XX.Ulusal
Matematik Sempozyumu
3-6 Eylül 2007, Erzurum

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN DÜZENLİ İZİ ÜZERİNE

ERDAL GÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Davutpaşa Yerleşim Birimi
34210 Esenler/İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada, sonlu aralıkta verilmiş sınırlı operatör katsayılı ikinci mertebeden bir diferansiyel operatör için düzenli iz kavramı tanımlanmış ve bu düzenli iz ile ilgili bir formül elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Hilbert uzayı, eşlenik operatör, çekirdek operatör, spektrum ve resolvent.

1. GİRİŞ

H uzayı ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. H deki iç çarpımı ve normu sırasıyla $(.,.)$ ve $\|.\|$ ile gösterelim. $H_1 = L_2(H,[0,\pi])$ ile de değerleri H uzayında olan ve

$$\int_0^\pi \| f(x) \|^2 \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesini gösterelim.
Eğer H_1 uzayındaki herhangi iki f ve g elemanının iç çarpımı

$$(f,g)_{H_1} = \int_0^\pi (f(x),g(x))dx$$

şeklinde tanımlanırsa o taktirde H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayı olur,([10]). H'den H'ye tüm kompakt operatörlerin kümesi $\sigma_\infty(H)$ ile gösterilir. Eğer $A \in \sigma_\infty(H)$ ise o taktirde A^*A negatif olmayan kendine eş bir operatör olur ve $(A^*A)^{1/2} \in \sigma_\infty(H)$ dir ([6]). Burada A^*, A'nın eşlenik operatörünü göstermektedir. $(A^*A)^{1/2}$'nın sıfırdan farklı özdeğerleri $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$ $(0 \leq k \leq \infty)$ olsun. Burada her bir özdeğer kendi katlılık sayısı kadar yazılmıştır. $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$, sayılarına A'nın $s-$sayıları denir ve $s_k(A)(k=1,2,\ldots)$ ile gösterilir. Burada $k < \infty$ ise $s_j = 0$ $(j = k+1, k+2, \ldots)$ kabul edilir. Eğer A bir normal operatör ise, yani $A^*A = AA^*$ ise o halde $k = 1,2,\ldots$ için $s_k(A) = |\lambda_k(A)|$ dır ([6]). Burada $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots \lambda_k(A)$'lar A'nın sıfır olmayan özdeğerleridir.

Scanned with CamScanner

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty, \qquad p \geq 1$$

koşulunu sağlayan tüm $A \in \sigma_\infty(H)$ kompakt operatörlerin kümesi $\sigma_p(H)$ ya da σ_p $(p \geq 1)$ ile gösterilir. σ_p $(p \geq 1)$ uzayı

$$\| A \|_{\sigma_p(H)} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (A \in \sigma_p(H))$$

normu ile ayrılabilir bir Banach uzayıdır ([6]).

$p=1$ için $\sigma_1(H)$ uzayı çekirdek operatörleri uzayı adını alır. Böylece $\sigma_1(H)$'deki bir operatör bir çekirdek operatörü adını alır. Eğer $A \in \sigma_1(H)$ ise o taktirde herhangi bir lineer sınırlı $B : H \to H$ operatörü için $AB, BA \in \sigma_1(H)$ ve

$$\| BA \|_{\sigma_1(H)} \leq \| B \| \| A \|_{\sigma_1(H)}$$
$$\| AB \|_{\sigma_1(H)} \leq \| B \| \| A \|_{\sigma_1(H)}$$

dir. Eğer $A \in \sigma_1(H)$ ve $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ herhangi bir ortonormal taban ise o halde

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k)$$

serisi yakınsaktır ve serinin toplamı $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ tabanının seçimine bağlı değildir. Bu serinin toplamına A operatörünün matris izi denir ve $tr(A)$ ile gösterilir. Böylece

$$trA = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j(A)$$

olup burada her bir özdeğer kendi cebirsel katlılık sayısı kadar toplanmıştır ve $\nu(A)$'da A'nın sıfırdan farklı özdeğerlerinin cebirsel katlılığının toplamını göstermektedir.

