T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENİŞLETİLMİŞ DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ İLE İKİ YÖNLÜ TELEOPERASYON SİSTEMLERİ İÇİN DAYANIKLI H-SONSUZ KONTROLÖR TASARIMI

Bilal GÖRMÜŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Makine Teorisi ve Kontrol Programı

Danışman
Doç. Dr. Hakan YAZICI

Temmuz, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENİŞLETİLMİŞ DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ İLE İKİ YÖNLÜ TELEOPERASYON SİSTEMLERİ İÇİN DAYANIKLI H-SONSUZ KONTROLÖR TASARIMI

Bilal GÖRMÜŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 06.07.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Makine Teorisi ve Kontrol Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Hakan YAZICI
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hakan YAZICI, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Muzaffer METİN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Ali Fuat ERGENÇ, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Hakan YAZICI sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Genişletilmiş Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile İki Yönlü Teleoperasyon Sistemleri İçin Dayanıklı H-Sonsuz Kontrolör Tasarımı başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Bilal GÖRMÜŞ

İmza

TEŞEKKÜR

Öncelikle yüksek lisans eğitimim boyunca bana bütün bilgi birikimini açan, beni kontrol teorisi ile tanıştıran, manevi açıdan her zaman yanımda olan ve öğretilerini hayatım boyunca hatırlayacağım tez danışmanım Doç. Dr. Hakan YAZICI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam sırasında benimle bilgi birikimini paylaşmaktan çekinmeyen, dayanıklı kontrol konusunda gelişmemde büyük katkıları olan sayın hocam Prof. Dr. İbrahim Beklan KÜÇÜKDEMİRAL'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim sırasında ders aldığım ve sistem teorisini bana öğreten hocalarım Prof. Dr. Mehmet Nur Alpaslan PARLAKÇI ve Dr. Öğr. Ü. Yavuz EREN'e teşekkür ederim. Her zaman bilgisinden faydalandığım ve ilgisini esirgemeyen değerli meslektaşım Arş. Gör. Ezgi ÖZÜLKÜ'ye teşekkür ederim. Ayrıca tez çalışması sırasında beni manevi olarak destekleyen çalışma arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ve her zaman yanımda olarak bana inanan babam Abdullah GÖRMÜŞ'e, annem Huriye GÖRMÜŞ'e ve abim Tahsin GÖRMÜŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bilal GÖRMÜŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vi

KISALTMA LİSTESİ x

ŞEKİL LİSTESİ xi

TABLO LİSTESİ xiii

ÖZET xiv

ABSTRACT xvi

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 3

1.2 Tezin Amacı 9

1.3 Hipotez 10

2 İKİ YÖNLÜ TELEOPERASYON SİSTEMİNİN MATEMATİKSEL MODELİ VE BELİRSİZLİK TANIMLAMALARI 12

2.1 Nominal Sistem 13

2.2 Normu Sınırlı Tipte Belirsiz Sistem 15

2.3 Politopik Tipte Belirsiz Sistem 17

3 KONTROLÖR TASARIMLARI İÇİN TEMEL SONUÇLAR 22

3.1 Dışbükey Optimizasyon 22

3.2 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri 24

3.2.1 Lyapunov Kararlılığı 24

3.2.2 H_∞ Normu 25

3.3 Standart Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile Dayanıklı H_∞ Kontrolör Tasarımı 26

3.4 Genişletilmiş Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile Dayanıklı H_∞ Kontrolör Tasarımı 33

4 SAYISAL BENZETİM ÇALIŞMALARI 47

4.1 Normu Sınırlı Belirsiz Sistemin Kontrolü 48
4.1.1 Örnek 1 49
4.1.2 Örnek 2 52
4.2 Politopik Belirsiz Sistemin Kontrolü 55
4.2.1 Örnek 3 57

5 SONUÇ VE ÖNERİLER **82**

KAYNAKÇA **83**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **87**

SİMGE LİSTESİ

$\prod$	Çarpım Serisi
$f_e(t)$	Çevresel-Kaynaklı Dış Kuvvet
k_e	Çevresel-Kaynaklı Kuvvetin Rijitlik Katsayısı
b_e	Çevresel-Kaynaklı Kuvvetin Sönüm Katsayısı
λ	Çizgisel Tarama Skaleri
B_w	Dış Kuvvet Giriş Matrisi
$w(t)$	Dış Kuvvet Giriş Vektörü
$e_w(t)$	Dış Kuvvetler Arasındaki İzleme Hatası
β	$e_w(t)$'nın Ağırlıklandırma Parametresi
$\mathsf{diag}(\cdot)$	Diyagonal Matris
$x(t)$	Durum Vektörü
γ_∞	En Düşük Dış Kuvvet Bastırma Seviyesi
$\|\cdot\|_2$	H_2 Normu
$\|\cdot\|_\infty$	H_∞ Normu
$\forall$	Her Durum İçin
$\mathsf{He}\{\cdot\}$	$\mathsf{He}\{\cdot\} = \{\cdot\} + \{\cdot\}^T$
ζ_i	İlgili Belirsiz Parametrenin Normu Sınırlı $F(t)$ Elemanı
p_i	İlgili Belirsiz Parametrenin Normu Sınırlı Parametre Belirsizliği Üst Sınırı
E_i	İlgili Belirsiz Parametrenin Yapısını Tanımlayan Bilinen Sabit Reel Matris
G_i	İlgili Belirsiz Parametrenin Yapısını Tanımlayan Bilinen Sabit Reel Matris
$\in$	İlgili Kümenin Elemanı Olmak

$\blacksquare$	İspat Sonu
Γ	Kapalı-Çevrim Nominal Sistem
Λ	Kapalı-Çevrim Normu Sınırlı Belirsiz Sistem
Υ	Kapalı-Çevrim Politopik Belirsiz Sistem
$\mathsf{co}(\cdot)$	Kombinasyon
$z(t)$	Kontrol Çıkış Vektörü
D_w	Kontrol Dış Kuvvet Çıkış Matrisi
C	Kontrol Durum Çıkış Matrisi
D_u	Kontrol Kuvveti Çıkış Matrisi
B_u	Kontrol Kuvveti Giriş Matrisi
$u(t)$	Kontrol Kuvveti Giriş Vektörü
K	Kontrolör Kazancı
Σ	Kontrolsüz Halde Kararlı Nominal Sistem
$F(t)$	Lebesque Ölçülebilir Matris Fonksiyonu
$*$	Matristeki Simetrik Olan Blok Eleman
$\mathbb{R}^n$	n Boyutlu Vektör Uzayı
$\mathbb{R}^{n\times n}$	$n \times n$ Boyutlu Reel Matrisler Kümesi
$<$	Negatif Tanımlılık
$\leq$	Negatif Yarı Tanımlılık
$(\cdot)^+$	$(\cdot)$'nın Moore-Penrose Tersi
$\mathsf{sup}(\cdot)$	$(\cdot)$'nın Supremumu
$(\cdot)^{-1}$	$(\cdot)$'nın Tersi
$(\cdot)^T$	$(\cdot)$'nın Transpozu
ΔA	Normu Sınırlı Belirsiz A Matrisi
ΔB_u	Normu Sınırlı Belirsiz B_u Matrisi
ΔB_w	Normu Sınırlı Belirsiz B_w Matrisi
$f_h(t)$	Operatör Dış Kuvvet
k_h	Operatör Kuvvetinin Rijitlik Katsayısı
c_h	Operatör Kuvvetinin Sönüm Katsayısı

$A(\theta)$	Politopik Belirsiz A Matrisi
$B_u(\theta)$	Politopik Belirsiz B_u Matrisi
$B_w(\theta)$	Politopik Belirsiz B_w Matrisi
$\theta(t)$	Politopik Belirsizlik Vektörü
σ	Politopik Koordinat
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$>$	Pozitif Tanımlılık
$\geq$	Pozitif Yarı Tanımlılık
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$h_0(t)$	Referans Girişi
$\int e_{t_m}(t)dt$	Referans Sinyali ile Yöneten Alt Sistem Arasındaki İzleme Hatası İntegrali
α	$\int e_{t_m}(t)dt$'nin Ağırlıklandırma Parametresi
$\int e_{t_s}(t)dt$	Referans Sinyali ile Yönetilen Alt Sistem Arasındaki İzleme Hatası İntegrali
δ	$\int e_{t_s}(t)dt$'nin Ağırlıklandırma Parametresi
A	Sistem Matrisi
$Re(s)$	s Kompleks Sayısının Reel Kısmı
$:=$	Tanımsal Eşitlik
$\sum$	Toplam Serisi
I	Uygun Boyutlu Birim Matris
0	Uygun Boyutlu Sıfır Matris
$u_m(t)$	Yöneten Alt Sisteme Uygulanan Kontrol Kuvveti
η_m	$u_m(t)$'nin Ağırlıklandırma Parametresi
m_m	Yöneten Alt Sistemin Kütlesi
b_m	Yöneten Alt Sistemin Sönüm Katsayısı
$x_m(t)$	Yöneten Alt Sistemin Yatay Yer Değiştirmesi
$u_s(t)$	Yönetilen Alt Sisteme Uygulanan Kontrol Kuvveti
η_s	$u_s(t)$'nin Ağırlıklandırma Parametresi

m_s	Yönetilen Alt Sistemin Kütlesi
b_s	Yönetilen Alt Sistemin Sönüm Katsayısı
$x_s(t)$	Yönetilen Alt Sistemin Yatay Yer Değiştirmesi

KISALTMA LİSTESİ

DME	Doğrusal Matris Eşitsizliği
GDME	Genişletilmiş Doğrusal Matris Eşitsizliği
SDME	Standart Doğrusal Matris Eşitsizliği

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 İki yönlü teleoperasyon sistemi 12
Şekil 4.1 Örnek 1 ile elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 51
Şekil 4.2 Örnek 1'de oluşan kontrol kuvvetleri 52
Şekil 4.3 Örnek 2 ile elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 54
Şekil 4.4 Örnek 2'de oluşan kontrol kuvvetleri 55
Şekil 4.5 Örnek 3 ile 1. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 59
Şekil 4.6 Örnek 3 ile 1. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 59
Şekil 4.7 Örnek 3 ile 2. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 60
Şekil 4.8 Örnek 3 ile 2. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 60
Şekil 4.9 Örnek 3 ile 3. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 61
Şekil 4.10 Örnek 3 ile 3. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 61
Şekil 4.11 Örnek 3 ile 4. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 62
Şekil 4.12 Örnek 3 ile 4. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 62
Şekil 4.13 Örnek 3 ile 5. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 63
Şekil 4.14 Örnek 3 ile 5. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 63
Şekil 4.15 Örnek 3 ile 6. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 64
Şekil 4.16 Örnek 3 ile 6. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 64
Şekil 4.17 Örnek 3 ile 7. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 65
Şekil 4.18 Örnek 3 ile 7. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 65
Şekil 4.19 Örnek 3 ile 8. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 66
Şekil 4.20 Örnek 3 ile 8. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 66
Şekil 4.21 Örnek 3 ile 9. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 67

Şekil 4.22 Örnek 3 ile 9. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 67
Şekil 4.23 Örnek 3 ile 10. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 68
Şekil 4.24 Örnek 3 ile 10. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 68
Şekil 4.25 Örnek 3 ile 11. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 69
Şekil 4.26 Örnek 3 ile 11. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 69
Şekil 4.27 Örnek 3 ile 12. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 70
Şekil 4.28 Örnek 3 ile 12. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 70
Şekil 4.29 Örnek 3 ile 13. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 71
Şekil 4.30 Örnek 3 ile 13. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 71
Şekil 4.31 Örnek 3 ile 14. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 72
Şekil 4.32 Örnek 3 ile 14. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 72
Şekil 4.33 Örnek 3 ile 15. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 73
Şekil 4.34 Örnek 3 ile 15. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 73
Şekil 4.35 Örnek 3 ile 16. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması 74
Şekil 4.36 Örnek 3 ile 16. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri 74
Şekil 4.37 Yöneten alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök değerleri ile referans takibi 76
Şekil 4.38 Yöneten alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen maksimum değerler ile referans takibi 76
Şekil 4.39 Yöneten alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök ve maksimum değerler ile kuvvet yansıması 77
Şekil 4.40 Yöneten alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök ve maksimum değerler ile kontrol kuvvetleri 77
Şekil 4.41 Yönetilen alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök değerleri ile referans takibi 79
Şekil 4.42 Yönetilen alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen maksimum değerler ile referans takibi 79
Şekil 4.43 Yönetilen alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök ve maksimum değerler ile kuvvet yansıması 80
Şekil 4.44 Yönetilen alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök ve maksimum değerler ile kontrol kuvvetleri 80

TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1 Sistem parametreleri [2] 47
Tablo 4.2 Normu sınırlı belirsiz sistem için tasarlanan dayanıklı kontrolörler . 49
Tablo 4.3 Örnek 1 ile hesaplanan γ_∞ kazançları 50
Tablo 4.4 Örnek 1 ile hesaplanan kontrolör kazançları 50
Tablo 4.5 Örnek 1'deki genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için yapılan çizgisel tarama 50
Tablo 4.6 Örnek 2 ile hesaplanan γ_∞ kazançları 52
Tablo 4.7 Örnek 2 ile hesaplanan kontrolör kazançları 53
Tablo 4.8 Örnek 2'deki genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için yapılan çizgisel tarama 53
Tablo 4.9 Politopik belirsiz sistem için tasarlanan dayanıklı kontrolörler 57
Tablo 4.10 Örnek 3'teki politopik belirsiz parametrelerin alt ve üst değerleri . . 57
Tablo 4.11 Örnek 3 ile hesaplanan γ_∞ kazançları 57
Tablo 4.12 Örnek 3 ile hesaplanan kontrolör kazançları 58
Tablo 4.13 Örnek 3'teki genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için yapılan çizgisel tarama 58
Tablo 4.14 Yöneten alt sistem için elde edilen ortalama karekök değerleri 78
Tablo 4.15 Yöneten alt sistem için elde edilen maksimum değerler 78
Tablo 4.16 Yönetilen alt sistem için elde edilen ortalama karekök değerleri . . . 81
Tablo 4.17 Yönetilen alt sistem için elde edilen maksimum değerler 81

ÖZET

Genişletilmiş Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile İki Yönlü Teleoperasyon Sistemleri İçin Dayanıklı H-Sonsuz Kontrolör Tasarımı

Bilal GÖRMÜŞ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Hakan YAZICI

Bu yüksek lisans tezinde, odaklanılan yöneten/yönetilen alt sistemin kütle ve sönüm katsayılarında politopik tipte parametrik belirsizlikler olan iki yönlü teleoperasyon sistemi için dayanıklı durum-geri beslemeli H_∞ kontrolörü önerilmiştir. Önerilen yeni tasarım yöntemi, dayanıklı kararlılık ile başarılı referans izleme ve kuvvet yansıması performansı sağlar. İki performans hedefi ve dayanıklı kararlılık gerekliliği birbiriyle ödünleştiğinden, iki yönlü teleoperasyon sisteminin kontrolü çok amaçlı bir probleme dönüşür. Bu kontrol problemi, kontrol stratejisinin pratikte uygulanabilirliğini azaltan tutuculuğa neden olur. Önerilen yöntem, genişlemiş doğrusal matris eşitsizlikleri ile tutuculuğu azaltır. Ayrıca önerilen yöntemle karşılaştırmak için standart doğrusal matris eşitsizliğine dayalı politopik tipte dayanıklı kontrolör tasarlanmıştır. Benzer şekilde politopik tipte kontrolörlerle karşılaştırmak için, normu sınırlı tipte belirsizlikler hem standart hem de genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolör tasarımlarında kullanılmıştır.

