2\ell(t) \left\| x(t) - y(t) \right\| = 2\ell(t)z(t) \end{aligned}$$

bulunur. Yani $z'(t) \leq 2\ell(t)z(t)$ elde edilir ve bu ifade tam diferansiyele tamamlanarak,

$L(t) = \int_{t_0}^t \ell(s) ds$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} \left(z(t)e^{-2L(t)} \right) \leq 0 \quad h.h.$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla $z(t)e^{-2L(t)}$ azalan bir fonksiyondur. Böylece $t \geq t_0$ için $z(t) = 0$ bulunur.

$t < t_0$ için,

$$-z'(t) \leq \|z'(t)\| \leq 2z(t)\ell(t)$$

sağlanır. Buradan

$$\frac{d}{dt} \left(z(t)e^{2L(t)} \right) \geq 0 \quad h.h.$$

eşitsizliği gerçekleşir. Yani $z(t)e^{2L(t)}$ fonksiyonu artandır. Böylece $t < t_0$ için $z(t) = x(t) - y(t) = 0$ bulunur. Dolayısıyla çözüm varsa tek olmak zorundadır.

Teorem 4.5'nin İspatı

$t_0 \leq t$ için problemin $x(t)$ ve $y(t)$ gibi iki çözümü olsun ve $z(t) = x(t) - y(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\|z\|^2 = z \cdot z$ olduğundan,

$$\frac{d(\|z(t)\|^2)}{dt} = 2z \frac{dz}{dt} = 2(f(t,x) - f(t,y)) \cdot (x - y) \quad h.h.$$

bulunur. Buradan (4.2) eşitsizliği göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\frac{d\|z\|^2}{dt} \leq 2\ell(t)\|z\|^2 \quad h.h.$$

ve dolayısıyla,

$$\frac{d}{dt} \left(\|z\|^2 e^{-2L(t)} \right) \leq 0 \quad h.h.$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Mutlak sürekli $\|z\|^2 e^{-2L(t)}$ fonksiyonu azalan olduğundan $t_0 \leq t$ için $\|z\|^2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla $x(t) = y(t)$ elde edilir. (G5) hipotezi altında $t < t_0$ durumu için, yukarıda yapılanlar t yerine $-t$ alınarak yapılırsa yine teklik ispatlanmış olur.

Teorem 4.6'in İspatı

Uygun hipotezler altında, teoremlerde varlığı garanti altına alınan mutlak sürekli bir $\hat{x} : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ çözümü verilsin. (G4) hipotezi altında bu çözümün Lipschitz koşulunu sağladığını göstereyim. Bunun için herhangi $t_1, t_2 \in B_a[t_0]$ alalım.

(i) $t_0 < t_1 < t_2$ ise,

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}(t_2) - \hat{x}(t_1)\| &\leq \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, \hat{x}(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^{t_1} f(s, \hat{x}(s)) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_0}^{t_2} f(s, \hat{x}(s)) ds - \int_{t_0}^{t_1} f(s, \hat{x}(s)) ds \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \hat{x}(s)) ds \right\| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, \hat{x}(s))\| ds \\
&\leq M |t_2 - t_1|
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Benzer şekilde, $t_1 < t_0 < t_2$ ise,

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}(t_2) - \hat{x}(t_1)\| &\leq \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, \hat{x}(s)) ds - \left(x_0 - \int_{t_1}^{t_0} f(s, \hat{x}(s)) ds \right) \right\| \\
&\leq M |t_2 - t_1|
\end{aligned}$$

olur. Diğer durumlar da benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.7. (i) $f : [t_0 - a, t_0] \times B_b[x^0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu (G1),(G2) ve (G3)(veya (G4)) hipotezlerini sağlasın. Bu durumda $r \leq a$ ve $|\Phi(t_0 - r)| < b$ olmak üzere, $[t_0 - r, t_0]$ aralığı üzerinde (2.2) probleminin mutlak sürekli(veya Lipschitz koşulunu sağlayan) bir çözümü vardır. Ek olarak, (G5) hipotezi (veya (G6) hipotezi) gerçekleşiyor ise bu çözüm tektir.

(ii) f fonksiyonu $B_a[t_0] \times B_b[x^0]$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde (G1),(G2) ve (G3)(veya (G4)) hipotezlerini sağlasın. Bu durumda öyle bir $r^* > 0$ sayısı için $B_{r^*}[t_0]$ üzerinde (2.2) probleminin mutlak sürekli(veya Lipschitz koşulunu sağlayan) bir çözümü vardır.

4.1.1. Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler İle İlgili Teoremler

(2.2) probleminde 1.mertebeden diferansiyel denklem sistemi yerine yüksek mertebeden diferansiyel denklemin söz konusu olduğu

$$\begin{aligned}
y^{(n)}(t) &= g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\
y(t_0) &= y_0^0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}^0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Cauchy problemi verilsin. Burada $y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere genelleştirilmiş çözüm kavramı ile ilgilenilecektir. Dolayısıyla problemin bir çözümü, hemen her $t \in I_0 \subseteq I$ için n .mertebeden türevi var olan, (4.5)'de türevle ilgili eşitliği ve başlangıç koşulunu sağlayan mutlak sürekli $y : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu şeklinde olacaktır. Şimdi $g : B_a[t_0] \times B_b[x_{i-1}^0] \rightarrow \mathbb{R}$ için aşağıdaki hipotezler göz önüne alınsın.