Diferansiyel operatörlerin düzenli izine matrislerin ya da çekirdek operatörlerinin izinin bir genellemesi olarak bakılabilir. Skaler diferansiyel operatörler için düzenli iz formülleri [3],[4],[5], [9], [11] içinde ve daha birçok çalışmada bulunmuştur. Operatör katsayılı diferansiyel operatörler için düzenli iz formülleri de örneğin [1],[2],[7],[8],[13] çalışmalarında hesaplanmıştır. Bu çalışmada ise yine operatör katsayılı bir diferansiyel operatör için bir düzenli iz formülü bulunmuştur.

H_1 uzayın da

$$L_0[y] = -y''(x)$$
$$L[y] = -y''(x) + Q(x)y(x)$$

Scanned with CamScanner

diferansiyel ifadeleri ve aynı $y'(0)=y(\pi)=0$ sınır koşulları ile oluşturulan L_0 ve L operatörlerini göz önüne alalım. $U[y]$ içinde yer alan $Q(x)$ operatör fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:

1) Her $x\in[0,\pi]$ için $Q(x)$ ikinci mertebeden zayıf türeve sahiptir ve $i=0,1,2,$ için $Q^{(i)}(x):H\to H$ fonksiyonu $[0,\pi]$ de kendine eş çekirdek operatördür,

2) $\|Q\|_{\sigma_1}<1,$

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Q(x)\varphi_n\|_{\sigma_1}<\infty$$

olacak şekilde H'de bir $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal tabanı vardır,

(4) i=0,1,2 için $\|Q^{(i)}(x)\|_{\sigma_1(H)}$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sınırlı ve ölçülebilirdir.

L_0 operatörünün spektrumu $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}=\{(m+\frac{1}{2})^2\}_{n=0}^{\infty}$ $(\sigma(L_0)=\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty})$ kümesi olup bu kümenin her noktası L_0 operatörünün katlılığı sonsuz olan bir özdeğeridir. μ_n özdeğerine karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar

$$\psi_{mn}^{0}=\sqrt{2/\pi}\cos(m+\tfrac{1}{2})x\cdot\varphi_n;\quad (n=1,2,\ldots) \qquad (1.1)$$

dir. L_0 ve L operatörlerinin resolventleri sırasıyla R_λ^0 ve R_λ olsun. Eğer $\lambda\notin\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ ise $Q(x)$'in 3) koşulunu sağlamasından $QR_\lambda^0:H_1\to H_1$ operatörü bir çekirdek operatörü olur. Yani, $QR_\lambda^0\in\sigma_1(H_1)$ dir. Bundan dolayı ve $Q(x)$'in 2) ve 3) koşulunu sağladığı gerçeğinden, L'nin spektrumunun ikişerli ayrık $F_m=[\mu_m-\|Q\|_{\sigma_1},\mu_m+\|Q\|_{\sigma_1}]$ $(m=0,1,2,\ldots)$ aralıklarının birleşiminin bir altkümesi olduğu sonucu çıkar. L'nin spektrumunun μ_m'den farklı her bir noktası katlılığı sonlu olan bir özdeğerdir. Bununla birlikte μ_m, L'nin katlılığı sonlu ya da sonsuz olan bir özdeğeri olabilir. Bundan başka, $\{\lambda_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$, L'nin F_m aralığına ait özdeğeri olmak üzere $\lim_{n\to\infty}\lambda_{mn}=\mu_m$ dir.

Bu çalışmada

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{mn}-\mu_m)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}trQ(x)dx\right]$$

serisinin toplamı için bir formül elde edilmiştir ve bu formüle L'nin düzenli iz formülü denir.