Tek serbestlik dereceli belirsiz iki yönlü teleoperasyon sisteminin sayısal benzetim sonuçları, genişletilmiş doğrusal matris eşitsizliği temelli H_∞ kontrolünün, standart H_∞ kontrole kıyasla daha düşük H_∞ normu karşıladığını göstermektedir. Dahası önerilen yöntemin, zorlayıcı normu sınırlı ve politopik tipte parametre belirsizliklerine rağmen performans hedeflerine ulaşmada çok başarılı olduğu görülmektedir. Ayrıca politopik tip belirsizlikler için H_∞ kontrolü, normu sınırlı belirsizlikler için H_∞ kontrolünden daha yüksek belirsizlik sınırını karşılar.

Anahtar Kelimeler:

Genişletilmiş doğrusal matris eşitsizlikleri, dayanıklı optimal H_∞ kontrolü, normu sınırlı belirsizlikler, politopik belirsizlikler, iki yönlü teleoperasyon sistemi.

ABSTRACT

Robust H-Infinity Controller Design for Bilateral Teleoperation Systems via Dilated Linear Matrix Inequalities

Bilal GÖRMÜŞ

Department of Mechanical Engineering
Master of Science Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Hakan YAZICI

In this M.Sc. thesis, a robust state-feedback H_∞ controller is proposed for a bilateral teleoperation system having polytopic type parametric uncertainties on mass and damping coefficient of the considered master/slave subsystem. The proposed new design method ensures robust stability and successful reference tracking and force reflection performance. As two performance objectives and robust stability requirement are conflicting with each other, the control of the bilateral teleoperation system turns into a multi-objective problem. This control problem causes conservatism, which decreases practically applicable of the control strategy. The proposed method reduces the associated conservatism with dilated linear matrix inequalities. Moreover, in order to compare with the proposed method, standard linear matrix inequality based polytopic type robust controller is designed. Similarly, to compare with polytopic type controllers, norm-bounded type uncertainties are used for both standard and dilated robust H_∞ controller design.

Numerical simulation results on a one-degree-of-freedom uncertain bilateral teleoperation system show that dilated linear matrix inequality based H_∞-control satisfies lower H_∞-norm than a standard H_∞-control. Moreover, the proposed method demonstrates a very successful performance in achieving performance objectives despite the stringent norm-bounded and polytopic type parameter uncertainties. Besides, the H_∞-control for the polytopic type uncertainties satisfies higher uncertainty bound than the H_∞-control for the norm-bounded uncertainties.

Keywords:

Dilated linear matrix inequalities, robust optimal H_∞ control, norm-bounded uncertainties, polytopic uncertainties, bilateral teleoperation system.

1
GİRİŞ

Yarım yüzyıldan uzun bir süredir üzerinde çalışılan teleoperasyon sistemleri, uzaktan kontrollü robotların bilinen en geniş uygulamalarından biridir. Yunan kökenli ön ek olan *tele*, uzaktan anlamına gelmektedir [1]. Dolayısıyla teleoperasyon, uzaktaki bir konumda operasyon gerçekleştirmektir. Genel bir teleoperasyon sistemi, operatör, yöneten alt sistem, iletişim kanalı, yönetilen alt sistem ve çevreden oluşmaktadır. Burada oluşan işlem, operatörün bir manipülatör yardımıyla yöneten alt sisteme etki etmesiyle başlar. Bu etki bir yer değiştirmedir ve iletişim kanalı ile uzaktaki yönetilen alt sisteme iletilir. Yönetilen alt sistem, gelen bu bilgiler ışığında yöneten alt sistemi taklit etmeye çalışır. Alt sistemler arasındaki pozisyon takibi olarak tanımlanan bu duruma referans takibi denir. Ayrıca yönetilen alt sistemin bulunduğu ortam, çevre olarak isimlendirilir ve burada iki farklı hareket durumu mevcuttur. Eğer yönetilen alt sisteme çevresel-kaynaklı bir kuvvet etki etmiyorsa, buna *serbest hareket* denir. Aksi durum, *temas-halinde hareket* olarak isimlendirilir [1].

İki yönlü teleoperasyon, yönetilen alt sistemdeki bilgilerin de yöneten alt sisteme iletilmesi temeline dayanır. Bu durum, teleoperasyon sistemini iki yönlü yapar. İki yönlü teleoperasyon sistemlerinde pozisyon bilgileri dışında iletilebilecek bir diğer etki, yöneten ve yönetilen alt sistemlere etki eden dış kuvvetlerdir. Yöneten alt sistemden gelen pozisyon bilgileriyle hareket eden yönetilen alt sistem, uzaktaki konumda temas-halinde hareket ederse, sistemde çevresel-kaynaklı kuvvet oluşur. Bu kuvvetin yöneten alt sisteme iletilmesi ve operatör tarafından hissedilmesi, operatörün uzaktaki konumdaymış gibi hissetmesini sağlar. Alt sistemler arasındaki kuvvet takibi olarak karşımıza çıkan bu duruma şeffaflık veya kuvvet yansıması denir. İki yönlü teleoperasyon sistemleri, normalde insan yeteneğinin kullanılamayacağı, çok büyük kütlelerinin hareketlendirilmesinden çok hassas mikro cerrahi işlemlerine, tehlikeli veya ulaşılmaz yerlerde, sağlığa zararlı durumlarda insan yeteneğini kullanmamıza imkan verir. Bu amaçla iki yönlü teleoperasyon sistemleri, uzay ve su altı araştırmalarından, cerrahi işlemlere birçok alanda kullanılmaktadır [2].

İki yönlü teleoperasyon sisteminin kontrolü, performans kriterleri sebebiyle oldukça zorlayıcı bir problemdir. Burada kararlılık şartı altında, sistemin referans takip ve kuvvet yansıması performanslarını göstermesi beklenmektedir. Ancak kuvvet yansıması, sistemin kararlılığı ile çelişen bir etkidir [1]. Ayrıca uygulama alanlarındaki yüksek performans gereksinimi de göz önüne alındığında, parametre belirsizlikleri bir diğer öne çıkan problemdir. Parametre belirsizlikleri, sistemde performans düşüşüne ve hatta kararsızlığa neden olmaktadır. Bu nedenle kontrolör tasarımlarında parametre belirsizliklerine dayanıklı kararlılık şartı aranmalıdır.

İki yönlü teleoperasyon sistemi için yapılan kontrolör tasarım sürecinde, zorlayıcı performans kriterleri ve dayanıklı kararlılık bir arada ele alındığında bir ödünleşmenin yaşanılması kaçınılmazdır [3]. DME'ler ile tasarlanan çok amaçlı kontrol problemlerinin çözümünde yaşanılan bu ödünleşme durumu tutuculuğu arttırır. Bu nedenle çözüm için ihtiyaç duyulan kontrol kuvvetleri ve minimum dış kuvvet bastırma seviyesini tanımlayan H_∞ normu artmaktadır. Performans düşüşüne neden olan bu etkiler, tasarımın pratikte uygulanabilirliği azaltır. Bu bağlamda genişletilmiş doğrusal matris eşitsizliği (GDME) temelli tasarım, standart doğrusal matris eşitsizliği (SDME) temelli tasarıma kıyasla tutuculuğu azaltmaktadır.

Bütün bu bilgiler ışığında yüksek lisans tezinde, politopik tipte parametre belirsizliği içeren iki yönlü teleoperasyon sistemleri için, kararlılık şartını Lyapunov Kararlılık Teoremi ile sağlayan, referans takibi ve kuvvet yansıması performans kriterlerini H_∞ normu ile tanımlayan, daha az tutucu sonuçlar veren GDME'ler ile üretilmiş, yeni bir dayanıklı genişletilmiş H_∞ kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir. Ayrıca önerilen bu kontrolörün etkinliği, SDME'ler ile üretilen politopik tipte parametre belirsizliklerine dayanıklı standart H_∞ kontrolör ile karşılaştırılarak gösterilmiştir. Öte yandan tez çalışmasında, normu sınırlı tipte parametre belirsizliklerine dayanıklı standart ve genişletilmiş H_∞ kontrolör tasarımları da gerçekleştirilmiştir. Böylelikle belirsizlik yöntemleri birbiriyle karşılaştırılarak hem en yüksek belirsizlik sınırına ulaşılmış, hem de yeni sentez metodunun farklı belirsizlik tiplerindeki etkinliği araştırılmıştır.

Yüksek lisans tezi 5 bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1, literatür özeti, tezin amacı ve hipotez alt bölümlerinden oluşmaktadır. Bu bölümde iki yönlü teleoperasyon sistemi ve kontrolünün tanıtılmasının ardından, literatürde daha önce yapılan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. Literatürdeki çalışmalar ışığında belirlenen tezin amacı ve hipotez ortaya konulmuştur.

Bölüm 2, iki yönlü teleoperasyon sisteminin matematiksel modeli ve belirsizlik tanımlamalarından oluşmaktadır. İlk olarak nominal sistemin tanımlanmasının ardından, sırasıyla normu sınırlı tipte ve politopik tipte belirsizlikler işlenmiştir.

Böylelikle nominal, normu sınırlı tipte belirsiz ve politopik tipte belirsiz üç farklı iki yönlü teleoperasyon sistemi oluşturulmuştur.

Bölüm 3, dışbükey optimizasyon ve doğrusal matris eşitsizliği (DME) için yapılan tanımlamalarla başlamıştır. Geliştirilen kontrolörler ise, iki alt başlık altında verilmiştir. İlk kısım, SDME üzerine temellendirilen H_∞ kontrolörleri içerir. Öncelikle nominal sistem için H_∞ kontrolörüne yer verilmiştir. Daha sonra, sistemdeki parametrelerin normu sınırlı ve politopik tipte belirsiz olduğu sistemler için dayanıklı H_∞ kontrolör sentezleri gerçekleştirilmiştir. İkinci bölüm ise, tanımlanan çok amaçlı kontrol probleminde tutuculuğu azaltmak için kullanılan GDME temelli H_∞ kontrolörleri içerir. Bu bölüm, yeni sentez metodunun temelini oluşturan ve DME'leri genişletmek için kullanılan Projeksiyon Lemması ve ispatıyla başlar. Ardından, önerilen tasarım metodu ile sırasıyla nominal H_∞, normu sınırlı tipte belirsizliklere dayanıklı H_∞ ve politopik tipte belirsizliklere dayanıklı H_∞ kontrolör sentezleri gerçekleştirilmiştir.

Bölüm 4, geliştirilen kontrolörlerin etkinliğini saptamak için yapılan sayısal benzetim çalışmalarını içermektedir. Öncelikle, benzetim çalışmalarında kullanılan tek serbestlik dereceli iki yönlü teleoperasyon sisteminin parametreleri verilmiştir. Ardından normu sınırlı tipte belirsiz kontrolörlerin kontrol çıkış vektörü ve iki farklı sayısal benzetim örneği oluşturulmuştur. Son olarak, politopik tipte belirsiz kontrolörlerin kontrol çıkış vektörü ve sayısal benzetim örneğine yer verilmiştir. Bu bölümde elde edilen sayısal benzetim sonuçları ile önerilen kontrolörün etkinliği ortaya konmuştur.

Son olarak Bölüm 5'te, tez çalışmasının sonuçları değerlendirilmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalara yer verilmiştir.

1.1 Literatür Özeti

Bilinen ilk teleoperasyon sistemi, 1940'ların ortalarında Amerikan bilim insanı R. C. Goertz tarafından kurulmuştur [4]. Sistemin bu ilk versiyonu, mekanik olarak kontrol edilmiştir. Daha sonraları bu sistem, pozisyon takibini sağlayacak bir kuvvet üreten servo mekanizmasıyla geliştirilmiştir.

İki yönlü teleoperasyon üzerine bilinen ilk çalışmalar ise, Sheridan ve Ferrell [5] tarafından yapılan çalışmadır. Sheridan ve Ferrell, *hareket et ve bekle* stratejisiyle sistemin kararlılığını sağlamaya çalışıp, kuvvet yansımasını kullanmamışlardır. Daha sonraları, Ferrell [6] tarafından sisteme kuvvet yansıması eklenmiştir. Yapılan bu çalışmalarda ancak çok dar bir bant genişliğinde sistem kararlı kılınabilmiştir.

Kontrol teorisindeki gelişmelerle birlikte, 1980'li yıllarla daha gelişmiş kontrol sistemleri oluşmaya başlamıştır. 1986 yılında Miyazaki vd. [7] tarafından yapılan Lyapunov tabanlı analiz ve 1987 yılında Furuta vd. [8] tarafından yapılan dahili sanal model bu çalışmalara örnek olarak gösterilebilir. 1980'li yılların sonu ve 1990'lı yılların başı arasında, ağ teorisi üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu yıllarda yapılan çalışmalar, pasiflik üzerine temellendirilmiş ve sistemdeki veriler tek giriş ve tek çıkış, diğer diğer deyişle 2 kanallı, şekilde paylaşılmıştır. Raju vd. [9] yaptığı çalışmada, empedans matrislerinin iletilmesi üzerine odaklanmıştır. Burada empedans matrisleri, gerekli kuvvet bilgilerini hız verileri ile ileten matrislerdir. Hannaford ve Fiorini [10], yönetilen alt sistemdeki kuvvet bilgilerini empedans matrislerine eklemiş ve oluşturdukları bu hibrit matrisi iletişim kanalında kullanmışlardır. Anderson ve Spong [11] ise, saçılma değişkenleri teorisini kullanarak ürettikleri matrisler ile iki yönlü teleoperasyon sistemini kontrol etmeye çalışmışlardır. İki yönlü teleoperasyon sistemlerinde operatörün yönetilen alt sistemindeki dış kuvveti hissetmesi, bir diğer deyişle kuvvet yansıması, 1993 yılında Lawrence [12] tarafından *şeffaflık* olarak tanımlanmıştır. Bu çalışma, hız verilerinin yanı sıra kuvvet verilerinin de alt sistemler arasında iletildiği, 4 kanallı yapıda oluşturulmuştur. 4 kanallı yapının kullanıldığı bir diğer önemli çalışma, Yokokohji ve Yoshikawa [13] tarafından yapılan çalışmadır.

