İGS2010 7. İSTATİSTİK GÜNLERİ SEMPOZYUMU

VII. İSTATİSTİK GÜNLERİ SEMPOZYUMU

28 – 30 Haziran 2010

Orta Doğu Teknik Üniversitesi
İstatistik Bölümü

BİLDİRİ TAM METİNLERİ KİTABI

Editörler:
H. Öztaş AYHAN
Ceylan TALU YOZGATLIGİL

Ankara, Mart 2011

HALKBANK
Üreten Türkiye'nin Bankası
etix

ÖNSÖZ

7. İstatistik Günleri Sempozyumu, 28 – 30 Haziran 2010 tarihleri arasında Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü tarafından, Ankara'da ODTÜ Kültür ve Kongre Merkezi salonlarında gerçekleştirilmiştir. Sempozyumda, 4 adet davetli bildiri ve 68 adet katkılı bildiri başarı ile sunulmuştur. Sempozyumda sunulan bildirilerin bir bölümü bilimsel hakemlik süreci sonunda bu elektronik *Sempozyum Bildirileri Kitabı*'nda yayınlanmıştır. Sunulan bildirilerin diğer bir bölümü ise, *İstatistik Araştırma Dergisi*'nin bu sempozyum için planlanan özel sayısında yayınlanmak amacı ile bilimsel hakemlik sürecine tabi tutulmuşlardır. Bizlere bu olanağı sağlayan TÜİK Başkan Vekili sayın *Ömer TOPRAK*'a ve dergi editorü *Profesör Fetih YILDIRIM* ve editor yardımcısı *Yardımcı Doçent Özlem İLK*'e teşekkür ederim.

Sempozyum Bildiriler Kitabı'nda yayınlanmak üzere sunulan bildiri tam metinleri konunun uzmanı olan hakemler tarafından değerlendirilmiş ve gerekli düzeltmeler elektronik ortamda gerçekleştirilmiştir. Hakemlik sürecinde yardımlarını esirgemeyen değerli bilim insanlarına teşekkür ederiz.

Sempozyum bilimsel programının çok renkli olmasını çok özel olan davetli konuşmacılarımıza borçluyuz. Kendi özel bilimsel çalışma alanlarında dünyada ve ülkemizde önemli söz sahibi olan *Profesör Orhan GÜVENEN, Profesör İ. Burhan TÜRKŞEN, Profesör İsmihan BAYRAMOĞLU* ve *Profesör Fikri AKDENİZ*'e sempozyuma yaptıkları katkılar nedeniyle şükranlarımı sunarım. Sempozyumda oturum başkanı olarak, sempozyum bildirilerine katkıda bulunan tüm meslektaşlarıma da teşekkürlerimi sunarım.

Bu sempozyumun gerçekleşmesinde değerli desteklerini esirgemeyen Rektörümüz Profesör Ahmet ACAR'a şükranlarımızı sunarız. Ayrıca, bu sempozyumun gerçekleşmesinde değerli görüşleriyle katkıda bulunan *Sempozyum Onur Kurulu* ve *Sempozyum Bilimsel Danışma Kurulu* üyelerine teşekkür ederim. Sempozyum hazırlık ve uygulamasının tüm aşamalarında yer alan değerli çalışma arkadaşlarıma ve özverili çalışmalarından dolayı *Sempozyum Düzenleme Kurulu* ve Bölümümüzün tüm idari personeline teşekkür ederim. Sempozyumun başarılı bir şekilde sonuçlanmasına katkıda bulunan ODTÜ'nin tüm çalışanlarına ayrıca teşekkür ederim.

Sempozyumun gerçekleşmesinde önemli mali desteklerini esirgemeyen Türkiye Halk Bankası *Genel Müdür Yardımcısı Osman ARSLAN* ve *Tanıtım ve Halkla İlişkiler Dairesi Başkanı Yalçın KAYA*'ya şükranlarımı sunuyorum. Sempozyum düzenlemenin tüm aşamalarındaki desteklerinden dolayı *ETİX Organizasyon Şirketi* yönetici ve çalışanlarına teşekkür ederim. Sempozyumun, kapanış yemeğinin düzenlenmesinde yaptıkları özverili çalışmaları nedeniyle, Hacettepe Üniversitesi Genel Sekreteri *Doçent Turhan MENTEŞ* ve Beytepe Akademik Kafeteryası yöneticilerine teşekkür ederim.