2. L OPERATÖRÜ İÇİN DÜZENLİ İZ FORMÜLÜNÜN BULUNMASI

Scanned with CamScanner

$Q(x)$'in tanımından, $R_\lambda - R_\lambda^0$ operatör fonksiyonunun $\rho(L)$ resolvent bölgesinde $\sigma_1(H_1)$ uzayındaki norma göre analitik olduğu gösterilebilir.
$\{\psi_{mn}\}_{mn=1}^{\infty}$ fonksiyonları L'nin $\{\lambda_{mn}\}_{mn=1}^{\infty}$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar ve $B_{mn}^0 = (\cdot,\psi_{mn}^0)_{H_1}\psi_{mn}^0$; $B_{mn} = (\cdot,\psi_{mn})_{H_1}\psi_{mn}$ olmak üzere

$$R_\lambda^0 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{mn}^0}{\mu_m - \lambda};\quad R_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{mn}}{\lambda_{mn} - \lambda} \tag{2.1}$$

yazılabilir ([12]).

(2.1) eşitlikleri kullanılarak $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{pn} - \mu_p)$, $(p = 0,1,2,\ldots)$ serilerinin mutlak yakınsak olduğu gösterilebilir. Böylece her $\lambda \in \rho(L)$ için $R_\lambda - R_\lambda^0 \in \sigma_1(H_1)$ olduğundan

$$tr(R_\lambda - R_\lambda^0) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{\mu_m - \lambda}\right)$$

elde edilir.
Bu eşitliğin her iki yanını $\frac{\lambda}{2\pi i}$ ile çarpıp $|\lambda| = b_p = \mu_p + p$, $(p \geq 1)$ çemberi üzerinde integre edersek

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda tr(R_\lambda - R_\lambda^0)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} - \frac{1}{\mu_m - \lambda}\right)d\lambda \tag{2.2}$$

bulunur. Diğer yandan, $m \leq p$ ve $p \geq 1$ için

$$\mu_m - \|Q\|_{H_1} \leq \lambda_{mn} \leq \mu_m + \|Q\|_{H_1} \leq \mu_p + p = b_p$$

yazılabilir. Böylece

$$|\lambda_{mn}| < b_p;\quad m \leq p,\ p \geq 1, n = 1,2,\ldots \tag{2.3}$$

olur. $m > p$ ise

$$\lambda_{mn} \geq \mu_m - \|Q\|_{H_1} \geq \mu_{p+1} + \|Q\|_{H_1} \geq \mu_p + p = b_p$$

ya da

$$|\lambda_{mn}| > b_p;\quad m > p,\ p \geq 1, n = 1,2,\ldots \tag{2.4}$$

yazılabilir. (2.3) ve (2.4) eşitsizliklerinden, (2.2) bağıntısı

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|=b_p}\lambda tr(R_\lambda - R_\lambda^0)d\lambda = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_m - \lambda_{mn}) \tag{2.5}$$

Scanned with CamScanner

şeklinde düzenlenebilir. $R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda Q R_\lambda^0$ denkleminden bir H doğal sayısı için

$$R_\lambda - R_\lambda^0 = \sum_{j=1}^{H} (-1)^j R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j + R_\lambda^0 - (-1)^{H+1} R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{H+1}$$

elde edilir. Eğer bu eşitlik (2.5) de kullanılırsa

$$\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_m - \lambda_{mn}) = \sum_{j=1}^{H}\frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \lambda \, tr[R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j]d\lambda + \frac{(-1)^{H+1}}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \lambda \, tr[R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{H+1}]d\lambda \qquad (2.6)$$

bulunur.

$$M_{pj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \lambda \, tr[R_\lambda^0 (Q R_\lambda^0)^j]d\lambda, \qquad (2.7)$$

$$M_p^H = \frac{(-1)^H}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \lambda \, tr[R_\lambda (Q R_\lambda^0)^{H+1}]d\lambda \qquad (2.8)$$

olmak üzere (2.6) bağıntısı şeklinde

$$\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_m - \lambda_{mn}) = \sum_{j=1}^{H} M_{pj} + M_p^{(H)} \qquad (2.9)$$

yazılabilir. QR_λ^0 operatör fonksiyonu $\sigma_1(H_1)$ deki norma göre her $\lambda \neq \mu_m$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ noktasında analitik olduğundan

$$M_{pj} = \frac{(-1)^j}{2\pi i j}\int_{|\lambda|=b_p} tr(Q R_\lambda^0)^j d\lambda, \quad (j = 1,2,\ldots) \qquad (2.10)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada amacımız M_{pj} ve $M_p^{(H)}$ ifadelerini hesaplamaktır.