İki yönlü teleoperasyon sistemlerinde H_∞ kontrolörlerin kullanılması, 1990'lı yılların ortalarına dayanmaktadır. Lee ve Jeong [14], serbest hareket ederken Smith öngörücüsünün ve temas halinde hareket ederken H_∞ normunun kullanıldığı bir çalışma yapmıştır. Ayrıca yaptıkları çalışmada, iki yönlü teleoperasyon sistemindeki belirsizlikleri dikkate alarak, dayanıklı bir kontrolör geliştirmişlerdir. Literatürde önemli bir adım olarak Leung vd. [15], H_∞ ve μ-sentezi prosedürlerini kullanarak, iki yöndeki iletişim kanalı içinde bir üst gecikme sınırı elde etmişlerdir. Bu çalışma ile, daha önceki çalışmaların aksine, gecikme sorunu ve sistem performansı aynı işlem adımında dikkate alındığı bir çok amaçlı kontrol yapısı ortaya konmuştur. Lee vd. [16] ise yaptıkları çalışmada, μ sentezi ile sistemdeki belirsizlikleri tanımlamışlardır. Böylelikle, iki yönlü teleoperasyon sistemlerinde parametre belirsizlikleri sebebiyle oluşan kararsızlık ve performans düşüşleri giderilmeye çalışılmıştır. Boukhnifer vd. [17] ise, iletişim kanalına ölçeklendirilmiş ögeler dahil etmişlerdir. μ-sentezine benzer bir mantıkla, önceden belirlenmiş ve ölçeklendirilmiş parametre aralığında sistemi kararlı kılan, H_∞ optimal bir kontrolör üretilmiştir. Pasiflik temelli kontrolde sıkça kullanılan ve iki yönlü teleoperasyon sistemlerinde pozisyon takibi ve kuvvet yansımasını sağlayan 4 kanallı yapı, Hu vd. [18] tarafından bir H_∞ optimizasyon problem olarak ortaya konmuştur. Yan ve Secudean [19] ise, H_∞ üzerine temellendirilen bu 4 kanallı kontrol yapısını, belirsiz parametreler içeren iki yönlü teleoperasyon sistemi için genişletmişlerdir.

Son 15-20 yılda, iki yönlü teleoperasyon sistemlerinin kontrolü üzerine birçok önemli çalışma yayınlanmıştır. Sirouspour ve Shahdi [20], doğrusal karesel Gaussian temelli geliştirdikleri model öngörülü kontrolör tasarımı bunlardan biridir. Yapılan çalışmada serbest ve temas-halindeki hareket için iki farklı kontrolör geliştirmiş ve deney düzeneği ile kontrolörlerin performansı test edilmiştir. Sadeghi vd. [21], DME temelli bir tasarım yapmışlardır. Yöneten alt sistem için bir empedans kontrolörü ve yönetilen alt sistem için bir açık-çevrim H_∞ ve L_1 (tepeden tepeye kazanç) kontrolörü tasarlanan çalışmada, iki yönlü teleoperasyon sisteminin politopik belirsizlik içermesi durumuna karşı dayanıklılık sağlanmıştır. Zhang vd. [22] yaptıkları çalışmada ise, bir başka DME temelli dayanıklı H_∞ kontrolörü tasarlamış ve sistemdeki belirsizlikleri normu sınırlı tipte tanımlamışlardır. Du [2], sistemdeki belirsizlikleri dikkate almamasına karşın, serbest hareket ve temas-halindeki hareketi ayrı ayrı göz önüne aldığı ve bu sebeple farklı durumlarda performans gösterebilen bir H_∞ kontrolörü tasarlamıştır. Ayrıca bu çalışmada, iletişim kanalındaki asimetrik gecikmeleri sistemin dinamiğine dahil edilmiştir. Cho vd. [23], sistemdeki parametre belirsizliklerini politopik tipte elde aldıkları, dinamik çıkış-geri beslemeli H_∞ kontrolör tasarımı yayınlamışlardır. Kazanç planlaması kullandıkları bu yöntem ile, yüksek seviyede kuvvet yansıması performansı elde etmişlerdir. Lopez Martinez vd. [24] ise, doğrusal kesirli yapıda tanımladıkları iki yönlü teleoperasyon sisteminde kararlılık ve performans kriterleri arasında bir denge buldukları, yüksek performansa sahip bir kontrolör tasarımı gerçekleştirmişlerdir. Ayrıca, yöneten ve yönetilen alt sistemlere etki eden dış kuvvet dinamiklerinin belirsiz olması durumuna karşı dayanıklılık sağlanmıştır. Turki vd. [25], mekanik osilatör ile tetiklenen bir serbestlik dereceli iki yönlü teleoperasyon sistemi için dayanıklı kontrolör tasarımı geliştirmişlerdir. Bu çalışmada, kararlılık S-prosedürü kullanılarak sağlanmış ve Finsley Lemması ile de yöneten ve yönetilen alt sistemler arasındaki takip hatası azaltılmaya çalışılmıştır. Sistemdeki belirsiz parametreler ise, normu sınırlı yapıda tanımlanmıştır.

Yakın zamanda iki yönlü teleoperasyon sistemi için yapılan bu çalışmalarda odaklanılan, sistemdeki farklı parametre belirsizliklerine dayanıklılık, farklı hareket durumlarında performans verme ve daha başarılı performans kriterlerine ulaşma gibi çeşitli problemler dikkat çekicidir. Öte yandan literatürde, parametre belirsizliklerine dayanıklı kararlılığın ve sistemdeki performans kriterlerinin oluşturduğu çok amaçlı kontrol problemindeki tutuculuk sorununun üzerinde durulmadığı görülmektedir. Tanımlanan çok amaçlı kontrol probleminde bir ödünleşmenin yaşanması ve tutuculuğun artması kaçınılmazdır. Bu nedenle iki yönlü teleoperasyon sistemlerinde, performansı ve tasarımın pratikte uygulanabilirliğini düşüren bu etkiye odaklanmak gerekir.

Bu tezdeki kontrolör tasarımlarda da kullanılmış olan DME, son 30 yıldır yaygın olarak dinamik sistemlerin kontrolünde kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem ilk olarak, 1890 yılında A. M. Lyapunov'un kararlılık analizinde ortaya çıkmıştır [26]. İlerleyen yıllarda bu kararlılık analizi, Lyapunov Teorisi olarak literatüre geçmiştir. Bir sonraki büyük adım, Lur'e ve Postnikov'un 1940'lı yıllarda DME'leri gerçek kontrol problemlerinde kullanması ile olmuştur [27]. Ancak o yıllarda DME'lerin çözümleri elle yapıldığı için ancak küçük boyutlu matrislerle çalışılabilmiştir. 1960'lı yılların başında Kalman, Yakubovich ve Popov, DME'lerin çözümü için grafiksel bir yöntem önermişlerdir [28]. Bu yöntem literatüre Kalman-Yakubovich-Popov Lemması olarak geçmiştir. 1971 yılında J. C. Willems tarafından yapılan çalışma ile de, DME'lerin çözümünde cebirsel Riccati eşitsizliklerinin kullanılabileceğini ortaya konmuştur [29]. DME ile dışbükey optimizasyon ilişkisinin ilk örneği ise, 1982 yılında Pyatnitskii ve Skorodinskii'nin Lyapunov teorisini bir dışbükey optimizasyon problemi olarak tanımlamasıyla olmuştur [30]. Ayrıca problemin çözümü için bir algoritma da tanımlamışlardır.

H_∞ optimizasyon probleminin ilk örnekleri, Francis [31] ve Doyle vd. [32] tarafından yayınlanmıştır. Bu çalışmalarda durum-uzay formu şeklinde tanımlanmış sistemler için H_∞ optimizasyon problemi, Riccati denklemleri ile çözülmüştür. H_∞ kontrol probleminin çözümünde DME'lerin kullanılması ise, Gahinet ve Apkarian [33], Chilali ve Gahinet [34] tarafından yapılan çalışmalarda ortaya çıkmıştır. Gahinet ve Apkarian yaptıkları bu çalışmada, H_∞ kontrol problemini DME'ler yardımıyla bir dışbükey alt optimizasyon problemi olarak sürekli ve ayrık zamanlı sistemler için tanımlamışlardır. Ayrıca GDME'lerin elde edilmesinde de kullanılan Projeksiyon Lemması'nı bu çalışma ile ortaya koymuşlardır. Chilali ve Gahinet ise, H_2 ve H_∞ ifadelerini birlikte kullanmışlar ve sistemin köklerini bir DME bölgesi içinde tutarak, kutup yerleştirme problemine çözüm getirmişlerdir. Boyd vd. [35], DME'lerin kontrol problemlerinde kullanılması üzerine ayrıntılar içeren bir kitap yayınlamışlardır. Sonraki yıllarda, bu öncü çalışmaların ışığında birçok daha az tutucu kontrolör tasarımı literatüre sunulmuştur.

Çok amaçlı kontrol problemlerindeki tutuculuk sorunu, iki yönlü teleoperasyon sistemleri dahil birçok dinamik sistemde yaşanılan bir sorundur. Tutuculuk, birbiriyle çelişen amaçların aynı anda sağlanmaya çalışılması ve böylelikle meydana gelen ödünleşme sebebiyle oluşur. Bu durum, kontrolör tasarımlarında çözüm için gerekli olan kontrol kuvvetlerinde ve minimum dış kuvvet bastırma seviyesini tanımlayan H_∞ normunda artışlara neden olur ve tasarımın pratikte uygulanabilirliği düşer. Kontrol sistemlerindeki bu tutuculuk sorunu, GDME temelli yapılan tasarımlarla efektif bir şekilde çözülebilmektedir. GDME'ler, DME'lerin ek bir tasarım değişkeni kullanılarak daha geniş bir forma getirilmesiyle oluşturulur. Bu yöntem, Projeksiyon Lemması'nın

sondan başa doğru kullanılması olarak özetlenebilir. Burada tanımlanan geniş form üzerine temellendirilen kontrolör, yeni tasarım değişkeni ile ifade edilir. Eklenen bu tasarım değişkeninin, Lyapunov matrisinin aksine simetrik olma zorunluluğu yoktur. Böylelikle problemin çözüm kümesi genişler ve daha az tutucu tasarımlara ulaşılır. Bu sonuç, GDME'lerin dayanıklı kontrol problemlerinde kullanılmasını anlamlı kılar. Ayrıca tasarlanan kontrolörün Lyapunov matrisi ile ifade edilmemesi, kontrol problemindeki her bir kısıt için farklı bir Lyapunov matrisi seçmemize de olanak sağlar. Bu durum, tutuculuğu azaltan bir başka etki olabilir.

GDME'ler yardımı ile tutuculuğun azaltılması, son 15-20 yıldır bilim insanlarının üzerinde çalıştığı bir konudur. Oliveria vd. [36] yaptıkları çalışmada ayrık zamanlı sistemler için GDME formunda dayanıklı H_2 ve dayanıklı H_∞ kontrolör tasarımları yapmışlardır. Çalışmada önerilen yöntem ile, durum-geri besleme ve dinamik-çıkış geri besleme kontrol kanunları kullanılarak farklı teoremler geliştirilmiştir. Ayrıca çalışmada, farklı DME kısıtları için ayrı Lyapunov matrislerinin tutuculuğu düşürdüğü ortaya konulmuştur. Apkarian vd. [37] ise, sürekli zamanlı sistemler için GDME formunda, H_2 normu üzerinden durum-geri beslemeli ve dinamik-çıkış geri beslemeli dayanıklı kontrolörler geliştirmişlerdir. Yapılan bu dayanıklı kontrolör tasarımlarında sistem, politopik tipte belirsiz olarak tanımlanmıştır. Verilen bu iki çalışma, GDME formu ile dayanıklı kontrol problemlerinde tutuculuğun azaltıldığını gösteren öncü çalışmalar olarak dikkat çekmiştir. Ebihara ve Hagiwara [38], yaptıkları $H_2/\mathbf{D}$-kararlılık kontrolörü ile, farklı DME kısıtlarında ayrı Lyapunov matrisleri kullanarak çok amaçlı kontrol problemindeki tutuculuk sorununa çözüm getirmişlerdir. GDME formu sayesinde elde edilen bu yöntem ile, sürekli zamanlı sistemler için literatürdeki diğer çok amaçlı kontrolör tasarımlarından daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Sürekli zamanlı sistemlerde, her bir GDME koşulu için ayrı bir Lyapunov matrisinin kullanılmasının bir diğer örneği ise Sajjadi-Kia ve Jabbari [39]'nin yaptıkları çalışmadır. Bu çalışmada hem durum-geri beslemeli hem de çıkış-geri beslemeli tasarlanan kontrolörlerde, Sınırlı Gerçek matris eşitsizliği, değişmez set matris eşitsizliği ve kısıtlayıcı matris eşitsizliği birlikte kullanılmıştır. Xie [40] yaptığı çalışmada ise GDME formunu, dayanıklı H_∞ kontrol probleminde sonuçları iyileştirmek için kullanmıştır. Kontrolör tasarımlarında ise sürekli zamanlı sistemdeki belirsizlikler, politopik tipte ele alınmış ve durum-geri besleme kontrol kanunu kullanılmıştır. Pipeleers vd. [41], GDME'ler için genel bir metodoloji önermişler ve literatürde yapılan çalışmalar için direkt bir kanıt sunmuşlardır. Bu çalışma, literatürdeki bir çok önemli yöntemi ve karşılaştırmalarını içermektedir. Duan ve Yu [42] ise, GDME'lerin kullanıldığı durum-geri beslemeli H_2 ve H_∞ kontrolör tasarımlarına ve ispatlarına kitaplarında yer vermişlerdir.

Löfberg [43], DME'lerin çözümünde kullanılmak üzere YALMIP isimli yeni bir ayrıştırıcı yazılım geliştirmiştir. MATLAB paket program ile birlikte kullanılan bu yazılım, yayınlandığından beri birçok çalışmada kullanılmaktadır.

Strum [44], ayrıklaştırma yöntemlerinden yararlanarak optimizasyon problemlerini çözebilen, SeDuMi isimli bir çözücü yazılım geliştirmiştir. YALMIP yazılımı ve MATLAB paket program ile uyumlu çalışabilen bu yazılım, optimizasyon problemlerinde etkin olarak kullanılmaktadır.

Parametre belirsizlikleri, birçok kontrol sisteminde karşılaşılan, parametrelerin tam olarak bilinememesinden veya zamana bağlı değişen işletme şartlarından dolayı oluşan bir problemdir. Sistemde performans düşüşlerine ve hatta kararsızlığa neden olabileceğinden, parametre belirsizlikleri kontrolör tasarımlarında dikkate alınmalıdır. Parametre belirsizlikleri, sistem dinamiğine normu sınırlı ve politopik gibi yapılarda eklenebilir.

Normu sınırlı tipte belirsizlikler, sisteme belirsizlik matrislerinin eklenmesi ile oluşturulur ve parametre belirsizliklerini tanımlamada sıkça kullanılan bir yöntemdir. Xie [45]'nin yaptığı, çıkış geri beslemeli dayanıklı H_∞ kontrolör tasarımı bu yönteme bir örnektir. Bu çalışma, normu sınırlı tipte belirsiz sistemler için geliştirilen dayanıklı kontrolör sentezlerinde sıkça kullanılan bir doğrusallaştırma yöntemi içermektedir. Parlakçı [46], durum-geri besleme ve çıkış geri besleme kanunlarını kullandığı çalışmada, dayanıklı kararlılığı sağlamak için normu sınırlı parametre belirsizliklerini kullanmıştır. Yapılan bu çalışma, birçok farklı belirsizlik modeli ve sonuçlarını içermektedir. Parlakçı ve Küçükdemiral [47] yaptıkları çalışmada ise normu sınırlı parametre belirsizliğini kullandıkları bir dayanıklı H_∞ kontrolör tasarımı gerçekleştirmişlerdir.