İstatistik bilim insanlarının bir araya geldiği bu tür sempozyumlar, tecrübeli istatistikçiler ile genç akademisyen ve araştırmacılarımızın birlikteliğini sağlamakta ve gençlerin motivasyonunu artıran önemli bir toplantı olmaktadır. Gelecek yıllarda, bu sempozyumun sürekliliğinin, istatistikçiler için önemli bir bilimsel buluşma ortamı olmaya devam etmesini diliyorum.

Profesör H. Öztaş AYHAN
ODTÜ İstatistik Bölümü Başkanı
7. İGS 2010 Düzenleme Kurulu adına

SEMPOZYUM ONUR KURULU

Prof. Dr. Ahmet Acar, *Orta Doğu Teknik Üniversitesi Rektörü*

Prof. Dr. Cüneyt Can, *ODTÜ Fen ve Edebiyat Fakültesi Dekanı*

Prof. Dr. Canan Özgen, *ODTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü*

SEMPOZYUM DANIŞMA KURULU

Prof. Dr. Fikri Akdeniz, *Çukurova Üniversitesi*

Prof. Dr. Soner Gönen, *Gazi Üniversitesi*

Prof. Dr. Hüseyin Tatlıdil, *Hacettepe Üniversitesi*

Prof. Dr. Serdar Kurt, *Dokuz Eylül Üniversitesi*

Prof. Dr. Ömer L. Gebizlioğlu, *Ankara Üniversitesi*

Doç. Dr. Mehmet Ali Cengiz, *Ondokuz Mayıs Üniversitesi*

SEMPOZYUM DÜZENLEME KURULU

Prof. Dr. H. Öztaş Ayhan

Prof. Dr. Ayşen Dener Akkaya

Doç. Dr. İnci Batmaz

Doç. Dr. Barış Sürücü

Yard.Doç. Dr. Zeynep Kalaylıoğlu

Yar.Doç. Dr. Özlem İlk

Yar.Doç. Dr. B. Burçak Başbuğ Erkan

Yar.Doç.Dr. Ceylan Talu Yozgatlıgil

Yar.Doç.Dr. Vilda Purutçuoğlu

Dr. Ayça Dönmez

Arş.Gör. Sipan Aslan

Arş.Gör. Sibel Balcı

Arş.Gör. Könül Bayramoğlu

Arş.Gör. Elçin Kartal

Arş.Gör. Gül İnan

Arş.Gör. Tuğba Erdem

Arş.Gör. Özgür Asar

Arş.Gör. Ceyda Yazıcı

Arş.Gör. Olcay Öztürk

İÇİNDEKİLER

NO	MAKALE ADI	SAYFA
1	AĞIRLIKLI HEDEF PROGRAMLAMA VERİ ZARFLAMA ANALİZİ YÖNTEMİ İLE TÜRKİYE'DEKİ İLLERİN BAŞARIM DEĞERLENDİRMESİ ***H.Hasan ÖRKÇÜ, Hasan BAL***	1-8
2	ANKARA HAVA KİRLİLİĞİ ZAMAN SERİSİNİN ÇÖZÜMLENMESİNDE KLASİK VE BULANIK ZAMAN SERİLERİ YAKLAŞIMLARININ KARŞILAŞTIRILMASI ***Erol EĞRİOĞLU, Ufuk YOLCU, Ç.Hakan ALADAĞ, V.Rezan USLU***	9-15
3	BURR XII DAĞILIMININ PARAMETRELERININ İLERLEYEN TÜR İLK BOZULMA SANSÜRLEMEYE DAYALI GÜVEN ARALIKLARI VE GÜVEN BÖLGELERI ***Coşkun KUŞ, Yunus AKDOĞAN***	16-24
4	DOGRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA BAZI PARAMETRE ARALIK TAHMiNLEME YONTEMLERiNiN KIYASLANMASI ***Atıf EVREN***	25-34
5	ESENBOĞA, ATATÜRK VE LONDON CITY HAVAALANLARINDAKİ MEVSİMSEL HAREKETLİLİĞİN GÖSTERMELİK DEĞİŞKEN YÖNTEMİYLE TESPİT EDİLMESİ ***Deniz KONAK, Vilda PURUTÇUOĞLU***	35-43
6	GAUSS RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN MAKSİMUNUN MOMENTLERİ İÇİN YAKLAŞIK FORMÜLLER ***Fikri GÖKPINAR, Tahir KHANİYEV***	44-52
7	İLERİ BESLEMELİ YAPAY SİNİR AĞLARI İLE ÖNGÖRÜ İÇİN GİZLİ TABAKA SAYISI ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA ***Faruk ALPASLAN, Ebrucan TİRİNG, Erol EĞRİOĞLU***	53-58
8	İSTATİSTİK'TE ENTROPİYE DAYALI UYUM ÖLÇÜLERİNİN DİĞER UYUM ÖLÇÜLERİ İLE KIYASLANMASI ***Atıf EVREN***	59-68
9	L-SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİ KULLANILARAK YIĞIN ORTALAMASININ TAHMİN EDİLMESİ ***Nilay AKINCI, Yaprak Arzu ÖZDEMİR***	69-79