Teorem 2.1

Eğer $Q(x)$ 3) koşulunu sağlıyor ve $\| Q(x) \|_{\sigma_1(H_1)}$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında integre edilebilirse, o taktirde

$$M_{p1} = \frac{p+1}{\pi}\int_0^\pi tr Q(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi (Q(x)\varphi_n, \varphi_n)\cos(2m+1)x dx$$

dir.

Proof: $j = 1$ için (2.10)'dan ve H_1 'in (1.1) ortonormal tabanından

$$M_{p1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} tr(QR_\lambda^0)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}(QR_\lambda^0\psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0)_{H_1} d\lambda \qquad (2.11)$$

yazılabilir.

$$|(QR_\lambda^0\psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0)_{H_1}| = \left|\int_0^\pi (QR_\lambda^0\psi_{mn}^0(x), \psi_{mn}^0(x))dx\right|$$

$$\leq \sqrt{\pi}\,|\mu_m - \lambda|^{-1}\| Q(x)\varphi_n \|_{H_1}$$

Scanned with CamScanner

olduğundan $Q(x)$ üzerindeki 3) koşulu $|\lambda| = b_p$ çemberi üzerinde

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(\lambda) \; ; \quad \alpha_m(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0)_{H_1} \; , \; (m = 0,1,2,\ldots)$$

serilerinin λ 'ya göre düzgün ve mutlak yakınsaklığı elde edilir. Böylece, (2.11) den

$$M_{p1} = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} (QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0)_{H_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu_m}$$

bulunur.(1.1), (2.3) ve (2.4) den ve bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} M_{p1} &= \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} (QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0)_{H_1} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_n) \cos^2 (m + \tfrac{1}{2}) x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_n)(1 + \cos(2m+1)x) dx \end{aligned} \qquad (2.12)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\int_0^{\pi} \| Q(x) \|_{H_1} \, dx < \infty$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_n) dx = \int_0^{\pi} tr Q(x) dx \, . \qquad (2.13)$$

yazılabilir. (2.12) ve (2.13) bağıntılarından

$$M_{p1} = \frac{p+1}{\pi} \int_0^{\pi} tr Q(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} (Q(x)\varphi_n, \varphi_n) \cos(2m+1)x dx$$

sonucu elde edilir.

Bu kez, $j = 2,3,4,\ldots$ için

$$\lim_{p \to \infty} M_{pj} = 0 \quad .$$

olduğunu gösterelim. $j = 2$ olsun. (2.10)'dan

$$\begin{aligned} M_{p2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} tr (QR_\lambda^0)^2 \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left((QR_\lambda^0)^2 \psi_{mn}^0, \psi_{mn}^0 \right)_{H_1} \right] \end{aligned} \qquad (2.14)$$

yazılabilir. Ayrıca,

Scanned with CamScanner

$$QR_\lambda^0\psi_{mn}^0 = \frac{Q\psi_{mn}^0}{\mu_m - \lambda}$$

ve

$$(QR_\lambda^0)^2\psi_{mn}^0 = (\mu_m - \lambda)^{-1}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}(\mu_r - \lambda)^{-1}(Q\psi_{mn}^0, \psi_{rq}^0)_{H_1} Q\psi_{rq}^0\right\},$$

olduğundan, (2.14) bağıntısı

$$M_{p2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{(Q\psi_{mn}^0, \psi_{rq}^0)_{H_1}(Q\psi_{rq}^0, \psi_{rq}^0)_{H_1}}{(\lambda-\mu_m)(\lambda-\mu_r)}\right)\right]d\lambda \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_m)(\lambda-\mu_r)} = 0\ ; \quad m,r \le p \quad (2.16)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. $m,r > p$ için,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_m)(\lambda-\mu_r)} = 0$$