Politopik belirsizlikler, parametre belirsizliklerini tanımlamanın bir başka yoludur. Normu sınırlı belirsizliklere oranla daha yüksek belirsizlik sınırlarına ulaşılabilen bu yöntem, sisteme belirsizliklerin eklenmesi yerine olası ihtimaller için ortak bir çözüm aranması mantığına dayanır. Gu vd. [48] yayınladıkları kitapta, parametre belirsizliklerinin politopik yapıda tanımlanması hakkında ayrıntılı bilgi ve tanımlamalar yapmışlardır. Pellanda vd. [49] ise, politopik koordinatlar için genelleştirilmiş bir ifade elde edilmesi için normalleştirilmiş koordinatları tanımlamış ve bunlar ile politopik koordinatları oluşturmuşlardır. Özülkü [50], yüksek lisans tezinde geliştirdiği H_∞ kontrolöründe politopik belirsizlikleri dikkate almıştır. Bu sayede, uçak iniş takımları için dayanıklı bir kontrolör tasarımı elde etmiştir. Yazıcı ve Sever [51], yaptıkları L_2 kazançlı çıkış türevi geri beslemeli dayanıklı kontrolör tasarımında politopik belirsizliklere dayanıklılık sağlamışlardır.

Bütün bu çalışmalar ve literatürdeki daha fazlası, iki yönlü teleoperasyon sistemlerindeki kontrol probleminin oldukça dikkat çekici olduğunu göstermektedir. Sistemdeki zorlayıcı performans kriterleri göz önüne alındığında, performans düşüşlerine neden olan parametre belirsizlikleri kontrolör tasarımlarında dikkate alınmalıdır. Ancak, zorlayıcı performans kriterleri ve dayanıklı kararlılık birlikte ele alındığında oluşan çok amaçlı kontrol problemi, tutuculuk sorununu da beraberinde getirmektedir. Literatürde, iki yönlü teleoperasyon sistemleri için bu tutuculuk sorununun incelenmediği görülmektedir. Bu sebeple tez çalışmasında, tutuculuğu azaltan GDME'ler ile tanımlanan, politopik tipte belirsizliklere dayanıklı H_∞ kontrolör sentezi gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, önerilen bu yeni sentez metodu ile normu sınırlı tipte belirsizliklere dayanıklı H_∞ kontrolör sentezi de gerçekleştirilmiştir. Böylelikle farklı belirsizlik yöntemleri için, iki yönlü teleoperasyon sistemlerinin kontrolünde oluşan tutuculuk sorununa etkili bir çözüm ortaya konmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Kontrol mühendisliğinde yaşanan gelişmeler, her geçen gün mühendislik sistemlerindeki farklı bir sorunu çözülebilir veya iyileştirilebilir kılmaktadır. Kullanım alanlarında yüksek performansa ihtiyaç duyulması sebebiyle, iki yönlü teleoperasyon sistemlerinin kontrolü dikkat çekici bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda parametre belirsizlikleri, sistemdeki önemli bir sorundur. Ayrıca, operatörün uzaktaki konumdaymış gibi hissetmesini sağlayan kuvvet yansıması, sistemdeki kararlılık şartı ile çelişmektedir. Bütün bunlar göz önüne alındığında, dayanıklı kararlılık, referans takibi ve kuvvet yansımasını aynı anda sağlamaya çalışmak, bir çok amaçlı kontrol problemi oluşturmakta ve kontrolörün tutuculuğunu arttırmaktadır.

Bu sebeple yüksek lisans tezi ile, iki yönlü teleoperasyon sistemlerinin kontrol probleminde aşağıda belirtilen hedeflere ulaşmak amaçlanmıştır:

- Kapalı-çevrim sistemi dayanıklı kararlı kılmak, referans takip ve kuvvet yansıması performanslarını sağlamak,
- Genişletilmiş formdaki DME'ler ile, tanımlanan çok amaçlı kontrol problemindeki tutuculuğu azaltan yeni bir sentez metodu geliştirmek,
- Standart formda DME'ler ile üretilen dayanıklı kontrolörlere kıyasla, genişletilmiş formdaki DME'ler ile daha düşük dış kuvvet bastırma seviyesine ulaşmak ve performans kriterlerini iyileştirmek,

- Normu sınırlı ve politopik olmak üzere sistemin dinamiğine farklı tiplerde eklenen belirsizlikler ile, en yüksek belirsizlik sınırına ulaşılabilen yöntemi elde etmek.

Belirtilen amaçlara ulaşmak için, standart ve genişletilmiş olmak üzere iki farklı DME formu kullanılmıştır. Ayrıca sistemdeki parametre belirsizlikleri, normu sınırlı ve politopik tipte tanımlanmıştır. Kullanılan farklı DME formları ve belirsizlik tipleri ile, belirtilen amaçlara sağlayan en iyi kontrolör tasarımına ulaşmak hedeflenmiştir.

1.3 Hipotez

Kontrolör tasarımlarında dikkate alınması gereken bir problem olan parametre belirsizlikleri, mühendislik sistemlerinde performans düşüşüne ve kararsızlık sorununa neden olabilmektedir. Bu çalışmada parametre belirsizlikleri, normu sınırlı ve politopik olmak üzere iki farklı tipte sisteme eklenmiş ve böylelikle bir belirsizlik sınırı altında sistemi dayanıklı kararlı kılan kontrolörlerin tasarlanması hedeflenmiştir.

Kontrolör tasarımlarında kullanılan belirsizlik yöntemlerinden biri olan normu sınırlı belirsizlikler, sistemi tanımlayan durum-uzay formuna belirsiz parametreleri içeren sistem matrislerinin eklenmesi ile oluşturulur. Bu matrisler, bir üst parametre belirsizliği oranı içerir ve zamana bağlı değişen veya değişmeyen bir alt ve üst değer arasında belirsizliği tarar. Ayrıca bu alt ve üst değer, sınırlı bir normu ifade eder. Böylelikle, oluşturulan belirsiz durum-uzay formu için üretilen kontrolör, belirlenen üst parametre belirsizliği oranında dayanıklı kararlılığı garanti eder.

Politopik belirsizlikler ise, sistemdeki belirsiz parametrelerin alt ve üst değerlerinin belirlenmesi ile oluşturulur. Belirlenen her bir alt ve üst değerin doğrusal kombinasyonu, bir politopik koordinat oluşturur. Her bir politopik koordinat ile üretilen durum-uzay formları için bulunan ortak çözüm ise, belirlenen alt ve üst değerler arasında sistemi dayanıklı kararlı kılar. Burada üretilen durum-uzay formları, bir politopik belirsizlik kümesi tanımlar. Bu küme, normu sınırlı yapının aksine belirsizliği daha küçük bir yapıda modeller ve daha yüksek belirsizlik sınırlarında dayanıklılığı sağlamamıza olanak verir.

İki yönlü teleoperasyon sistemindeki zorlayıcı performans kriterlerinin ve dayanıklı kararlılık şartının bir arada düşünülmesi, bir çok amaçlı kontrol problemi oluşturmaktadır. Bu çok amaçlı kontrol problemindeki ödünleşme durumu, tutuculuğun artmasına sebep olur. Bir kontrol sisteminde tutuculuğun artması, sistemde kontrol kuvvetlerini ve bozucu bastırma seviyesini tanımlayan H_∞ normunu yükseltir. Bu nedenle tasarımın pratikte uygulanabilirliği düşmektedir. Bu bağlamda

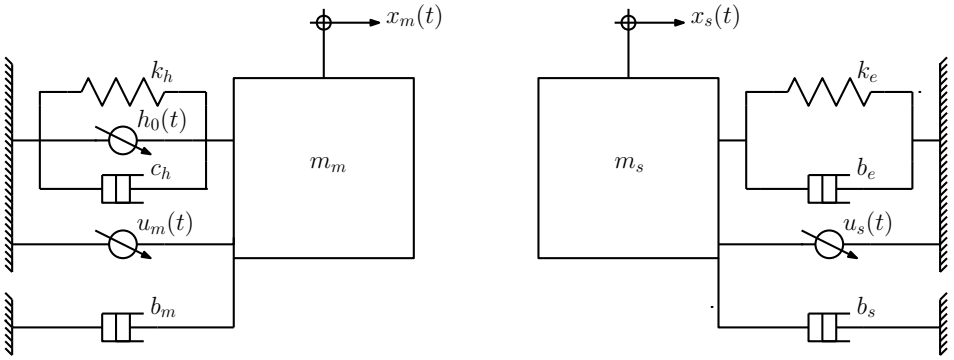
GDME'ler ile geliştirilen yeni sentez metodu, kontrolör üzerindeki tutuculuk sorununa efektif bir çözüm getirmektedir. GDME'ler, standart DME yapısına Projeksiyon Lemması kullanılarak bir tasarım değişkeninin eklenmesiyle oluşturulur. Bu sayede kontrolör tasarımlarında simetrik tanımlı Lyapunov matrisinin kullanılma zorunluluğu ortadan kalkar. GDME ile tanımlanan kontrolör, eklenen yeni tasarım değişkeni ile ifade edilir ve bu değişkenin simetrik bir matris olma zorunluluğu yoktur. Bu durum dayanıklı kontrolör tasarımında çözüm kümesini doğal olarak genişletir ve tasarımı daha az tutucu kılar.

Bu bağlamda, politopik tipte belirsiz iki yönlü teleoperasyon sistemleri için üretilen, GDME temelli, dayanıklı H_∞ kontrolör, tez çalışmasındaki önerilen kontrolör olarak karşımıza çıkmaktadır. Önerilen yöntem ile referans takibini, kuvvet yansımasını ve dayanıklı kararlılığı sağlayan, daha az tutucu yeni bir kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir.

2
İKİ YÖNLÜ TELEOPERASYON SİSTEMİNİN MATEMATİKSEL MODELİ VE BELİRSİZLİK TANIMLAMALARI

Bu tezde geliştirilen kontrolörler, operatör ve dış ortam kuvveti içeren tek serbestlik dereceli iki yönlü teleoperasyon sistemi ile değerlendirilecektir. Sistemin fiziksel modeli Şekil 2.1'de verilmiş olup, hareket denklemleri Du [2] tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde öncelikle sistemin hareket denklemleri üzerinden nominal sistem oluşturmuştur. Yöneten ve yönetilen alt sistemdeki parametrelerin belirsiz olması durumu ise, normu sınırlı ve politopik olmak üzere iki farklı tipte ele alınmış ve belirsizlik içeren sistemler tanımlanmıştır.

İki yönlü teleoperasyon sisteminin performans kriterleri, referans takibi ve kuvvet yansıması olarak karşımıza çıkar. Burada referans takibi, yöneten ve yönetilen alt sistemlerin pozisyon farkı, kuvvet yansıması ise operatör ve çevresel-kaynaklı kuvvetlerin farkı olarak ifade edilebilir.



Şekil 2.1 İki yönlü teleoperasyon sistemi

Şekilde gösterilen m_m ve m_s sırasıyla yöneten ve yönetilen alt sistemin kütleleri, $x_m(t)$ ve $x_s(t)$ sırasıyla yöneten ve yönetilen alt sistemdeki kütlelerinin yatay yer değiştirmeleridir. b_m yöneten alt sistemin sönüm katsayısı, c_h ve k_h sırasıyla operatör el dinamiklerini tanımlayan sönüm ve rijitlik katsayılarıdır. $h_0(t)$ ise operatörün

sisteme uyguladığı referans girişidir. Buradaki operatör el dinamiklerinin ve referans girişinin birleşimi, operatör dış kuvvetini oluşturur ve yöneten/yönetilen alt sistemler bu kuvveti referans olarak alırlar. b_s yönetilen alt sistemin sönüm katsayısı, b_e ve k_e sırasıyla çevresel kaynaklı oluşan kuvvetin sönüm ve rijitlik katsayılarıdır. Son olarak, $u_m(t)$ ve $u_s(t)$ sırasıyla yöneten ve yönetilen alt sisteme uygulanan kontrolör kuvvetleridir.

2.1 Nominal Sistem

İki yönlü teleoperasyon sistemine ait hareket denklemleri [2]

$$m_m\ddot{x}_m(t) + b_m\dot{x}_m(t) = u_m(t) + f_h(t), \tag{2.1}$$
$$m_s\ddot{x}_s(t) + b_s\dot{x}_s(t) = u_s(t) - f_e(t), \tag{2.2}$$

şeklinde verilmiştir. Burada dış kuvvetler,

$$f_h(t) = h_0(t) - k_h x_m(t) - c_h\dot{x}_m(t), \tag{2.3}$$
$$f_e(t) = k_e x_s(t) + b_e\dot{x}_s(t), \tag{2.4}$$

olarak tanımlanmıştır. Verilmiş olan hareket denklemleri, durum-uzay formunda aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + B_{u_0}u(t) + B_{w_0}w(t). \tag{2.5}$$

Burada durum-uzay formu matrisleri

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b_m\big/m_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b_s\big/m_s \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

$$B_{u_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1\big/m_m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1\big/m_s \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

$$B_{w_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1\big/m_m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1\big/m_s \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

ve $x_0(t) = \begin{bmatrix} x_m(t) & \dot{x}_m(t) & x_s(t) & \dot{x}_s(t) \end{bmatrix}^T$ durum-uzay formunun durum vektörünü, $u(t) = \begin{bmatrix} u_m(t) & u_s(t) \end{bmatrix}^T$ sistemin kontrol kuvveti giriş vektörünü, $w(t) = \begin{bmatrix} f_h(t) & f_e(t) \end{bmatrix}^T$ ise sistemin dış kuvvet giriş vektörünü tanımlar. Burada çevresel kaynaklı kuvvet, yönetilen alt sistemin çevre ile temas halinde hareket etmesi durumunda oluşur.

Referans ile yöneten/yönetilen alt sistemler arasındaki takip probleminin bir parçası olarak, her iki alt sistem için de tanımlanan integral hata sinyalleri durum-uzay formu (2.5)'e eklenmiş ve genişletilmiş durum-uzay formu (2.9) elde edilmiştir. Böylelikle alt sistemlerin referansı takip etmesi sağlanmış ve kararlı hal hatası sıfıra indirilmiştir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ e_{t_m}(t) \\ e_{t_s}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ -C_{t_m} & 0 & 0 \\ -C_{t_s} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0(t) \\ \int e_{t_m}(t) \\ \int e_{t_s}(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{u_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_u} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{w_0} \\ I_t \\ I_t \end{bmatrix}}_{B_w} w(t) \tag{2.9}$$

Genişletilmiş durum-uzay formu (2.9)'da verilen, referans sinyali ile yöneten alt sistemin yörüngesi arasındaki hata sinyali,

$$e_{t_m}(t) = f_h(t) - y_{t_m}(t), \tag{2.10}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$f_h(t) = I_t w(t), \tag{2.11}$$
$$y_{t_m}(t) = C_{t_m} x_0(t), \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Referans sinyali ile yönetilen alt sistemin yörüngesi arasındaki hata sinyali ise

$$e_{t_s}(t) = f_h(t) - y_{t_s}(t), \tag{2.13}$$

olarak verilebilir. Burada,

$$f_h(t) = I_t w(t), \tag{2.14}$$
$$y_{t_s}(t) = C_{t_s} x_0(t), \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca $C_{t_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $C_{t_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, hangi değişkenin referans sinyalini takip edeceğini belirleyen çıkış matrislerini ve $I_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, hangi değişkenin referans olduğunu tanımlayan giriş matrisini tanımlar [52].