10	ÖLÇÜM YETERLİLİK PARAMETRELERİNİN TAHMİN EDİCİLERİ VE GÜVEN ARALIKLARI ***Ümit YAMAN, Yunus AKDOĞAN, Ahmet PEKGÖR, Coşkun KUŞ***	80-88
11	ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ TIP FAKÜLTESİ BEYİN CERRAHİSİ POLİKLİNİĞİNDE SİMÜLASYON YARDIMIYLA HASTA BEKLEME SÜRESİNİN AZALTILMASI ***Faruk ALPASLAN, Özge CAĞCAĞ, Erol EĞRİOĞLU***	89-94
12	PARETO MÜDAHALELİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇİ İÇİN ASİMPTOTİK SONUÇLAR ***Rovshan ALIYEV, Tülay KESEMEN, İhsan ÜNVER***	95-100
13	RCMARS-SAĞLAMCMARSYÖNTEMİVESAYISAL BİRUYGULAMA ***Ayşe ÖZMEN, Gerhard-Wilhelm WEBER, İnci BATMAZ***	101-108
14	SARIMA MODELİ VE ELMAN YAPAY SİNİR AĞININ MELEZ YAKLAŞIMI İLE ANKARAHAVA KALİTESİ VERİLERİNİN ÇÖZÜMLENMESİ ***Çağdaş Hakan ALADAĞ, Ufuk YOLCU, Erol EĞRİOĞLU***	109-114
15	SIRALI KÜME ÖRNEKLEMESİ TASARIMINDA YIĞIN ORTALAMASINA İLİŞKİN HİPOTEZTESTİ ***Yaprak Arzu ÖZDEMİR, Fikri GÖKPINAR***	115-122
16	TLDOLAR DÖVİZ KURU VERİLERİNİN BULANIK ZAMAN SERİSİ YAKLAŞIMLARI İLE ÖNGÖRÜSÜ ***Cem KOÇAK, Erol EĞRİOĞLU, Ufuk YOLCU, Çağdaş Hakan ALADAĞ***	123-129
17	HETEROJEN VARYANS DURUMUNDA ORTALAMALARIN EŞİTLİĞİ İÇİN YENİDEN ÖRNEKLEME TEKNİKLERİNE DAYALI BİR ÇALIŞMA **Esra YİĞİT, Hamza GAMGAM**	130-140
18	UYARLANMIŞ DURBİN TESTİ İÇİN PERMÜTASYON TESTİ VE BİR SİMÜLASYON ÇALIŞMASI **Fikri GÖKPINAR, Hülya BAYRAK**	141-147

DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYONDA BAZI PARAMETRE ARALIK TAHMİNLEME YÖNTEMLERİNİN KIYASLANMASI

Atıf Evren*

ÖZET

Doğrusal olmayan regresyon modellerinde parametrelerin aralık tahminleri asimptotik normallik varsayımına dayandırılmaktadır. Ancak bu varsayım çoğu durumda gerçekçi olmamaktadır.Bu durumda örneklem hacminin dikkate değer bir biçimde büyük olması gerekmektedir. Bununla birlikte doğrusal olmayan verinin elde edilmesi yorucu, zaman alıcı ve maliyetlidir. Çünkü bu tür veriler genellikle laboratuvar ortamında elde edilmektedirler. Bu yüzden bootstrap, jackknife gibi yöntemlerle aralık tahminlerine gidilmektedir. Bu yöntemlere ek olarak Çebişev eşitsizliği ya da benzer eşitsizlikler ile de aralık tahminlerine gidilebilir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan regresyon, parametrik olmayan aralık tahminleri, Çebişev eşitsizliği,Bootstrap yöntemi, Jackknife yöntemi

A COMPARISON OF SOME INTERVAL ESTIMATION PROCEDURES IN NONLINEAR REGRESSION

ABSTRACT

Confidence interval estimates for the parameters of nonlinear regression models are based on the assumption of asymptotic normality. However this assumptions may not be not realistic all the time because asymptotic normality requires larger sample sizes considerably. Large sample sizes mean burdensome experiences for the scientists. Because most nonlinear data are generated through expensive and time consuming experiments carried out generally in laboratory conditions. For this reason other interval estimation procedures like bootstrapping and jackknife are used quite often. Besides some probability inequalities including Chebyshev's Inequality can also be used.