(Y1) H.h. $t \in B_a[t_0]$ ve her $y \in B_b[x_{i-1}^0], i = 1, \dots, n$ için $y \mapsto g(t, y)$ fonksiyonu süreklidir.

(Y2) Herhangi $y \in B_b[x_{i-1}^0], i = 1, \dots, n$ ve h.h. $t \in B_a[t_0]$ için $t \mapsto g(t, y)$ fonksiyonu Lebesgue ölçülebilirdir.

(Y3) H.h. $t \in B_a[t_0]$ için $|g(t, x)| \leq h$ koşulunu sağlayacak şekilde bir $h > 0$ sayısı vardır.

(Y4) Herhangi $t \in B_a[t_0]$ için $g(t, \cdot)$ fonksiyonu, $B_b[x_{i-1}^0]$ üzerinde $L : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu ile Lipschitz koşulunu sağlar.

(Y5) Herhangi $t \in B_a[t_0]$ için $g(t, \cdot)$ fonksiyonu, $B_b[x_{i-1}^0]$ üzerinde $L : B_a[t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu ile bir-yanlı Lipschitz koşulunu sağlar.

(Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ şeklindedir.)

Teorem 4.8. g fonksiyonu $B_a[t_0] \times B_b[x_{i-1}^0]$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde (Y1),(Y2) ve (Y3) hipotezlerini sağlasın. Bu durumda öyle bir $0 < r \leq a$ sayısı için $B_r[t_0]$ üzerinde (4.5) probleminin Lipschitz koşulunu sağlayan bir çözümü vardır.

İspat. $x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}$ denirse, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_n' &= g(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_i(t_0) &= x_{i-1}^0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Böylece (4.5) problemi, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ve $x(t_0) = x^0 = (x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ için,

$$\begin{aligned} x_i' &= x_{i+1} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , i = 1, 2, \dots, n-1 \\ g(t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

olmak üzere (2.2) problemi şeklinde ifade edilmiş olur. Teoremin hipotezleri ile birlikte, $i = 1, 2, \dots, n$ için f_i bileşen fonksiyonlarının tanımına dikkat edilirse, $f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_n(t, x))$ fonksiyonu için (G1) ve (G2) hipotezlerinin sağlanacağı kolayca görülür. Bununla birlikte, $\beta = \max \{|x_1^0 - b|, |x_1^0 + b|, \dots, |x_{n-1}^0 - b|, |x_{n-1}^0 + b|\}$ alınıp $M(t) = (n-1)\beta + h$ olacak şekilde belirlenirse (G3) hipotezi (ve (G4)) de gerçekleşir. Buradan ise Teorem 4.3 ve Sonuç 4.7 kullanılırsa istenen elde edilir.

Teorem 4.9. Yukarıdaki teoremin koşullarına ek olarak, (Y4) hipotezi de gerçekleşiyor ise (4.5) probleminin çözümü tektir.

İspat. (Y4) hipotezi sağlansın. Teorem 4.3, Teorem 4.4 ve Sonuç 4.7 ile birlikte $\ell = L + 1$ olarak seçilirse (G5) hipotezi gerçekleşir. Böylece çözümün tekliliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.10. Teorem 4.8 koşullarına ek olarak, (Y5) hipotezi gerçekleşiyor ise (4.5) probleminin çözümü tektir.

İspat. (Y5) hipotezi sağlansın. Teorem 4.9 ve Teorem 4.5'den istenen kolayca elde edilir.

4.1.2. Cauchy Probleminin Genelleştirilmiş Bir Hali

Bu bölümde, önceki bölümlerden farklı olarak özel bir normlu uzay üzerinde (2.2) probleminin çözümünün varlığı ve tekliliği araştırılacaktır. Öncelikle uzay ile ilgili tanımlar ve bazı özelliklerinden bahsedilecektir. Daha sonra ana teorem ve sonuçlarda kullanılacak olan önerme ve lemmalar ifade edilip ispatları yapılacaktır. Bu bölümde esas olarak [24] çalışmasından yararlanılmıştır.

Tanım 4.11. $0 < \alpha \leq 1$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Herhangi $u \in C(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ alınsın.

$u \in C_{x,\alpha}(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki supremum değerinin sonlu olmasıdır,

$$|u|_{x,\alpha} = \sup \left\{ \frac{\|u(t) - x\|}{|t - t_0|^\alpha} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < \infty.$$

Notasyonda kolaylık açısından, $C_{x,\alpha}(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n) = C_{x,\alpha}$ olarak yazılacaktır. Şimdi, bu tanımla ilgili aşağıdaki incelemeler yapılsın.

Önerme 4.12. $|u|_{x,\alpha} < \infty$ ise $u(0) = x$ gerçekleşir ve u fonksiyonu, $t = 0$ için, literatürde sıklıkla karşılaşılan bir-yanlı Hölder koşulunu gerçekler.