Genişletilmiş durum-uzay formu (2.9) ile oluşturulan açık-çevrim nominal sistem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_u u(t) + D_w w(t) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörünü, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ sistemin kontrol kuvveti giriş vektörünü, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ sistemin dış kuvvet giriş vektörünü ve $z(t) \in \mathbb{R}^c$ kontrol çıkış vektörünü tanımlar. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{c\times n}$, $D_u \in \mathbb{R}^{c\times p}$ ve $D_w \in \mathbb{R}^{c\times m}$ ise sabit, gerçek ve bilinen boyutlu sistem matrislerini gösterir.

Bu yüksek lisans tezinde tasarlanan kontrolörler, durum-geri beslemeli kontrol kanunu,

$$u(t) = Kx(t), \tag{2.17}$$

temelinde oluşturulmuştur. Bir diğer deyişle, kontrolörlerde her bir durum çıkışı ölçülecek ve geri beslenecektir. Ayrıca $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$, yöneten ve yönetilen alt sisteme ait durum-geri besleme kazançlarından oluşmaktadır. Durum-geri besleme kanunu, açık-çevrim nominal sistem (2.16)'da yerine yazılırsa, kapalı-çevrim nominal sistem (2.18) aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\Gamma \begin{cases} \dot{x}(t) &= \underbrace{(A + B_u K)}_{A_{cl}} x(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= \underbrace{(C + D_u K)}_{C_{cl}} x(t) + D_w w(t) \end{cases} \tag{2.18}$$

Burada $A_{cl} = A + B_u K$ ve $C_{cl} = C + D_u K$ şeklinde elde edilir.

2.2 Normu Sınırlı Tipte Belirsiz Sistem

Sistemdeki parametre belirsizliği sorunu, normu sınırlı tipte sisteme eklenerek kontrolör tasarımlarında dikkate alınabilir. Bu sayede, belirli oranda parametre belirsizliğine dayanıklı kontrolörler elde edilir. Normu sınırlı tipte belirsiz sistemler, belirsiz parametreleri içeren nominal sistem matrislerine, belirsizlik matrislerinin eklenmesi ile oluşturulur.

Normu sınırlı tipte belirsizlik içeren açık-çevrim sistem, nominal açık-çevrim sistem (2.16)'ya belirsizlik matrislerinin eklenmesi ile aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (B_u + \Delta B_u(t))u(t) + (B_w + \Delta B_w(t))w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_u u(t) + D_w w(t) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Durum-geri besleme kanununun, açık-çevrim normu sınırlı belirsizlik sistem (2.19)'da

yerine yazılması ile de, kapalı-çevrim normu sınırlı belirsiz sistem (2.20) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Lambda\begin{cases} \dot{x}(t) &= \underbrace{\big(A+\Delta A(t)+(B_u+\Delta B_u(t))K\big)}_{A_{cln}}x(t)+\underbrace{\big(B_w+\Delta B_w(t)\big)}_{B_{wn}}w(t) \\ z(t) &= \underbrace{(C+D_uK)}_{C_{cl}}x(t)+D_ww(t) \end{cases} \tag{2.20}$$

Burada $A_{cln}=\big(A+\Delta A(t)+(B_u+\Delta B_u(t))K\big)$ ve $B_{wn}=B_w+\Delta B_w(t)$ şeklinde elde edilir. Ayrıca $\Delta A(t)$, $\Delta B_u(t)$ ve $\Delta B_w(t)$ zamana bağlı değişen matris fonksiyonları olup, belirsizliği normu sınırlı olarak tanımlar [46].

$$\Delta A(t)=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3\times b_m/m_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4\times b_s/m_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_a}\underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_4 \end{bmatrix}}_{F(t)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_a} \tag{2.21}$$

$$\Delta B_u(t)=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1\times 1/m_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2\times 1/m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_u}\underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_4 \end{bmatrix}}_{F(t)}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_u} \tag{2.22}$$

$$\Delta B_w(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 \times 1/m_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 \times 1/m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_w} \underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_4 \end{bmatrix}}_{F(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_w} \tag{2.23}$$

Bu eşitliklerdeki G_a ve E_a, A matrisinin belirsizlik yapısını, G_u ve E_u, B_u matrisinin belirsizlik yapısını, G_w ve E_w ise, B_w matrisinin belirsizlik yapısını tanımlar ve sabit, gerçek ve zamana bağlı değişmeyen matrislerdir. p_1, p_2, p_3 ve p_4 ise sırasıyla $1/m_m$, $1/m_s$, b_m/m_m ve b_s/m_s belirsiz parametrelerin maksimum belirsizlik sınırlarıdır. Son olarak $F(t)$, Lebesque ölçülebilir sınırlı bilinmeyen matris fonksiyonunu göstermektedir. Bu çalışmada $F(t)$ matris fonksiyonu, $1/m_m$, $1/m_s$, b_m/m_m ve b_s/m_s belirsiz parametreleri için sırasıyla

$$\zeta_1 \in [-1, 1], \quad \forall t \geq 0, \tag{2.24}$$

$$\zeta_2 \in [-1, 1], \quad \forall t \geq 0, \tag{2.25}$$

$$\zeta_3 \in [-1, 1], \quad \forall t \geq 0, \tag{2.26}$$

$$\zeta_4 \in [-1, 1], \quad \forall t \geq 0, \tag{2.27}$$

olarak normu sınırlı ve zamana bağlı değişmeyen yapıda seçilmiştir. Bu sayede belirsiz parametreler, ilgili belirsizlik sınırları içinde $[-1, 1]$ arasında taranır ve bulunan çözüm, bu sınırlar içindeki her koşul için dayanıklılığı garanti eder.

Yorum 2.1. Normu sınırlı tipte belirsiz parametrelerden b_m/m_m ve b_s/m_s, iki farklı sistem parametresi içermektedir. Bu durum, yöntemin ilgili matris elemanını belirsiz alması nedeniyle oluşmaktadır. Eğer sistemdeki her bir parametrenin ayrı ayrı değerlendirmesi gerekiyorsa, politopik belirsizlik yöntemi kullanılabilir. Ayrıca birden fazla sistem parametresi içeren bu belirsiz yapı, daha yüksek belirsizlikleri tolere edecek şekilde tasarlanabilir.

2.3 Politopik Tipte Belirsiz Sistem

Politopik belirsizlikler, dayanıklı kontrolör tasarımlarında kullanılan bir diğer yöntem olarak karşımıza çıkar. Bu yöntemde belirsiz parametreler, $\theta(t) \in \mathbb{R}^k$ vektörü ile alt ve üst değerleri arasında doğrusal değişen fonksiyonlar olarak tanımlanır ve sistem matrisleri politopik belirsizlik vektörü $\big(\theta(t)\big)$ ile ifade edilir.

Açık-çevrim politopik belirsiz sistem, A, B_u ve B_w nominal açık-çevrim sistem (2.16)'daki matrislerin politopik belirsiz yapıda tanımlanmasıyla aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_u(\theta)(t)u(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_u u(t) + D_w w(t) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Durum-geri besleme kanununun, açık-çevrim politopik belirsiz sistem (2.28)'de yerine yazılması ile de, kapalı-çevrim politopik belirsiz sistem (2.29) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Upsilon \begin{cases} \dot{x}(t) &= \underbrace{\big(A(\theta) + B_u(\theta)K\big)}_{A_{cl}(\theta)} x(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) &= \underbrace{(C + D_u K)}_{C_{cl}} x(t) + D_w w(t) \end{cases} \tag{2.29}$$

Burada $A_{cl}(\theta) = A(\theta) + B_u(\theta)K$ şeklinde elde edilir. Ayrıca $A(\theta)$, $B_u(\theta)$ ve $B_w(\theta)$ sabit, bilinen ve politopik belirsizlik içeren sistem matrisleridir.

Politopik kavramı, belirsiz parametrelerin alt ve üst değerlerinin doğrusal kombinasyonlarına dayanır. Bu doğrusal kombinasyonlar, politopik koordinatları (σ) oluşturur [48].

$$\sigma_i \geq 0, \;\; i = 1, ..., r, \;\; \sum_{i=1}^{r} \sigma_i = 1 \tag{2.30}$$

Burada $r = 2^k$, politopik koordinat sayısıdır. Politopik koordinatlar ile üretilen A, B_u ve B_w sistem matrisleri ise politopik belirsizlik kümesini (Ω) oluşturur [50]. Buradaki her bir kombinasyon, bu kümenin köşe noktalarıdır ve ω ile ifade edilir.

$$\omega_i = (A_i, B_{u_i}, B_{w_i}), \;\; i = 1, 2, ..., r, \tag{2.31}$$

$$\Omega = \text{co}\{\omega_i | i = 1, 2, ..., r\}. \tag{2.32}$$

Ayrıca Ω, bir dışbükey kabuk tanımlar.

Politopik koordinatlar, genelleştirilmiş bir ifade elde edilmesi için normalleştirilmiş halde kullanılabilir. Bir parametrenin normalleştirilmiş hali,

$$\sigma_{\theta_j} = \frac{\overline{\theta_j} - \theta_j(t)}{\overline{\theta_j} - \underline{\theta_j}}, \;\; j = 1, ..., k, \tag{2.33}$$

olarak tanımlanmıştır [49]. Burada $\underline{\theta_j}$ ve $\overline{\theta_j}$, sırasıyla $\theta_j(t)$ ifadesinin alt ve üst

değerleridir. Buradan hareketle politopik koordinatlar normalleştirilmiş halde

$$\sigma_i = \prod_{j=1}^{k} \widetilde{\sigma}_{\theta_j}, \quad \widetilde{\sigma}_{\theta_j} = \begin{cases} \sigma_{\theta_j}, & \text{eğer } \underline{\theta_j}, \ \Omega_i\text{'nin koordinatı ise} \\ 1-\sigma_{\theta_j}, & \text{eğer } \overline{\theta_j}, \ \Omega_i\text{'nin koordinatı ise} \end{cases} \tag{2.34}$$

formülasyonu ile bulunabilir [51].

Bu çalışmada belirsizlik vektörü, $\theta(t)$,

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} m_m(t) & m_s(t) & b_m(t) & b_s(t) \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

olarak seçilmiştir. Sistemdeki belirsiz parametrelerin politopik koordinatları ise normalleştirilmiş halde aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\sigma_{0000} = \left(\frac{\overline{m_m} - m_m}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{\overline{m_s} - m_s}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{\overline{b_m} - b_m}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{\overline{b_s} - b_s}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.36}$$

$$\sigma_{1000} = \left(\frac{m_m - \underline{m_m}}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{\overline{m_s} - m_s}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{\overline{b_m} - b_m}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{\overline{b_s} - b_s}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.37}$$

$$\sigma_{0100} = \left(\frac{\overline{m_m} - m_m}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{m_s - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{\overline{b_m} - b_m}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{\overline{b_s} - b_s}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.38}$$

$$\sigma_{0010} = \left(\frac{\overline{m_m} - m_m}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{\overline{m_s} - m_s}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{b_m - \underline{b_m}}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{\overline{b_s} - b_s}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.39}$$

$$\sigma_{0001} = \left(\frac{\overline{m_m} - m_m}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{\overline{m_s} - m_s}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{\overline{b_m} - b_m}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{b_s - \underline{b_s}}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.40}$$

$$\sigma_{1100} = \left(\frac{m_m - \underline{m_m}}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{m_s - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{\overline{b_m} - b_m}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{\overline{b_s} - b_s}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.41}$$

$$\sigma_{1010} = \left(\frac{m_m - \underline{m_m}}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{\overline{m_s} - m_s}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{b_m - \underline{b_m}}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{\overline{b_s} - b_s}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.42}$$

$$\sigma_{1001} = \left(\frac{m_m - \underline{m_m}}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{\overline{m_s} - m_s}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{\overline{b_m} - b_m}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{b_s - \underline{b_s}}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.43}$$

$$\sigma_{0110} = \left(\frac{\overline{m_m} - m_m}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{m_s - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{b_m - \underline{b_m}}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{\overline{b_s} - b_s}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.44}$$

$$\sigma_{0101} = \left(\frac{\overline{m_m} - m_m}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{m_s - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{\overline{b_m} - b_m}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{b_s - \underline{b_s}}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.45}$$

$$\sigma_{0011} = \left(\frac{\overline{m_m} - m_m}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{\overline{m_s} - m_s}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{b_m - \underline{b_m}}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{b_s - \underline{b_s}}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.46}$$

$$\sigma_{1110} = \left(\frac{m_m - \underline{m_m}}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{m_s - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{b_m - \underline{b_m}}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{\overline{b_s} - b_s}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.47}$$

$$\sigma_{1101} = \left(\frac{m_m - \underline{m_m}}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{m_s - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{\overline{b_m} - b_m}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{b_s - \underline{b_s}}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.48}$$

$$\sigma_{1011} = \left(\frac{m_m - \underline{m_m}}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{\overline{m_s} - m_s}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{b_m - \underline{b_m}}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{b_s - \underline{b_s}}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.49}$$

$$\sigma_{0111} = \left(\frac{\overline{m_m} - m_m}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{m_s - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{b_m - \underline{b_m}}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{b_s - \underline{b_s}}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right), \tag{2.50}$$

$$\sigma_{1111} = \left(\frac{m_m - \underline{m_m}}{\overline{m_m} - \underline{m_m}}\right)\left(\frac{m_s - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}}\right)\left(\frac{b_m - \underline{b_m}}{\overline{b_m} - \underline{b_m}}\right)\left(\frac{b_s - \underline{b_s}}{\overline{b_s} - \underline{b_s}}\right). \tag{2.51}$$