Keywords: Nonlinear regression, interval estimation, Chebyshev's Inequality, Bootstrap method, Jackknife method

*Öğretim Üyesi, Yard. Doç. Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Davutpaşa Esenler, 34210, İstanbul, aevren@yildiz.edu.tr

GİRİŞ

Doğrusal olmayan regresyon modellerinde parametrelerin aralık tahminleri için benimsenen asimptotik normallik yaklaşımı çoğu zaman örnek büyüklüklerinin yetersiz olması nedeniyle gerçekçi olmamaktadır. Bu çalışmada doğrusal olmayan modeller için Bootstrap yöntemi, Jackknife yöntemi gibi parametrik olmayan aralık bulma yöntemlerini benimsemenin yanısıra Çebişev türü eşitsizliklerden de yararlanılarak parametre aralıkların uzunluklarının düşürülmesine çalışılacaktır.

DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON MODELLERİ

Doğrusal olmayan bir regresyon modeli

$$Y_i = f(X_i, \gamma) + \varepsilon_i \tag{1}$$

şeklindedir. Burada i. açıklayıcı ya da bağımsız değişkenin gözlem değerleri vektörü

$$X_{ixq} = \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ .... \\ X_{iq} \end{bmatrix} \tag{2}$$

p tane parametre vektörü

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ ... \\ \gamma_{p-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

ve parametrelerin ilk tahmini değerleri vektörü

$$g_{px1} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ ... \\ g_{p-1} \end{bmatrix} \tag{4}$$

olsun. Yine

$$\beta_k^{(0)} = \gamma_k - g_k^{(0)} \tag{5}$$

$$D_{ik}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(X_i, \gamma)}{\partial \gamma_k} \right]_{\gamma = g^{(0)}} \tag{6}$$

$$Y_i \cong f_i^{(0)} + \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} + \varepsilon_i \tag{7}$$

$$Y_i^{(0)} = Y_i - f_i^{(0)} \tag{8}$$

denecek olursa şu doğrusallaştırılmış regresyon modeli elde edilir.

$$Y_i^{(0)} \cong \sum_{k=0}^{p-1} D_{ik}^{(0)} \beta_k^{(0)} + \varepsilon_i \tag{9}$$

$$Y^{(0)} \cong D^{(0)} \beta^{(0)} + \varepsilon \tag{10}$$

Bu kalıp doğrusal modeller için kullanılan kalıbın aynısıdır. **D** türev matrisi doğrusal hallerde **X** matrisinin oynadığı rolü oynamaktadır. Dolayısıyla parametre tahminleri doğrusal hallerle analoji kurularak aşağıdaki gibi gerçekleştirilmektedir (Neter vd.,1985):

$$b^{(0)} = \left(D^{(0)\prime} D^{(0)} \right)^{-1} D^{(0)\prime} Y^{(0)} \tag{11}$$

Doğrusal olmayan modellerde parametre tahmini iteratif yöntemlerle gerçekleştirilmektedir. Her iterasyon sonucunda parametre tahminleri vektörü i=1,2,… için

$$g_k^{(i)} = g_k^{(i-1)} + b_k^{(i-1)} \tag{12}$$

ile revize edilmekte ve ardışık parametre tahminleri arasındaki farklar ihmal edilebilir bir düzeye gelince iterasyonlar sona erdirilmektedir. Hata terimleri ortalaması sıfıra, varyansı σ^2'ye eşit bağımsız normal değişkenler olarak kabul edildiğinde **g** 'nin asimptotik örnekleme dağılımı da yaklaşık olarak normal dağılıştır.

$$E(g) \cong \gamma \tag{13}$$

$$s^2(g) = MSE\left(D'D\right)^{-1} \tag{14}$$

ve (14) ile bulunan asimptotik varyans-kovaryans matrisi, aralık tahminleri ve hipotez testleri için kullanılmaktadır (Huet vd., 1996) .