İspat. Herhangi $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ için, $\frac{\|u(t)-x\|}{|t-t_0|^\alpha} \leq |u|_{x,\alpha}$ sağlanır. Burada, her $n \in \mathbb{N}$ için, $t = \frac{t_0+r}{n}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \|u(\frac{t_0+r}{n}) - x\| &\leq (\frac{t_0+r}{n})^\alpha |u|_{x,\alpha} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|u(\frac{t_0+r}{n}) - x\| &\leq 0 \end{aligned}$$

bulunur. u sürekli bir fonksiyon olduğundan istenen elde edilir.

Önerme 4.13. $x = 0$ olsun. Bu durumda $C_{0,\alpha}(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ bir vektör uzayıdır ve

$$|u|_{0,\alpha} = \sup \left\{ \frac{\|u(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < \infty$$

bir normdur.

İspat. (i) Herhangi $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ için, $\frac{\|u(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} \geq 0$ olduğundan $|u|_{0,\alpha} \geq 0$ olur.

(ii) $|u|_{0,\alpha} = 0$ olsun. Bu durumda, her $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ için, $\frac{\|u(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} \leq 0$ olur ve buradan $u = 0$ bulunur. Tersine, her $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ için, $u = 0$ olsun. Bu durumda, $|u|_{0,\alpha} = 0$ olur.

(iii) $u \in C_{0,\alpha}(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ ve herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ alalım.

$$\begin{aligned} |\lambda u|_{0,\alpha} &= \sup \left\{ \frac{\|\lambda u(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{|\lambda| \|u(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \\ &= |\lambda| \sup \left\{ \frac{\|u(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \\ &= |\lambda| |u|_{0,\alpha} \end{aligned}$$

(iv) $|u+v|_{0,\alpha} \leq |u|_{0,\alpha} + |v|_{0,\alpha}$ olduğunu gösterelim. Herhangi $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ alınsın.

$$\begin{aligned} \frac{\|u(t)+v(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} &\leq \frac{\|u(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} + \frac{\|v(t)\|}{|t-t_0|^\alpha} \\ &\leq |u|_{0,\alpha} + |v|_{0,\alpha} \end{aligned}$$

bulunur ve $u, v \in C_{0,\alpha}$ olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 4.14. Herhangi $x \in \mathbb{R}^n$ için, bu uzay üzerinde bir metrik tanımlanmak istenirse,

$$d(u, v) = |u - v|_{0, \alpha}$$

olacak şekilde yazılır. Bu metriğe göre, $C_{x, \alpha}(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ uzayı tam metrik uzaydır.

İspat. Herhangi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_{x, \alpha}$ Cauchy dizisi alınsın. Tanımı gereği, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ olduğundan ve $C(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ uzayı tam olduğundan, öyle bir $u \in C(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu vardır ki, $u_n \rightarrow u$ olacak şekilde düzgün yakınsar. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq \|u_n(t) - u_m(t)\| + \|u_m(t) - u(t)\| \\ &\leq \|u_n - u_m\|_{sup} + \|u_m - u\|_{sup} \end{aligned}$$

olup, $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\frac{\|u_n(t) - u(t)\|}{|t - t_0|^\alpha} \leq \frac{\|u_n - u_m\|_{sup}}{|t - t_0|^\alpha} + \frac{\|u_m - u\|_{sup}}{|t - t_0|^\alpha}. \quad (4.6)$$

Alınan dizinin Cauchy dizisi olması, düzgün yakınsaması ve (4.6) eşitsizliğinden dolayı, $C_{x, \alpha}$ üzerindeki metriğe göre $u_n \rightarrow u$ bulunur.

$u \in C(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için, $u \in C_{x, \alpha}$ gerçekleşir. Çünkü, $u_n \rightarrow u$ olduğundan ve $C_{x, \alpha}$ uzayının tanımından,

$$\begin{aligned} \frac{\|u(t) - x\|}{|t - t_0|^\alpha} &= \frac{\|u(t) - u_n(t) + u_n(t) - x\|}{|t - t_0|^\alpha} \\ &\leq \frac{\|u_n(t) - x\|}{|t - t_0|^\alpha} + \frac{\|u_n(t) - u(t)\|}{|t - t_0|^\alpha} \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|u_n(t) - x\|}{|t - t_0|^\alpha} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} + |u_n - u|_{0, \alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\sup \left\{ \frac{\|u(t) - x\|}{|t - t_0|^\alpha} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < \infty$$

ifadesi sağlanmış olur.

Teorem 4.15. $\theta < \sigma$ ise $C_{x,\sigma} \subseteq C_{x,\theta}$ olur ve $|u|_{x,\theta} \leq (t_0 + r)^{\sigma-\theta} |u|_{x,\sigma}$ gerçektir.

İspat. $\theta < \sigma$ ise $C_{x,\sigma} \subseteq C_{x,\theta}$ olduğunu gösterelim. Herhangi $u \in C_{x,\sigma}$ alınsın.