olduğundan ve (2.15) ve (2.16) bağıntıları kullanılarak,

$$M_{p2} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=p+1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}(Q\psi_{mn}^0, \psi_{rq}^0)_{H_1}(Q\psi_{rq}^0, \psi_{rq}^0)_{H_1}\int_{|\lambda|=b_p}\frac{1}{(\lambda-\mu_m)(\lambda-\mu_r)}$$

$$= \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=p+1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}(\mu_m - \mu_r)^{-1}\,|(Q\psi_{mn}^0, \psi_{rq}^0)_{H_1}|^2 .$$

elde edilir. Bu da

$$|M_{p2}| \le \sum_{r=p+1}^{\infty}(\mu_r - \mu_p)^{-1}\sum_{q=1}^{\infty}\|Q\psi_{rq}^0\|_{H_1}^2 .$$

olduğunu gösterir.

$$\sum_{q=1}^{\infty}\|Q\psi_{rq}^0\|_{H_1}^2 \le \sum_{q=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\|Q(x)\varphi_q\|^2\,dx = \sum_{q=1}^{\infty}\|Q(x)\varphi_q\|_{H_1}^2 < C \quad (C \text{ bir pozitif sayı})$$

olup buradan

$$|M_{p2}| < C\sum_{r=p+1}^{\infty}(\mu_r - \mu_p)^{-1}$$

çıkar. Ayrıca,

$$\sum_{r=p+1}^{\infty}(\mu_r - \mu_p)^{-1} < 2p^{-\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

Scanned with CamScanner

olup dolayısıyla $|M_{p2}| < 2Cp^{-1}$ olduğu göz önüne alınırsa, $\lim_{p\to\infty} M_{p2} = 0$ bulunur.

Benzer şekilde

$$\lim_{p\to\infty} M_{p3} = 0$$

olduğu gösterilebilir. Son olarak, $j \geq 4$ için

$$\lim_{p\to\infty} M_{pj} = 0$$

olduğunu gösterelim.

$$\| QR_\lambda^0 \|_{\sigma_1(H_1)} \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{m} \| QR_\lambda^0 \psi_{mn}^0 \|_{H_1}$$

olduğundan

$$\| QR_\lambda^0 \|_{\sigma_1(H_1)} < C_1 \sum_{m=0}^{\infty} |\mu_m - \lambda|^{-1} \qquad (2.18)$$

bulunur. Burada C_1 bir pozitif sabittir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} |\mu_m - \lambda|^{-1} &= \sum_{m=0}^{p} |\mu_m - \lambda|^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty} |\mu_m - \lambda|^{-1} \\
&\leq \sum_{m=0}^{p} (|\lambda| - \mu_m|^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty} (\mu_m - |\lambda|)^{-1} \\
&= \sum_{m=0}^{p} (\mu_p + p - \mu_m)^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty} (\mu_m - \mu_p - p)^{-1} \\
&< \sum_{m=0}^{p} p^{-1} + \sum_{m=p+1}^{\infty} [\frac{1}{2}(\mu_m - \mu_p) + \frac{1}{2}(\mu_m - \mu_p) - p]^{-1} \\
&< 2 + \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{2}{\mu_m - \mu_p} < 2 + \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{2}{m^2 - p^2}.
\end{aligned}$$

olup (2.17)'den,

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\mu_m - \lambda|^{-1} < 6$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.18)'den bir C_2 pozitif sabiti için

$$\| QR_\lambda^0 \|_{\sigma_1(H_1)} < C_2 \;;|\lambda| = b_p = \mu_p + p \qquad (2.19)$$

bulunur. $|\lambda| = b_p = \mu_p + p$ çemberi üzerinde $\| R_\lambda^0 \|_{H_1}$ ifadesini sınırlandıralım: $m \leq p$ için