Her bir politopik koordinat ile de, bir başka A, B_u ve B_w matrisleri oluşturulmuştur. Böylelikle $A(\theta)$, $B_u(\theta)$ ve $B_w(\theta)$ politopik belirsizlik matrisleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$(A, B_u, B_w)_{0000} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\underline{m_m}, \underline{m_s}, \underline{b_m}, \underline{b_s}} \tag{2.52}$$

$$(A, B_u, B_w)_{1000} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\overline{m_m}, \underline{m_s}, \underline{b_m}, \underline{b_s}} \tag{2.53}$$

$$(A, B_u, B_w)_{0100} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\underline{m_m}, \overline{m_s}, \underline{b_m}, \underline{b_s}} \tag{2.54}$$

$$(A, B_u, B_w)_{0010} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\underline{m_m}, \underline{m_s}, \overline{b_m}, \underline{b_s}} \tag{2.55}$$

$$(A, B_u, B_w)_{0001} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\underline{m_m}, \underline{m_s}, \underline{b_m}, \overline{b_s}} \tag{2.56}$$

$$(A, B_u, B_w)_{1100} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\overline{m_m}, \overline{m_s}, \underline{b_m}, \underline{b_s}} \tag{2.57}$$

$$(A, B_u, B_w)_{1010} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\overline{m_m}, \underline{m_s}, \overline{b_m}, \underline{b_s}} \tag{2.58}$$

$$(A, B_u, B_w)_{1001} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\overline{m_m}, \underline{m_s}, \underline{b_m}, \overline{b_s}} \tag{2.59}$$

$$(A, B_u, B_w)_{0110} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\underline{m_m}, \overline{m_s}, \overline{b_m}, \underline{b_s}} \tag{2.60}$$

$$(A, B_u, B_w)_{0101} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\underline{m_m}, \overline{m_s}, \underline{b_m}, \overline{b_s}} \tag{2.61}$$

$$(A, B_u, B_w)_{0011} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\underline{m_m}, \underline{m_s}, \overline{b_m}, \overline{b_s}} \tag{2.62}$$

$$(A, B_u, B_w)_{1110} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\overline{m_m}, \overline{m_s}, \overline{b_m}, \underline{b_s}} \tag{2.63}$$

$$(A, B_u, B_w)_{1101} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\overline{m_m}, \overline{m_s}, \underline{b_m}, \overline{b_s}} \tag{2.64}$$

$$(A, B_u, B_w)_{1011} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\overline{m_m}, \underline{m_s}, \overline{b_m}, \overline{b_s}} \tag{2.65}$$

$$(A, B_u, B_w)_{0111} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\underline{m_m}, \overline{m_s}, \overline{b_m}, \overline{b_s}} \tag{2.66}$$

$$(A, B_u, B_w)_{1111} = (A, B_u, B_w)\Big|_{\overline{m_m}, \overline{m_s}, \overline{b_m}, \overline{b_s}} \tag{2.67}$$

Burada $\big(A(\theta), B_u(\theta), B_w(\theta)\big)$ politopik belirsizlik matrisleri, $r = 2^4 = 16$ tane

$\left(A, B_u, B_w\right)$ kombinasyonu olarak karşımıza çıkar. Her bir kombinasyonu sağlayan ortak çözüm ise, belirsiz parametrelere sahip sistemi, $\theta(t)$ ile verilen alt ve üst sınırları içinde dayanıklı kılar.

Yorum 2.2. Politopik belirsizlikler, normu sınırlı belirsizliklerin aksine bütün bir belirsizlik aralığını taramaz. Bunun yerine, her bir politopik koordinat için ortak bir çözüm arar. Dışbükey bir yapı oluşturan bu yöntem, daha küçük bir belirsizlik kümesinde aynı belirsizlik sınırını tolere etmemize olanak verir. Böylelikle politopik belirsizliklere dayanıklı kontrolörler, normu sınırlı yöntemle elde edilenlerin aksine daha yüksek belirsizlik sınırlarında dayanıklılık sağlayabilir.

3
KONTROLÖR TASARIMLARI İÇİN TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde kontrolör tasarımlarının temel sonuçlarına yer verilmiştir. İlk olarak, kontrol problemini anlamlı kılmak için dışbükey optimizasyon ve ilgili kavramlar tanıtılmıştır. Devamında ise kontrolör sentezlerinin temellendirildiği DME'ler anlatılmış, sentezlerde kullanılacak bazı DME formülasyonlarına ve lemmalarına yer verilmiştir. Standart ve genişletilmiş DME temelli, nominal, normu sınırlı belirsiz ve politopik belirsiz sistemler için üretilmiş H_∞ kontrolör tasarımlarının anlatılması ile de bölüm tamamlanmıştır.

3.1 Dışbükey Optimizasyon

Optimizasyon, günlük hayatımızda dahi kullandığımız ve pek çok bilim alanının ilgilendiği bir yöntemdir. Basitçe optimizasyon kavramı, çözüm kümeleri arasından en iyisini seçmek olarak tanımlanabilir. Burada *en iyinin* tanımlanması ve aday *iyiler* ile karşılaştırılması, optimizasyon probleminin var olması için öncelikle gerekli olan şartlardır [3].

Matematiksel olarak bir optimizasyon problemi

$$\begin{aligned} &\text{en küçük,} && f_0(x), \\ &\text{koşul,} && f_i(x) \leq b_i, \;\; i = 1, ..., c, \end{aligned} \tag{3.1}$$

olarak tanımlanmıştır [53]. Burada $x = (x_1, ..., x_n)$, problemin optimizasyon parametrelerini içeren vektörü, $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ amaç fonksiyonunu, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kısıt fonksiyonlarını gösterir. $b_1, ..., b_c$ ise, kısıt fonksiyonlarının sınırlarını tanımlayan skalerleri belirtir. Burada kısıtları karşılayan en küçük x^* vektörü, *en iyi* vektördür.

Optimizasyon problemleri, amaç ve kısıt fonksiyonlarının$(f_0, ..., f_c)$ doğrusal olması veya olmaması üzerinden sınıflandırılırlar. Doğrusal bir fonksiyon,

$$f_i(\zeta x + \eta y) = \zeta f_i(x) + \eta f_i(y), \tag{3.2}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall \zeta, \eta \in \mathbb{R},$$

olarak tanımlanabilir [53]. Aksi durum ise, fonksiyonun doğrusal olmamasıdır.

Amaç ve kısıt fonksiyonlarının dışbükey olması durumunda ise optimizasyon problemi, dışbükey optimizasyon olarak isimlendirilir. Fonksiyonların dışbükeyliği

$$f_i(\zeta x + \eta y) \leq \zeta f_i(x) + \eta f_i(y), \tag{3.3}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall \zeta, \eta \in \mathbb{R}, \ \ \zeta + \eta = 1, \ \ \zeta \geq 0, \ \ \eta \geq 0,$$

olarak tanımlanmıştır [53]. Buradaki eşitsizlik, eşitlik ifadesinden daha az kısıtlayıcıdır ve bu sebeple dışbükeylik, doğrusallıktan daha genel bir kavramdır.

Bu bölümde bazı dışbükeylik kavramlarının tanımlanmasında fayda vardır.

Tanım 3.1. *(Dışbükey Küme)* v_1 ve v_2, vektör uzayı $\mathscr{V}$' de tanımlı iki nokta olsun. Bu iki noktayı birleştiren doğru parçası, $L(v_1, v_2)$,

$$L(v_1, v_2) = \left\{ v \in \mathscr{V} : v = \mu v_1 + (1-\mu) v_2 \ \ bazı \ \ \mu \in [0,1] \right\}, \tag{3.4}$$

olarak tanımlanmıştır [54]. Burada $\mu = 1$ ve $\mu = 0$ olması durumu, sırasıyla v_1 ve v_2 noktalarını gösterir. Ayrıca boş küme olmayan ve $\mathscr{V}$ vektör uzayının alt kümesi olan bir $\mathscr{W}$ kümesi tanımlayalım. Eğer $\mathscr{W}$ kümesinin içinden seçilen herhangi iki v_1 ve v_2 noktası için tanımlanan $L(v_1, v_2)$ doğru parçası, $\mathscr{W}$ kümesinin içinde kalıyorsa bu küme dışbükeydir.

Tanım 3.2. *(Dışbükey Kabuk)* Tanım 3.1'de verilen doğru parçası tanımı

$$L(v_1, v_2) = \{ v \in \mathscr{V} : v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \ \ ve \ \ \mu_1 + \mu_2 = 1 \}, \tag{3.5}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu doğru parçası n tane nokta, v_1,...,v_n, için yeniden yazılırsa

$$L(v_1, ..., v_n) = \{ v \in \mathscr{V} : v = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n \ \ ve \ \ \mu_1 + ... + \mu_n = 1 \}, \tag{3.6}$$

ifadesi elde edilir. Bu n tane nokta

$$co\big(\{v_1, ..., v_n\}\big) = \left\{ v \in \mathscr{V} : v = \sum_{k=1}^{n} \mu_k v_k \ \ ve \ \ \mu_k \in [0,1], \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1 \right\}, \tag{3.7}$$

şeklinde bir dışbükey kabuk tanımlar [54].

Bir diğer deyişle, herhangi bir dışbükey kümenin herhangi bir arakesitine dışbükey kabuk denir. Ayrıca $\{v_1, ..., v_n\}$ kümesini kapsayan sonlu sayıda dışbükey küme varsa, bu kümelerin kesişim noktaları, $\{v_1, ..., v_n\}$ noktalar kümesinin köşe noktalarıdır. Eğer bir dışbükey kümenin sonlu sayıda elemanı varsa, bu kümenin dışbükey kabuğu bir politoptur. Bu önermenin tersi de mümkündür [3].

3.2 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri

DME'ler, dinamik sistemlerin incelenmesinde A. M. Lyapunov [26] ile 1890'lı yıllarda ortaya çıkmıştır. Ancak kontrol kuramında, 1990'lardan sonra yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bir DME,

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i < 0, \tag{3.8}$$

şeklinde kanonik formda ifade edilebilir. Burada $i = 1, ..., m$ iken, x_i değişkenleri, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{nxn}$ simetrik matrisleri gösterir. Ayrıca bu eşitsizlik ifadesi, F_i matrisinin negatif tanımlılığını belirtmekte ve x değişkeni üzerindeki bir dışbükey kısıtı tanımlamaktadır [35].

$$\{x | F(x) < 0\} \tag{3.9}$$

Burada $F(x) < 0$ kısıtı altında herhangi bir x vektörünün aranması, DME varlık problemi olarak isimlendirilir. DME'lerin çözülmesi ise bir dışbükey optimizasyon problemidir. Ayrıca çözüm ile elde edilen küme bir dışbükey kümeyi, bulunan x vektörü ise çözüm kümesindeki *en iyi* vektörü tanımlar.

Bu bölümde, DME'ler ile formüle edilebilen bazı kavramlar verilecektir.

3.2.1 Lyapunov Kararlılığı

Lyapunov Kararlılığı, dinamik sistemleri kararlı kılmak için kontrol problemlerinde kullanılan başlıca yöntemlerden biridir. Öncelikle aşağıda verilen doğrusal zamana bağlı değişmeyen otonom bir sistemi ele alalım.

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \;\; A \in \mathbb{R}^{nxn} \tag{3.10}$$

Burada, $A^T P + PA < 0$ eşitsizliğini (Lyapunov eşitsizliği) sağlayan bir $P = P^T > 0$ matrisinin (Lyapunov matrisi) var olması halinde (3.10) sistemi asimptotik kararlıdır [35]. Bu önerme

$$V\Big(x(t), t\Big) = x^T(t) P x(t), \tag{3.11}$$

Lyapunov fonksiyonu, ile gösterilir. Buradaki kararlılık kavramı, Lyapunov fonksiyonun pozitif tanımlı olması ve türevinin negatif tanımlı olması üzerinedir. Türevin negatif tanımlılığı, $x(t)$ yörünge fonksiyonunu zamana bağlı azalan fonksiyon yapar ve sistemi asimptotik kararlı kılar.

3.2.2 H_∞ Normu

Norm kavramı, matris ve vektör gibi çok boyutlu ifadelerin ölçülendirilmesi ve karşılaştırılabilir olması amacıyla kontrol problemlerinde uzun yıllardır kullanılmaktadır. H_∞ normu, L_∞ Banach uzayının sağ yarı açık s düzlemindeki H_∞ doğrusal vektör uzayında tanımlı olan normdur. $G(s) \in H_\infty$ iken H_∞ normu,

$$\|G(s)\|_\infty = \sup\left\{\sigma_{max}\big(G(s)\big)\Big|Re(s) > 0\right\}, \tag{3.12}$$

olarak tanımlanmıştır [42]. Burada $G(s)$, sistemin giriş vektörü ile çıkış vektörü arasındaki transfer fonksiyonudur. Tek girişli tek çıkışlı sistemlerde H_∞ normu, Bode diyagramındaki maksimum noktayı veya Nyquist eğrisinin orijinden olan maksimum uzaklığını verir [31].

Zaman alanında H_∞ normu,

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_{w\neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma_\infty, \tag{3.13}$$

olarak tanımlanabilir. Burada γ_∞ pozitif bir skaleri, $w(t)$ sistemin girişini ve $z(t)$ sistemin çıkışını tanımlar. Giriş ve çıkış vektörlerinin enerjileri ise

$$\|w\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w^T(t)w(t)dt, \tag{3.14}$$

$$\|z\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^T(t)z(t)dt, \tag{3.15}$$

olarak tanımlanabilir. Görüldüğü üzere H_∞ normu, $\mathscr{L}_2\big([0,\infty]\big)$ uzayı üzerinden işaretlerin ne kadar kuvvetlendirileceğini gösterir ve sistemin başına gelebilecek en kötü hal performansını belirler [3].

Doğrusal olmayan matris eşitsizlikleri, bazı lemmalar ile doğrusallaştırılabilir. Bu tezde belirtilen amaçla kullanılacak olan bazı lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.1. ***(Schur Tümleyen)*** *[35] Simetrik ve negatif tanımlı bir $\mathscr{S}$ matrisi, $\mathscr{S} = \mathscr{S}^T < 0$ koşulu altında verilmiş olsun.*

$$\mathscr{S} = \begin{bmatrix} \mathscr{S}_{11} & \mathscr{S}_{12} \\ \mathscr{S}_{21} & \mathscr{S}_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.16}$$

Burada $\mathscr{S}_{11} \in \mathbb{R}^{nxn}$, $\mathscr{S}_{12} = \mathscr{S}_{21}^T \in \mathbb{R}^{nxm}$, $\mathscr{S}_{22} \in \mathbb{R}^{mxm}$ matrisleri, aşağıda verilen önermelerdeki gibi ayrıştırılabilir ve bunlar birbirine eşdeğerdir.

$$\mathscr{S}_{11} < 0 \implies \mathscr{S}_{22} - \mathscr{S}_{12}^T \mathscr{S}_{11}^{-1} \mathscr{S}_{12} < 0, \tag{3.17}$$

$$\mathscr{S}_{22} < 0 \implies \mathscr{S}_{11} - \mathscr{S}_{12} \mathscr{S}_{22}^{-1} \mathscr{S}_{12}^T < 0. \tag{3.18}$$

Lemma 3.2. ***(Kalman–Yakubovich–Popov Lemması)*** *[54] $\mathscr{M}(s) = \mathscr{C}(sI - \mathscr{A})^{-1}\mathscr{B} + \mathscr{D}$ olarak verilmiş olsun. O halde $\mathscr{A}$ matrisi Hurwitz, $\mathscr{P}$ matrisi ise pozitif tanımlı iken aşağıda verilen önermeler eşdeğerdir.*

$$\|\mathscr{M}\|_\infty < 1, \tag{3.19}$$

$$\begin{bmatrix} \mathscr{A}^T\mathscr{P} + \mathscr{P}\mathscr{A} & \mathscr{P}\mathscr{B} \\ \mathscr{B}^T\mathscr{P} & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathscr{C}^T \\ \mathscr{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathscr{C} & \mathscr{D} \end{bmatrix} < 0. \tag{3.20}$$

Lemma 3.3. *[45] $\mathscr{Q}$, $\mathscr{H}$ ve $\mathscr{E}$ uygun boyutlu matrisleri, $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}^T$ şartı altında verilmiş olsun. Öyleyse,*

$$\mathscr{Q} + \mathscr{H}\mathscr{F}\mathscr{E} + \mathscr{E}^T\mathscr{F}^T\mathscr{H}^T < 0, \tag{3.21}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\mathscr{F}^T\mathscr{F} \leq I$, ancak ve ancak

$$\mathscr{Q} + \epsilon\mathscr{H}\mathscr{H}^T + \epsilon^{-1}\mathscr{E}^T\mathscr{E} < 0, \tag{3.22}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\epsilon > 0$ skalerinin var olmasıyla mümkündür.