$$\begin{aligned} \frac{\|u(t) - x\|}{|t - t_0|^\theta} &\leq \frac{|t - t_0|^\sigma}{|t - t_0|^\theta} \frac{\|u(t) - x\|}{|t - t_0|^\sigma} \\ &\leq t \sup \left\{ \frac{\|u(t) - x\|}{|t - t_0|^\sigma} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \\ &\leq (t_0 + r) \sup \left\{ \frac{\|u(t) - x\|}{|t - t_0|^\sigma} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < \infty \end{aligned}$$

olduğundan, $u \in C_{x,\theta}$ bulunur. Şimdi, $\theta < \sigma$ olmak üzere, $|u|_{x,\theta} \leq (t_0 + r)^{\sigma-\theta} |u|_{x,\sigma}$ eşitsizliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} |u|_{x,\theta} &= \sup \left\{ \frac{\|u(t) - x\|}{|t - t_0|^\theta} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \\ &= \frac{1}{(t_0 + r)^\theta} \sup \left\{ \frac{\|u(t) - x\|}{\left(\frac{|t - t_0|}{t_0 + r}\right)^\theta} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \\ &= (t_0 + r)^{\sigma-\theta} |u|_{x,\sigma} \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.16. $u \in C^1(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ ve $u(0) = 0$ olsun. Bu durumda, $u \in C_{0,1}(B_r[t_0] \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ ve $|u|_{0,1} \leq \|u\|_{C^1}$ sağlanır.

İspat. $u \in \{f : B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n : f' \text{ süreklil} \}$ ve $u(0) = 0$ olsun. Ortalama değer teoreminden, öyle bir $c \in B_r(t_0) \setminus \{t_0\}$ vardır ki,

$$u'(c) = \frac{u(t_0 + r) - u(0)}{t_0 + r - 0} = \frac{u(t_0 + r)}{t_0 + r}$$

sağlanır.

$\|u'(c)\| = \frac{\|u(t_0 + r)\|}{t_0 + r} \leq \sup\{\|u'(t)\| : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}\}$ ve $\sup\{\|u(t)\| : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}\} \geq 0$ olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\|u(t_0 + r)\|}{t_0 + r} &\leq \sup\{\|u'(t)\| : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}\} + \sup\{\|u(t)\| : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}\} \\ &= \|u\|_{C^1} \end{aligned}$$

Buradan, $\|u\|_{C^1} \leq \|u\|_{C^1}$ bulunur ve $\|u\|_{C^1} < \infty$ olduğundan $u \in C_{0,1}$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.17. (2.2) problemi göz önüne alınsın. $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $B_r[t_0] \times \mathbb{R}^n$ kümesi üzerine kısıtlaması (G1),(G2) ve (G3) hipotezlerini sağlasın. Bunlara ek olarak, $\varphi : B_r(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu için, $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ olmak üzere,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \frac{\varphi(t)}{|t-t_0|} \|x-y\| \quad (4.7)$$

ve

$$\sup \left\{ \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < 1 \quad (4.8)$$

koşulları gerçeklensin. Bu durumda (2.2) probleminin $C_{x^0,1}$ sınıfında çözümü varsa tektir.

İspat. x ve y problemin $C_{x^0,1}$ sınıfındaki iki çözümü olsun. Bu durumda $x-y \in C_{0,1}$ sağlanır. Çünkü,

$$\begin{aligned} \frac{\|x-y\|}{|t-t_0|} &\leq \frac{\|x(t)-x^0\|}{|t-t_0|} + \frac{\|y(t)-x^0\|}{|t-t_0|} \\ &\leq \sup_t \frac{\|x(t)-x^0\|}{|t-t_0|} + \sup_t \frac{\|y(t)-x^0\|}{|t-t_0|} \end{aligned}$$

bulunur ve $x, y \in C_{x^0,1}$ olduğundan istenen elde edilir.

Varsayımdan, h.h. $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ için, $x' - y' = f(t, x(t)) - f(t, y(t))$ ve $x(t_0) - y(t_0) = 0$ olacak şekilde yazılır. Bu eşitlik integre edilirse,

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t \left(f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \right) ds$$

bulunur ve (4.7) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \frac{\varphi(s)}{|s - t_0|} \|x(s) - y(s)\| ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \sup \left\{ \frac{\|x(z) - y(z)\|}{|z - t_0|} : z \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \varphi(s) ds \\
&= |x - y|_{0,1} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds
\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Şimdi bu bağıntının her iki tarafı da $|t - t_0|$ değerine bölünürse,

$$\begin{aligned}
\frac{\|x(t) - y(t)\|}{|t - t_0|} &\leq |x - y|_{0,1} \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \\
&\leq |x - y|_{0,1} \sup \left\{ \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$|x - y|_{0,1} \leq |x - y|_{0,1} \sup \left\{ \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\}$$

olur ve (4.8) hipotezinden, $|x - y|_{0,1} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $x = y$ olduğundan çözüm tektir.

Teorem 4.18. (2.2) problemi göz önüne alınsın. $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $B_r[t_0] \times \mathbb{R}^n$ kümesi üzerine kısıtlaması (G1), (G2) ve (G3) hipotezlerini sağlasın. Bunlara ek olarak, $\varphi : B_r(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu için, $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ olmak üzere,

$$(f(t, x) - f(t, y)) (x - y) \leq \frac{\varphi(t)}{|t - t_0|} \|x - y\|^2 \quad (4.9)$$

ve

$$\sup \left\{ \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

koşulları gerçekleştirilsin. Bu durumda (2.2) probleminin $C_{x^0, \frac{1}{2}}$ sınıfında çözümü varsa tektir.