$$|\mu_p - \lambda| \geq |\lambda| - \mu_m \geq p^2 + p - m$$

ve $m \geq p+1$ için

$$|\mu_m - \lambda| \geq \mu_m - |\lambda| = \mu_m - \mu_p - p \geq (p+1)^2 - p^2 - p$$

dir. Bu da

Scanned with CamScanner

$$|\mu_m - \lambda|^{-1} \le p^{-1} \; ; |\lambda| = b_p = \mu_p + p$$

olduğunu gösterir ve $\| R_\lambda^0 \|_{H_1} \le \max_m \{|\mu_m - \lambda|^{-1}\}$ olduğundan

$$\| R_\lambda^0 \|_{H_1} \le p^{-1} \qquad (2.20)$$

bulunur.

(2.10), (2.19) ve (2.20)

$$|M_{pj}| = \frac{1}{2\pi i}\left|\int_{|\lambda|=b_p} tr(QR_\lambda^0)^j \, d\lambda\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \| (QR_\lambda^0)^j \|_{\sigma_1(H_1)} |\, d\lambda\,|$$

$$\le \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=b_p} \| (QR_\lambda^0) \|_{\sigma_1(H_1)} \| (QR_\lambda^0)^{j-1} \|_{H_1} |\, d\lambda\,|$$

$$\le (2\pi i)^{-1}\int_{|\lambda|=b_p} \| (QR_\lambda^0) \|_{\sigma_1(H_1)} \| Q \|_{H_1}^{j-1} \| R_\lambda^0 \|_{H_1}^{j-1} |\, d\lambda\,|$$

$$\le (2\pi i)^{-1} C_2 \int_{|\lambda|=b_p} p^{1-j} \, |\, d\lambda\,| \le C_3 p^{3-j}, \quad (C_3 > 0)$$

elde edilir.Böylece $j \ge 4$ için

$$\lim_{p\to\infty} M_{pj} = 0$$

bulunur.

$|\lambda_{mn} - \mu_m| < 1 \;\; (m = 0,1,2,\ldots; n = 1,2,3,\ldots)$

olduğu dikkate alınırsa, benzer bir yolla

$$\| R_\lambda \|_{H_1} \le C_4 p^{-1} \; ; \; C_4 > 0 \qquad (2.21)$$

elde edilir.
(2.8), (2.19), (2.20) ve (2.21)'den

$$|M_p^N| = \frac{1}{2\pi i}\left|\int_{|\lambda|=b_p} \lambda tr[R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1}] d\lambda\right|$$

$$\le \int_{|\lambda|=b_p} |\lambda| \, \| tr[R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1}] \| \, d\lambda\,|$$

Scanned with CamScanner

$$\le b_p \int_{|\lambda|=b_p} \| R_\lambda (QR_\lambda^0)^{N+1} \|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le b_p \int_{|\lambda|=b_p} \| R_\lambda \|_{H_1} \| (QR_\lambda^0)^{N+1} \|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le C_4 b_p p^{-1} \int_{|\lambda|=b_p} \| QR_\lambda^0 \|_{H_1}^N \| QR_\lambda^0 \|_{\sigma_1(H_1)} |d\lambda|$$

$$\le C_4 b_p p^{-1} \| Q \|^N \; p^{-N} C_2 2\pi b_p$$

$$\le C_5 p^{3-N} \qquad (C_5 > 0)$$

olup ve dolayısıyla

$$\lim_{p\to\infty} M_p^{(N)} = 0 \; ; \quad N \ge 4 \tag{2.22}$$

elde edilir.

Çalışmanın ana sonucu aşağıdaki Teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.2
$Q(x)$ operatör fonksiyonunun 1)-4) koşullarını sağladığını kabul edelim. O taktirde L operatörü için düzenli iz formülü

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{mn}-\mu_m)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} trQ(x)dx\right]=\frac{1}{4}[trQ(0)-trQ(\pi)]$$

şeklindedir.