Doğrusal olmayan regresyonda doğrusal regresyondan farklı olarak dikkate alınması gereken bazı noktalar bulunmaktadır. Karşılaşılan bazı sorunlar ve pratik çözüm önerileri için Motulsky ve Christopoulos (2004)'e bakılabilir. Bu zorlukların bir kısmı şu şekilde sıralanabilir:

i) Doğrusal olmayan modeller için en küçük kareler (ya da en çok olabilirlik) fonksiyonu genellikle birden fazla minimum (en çok olabilirlik için maksimum) noktasına sahiptir.
ii) Doğrusal modellerde kullanılan R-kare gibi uyum iyiliği ile ilgili istatistikler doğrusal olmayan modeller için yanıltıcı olabilir. Sözgelimi doğrusal olan bir model için yeterli sayılan bir R-kare değeri, doğrusal olmayan modeller için yetersiz kalmaktadır
iii) Doğrusal olmayan regresyonda parametrelerin başlangıç tahminlerini modele dışsal olarak tanıtmak gerekmektedir. Farklı başlangıç değerleri, farklı (nihai) parametre tahmin değerleri verebilir. Bu durumu nihai parametre tahminlerinin başlangıç değerlerine olan "aşırı bağımlılığı" şeklinde de ifade etmek mümkündür.
iv) Doğrusal olmayan regresyon modellerinde parametre tahminleyicileri gözlem değerlerinin doğrusal bir fonksiyonu değildir. Dolayısıyla bağımlı değişkenin kitle dağılımının normal olması, otomatik olarak parametre tahminleyicilerinin de normal dağılıma uyacağının garantisi değildir. Öte yandan asimptotik normallik örnek büyüklüğünün fazla olmasını gerektirmektedir (Seber ve Wild, 1989; Bates ve Watts,1988). Bu gibi durumlarda Bootstrap, Jackknife gibi nonparametrik sayılabilecek yöntemlerin benimsenmesi daha "rasyonel" olacaktır (Davidson,R., Mackinnon, J.G.,1993). Yine parametrik olmayan aralık tahminlerinin gerçekleştirilmesinde Çebişev ve benzeri eşitsizlikler de yararlı olabilecektir.

Çebişev (Biénayme) Eşitsizliği

X bir rastlantı değişkeni olmak üzere $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$ olsun. k bir pozitif sabit olmak üzere

$$P\left(|X-\mu| \le k\sigma\right) \ge 1-\frac{1}{k^2} \quad (15)$$

Başka Bazı Varyantlar

Bazı durumlarda Çebişev eşitsizliği ile elde edilen aralık çok geniş ve dolayısıyla her zaman işlevsel olmamaktadır. Yine de bazen olasılık dağılımına yönelik bazı varsayımlarda bulunularak aralığın uzunluğu daraltılabilir.Örneğin, X rastlantı değişkeni tek modlu ve sürekli olsun. $E(X) = \mu$ ve $Var(X) < \infty$ ise

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) > 77/81 = 0.95 \quad \text{(DasGupta, 2008)} \quad (16)$$

Çebişev Eşitsizliği'nin Çok Değişkenli Biçimi

$X_1, X_2, ..., X_m$ değişkenleri, ortalamaları sırası ile $E(X_1), E(X_2), ..., E(X_m)$; ve varyansları da $Var(X_1), Var(X_2) ..., Var(X_m)$ olan rastlantı değişkenleri olsunlar.

Yine $k_1; k_2; ...; k_m$ pozitif sabitler ve $A_1, A_2, ..., A_m$ olayları da örnek uzay **S** içerisinde

$A_j = \{X_j \quad |X_j - E(X_j)| < k_j\sqrt{Var(X_j)}\}$ j=1,2,…,m şeklinde tanımlansınlar. Bu durumda Boole Eşitsizliği"nden yararlanarak Çebişev Eşitsizliğinin çok değişkenli versiyonu

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_j\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^{m} k_j^{-2} \text{ (Kotz vd. 2000).} \qquad (17)$$