İspat. x ve y problemin $C_{x^0, \frac{1}{2}}$ sınıfındaki iki çözümü olsun. Bu durumda, önceki teoremden olduğu gibi $x - y \in C_{0, \frac{1}{2}}$ sağlanır.

$$\begin{aligned}
\frac{\|(x(t) - y(t))^2\|}{|t - t_0|} &\leq \frac{\|x(t) - y(t)\| \|x(t) - y(t)\|}{|t - t_0|^{\frac{1}{2}} |t - t_0|^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \sup_t \frac{\|x(t) - y(t)\|}{|t - t_0|^{\frac{1}{2}}} \sup_t \frac{\|x(t) - y(t)\|}{|t - t_0|^{\frac{1}{2}}} \\
&= |x - y|_{0, \frac{1}{2}} |x - y|_{0, \frac{1}{2}} = |x - y|_{0, \frac{1}{2}}^2 < \infty
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\sup \left\{ \frac{\|(x - y)^2(t)\|}{|t - t_0|} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < \infty$$

ifadesine ve dolayısıyla, $(x - y)^2 = |x - y|^2 \in C_{0,1}$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi, teoremin (4.9) hipotezi yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((x - y)^2) &= (f(t, x) - f(t, y)) (x - y) \\
&\leq \frac{\varphi(t)}{|t - t_0|} (x - y)^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik integre edilirse,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|x(t) - y(t)\|^2 &\leq \int_{t_0}^t \frac{\|x(s) - y(s)\|^2}{|s - t_0|} \varphi(s) ds \\
&\leq \sup \left\{ \frac{\|x(z) - y(z)\|^2}{|z - t_0|} : z \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, eşitsizliğin her tarafı $|t - t_0|$ değerine bölünüp, $C_{0,1}$ uzayının tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\|x(t) - y(t)\|^2}{|t - t_0|} &\leq \sup \left\{ \frac{\|x(z) - y(z)\|^2}{|z - t_0|} : z \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \\
&\leq |(x - y)^2|_{0,1} \sup \left\{ \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\}
\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Yani aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\frac{1}{2} |(x-y)^2|_{0,1} \leq |(x-y)^2|_{0,1} \sup \left\{ \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\}.$$

Buradan, (4.10) yardımıyla $|(x-y)^2|_{0,1} = 0$ elde edilir ve $x = y$ olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 4.19. (2.2) problemi göz önüne alınsın. $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun $B_r[t_0] \times \mathbb{R}^n$ kümesi üzerine kısıtlaması (G1),(G2) ve (G3) hipotezlerini sağlasın. Bunlara ek olarak, $\varphi : B_r(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu için, $t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\}$ olmak üzere,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \frac{\varphi(t)}{|t-t_0|} \|x-y\| \quad (4.11)$$

$$\sup \left\{ \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < 1 \quad (4.12)$$

koşulları sağlansın. Bu durumda,

$$\sup \left\{ \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s,x^0)\| ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < \infty \quad (4.13)$$

ise, problemin $C_{x^0,1}$ sınıfında çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

İspat. (2.2) problemi $x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s)) ds$ olacak şekilde ifade edilebilir. Burada $U(x) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s)) ds$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $U : C_{x^0,1} \rightarrow C_{x^0,1}$ bir fonksiyondur ve (4.11) hipotezi altında bir daralmadır. Öncelikle bunun bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{\|U(x)(t) - x^0\|}{|t-t_0|} &= \left\| \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t f(s,x(s)) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s,x(s))\| ds \\ &\leq \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s,x(s)) - f(s,x^0)\| ds + \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s,x^0)\| ds \\ &\leq \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \frac{\varphi(s)}{|s-t_0|} \|x(s) - x^0\| ds + \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s,x^0)\| ds \\ &\leq \sup_z \frac{\|x(z) - x^0\|}{|z-t_0|} \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds + \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s,x^0)\| ds \\ &\leq |x - x^0|_{0,1} \sup \left\{ \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ \frac{1}{|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s,x^0)\| ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} \end{aligned}$$

bağıntısı bulunur. Burada, (4.11), (4.12) ve (4.13) hipotezlerinden,

$$\sup \left\{ \frac{\|U(x)(t) - x^0\|}{|t - t_0|} : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\} < \infty$$

elde edilir. Şimdi, $U : C_{x^0,1} \rightarrow C_{x^0,1}$ fonksiyonunun bir daralma olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|U(x)(t) - U(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \left(f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \right) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \varphi(s) \frac{\|x(s) - y(s)\|}{|s - t_0|} ds \\ &\leq \sup_z \frac{\|x(z) - y(z)\|}{|z - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \\ &= |x - y|_{0,1} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \end{aligned}$$

bulunur. Burada her iki taraf da $|t - t_0|^\alpha$ değerine bölünürse,

$$\begin{aligned} \frac{\|U(x)(t) - U(y)(t)\|}{|t - t_0|^\alpha} &\leq \frac{1}{|t - t_0|^\alpha} |x - y|_{0,1} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \\ &= \frac{1}{|t - t_0|^{\alpha-1}} |x - y|_{0,1} \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \end{aligned}$$

elde edilip, Teorem 4.14 ve $\frac{1}{|t - t_0|^{\alpha-1}} |x - y|_{0,1} \leq |x - y|_{0,\alpha}$ olduğu kullanılırsa,

$$\frac{\|U(x)(t) - U(y)(t)\|}{|t - t_0|^\alpha} \leq |x - y|_{0,\alpha} \sup \left\{ \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan ise,

$$d(U(x), U(y)) \leq d(x, y) \sup \left\{ \frac{1}{|t - t_0|} \int_{t_0}^t \varphi(s) ds : t \in B_r[t_0] \setminus \{t_0\} \right\}$$

bulunur ve (4.12) hipotezinden U fonksiyonunun bir daralma olduğu elde edilir. Ayrıca $C_{x,\alpha}$ uzayı tam metrik uzay olduğundan, Banach sabit nokta teoreminden çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmış olur.