İspat:(2.9), (2.22) ve Teorem 2.1'den

$$\lim_{p\to\infty}\left[\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{mn}-\mu_m)-\frac{p+1}{\pi}\int_0^{\pi} trQ(x)dx\right]=\frac{1}{\pi}\lim_{p\to\infty}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos(2m+1)x\,dx.$$

bulunur. Bu eşitlik

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{mn}-\mu_m)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} trQ(x)dx\right]=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos(2m+1)x\,dx. \tag{2.23}$$

şeklinde yazılabilir.

$$I=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos(2m+1)x\,dx.$$

olsun. $Q(x)$'in tanımı gereği

$$\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos(2m+1)x\,dx\right|<\infty \tag{2.24}$$

Scanned with CamScanner

olduğu gösterilebilir. Böylece

$$I=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{p}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos(2m+1)x\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{p}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos mx\,dx-(-1)^m\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos mx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{p}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos mx\,dx\right]\cos m0+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)dx\right\}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{p}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)\cos mx\,dx\right]\cos m\pi+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)dx\right\}$$

dir. Bu bağıntının sonundaki m'ye göre toplamlar, ikinci mertebeden türeve sahip olan $(Q(x)\varphi_n,\varphi_n)$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığında $\{\cos mx\}_{m=0}^{\infty}$ fonksiyonlarına göre Fourier serisinin 0 ve π noktalarındaki değerleridir. Bu nedenle

$$I=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(Q(0)\varphi_n,\varphi_n)-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(Q(\pi)\varphi_n,\varphi_n)$$

$$=\frac{1}{4}[trQ(0)-trQ(\pi)]$$

elde edilir.

Referanslar

[1] Adıgüzelov, E., Avcı, H., Gül, E. : The trace formula for Sturm-Liouville operator with operator coefficient, J. Math. Phys., Vol.42, No:6, (2001), pp.1611-1624, Zbl 1016.34021

[2] Chalilova, R. Z. : On regularization of the trace of the Sturm-Liouville operator equation, Funks. Analiz, teoriya funksiy i ik pril Mahaçkala 3, (1976), pp. 154-161

[3] Dikiy, L. A. : About a formula of Gelfand-Levitan, Usp. Math. Nauk, 8, (1953), pp. 119-123

[4] Fulton, T. C., Pruess, S. A. : Eigenvalue and eigenfunction asymptotics for regular Sturm-Liouville problems, J. Math. Anal. Appl., 188, (1994), pp. 297-340

[5] Gelfand, I. M., Levitan, B. M. : On a formula for eigenvalues of a differential operator of second order, Dokl. Akad. Nauk SSSR 88(4), (1953), pp. 593-596, Zbl 0053.06001

Scanned with CamScanner

[6] Gohberg, I. C., Krein, M. G., Introduction to the Theory of Linear Non-self Adjoint Operators, Translation of Mathematical Monographs, Vol. 18 (AMS, Providence, RI), (1969)Zbl 0181.13504

[7] Gül, E. : The trace formula for a differential operator of forth order with bounded operator coefficeents and two term, Turk J Math 28 , (2004), pp. 231-254, Zbl 1082.47040

[8] Gül, E.: A regularized trace formula for a differential operator of second order with unbounded operator coefficeents given in a finite interval, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 32, No. 2, (2006), pp. 225-244

[9] Halberg, C. J., Kramer, V.A. : A generalization of the trace concept, Duke Math. j. 27, (1960), pp. 607-618

[10] Kirillov, A.A. : Elements of the theory of representations, Springer verlag, New York, (1976) Zbl 0342.22001

[11] Levitan, B. M., Sargsyan, I. S.: Sturm-Liouville and Dirac Operators, Kluwer Dordrecht (1991)

[12] Lystemik, L.A., Sobolev, V.I.: Elements of functional analysis, (English Translation), New York Fredrich Ungar, (1979)

[13] Maksudov, G., Bayramoglu, M., Adygezalov, A. A.: On regularized trace of Sturm-Liouville operator on a finite interval with the unbounded operator coefficient, Dokl. Akad. Nauk SSSR 30(1), (1984), pp. 169-173, Zbl 0599.34076

Scanned with CamScanner