Başka Versiyonlar

$X_1, X_2, ..., X_k$ rastlantı değişkenleri, ortalamaları sırası ile $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ olan ve varyans-kovaryans matrisleri de $\|\sigma_{ij}\|$ olan k tane rastlantı değişkeni olsun. $\|\sigma^{ij}\|$'de sözkonusu varyans-kovaryans matrisinin tersi olsun. λ bir sabit olmak üzere

$$P\left(\sum_{i,j=1}^{k} \sigma^{ij}(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) < \lambda^2\right) \geq 1 - \frac{\lambda}{k^2} \quad \text{olur (Wilks, 1962).} \qquad (18)$$

Bootstrap ve Jackknife

Bootstrap yöntemi aralık tahminlerinde de kullanılan parametrik olmayan bir tekniktir. Doğrusal olan ya da olmayan regresyon modellerinde normallik varsayımının gerçekçi olmadığı durumlarda kullanılmaktadır. Birden fazla bootstrap yöntemi olmakla birlikte en çok kullanılan bootstrap yöntemini özetlemek gerekirse, regresyon modelinden elde edilen artıklardan iadeli örnekleme yöntemine göre belirli sayıda artık elde edilmekte ve bu değerler bağımlı değişkene eklenmektedir. Daha sonra bağımlı değişkenin elde edilen yeni değerlerinden yararlanılarak aynı matematiksel kalıba sahip regresyon modeli oluşturulmakta ve yeni parametre tahmin değerleri elde edilmektedir. Bu işlem çok sayıda tekrar edildiğinde, her denemede elde edilen parametre tahminlerinin bir sıklık dağılımı oluşmakta ve bu sıklık dağılımlarından hareketle, parametrelerin aralık tahminleri yapılmaktadır (Money ve Duval, 1993).

Jackknife yöntemi ise daha çok regresyon denkleminin belirlenmesinde etkili gözlem noktalarının ortaya çıkarılmasında kullanılmaktadır. Bu yönteme göre gözlem setinden her bir denemede belirli sayıda gözlem noktası çıkarılmakta ve geri kalanlarla regresyon denkleminin katsayıları tahmin edilmeye çalışılmaktadır. Bu işlem büyük sayılarda yinelendiğinde, parametre tahmini değerlerinin bir sıklık dağılımı oluşmakta ve bu sıklık dağılımından aralık tahminlerinin oluşturulmasında yararlanılmaktadır (Money ve Duval, 1993) .

UYGULAMA

Uygulama aşamasında "http://itl.nist.gov/div898/strd/nls/nls_main.shtml" adresinden Rat43 adlı dosyadan alınan ve parametre tahmini zorluk derecesinin yüksek olduğu aşağıdaki veri kümesi kullanılmıştır.

Tablo 1: (X,Y) Değerleri

X	Y	X	Y
1	16.08	9	590.03
2	33.83	10	651.92
3	65.80	11	724.93
4	97.20	12	699.56
5	191.55	13	689.96
6	326.20	14	637.56
7	386.87	15	717.41
8	520.53		

Buradaki bağımlı değişken Y, kuru soğan tanesinin ağırlığı, bağımsız ya da açıklayıcı değişken X de soğanın büyümesi için geçen süredir. Aynı dosyada veri için denenen modelin

Y=A/[{1+exp(B-CX)}^(1/D)] olduğu belirtilmektedir. Burada A,B,C ve D modelin parametreleri olup, başlangıç değerleri olarak sırasıyla 700, 5, 0.75 ve 1.3 verilmiştir. Ayrıca yukarıdaki denklemin incelenmesinden X büyük değerler aldıkça Y'nin A parametresine yakınsayacağı öngörülebilir. Bu noktadan yola çıkılarak en büyük X değerine karşılık gelen Y değerinin (717), A'nın başlangıç tahmin değeri olarak verilmesi diğer B,C ve D parametrelerinin başlangıç değerlerinin bir olarak alınması ve parametre tahminlerinin gerçekleştirildiği aralığın -1E 9 ile 1E 9 olarak seçilmesi halinde de web sitesindeki sonuçlara oldukça benzer sonuçlar NCSS (Number Cruncher Statistical Systems) programı yardımı ile elde edilmiştir. Bu sonuçları kısaca şu şekilde özetlemek olasıdır:

Tablo 2:Asimptotik normallik varsayımı altında parametrelerin nokta ve aralık tahminleri

Yöntem				
Asimptotik Normallik	Parametre Tahmini	Standart Hata.	%95'lik Alt Sınır	% 95'lik Üst Sınır
A	699	16.3	663.74	735.46
B	5.28	2.08	0.42	10.19
C	0.76	0.2	0.29	1.22
D	1.28	0.68	-0.28	2.86