4.1.3. Örnekler

Örnek 4.20.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \begin{cases} \alpha & , x_1(t) > 0 \\ -\beta & , x_1(t) < 0 \\ k & , x_1(t) = 0 \end{cases} \\ x_2'(t) &= 0, \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Burada, $\alpha, \beta > 0$ ve $k \notin \{\alpha, -\beta, 0\}$ olacak şekilde verilsin.

$\varepsilon > 0$ olmak üzere bir $x = (x_1, x_2) \in C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[; \mathbb{R}^2)$ çözümünün olduğunu varsayalım. Dolayısıyla $x_1 \in C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[; \mathbb{R})$ ve $x_2 \in C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[; \mathbb{R})$ olmalıdır.

(i) Her $0 < t < \varepsilon$ sayısı için $x_1(t) > 0$ olsa, $f_1(t, x(t)) = 1 = x_1'(t)$ olur. Buradan, $t > 0$ için $x_1(t) = t$ bulunur. Dolayısıyla, $x_1'(0) = k \neq 1 = x_1'(0)$ sonucuna ulaşılır. Türev fonksiyonu $t = 0$ noktasında sürekli olmaz.

(ii) Her $0 < t < \varepsilon$ sayısı için $x_1(t) < 0$ olsa, $f_1(t, x(t)) = -1 = x_1'(t)$ olur. Buradan, $t > 0$ için $x_1(t) = -t$ bulunur. Dolayısıyla, $x_1'(0) = k \neq -1 = x_1'(0)$ sonucuna ulaşılır. Türev fonksiyonu $t = 0$ noktasında sürekli olmaz.

Dolayısıyla (i) ve (ii) şıklarından, öyle $t_0, t_1 \in]0, \varepsilon[$ sayıları vardır ki, $x_1(t_0) < 0$ ve $x_1(t_1) > 0$ sağlar. x_1 fonksiyonu sürekli olduğundan, öyle bir $t^* \in]0, \varepsilon[$ sayısı vardır ki $x_1(t^*) = 0$ olur. Buradan $x(0) = 0$ olduğundan, $[0, t^*]$ aralığı üzerinde Rolle Teoremi uygulanırsa, öyle bir $s \in]0, t^*[$ için $x_1'(s) = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü türevi sıfır yapan nokta yoktur. Böylece (4.14) probleminin klasik anlamda bir çözümü yoktur.

Özel olarak, $T > 0$ olmak üzere $x_1(t) = \alpha t$ fonksiyonu düşünülürse ve $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\alpha t, 0)$ alınır, bu fonksiyon $[0, T]$ üzerinde 0 noktası dışında denklemi ve ilgili koşulu sağlar, yani genelleştirilmiş anlamda bir çözümdür.

Örnek 4.21. $\alpha, \beta > 0$ sayılar olsun ve

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \begin{cases} -\alpha & , x_1(t) \geq 0 \\ \beta & , x_1(t) < 0 \end{cases} \\ x_2'(t) &= 0, \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

problemi verilsin.

$-1 \leq t_1 < 0 < t_2 \leq 1$ olmak üzere, (4.15) probleminin $]t_1, t_2[$ aralığı üzerinde $x = (x_1(t), x_2(t))$ gibi bir çözümünün olduğunu varsayalım ve $x_1(t)$ çözümünü inceleyelim. Bu durumda, her $t \in [0, t_2[$ için x_1 fonksiyonu sıfır fonksiyonuna eşit olamaz. Eğer öyle olsaydı, h.h. $t \in [0, t_2[$ için $0 = x_1'(t) = \alpha > 0$ çelişkisi bulunur. Buradan, öyle bir $t_0 \in]0, t_2[$ için $x_1(t_0) > 0$ olsun ve $A = \{ t \in [0, t_0] : x_1(t) = 0 \}$ kümesini tanımlayalım. $A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq [-1, 1]$ kapalı alt kümedir. Dolayısıyla $t_3 = \max\{t \in [0, t_0] : x_1(t) = 0\}$ tanımlanır ve

$$x_1(t_0) = x_1(t_3) + \int_{t_3}^{t_0} f_1(s, x(s)) ds$$

integrali yazılıp, yukarıda elde edilenler integralde yerine uygulanırsa, $x_1(t_0) < 0$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $x_1(t_0) > 0$ olması ile çelişir. Benzer yolla, $x_1(t_0) < 0$ için yapıldığında yine aynı çelişki elde edilecektir. Dolayısıyla (4.15) probleminin bir çözümü yoktur.