3.3 Standart Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile Dayanıklı H_∞ Kontrolör Tasarımı

Tezin bu bölümünde, SDME formu üzerine temellendirilen kontrolör tasarımları verilmiştir. Kontrolörlerde sistemin kararlılığı, Lyapunov Kararlılık Teoremi ile tanımlanmıştır. Sistemin performans kriterleri ise, H_∞ normu ile ifade edilmiştir. Öncelikle nominal sistem için Sınırlı Gerçek Lemması, Lemma 3.4'de verilmiştir ve bu lemma yardımıyla üretilen nominal H_∞ kontrolör, Sonuç 3.1'de elde edilmiştir. Ardından normu sınırlı belirsiz ve politopik belirsiz sistemler için gerçekleştirilen daya-

nıklı kontrolör tasarımları, sırasıyla Teorem 3.1 ve Teorem 3.2'de gösterilmiştir. Ayrıca kontrolör sentezleri, ispatlarla açıklanmıştır.

Öncelikle, nominal ve kontrolsüz halde kararlı sistem aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_w w(t) \end{cases} \tag{3.23}$$

Aşağıdaki lemma, (3.23) sistemi için SDME ile üretilmiş Sınırlı Gerçek Lemması'nı tanımlar.

Lemma 3.4. ***(Standart Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile Üretilmiş Sınırlı Gerçek Lemması)*** *[35] Aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu $Q = Q^T > 0$ matrisinin ve $\gamma_\infty > 0$ skalerinin var olması halinde, Σ sisteminin $w(t)$'den $z(t)$'ye H_∞ normu γ_∞ skalerinden küçüktür. Bir diğer deyişle, $\|\Sigma\|_\infty < \gamma_\infty$ koşulunu sağlar.*

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T & B_w & QC^T \\ * & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ * & * & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.24}$$

İspat. Lyapunov Kararlılık Teoremi gereğince, kapalı-çevrim sistemin asimptotik kararlı olabilmesi için, sisteme ait $t \geq 0$ için negatif değer almayan bir enerji fonksiyonunun bulunabilmesi ve bu fonksiyonun sistem yörüngesi boyunca zamana göre birinci türevinin negatif olması gerekir. O halde (3.23) sisteminin asimptotik kararlılığı Lyapunov fonksiyonu üzerinden,

$$V\big(x(t)\big) = x^T(t)Px(t) > 0, \;\; P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{nxn}, \;\; \forall t > 0, \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu fonksiyonun sistem yörüngesi boyunca zamana göre birinci türevi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\dot{V}\big(x(t)\big) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) = x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Px(t) < 0, \;\; \forall t > 0 \tag{3.26}$$

Sistemin performans kriterleri ise, H_∞ normu üzerinden belirlenecektir. H_∞ performans kriterlerinin kararlılık koşulu (3.26)'ya eklenmesiyle kontrolörün temelini oluşturan aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız.

$$J(x(t), t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma_\infty^2 w^T(t)w(t) < 0, \;\; \forall t > 0 \tag{3.27}$$

Elde edilen (3.27) eşitsizliği, $\phi := \begin{bmatrix} x(t)^T & w(t)^T \end{bmatrix}^T$ durum vektörünün atanması ve ardından bu vektör ile (3.23) sistemindeki ifadelerin $x(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\phi$, $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A & B_w \end{bmatrix}\phi$, $w(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\phi$ ve $z(t) = \begin{bmatrix} C & D_w \end{bmatrix}\phi$ şeklinde tanımlanmasıyla aşağıdaki formda yazılabilir.

$$2\phi^T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & B_w \end{bmatrix}\phi + \phi^T \begin{bmatrix} C^T \\ D_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D_w \end{bmatrix}\phi + \phi^T \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left(-\gamma_\infty^2 I\right) \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\phi < 0 \quad (3.28)$$

Görülebileceği üzere (3.28) eşitsizliği ile ϕ durum vektörü sınırlandırılır ve bütünleşik halde,

$$\phi^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB_w + C^T D_w \\ B_w^T P + D_w^T C & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} \phi < 0, \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda bu ifade,

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB_w + C^T D_w \\ B_w^T P + D_w^T C & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.30)$$

eşitsizliği ile de ifade edilebilir. (3.30) eşitsizliğine Kalman–Yakubovich–Popov Lemması'nı (Lemma 3.2) uygulayıp, ardından da Schur Tümleyen'i (Lemma 3.1) kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB_w & C^T \\ B_w^T P & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ C & D_w & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

(3.31) eşitsizliğine $\mathrm{diag}\{P^{-1}, I, I\}$ ile benzerlik dönüşümü yapılması ile de,

$$\begin{bmatrix} AP^{-1} + P^{-1}A^T & B_w & P^{-1}C^T \\ B_w^T & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ CP^{-1} & D_w & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.32)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $Q := P^{-1}$ ataması yapılırsa, (3.24) DME'sine ulaşılır. Böylelikle ispat sonlanır. ■

Lemma 3.4'te verilen bilgiler ışığında, (3.24)'de A yerine $A + B_u K$ ve C yerine $C + D_u K$ yazılıp, ardından da $S := KQ$ ataması yapılırsa, nominal sistem için durum-geri beslemeli H_∞ kontrolörü Sonuç 3.1 olarak elde edilir.

Sonuç 3.1. ***(Standart Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile Üretilmiş Durum-Geri Beslemeli Nominal*** H_∞ ***Kontrolörü)*** *Kapalı-çevrim nominal sistemi* (Γ) *ele alalım:*

$$\Gamma \begin{cases} \dot{x}(t) &= \underbrace{(A+B_uK)}_{A_{cl}} x(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= \underbrace{(C+D_uK)}_{C_{cl}} x(t) + D_w w(t) \end{cases} \tag{3.33}$$

Aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu $Q = Q^T > 0$, S *matrislerinin ve* $\gamma_\infty > 0$ *skalerinin var olması halinde,* Γ *sistemi asimptotik kararlıdır ve* $\|\Gamma\|_\infty < \gamma_\infty$ *koşulunu sağlar.*

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_uS + S^TB_u^T & B_w & QC^T + S^TD_u^T \\ * & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ * & * & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.34}$$

Ardından ilgili kontrolör, $u(t) = Kx(t) = SQ^{-1}x(t)$ *formunda elde edilir.*

Normu sınırlı belirsizlikler, dayanıklı kontrolör sentezlerinde kullanılan ve sistemdeki belirsizlikleri modellememize yardımcı olan bir yöntemdir. Bölüm 2'de tanıtılan bu yönteme ve de tanımlanan kapalı-çevrim normu sınırlı belirsiz sisteme (Λ) odaklanalım:

$$\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) &= \underbrace{\big(A + \Delta A(t) + (B_u + \Delta B_u(t))K\big)}_{A_{cln}} x(t) + \underbrace{\big(B_w + \Delta B_w(t)\big)}_{B_{wn}} w(t) \\ z(t) &= \underbrace{(C+D_uK)}_{C_{cl}} x(t) + D_w w(t) \end{cases} \tag{3.35}$$

Teorem 3.1, (3.35) sistemi için SDME ile üretilmiş durum-geri beslemeli normu sınırlı tipte belirsizliklere dayanıklı H_∞ kontrolörünü içerir.

Teorem 3.1. *Aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu* $Q = Q^T > 0$, S *matrislerinin ve* $\gamma_\infty > 0$, $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_3 > 0$ *skalerlerinin var olması halinde,* Λ *sistemi asimptotik kararlıdır ve* $\|\Lambda\|_\infty < \gamma_\infty$ *koşulunu sağlar.*

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & B_w & QC^T + S^TD_u^T & QE_a^T & S^TE_u^T & 0 \\ * & -\gamma_\infty I & D_w^T & 0 & 0 & E_w^T \\ * & * & -\gamma_\infty I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.36}$$

Burada,

$$\Xi_{11} = AQ + QA^T + B_u S + S^T B_u^T + \epsilon_1 G_a G_a^T + \epsilon_2 G_u G_u^T + \epsilon_3 G_w G_w^T,$$

şeklindedir. Daha sonra ilgili kontrolör, $u(t) = Kx(t) = SQ^{-1}x(t)$ *formunda elde edilir.*

İspat. Kapalı-çevrim nominal sistem (3.33)'ün kontrolü için üretilen (3.34) DME'sinde, A, B_u ve B_w matrislerinin yerine sırasıyla $A + \Delta A(t)$, $B_u + \Delta B_u(t)$ ve $B_w + \Delta B_w(t)$ matrislerinin yazılmasıyla,

$$\begin{bmatrix} \big(A+\Delta A(t)\big)Q + Q\big(A+\Delta A(t)\big)^T & & \\ \quad + \big(B_u+\Delta B_u(t)\big)S + S^T\big(B_u+\Delta B_u(t)\big)^T & B_w+\Delta B_w(t) & QC^T + S^T D_u^T \\ \big(B_w+\Delta B_w(t)\big)^T & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ CQ + D_u S & D_w & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.37}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bölüm 2'de tanımlanan belirsizlik matrisleri (2.21), (2.22) ve (2.23)'ün, (3.37)'de yerine yazılması ile elde edilen eşitsizlik, nominal (Π_n) ve belirsiz (Π_u) parçalara aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir.

$$\Pi_n + \Pi_u < 0 \tag{3.38}$$

Burada,

$$\Pi_n = \begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_u S + S^T B_u^T & B_w & QC^T + S^T D_u^T \\ B_w^T & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ CQ + D_u S & D_w & -\gamma_\infty I \end{bmatrix},$$

ve

$$\Pi_u = \mathrm{He}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} G_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathscr{H}_1} \underbrace{F(t)}_{\mathscr{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} E_a Q & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathscr{E}_1} \right\} + \mathrm{He}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} G_u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathscr{H}_2} \underbrace{F(t)}_{\mathscr{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} E_u S & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathscr{E}_2} \right\}$$
$$+ \mathrm{He}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} G_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathscr{H}_3} \underbrace{F(t)}_{\mathscr{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & E_w & 0 \end{bmatrix}}_{\mathscr{E}_3} \right\}.$$

şeklinde elde edilmiştir. Π_u matrisindeki doğrusal olmayan ifadeler, Lemma 3.3 yardımıyla aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\Pi_n + \epsilon_1 \mathscr{H}_1 \mathscr{H}_1^T + \epsilon_1^{-1} \mathscr{E}_1^T \mathscr{E}_1 + \epsilon_2 \mathscr{H}_2 \mathscr{H}_2^T + \epsilon_2^{-1} \mathscr{E}_2^T \mathscr{E}_2 + \epsilon_3 \mathscr{H}_3 \mathscr{H}_3^T + \epsilon_3^{-1} \mathscr{E}_3^T \mathscr{E}_3 < 0 \quad (3.39)$$

Ardından bu eşitsizliğe Schur Tümleyen uygulanır ve (3.36) DME'sine ulaşılır. Böylelikle ispat sonlanır. ■

Dayanıklı kontrolör sentezlerinde sistemdeki belirsizlikleri modellemek için kullanılan bir diğer değerli yöntem ise politopik belirsizliklerdir. Bölüm 2'de tanıtılan bu yöntemi ve de tanımlanan kapalı-çevrim politopik belirsiz sistemi (Υ) dikkate alalım:

$$\Upsilon \begin{cases} \dot{x}(t) &= \underbrace{\big(A(\theta) + B_u(\theta)K\big)}_{A_{cl}(\theta)} x(t) + B_w(\theta) w(t) \\ z(t) &= \underbrace{\big(C + D_u K\big)}_{C_{cl}} x(t) + D_w w(t) \end{cases} \quad (3.40)$$

Teorem 3.2, (3.40) sistemi için SDME ile üretilmiş durum-geri beslemeli politopik tipte belirsizliklere dayanıklı H_∞ kontrolörü içerir.

Teorem 3.2. *Aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu $Q = Q^T > 0$, S matrislerinin ve $\gamma_\infty > 0$ skalerinin var olması halinde, Υ sistemi asimptotik kararlıdır ve $\|\Upsilon\|_\infty < \gamma_\infty$ koşulunu sağlar.*

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q + QA(\theta)^T + B_u(\theta)S + S^T B_u(\theta)^T & B_w(\theta) & QC^T + S^T D_u^T \\ * & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ * & * & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.41)$$

Sonrasında ilgili kontrolör, $u(t) = Kx(t) = SQ^{-1}x(t)$ formunda elde edilir.