NCSS çıktısı kalıntıların normal dağıldığını belirtse de örnek büyüklüğünün 15 olması nedeniyle bu sonuç ihtiyatla karşılanmalıdır.İkinci olarak Microsoft Excel Veri Analizi modülü ve NCSS yardımıyla bootstrap yöntemi denenmiştir (N= 100).Sonuçlar aşağıdadır:

Tablo 3:Bootstrap yöntemi ile parametrelerin nokta ve aralık tahminleri

Yöntem				
Bootstap	Parametre Tahmini	Standart Sapma.	%95'lik Alt Sınır	% 95'lik Üst Sınır
A	700.18	12.51	679.88	726.89
B	5.68	2.25	1.26	10.12
C	0.81	0.19	0.49	1.26
D	1.44	0.77	0.21	3.13

Üçüncü olarak veri kümesinden her bir denemede bir gözlem değeri atılarak Jackknife yöntemi ile parametre tahminleri yeniden gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Tablo 4: Jackknife yöntemi ile parametrelerin nokta ve aralık tahminleri

Yöntem				
Jackknife	Parametre Tahmini	Standart Sapma.	%95'lik Alt Sınır	% 95'lik Üst Sınır
A	699.74	6.64	693.21	712.62
B	5.35	0.67	4.39	6.6
C	0.76	0.06	0.67	0.88
D	1.3	0.21	0.99	1.68

Daha sonra Çebişev yöntemi ile %95'lik aralık tahminleri gerçekleştirilmiştir(k=4.47) .

Tablo 5: Çebişev eşitsizliği ile parametrelerin %95 güvenle aralık tahminleri

Yöntem				
Çebişev	Parametre Tahmini	Standart Hata	%95'lik Alt Sınır	% 95'lik Üst Sınır
A	699	16.3	626.74	772.46
B	5.28	2.08	-4.01	14.57
C	0.76	0.2	-0.13	1.65
D	1.28	0.68	-1.76	4.32

Son olarak Çebişev Eşitsizliği'nin her dört parametre için elde edilen aralık tahminlerinin sınır noktaları, ilgili parametrelerin ilk tahmini değeri olarak NCSS'e tanıtılmış ve bu noktalarda model yeniden denenerek regresyon denkleminin katsayılarının bu yeni değişiklikler karşısında istikrarlı olup olmadığına bakılmıştır.

Tablo 6: Çebişev eşitsizliği ile oluşturulan aralıkların kısıt olarak kullanılması ile elde edilen parametre tahminleri (ve bu tahminlerin istikrarlı olup olmadığının sınanması)

Katsayılar	Denenen Değerler		
	Çebişev ile elde edilen alt sınır	Çebişev ile elde edilen alt sınır	Sonuçlar
A	626	772	Benzer noktalara yakınsama
B	-4	15	Daha iyi çözüm elde edilemedi.
C	-0.13	1.65	Daha iyi çözüm elde edilemedi.
D	-1.76	4.32	Daha iyi çözüm elde edilemedi.

Yukarıdaki tablodan hareketle B,C ve D parametrelerinin başlangıç tahmin değerleri ile fazla oynanmaması gerektiği düşünülmüş ve sözkonusu parametrelerin NCSS ile elde edilen tahmini değerleri bu kez de modele birer sabit olarak sokulmuş ve aşağıdaki çıktı elde edilmiştir. Buna göre Y=A/[{1+exp(5.28-0.76X)}^(1/1.28)] modeli denenerek A parametresi için daha düşük standart hatalı bir model elde edilmiştir. Özet istatistikler şöyledir:

Tablo 8: Bazı parametrelere kısıtlamalar getirerek (ya da tahmini değerler vererek) parametre uzayının boyutunun azaltılarak daha küçük standart hatalı tahmin edicilerin aranması

Parametre	Parametre Tahmini	Asimptotik Standart Hata	%95'lik Alt Sınır	%95'lik Üst Sınır
A	699.73	9.01	680.41	719.05

Bu durumda oluşturulan model "Y= (699.7327)/((1+EXP(5.28-0.76*(X)))^(1/1.28))" şeklindedir ve ilgili R-Kare değeri de 0.99 olarak bulunmuştur.