(4.15) problemi,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \begin{cases} -\alpha & , x_1(t) > 0 \\ \beta & , x_1(t) < 0 \\ 0 & , x_1(t) = 0 \end{cases} \\ x_2'(t) &= 0, \quad x(0) = 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde verilsin ($\alpha, \beta > 0$). Bu durumda yalnızca $x_1 = 0$ olmak üzere $x(t) = (0, 0)$ fonksiyonu çözüm olur. Yani sadece bir tane klasik anlamda çözüm var olup, bu çözüm dışında klasik anlamda çözüm ve genelleştirilmiş anlamda çözüm yoktur.

Örnek 4.22. $\alpha > 0$ bir sayı olsun ve

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \begin{cases} -\alpha & , t < 0 \\ \alpha & , t \geq 0 \end{cases} \\ x_2'(t) &= 0, \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

problemi verilsin.

(i)

$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= \begin{cases} -\alpha & , t < 0 \\ \alpha & , t \geq 0 \end{cases} \\ f_2(t, x) &= 0 \end{aligned}$$

olmak üzere, $f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x))$ şeklindedir. Fonksiyon $t = 0$ noktasında sürekli değildir. Klasik anlamda varlık-teklilik teoremlerinin hipotezleri sağlanmaz.

(ii) Klasik anlamda çözüm yoktur. C^1 sınıfında bir x çözümünün olduğunu varsayalım. Bu durumda $t \mapsto f(t, x(t))$ bileşke fonksiyonu sürekli olmalıdır. Ancak burada bileşke fonksiyonu sürekli değildir.

(iii) $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ olduğundan, $0 \leq t \leq d$ ve $|x| \leq b$ olmak üzere ($d, b > 0$), $f_1 : [0, d] \times [-b, b] \rightarrow \{-\alpha, \alpha\} \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu için genelleştirilmiş anlamda çözümün varlığı ve tekliliği başlığı altındaki teoremleri uygulayalım.

H.h. $t \in [0, d]$ için $f_1(t, \cdot) : [-b, b] \rightarrow \{-\alpha, \alpha\}$ fonksiyonu sürekli olduğundan (G1) hipotezi sağlanır. Her $x \in [-b, b]$ için $f_1(\cdot, x) : [0, d] \rightarrow \{-\alpha, \alpha\}$ fonksiyonu ölçülebilir olduğundan (G2) hipotezi sağlanır. H.h. $t \in [0, d]$ ve her $x \in [-b, b]$ için $\|f_1(t, x)\| \leq \alpha + 1$ olduğundan (G3) hipotezi de sağlanır. Dikkat edilecek olursa, (G4) hipotezi de sağlandığından Teorem 4.3 ve Teorem 4.6 gereği Lipschitz koşulunu sağlayan bir çözüm vardır. Bunlara ilaveten (G5) (veya (G6)) hipotezi sağlandığından bu çözüm tektir. Şimdi bu çözümü bulalım.

H.h. $t \in [0, \infty[$ için $x_1'(t) = \alpha$, $x_2'(t) = 0$ ise $x_1(t) = \alpha t + c_1$, $x_2(t) = c_3$ ($c_1, c_3 \in \mathbb{R}$) bulunur. Aynı düşünceyle, $t \in]\infty, 0[$ için $x_1'(t) = -\alpha$, $x_2'(t) = 0$ ise $x_1(t) = -\alpha t + c_2$, $x_2(t) = c_4$ ($c_2, c_4 \in \mathbb{R}$) bulunur. Genelleştirilmiş çözümün mutlak sürekliliğinden

ve başlangıç koşullarından $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ bulunur. Dolayısıyla sıfır noktasının bir komşuluğu üzerinde $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\alpha|t|, 0)$ genelleştirilmiş çözümü elde edilir.

Örnek 4.23. $\alpha > 0$ bir sayı olsun ve

$$\begin{aligned} y''(t) &= \begin{cases} -\alpha & , t < 0 \\ \alpha & , t \geq 0 \end{cases} \\ y'(t) &= 0, \quad y(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

problemi verilsin. Burada, $x_1 = y$ ve $x_2 = y'$ denirse,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= g(t, x_1, x_2) \end{aligned}$$

fonksiyonları için, $x = (x_1, x_2)$ olmak üzere $f_1(t, x) = x_2$ ve $f_2(t, x) = g(t, x)$ olarak düşünülürse, $f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x))$ şeklinde yazılır. Böylece (4.17) problemi,

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= \begin{cases} -\alpha & , t < 0 \\ \alpha & , t \geq 0 \end{cases} \\ x_1'(t) &= x_2, \quad x_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

olacaktır. f fonksiyonunun (G1) ve (G2) hipotezlerini gerçeklediği açıktır. Ayrıca, $M = \alpha + 2$ alınırsa, (G3) ve (G4) hipotezleri gerçekleşir. Buradan Teorem 4.3 ve Teorem 4.4 uygulandığında Lipschitz koşulunu sağlayan bir çözüm vardır ve bu çözüm tektir. Sıfır noktasının bir yuvarı üzerinde Örnek 4.22'de yapılan benzer işlemler ile $x_2(t) = \alpha|t|$ bulunur. Buradan ise, aranan çözüm

$$x_1(t) = y(t) = \begin{cases} \frac{-\alpha t^2}{2} & , t < 0 \\ \frac{\alpha t^2}{2} & , t \geq 0 \end{cases}$$

olacak şekilde elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, adi diferansiyel denklem sistemi için klasik anlamda çözüm ve genelleştirilmiş anlamda çözüm kavramları kullanılarak Cauchy probleminin Lipschitz koşulunu sağlayan çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bunlar yardımıyla yüksek mertebeden bir adi diferansiyel denklem için Cauchy problemi ile ilgili benzer sonuçlara ulaşılmıştır. Daha sonra özel bir normlu uzay üzerinde çalışılarak problemin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili incelemeler yapılmıştır. Son olarak, örnekler verilerek elde edilen sonuçların uygulamaları yapılmıştır.

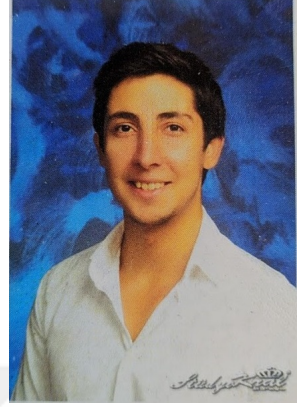
KAYNAKLAR

- [1] Newton, I., 1736, Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum, *Opuscula Mathematica*, I, 66.
- [2] Peano, G., 1886, Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine, *Atti della Accademia di scienze*, Torino, 21, 437-445.
- [3] Peano, G., 1890, Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Annalen*, 37 (2), 182–228.
- [4] Picard, E., 1893, Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires, *J. Math. Pures Appl.*, 9, 217-271.
- [5] Osgood, W.F., 1898, Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzchen Bedingung, *Monatshefte für Mathematik*, 9, 331–345.
- [6] Wintner, A., 1945, The Nonlocal Existence Problem For Ordinary Differential Equations, *American Journal of Mathematics*, 67, 277-284.
- [7] Murray F.J., Miller K.S., 1954, Existence Theorems for Ordinary Differential Equations, *New York University Press*, Washington Square, New York.
- [8] Ince E.L., 1956, Ordinary Differential Equations, *Dover Publications, Inc.*, New York.
- [9] Aizerman, M.A., Gantmaher, F.R., 1957, Stability by means of a linear approximation of periodic solutions of a system of differential equations with discontinuous right-hand sides, *Prikl. Mat. Meh.*, 21, 658-669.
- [10] Tenenbaum M., Pollard, H., 1963, Ordinary Differential Equations, *Dover Publications, Inc.*, New York.
- [11] Lunkevic, V.A., 1968, The problem of the center for differential equations with discontinuous right-hand sides, *Differencial'nye Uravnenija*, 4, 1625–1639.
- [12] Kolmogorov A.N., Fomin, F.S., 1970, Introductory Real Analysis, *Dover Publications, Inc.*, New York.
- [13] Persson, J., 1975, A Generalization of Carathéodory's Existence Theorem for Ordinary Differential Equations, *Journal Of Mathematical Analysis And Applications*, 49, 496-503.
- [14] Filippov A.F., 1988, Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, The Netherlands.

- [15] Royden H.L., 1988, Real Analysis, *Macmillan Publishing Company*, New York.
- [16] Rudin W., 1991, Functional Analysis, *McGraw-Hill, Inc.*, Singapore.
- [17] Filippov V.V., 1993, Basic Topological Structures of Ordinary Differential Equations, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, The Netherlands.
- [18] Granas A., Frigon, M., 1994, Topological Methods in Differential Equations and Inclusions, *Springer-Science+Business Media, B.V.*, Montreal, Canada.
- [19] Biles, D.C., Binding P.A., 1997, On Carathéodory's Conditions For The Initial Value Problem, *American Journal of Mathematics*, 125, 1371-1376.
- [20] O'Regan D., 1997, Existence Theory for Nonlinear Ordinary Differential Equations, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, The Netherlands.
- [21] Walter W., 1998, Ordinary Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York.
- [22] Bacciotti, A., Ceragioli, F., 1999, Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions, *ESAIM*, 4, 361-379.
- [23] Berberian S.K., 1999, Fundamentals of Real Analysis, *Springer-Verlag*, New York.
- [24] Gorka, P., Rybka, P., 2010, Existence and uniqueness of solutions to singular ODE's, *Archiv der Mathematik*, 94, 227-233.
- [25] Ilter, S., 2011, Weak maximum principle for optimal control problems of nonsmooth systems, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 805-808.
- [26] Duru, H., 2012, Topolojiye Giriş Ders Notları, *Istanbul University Press*, Istanbul, Turkey.
- [27] Pilyugin Y.P., 2012, Spaces of Dynamical Systems, *De Gruyter*, Berlin.
- [28] Erbay, H.A, Erkip, A., Muslu G.M., 2012, The Cauchy problem for a one-dimensional nonlinear elastic peridynamic model, *Journal of Differential Equations*, 252, 4392-4409.
- [29] Duru, H., 2013, Reel Analiz Ders Notları, *Istanbul University Press*, Istanbul, Turkey.
- [30] Weaver N., 2013, Measure Theory And Functional Analysis, *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, Singapore.
- [31] Abell M.L., Braselton J.P., 2014, Introductory Differential Equations, *Elsevier Inc.*, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Okan DUMAN
Doğum Yeri	İstanbul
Doğum Tarihi	27.02.1993
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	0
E-Posta Adresi	okanduman63@gmail.com
Web Adresi	http://



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2015

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	20.06.2019