SONUÇLAR

1. Doğrusal olmayan regresyonda parametreler için aralık tahminleri asimptotik normalliğe dayalıdır. Bu bakımdan aralık tahminine gidilmesinde asimptotik normallik varsayımı yerine Bootstrap, Jackknife ,Çebişev eşitsizliği ve benzeri yaklaşımları benimsemek özellikle küçük örneklem hacmi için daha doğru olacaktır.
2. Bootstrap, Jackknife gibi yöntemler bilgisayarların yoğun olarak kullanıldığı ve zaman alıcı yöntemlerdir. Çebişev ve benzeri eşitsizlikleri kullanmak aralık tahminlerine giderken kolaylık sağlamaktadır. Yine de bütün bu yöntemler birbirlerini destekler bir şekilde kullanılmalıdır.

3. Çebişev türü eşitsizliklere dayalı aralık tahminlerinin geniş çıkmasında k değerlerinin büyüklüğünün yanısıra standart hataların da büyüklüğü bir etken olabilir. Ancak yine de bu gibi yöntemler hiç şüphesiz , Bootstrap, Jackknife gibi yöntemlere göre daha geniş aralık tahminleri vermektedir.
4. Yine de Çebişev ve benzeri eşitsizliklerden yararlanılarak elde edilen aralıkların uç noktalarında modelin istikrarlı olup olmadığı (aynı parametre tahmini değerlerine yakınsayıp yakınsamadığı) test edilebilir. Eğer bazı parametre değerleri bu tür bir istikrarsızlığa neden oluyorsa, bu parametrelerin tahmini değerleri modele birer sabit olarak dahil edilerek (alacakları değerlere kısıtlar konularak), daha düşük standart hataya sahip başka (ve daha yalın) modeller elde edilebilir.
5. Bunlara ek olarak Çebişev eşitsizliğinde, dağılıma ilişkin ek varsayımlarda bulunarak aralıkları daraltmak mümkündür.
6. Ayrıca literatürde Çebişev eşitsizliğinin çok değişkenli bazı versiyonları da mevcuttur. Parametre tahmin edicilerinin aralarındaki korelasyonlar dikkate alınarak bazı aralıkların uzunluklarını daraltmak da sözkonusu olabilir.
7. Son olarak e Jackknife yönteminin özellikle artık analizinde (etkili değerlerin bulunmasında), Bootstrap yönteminin de parametre tahmincilerinin asimptotik varyans-kovaryans matrisinin elde edilmesinde işlevsel olduğu, Çebişev vb. eşitsizliklerin ise her zaman işlevsel olmadığı ama bununla birlikte bulunan parametre tahminlerinin ne kadar istikrarlı olduğunun incelenmesinde ve almaşık yöntemlerin denenmesinde yararlı olabileceği de vurgulanmalıdır.

KAYNAKLAR

BATES D.M., WATTS D.G.(1988), *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*, New York, John Wiley&Sons.

DASGUPTA, A.(2008), *Asymptotic Theory of Statistics and Probability*, Springer Texts in Statistics, New York, Springer

DAVIDSON, R., MACKINNON, J.G.(1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, New York, Oxford University Press.

HUET,S., BOUVIER,A., GRUET,M., JOLIVET,E., (1996), *Statistical Tools for Nonlinear Regression: A Practical Guide with S-Plus Examples*, Springer-Verlag, New York, Springer Series in Statistics.

KOTZ,S., BALAKRISHNAN, N., JOHNSON,N.L.(2000), *Continuous Multivariate Distributions, Volume 1: Models and Applications*, Second Edition, USA, Wiley series in Probability and Statistics.

MOONEY,Z.M.,DUVAL,R.D.(1993),*Bootstrapping A Nonparametric Approach to Statistical Inference*, Series: Quantitative Applications in the Social Sciences,a Sage University Paper, No 95.

MOTULSKY, H., CHRISTOPOULOS, A. (2004), *Fitting Models to Biological Data Using Linear and Nonlinear Regression: A Practical Guide to Curve Fitting*, USA, Oxford University Press

NETER J., WASSERMAN W., KUTNER M. H. (1985), *Applied Linear Statistical Models*, second edition,Illinois, Richard D. Irwin.

SEBER G.A.F., WILD C.J.(1989), *Nonlinear Regression*, USA, John Wiley&Sons.

WILKS,S.S.(1962), *Mathematical Statistics*, Japan,John Wiley&Sons Inc.

http://itl.nist.gov/div898/strd/nls/nls_main.shtml (Doğrusal olmayan regresyon modelleri ile ilgili veriler içeren bir site. Siteye erişim tarihi Mayıs-Haziran 2010)