İspat. Lyapunov Kararlılık Teoremi gereğince, (3.40) sisteminin asimptotik kararlılığı Lyapunov fonksiyonu üzerinden,

$$V\big(x(t)\big) = x^T(t)Px(t) > 0, \;\; P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{nxn}, \;\; \forall t > 0, \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu fonksiyonun sistem yörüngesi boyunca zamana göre birinci türevi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\dot{V}\big(x(t)\big) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) = x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Px(t) < 0, \;\; \forall t > 0 \quad (3.43)$$

Sistemin performans kriterleri ise, H_∞ normu üzerinden belirlenecek olup, H_∞ performans kriterlerinin kararlılık koşulu (3.43)'e eklenmesiyle kontrolörün temelini oluşturan aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız.

$$J(x(t),t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) + z^T(t)z(t) - \gamma_\infty^2 w^T(t)w(t) < 0, \quad \forall t > 0 \tag{3.44}$$

Tanımlanan (3.44) eşitsizliği, ϕ durum vektörünün atanması ve ardından bu vektör ile (3.40) sistemindeki ifadelerin $x(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}\phi$, $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \end{bmatrix}\phi$, $w(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\phi$ ve $z(t) = \begin{bmatrix} C_{cl} & D_w \end{bmatrix}\phi$ şeklinde tanımlanmasıyla aşağıdaki formda yazılabilir.

$$2\phi^T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \end{bmatrix}\phi + \phi^T \begin{bmatrix} C_{cl}^T \\ D_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{cl} & D_w \end{bmatrix}\phi + \phi^T \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left(-\gamma_\infty^2 I\right) \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\phi < 0 \tag{3.45}$$

Burada ϕ durum vektörü, (3.45) eşitsizliği ile sınırlandırılır ve bütünleşik halde,

$$\phi^T \begin{bmatrix} PA_{cl}(\theta) + A_{cl}(\theta)^T P + C_{cl}^T C_{cl} & PB_w(\theta) + C_{cl}^T D_w \\ B_w(\theta)^T P + D_w^T C_{cl} & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} \phi < 0, \tag{3.46}$$

şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda bu ifade,

$$\begin{bmatrix} PA_{cl}(\theta) + A_{cl}(\theta)^T P + C_{cl}^T C_{cl} & PB_w(\theta) + C_{cl}^T D_w \\ B_w(\theta)^T P + D_w^T C_{cl} & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.47}$$

eşitsizliği ile de ifade edilebilir. Ardından (3.47) eşitsizliğine sırasıyla Kalman–Yakubovich–Popov Lemması ve Schur Tümleyen uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{bmatrix} PA_{cl}(\theta) + A_{cl}(\theta)^T P & PB_w(\theta) & C_{cl}^T \\ B_w(\theta)^T P & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ C_{cl} & D_w & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.48}$$

(3.48) eşitsizliğine $\mathrm{diag}\{P^{-1}, I, I\}$ ile benzerlik dönüşümü yapılması ile de,

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\theta)P^{-1} + P^{-1}A_{cl}(\theta)^T & B_w(\theta) & P^{-1}C_{cl}^T \\ B_w(\theta)^T & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ C_{cl}P^{-1} & D_w & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.49}$$

ifadesine ulaşılır. Burada $Q := P^{-1}$ ataması yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\theta)Q + QA_{cl}(\theta)^T & B_w(\theta) & QC_{cl}^T \\ B_w(\theta)^T & -\gamma_\infty I & D_w^T \\ C_{cl}Q & D_w & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.50}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son olarak, (3.50)'de $A_{cl}(\theta)$ yerine $A(\theta) + B_u(\theta)K$ ve C_{cl} yerine $C + D_uK$ yazılıp, ardından da $S := KQ$ ataması yapılırsa, (3.41) DME'sine ulaşılır. Böylelikle ispat sonlanır. ■

3.4 Genişletilmiş Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile Dayanıklı H_∞ Kontrolör Tasarımı

GDME'ler, kontrolör sentezlerinde tutuculuğu azaltmak için kullanılan etkin bir yöntemdir. İki yönlü teleoperasyon sistemlerindeki performans ve dayanıklı kararlılık kriterleri, birbirleri arasında bir ödünleşme yaratmaktadır. Çok amaçlı kontrol problemlerinde yaşanılan bu durum, kontrolörün tutuculuğunu arttırır. Kontrol kuvvetlerinde ve minimum dış kuvvet bastırma seviyesi γ_∞ değerinde yükselmeye sebep olan bu etki, kontrolör sentezinin pratikte uygulanabilirliğini azaltmaktadır. Bu bölümde, tezin temel motivasyonunu oluşturan tutuculuğu azaltmak hedefine ulaşmak için, GDME'lerden faydalanılacaktır. Projeksiyon Lemması üzerine kurulan bu yöntem, kontrolörü simetrik Lyapunov matrisi yerine, simetrik olma zorunluluğu bulunmayan ek bir tasarım değişkeni ile ifade etmemize olanak verir. Tasarımlarda, standart formda üretilen kontrolörlerle benzer şekilde sistemin kararlılığı ve performans kriterleri, sırasıyla Lyapunov Kararlılığı ve H_∞ normu ile tanımlanmıştır. Kontrolörün tutuculuğunu azaltan bu tasarım yöntemi ile elde edilen Sınırlı Gerçek Lemması ve nominal H_∞ kontrolör, sırasıyla Teorem 3.3 ve Sonuç 3.2'de verilmiştir. Ardından Bölüm 2'de tanımlanan normu sınırlı ve politopik belirsiz sistemler için dayanıklı H_∞ kontrolör tasarımları, bu tasarım yöntemi temel alınarak gerçekleştirilmiştir. GDME ile üretilen dayanıklı H_∞ kontrolörler, normu sınırlı ve politopik belirsiz sistemler için sırasıyla Teorem 3.4 ve Teorem 3.5'de verilmiştir. Ayrıca kontrolör sentezleri, ispatlarla açıklanmıştır.

DME'lerin genişletilmiş formları, sistem matrislerinden Lyapunov matrisini ayrıştırmak temeline dayanır. Bu ayrışmayı sağlamak için kontrolör sentezlerinde Projeksiyon Lemması kullanılmış ve genişletilmiş forma ulaşılmıştır. Buradaki mantık, lemmayı sondan başa doğru düşünerek (3.51) eşitsizliğine ulaşmaktır. Böylelikle DME, daha geniş bir forma dönüşür.

Lemma 3.5. ***(Projeksiyon Lemması)*** *[33] Simetrik bir matris $\mathscr{Z}$ ile $\mathscr{U}$ ve $\mathscr{V}$ şeklinde görüntü uzayları doğrusal bağımsız uygun boyutlu iki matris verildiğinde*

$$\mathscr{U}^T\mathscr{X}\mathscr{V} + \mathscr{V}^T\mathscr{X}^T\mathscr{U} + \mathscr{Z} < 0, \tag{3.51}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\mathscr{X}$, ancak ve ancak

$$\mathscr{N}_{\mathscr{U}}^T\mathscr{Z}\mathscr{N}_{\mathscr{U}} < 0, \tag{3.52}$$

$$\mathscr{N}_{\mathscr{V}}^T\mathscr{Z}\mathscr{N}_{\mathscr{V}} < 0, \tag{3.53}$$

eşitsizliklerinin sağlanması durumunda bulunabilir. Burada $\mathscr{N}_{\mathscr{U}}$ ve $\mathscr{N}_{\mathscr{V}}$ matrislerinin sütunları sırası ile $\mathscr{U}$ ve $\mathscr{V}$ matrislerinin sıfır uzaylarını geren baz vektörleridir.

İspat. $\mathscr{N}_{\mathscr{U}}$ ve $\mathscr{N}_{\mathscr{V}}$ matrislerinin sütunları sırası ile $\mathscr{U}$ ve $\mathscr{V}$ matrislerinin sıfır uzaylarını geren baz vektörleri olması göz önüne alındığında,

$$\mathscr{U}\mathscr{N}_{\mathscr{U}} = 0, \;\; \mathscr{N}_{\mathscr{U}}^T\mathscr{U}^T = 0 \tag{3.54}$$

ve

$$\mathscr{V}\mathscr{N}_{\mathscr{V}} = 0, \;\; \mathscr{N}_{\mathscr{V}}^T\mathscr{V}^T = 0 \tag{3.55}$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.54) eşitliğindeki bilgiler ışığında, (3.51) eşitsizliğine $\mathscr{N}_{\mathscr{U}}$ ile benzerlik dönüşümü yapılırsa (3.52) eşitsizliğine ulaşılır. Benzer şekilde (3.55) eşitliğindeki bilgiler göz önüne alınarak, (3.51) eşitsizliğine $\mathscr{N}_{\mathscr{V}}$ ile benzerlik dönüşümü yapılırsa (3.53) eşitsizliğine ulaşılır. Böylelikle ispatın gereklilik koşulu sağlanır.

(3.52) ve (3.53) eşitsizliklerinin, (3.51) eşitsizliğini tanımlamadaki yeterliliği ise Gahinet ve Apkarian [33] tarafından, ispatın geri kalanında verildiği üzere ortaya konulmuştur.

Öncelikle $\mathscr{T}_{\mathscr{U}\mathscr{V}}$, $\mathscr{T}_{\mathscr{U}}$, $\mathscr{T}_{\mathscr{V}}$ ve $\mathscr{T}_{\mathscr{R}}$ matrislerini tanımlayalım ve bu matrisler ile $\mathscr{N}_{\mathscr{U}} := \begin{bmatrix} \mathscr{T}_{\mathscr{U}\mathscr{V}} & \mathscr{T}_{\mathscr{U}} \end{bmatrix}$ ve $\mathscr{N}_{\mathscr{V}} := \begin{bmatrix} \mathscr{T}_{\mathscr{U}\mathscr{V}} & \mathscr{T}_{\mathscr{V}} \end{bmatrix}$ atamalarını yapalım. Burada $\mathscr{T}_{\mathscr{U}\mathscr{V}}$, $\mathscr{T}_{\mathscr{U}}$ ve $\mathscr{T}_{\mathscr{V}}$ matrislerinin sütunları sırası ile $[\mathscr{U}\,\mathscr{V}]$, $\mathscr{U}$ ve $\mathscr{V}$ matrislerinin sıfır uzaylarını geren baz vektörlerini gösterir ve $\mathscr{T}$ matrisi,

$$\mathscr{T} := \begin{bmatrix} \mathscr{T}_{\mathscr{U}\mathscr{V}} & \mathscr{T}_{\mathscr{U}} & \mathscr{T}_{\mathscr{V}} & \mathscr{T}_{\mathscr{R}} \end{bmatrix}, \tag{3.56}$$

şeklinde tekil olmayan bir matris olarak gösterilebilir. Ardından teoremde verilen

(3.51) eşitsizliğine, $\mathscr{T}$ ile benzerlik dönüşümü yapılırsa,

$$\mathscr{T}^T\mathscr{U}^T\mathscr{X}\mathscr{V}\mathscr{T}+\mathscr{T}^T\mathscr{V}^T\mathscr{X}^T\mathscr{U}\mathscr{T}+\mathscr{T}^T\mathscr{Z}\mathscr{T}<0, \tag{3.57}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada,

$$\mathscr{U}\mathscr{T}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \mathscr{U}_1 & \mathscr{U}_2\end{bmatrix} \tag{3.58}$$

ve

$$\mathscr{V}\mathscr{T}=\begin{bmatrix}0 & \mathscr{V}_1 & 0 & \mathscr{V}_2\end{bmatrix} \tag{3.59}$$

olarak elde edilebilir. Ayrıca (3.57) eşitsizliğini oluşturmak için,

$$\mathscr{T}^T\mathscr{Z}\mathscr{T}:=\begin{bmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \mathscr{Z}_{13} & \mathscr{Z}_{14}\\ \mathscr{Z}_{12}^T & \mathscr{Z}_{22} & \mathscr{Z}_{23} & \mathscr{Z}_{24}\\ \mathscr{Z}_{13}^T & \mathscr{Z}_{23}^T & \mathscr{Z}_{33} & \mathscr{Z}_{34}\\ \mathscr{Z}_{14}^T & \mathscr{Z}_{24}^T & \mathscr{Z}_{34}^T & \mathscr{Z}_{44}\end{bmatrix} \tag{3.60}$$

ve

$$\begin{bmatrix}\mathscr{X}_{11} & \mathscr{X}_{12}\\ \mathscr{X}_{21} & \mathscr{X}_{22}\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}\mathscr{U}_1^T\\ \mathscr{U}_2^T\end{bmatrix}\mathscr{X}\begin{bmatrix}\mathscr{V}_1 & \mathscr{V}_2\end{bmatrix} \tag{3.61}$$

atamaları yapılabilir. Böylelikle (3.57) eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \mathscr{Z}_{13} & \mathscr{Z}_{14}\\ \mathscr{Z}_{12}^T & \mathscr{Z}_{22} & \mathscr{Z}_{23}+\mathscr{X}_{11}^T & \mathscr{Z}_{24}+\mathscr{X}_{21}^T\\ \mathscr{Z}_{13}^T & \mathscr{Z}_{23}^T+\mathscr{X}_{11} & \mathscr{Z}_{33} & \mathscr{Z}_{34}+\mathscr{X}_{12}\\ \mathscr{Z}_{14}^T & \mathscr{Z}_{24}^T+\mathscr{X}_{21} & \mathscr{Z}_{34}^T+\mathscr{X}_{12}^T & \mathscr{Z}_{44}+\mathscr{X}_{22}+\mathscr{X}_{22}^T\end{bmatrix}<0 \tag{3.62}$$

Burada $\mathscr{X}$ herhangi bir matris olduğundan $\mathscr{X}_{ij}$ rastgele seçilebilir. $\begin{bmatrix}\mathscr{U}_1 & \mathscr{U}_2\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}\mathscr{V}_1 & \mathscr{V}_2\end{bmatrix}$ ise tam sütun rankına sahip matrislerdir. Ayrıca, herhangi bir $\mathscr{X}_{ij}$ için,

$$\mathscr{X}=\begin{bmatrix}\mathscr{U}_1^T\\ \mathscr{U}_2^T\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}\mathscr{X}_{11} & \mathscr{X}_{12}\\ \mathscr{X}_{21} & \mathscr{X}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathscr{V}_1 & \mathscr{V}_2\end{bmatrix}^+ \tag{3.63}$$

ataması (3.61) eşitliğini çözer. Böylelikle tanımlanan problem, bazı $\mathscr{X}_{ij}$ matrisleri için (3.62) eşitsizliğinin var olması şartını sağlayan $\mathscr{Z}_{ij}$ matrislerini bulma problemine indirgenir.

Ardından (3.62) eşitsizliğine Schur Tümleyen uygulanmasıyla,

$$\mathscr{Z}_{44}+\mathscr{X}_{22}+\mathscr{X}_{22}^{T}-\begin{bmatrix}\mathscr{Z}_{14}\\ \mathscr{Z}_{24}+\mathscr{X}_{21}^{T}\\ \mathscr{Z}_{34}+\mathscr{X}_{12}\end{bmatrix}^{T}\mathscr{G}^{-1}\begin{bmatrix}\mathscr{Z}_{14}\\ \mathscr{Z}_{24}+\mathscr{X}_{21}^{T}\\ \mathscr{Z}_{34}+\mathscr{X}_{12}\end{bmatrix}<0 \tag{3.64}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada,

$$\mathscr{G}=\begin{bmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12} & \mathscr{Z}_{13}\\ \mathscr{Z}_{12}^{T} & \mathscr{Z}_{22} & \mathscr{Z}_{23}+\mathscr{X}_{11}^{T}\\ \mathscr{Z}_{13}^{T} & \mathscr{Z}_{23}^{T}+\mathscr{X}_{11} & \mathscr{Z}_{33}\end{bmatrix}<0, \tag{3.65}$$

eşitsizliğidir. (3.64) eşitsizliğini sağlayan $\mathscr{X}_{22}$ matrisi, $\mathscr{X}_{11}$, $\mathscr{X}_{12}$ ve $\mathscr{X}_{21}$ matrislerinin verilmesi halinde her zaman bulunabilir. Böylelikle, (3.65) eşitsizliğini sağlayan bir $\mathscr{X}_{11}$ matrisinin var olması halinde (3.51) eşitsizliği sağlanır.

Elde edilen (3.65) eşitsizliği,

$$\begin{bmatrix}I & 0 & 0\\ -\mathscr{Z}_{12}^{T}\mathscr{Z}_{11}^{-1} & I & 0\\ -\mathscr{Z}_{13}^{T}\mathscr{Z}_{11}^{-1} & 0 & I\end{bmatrix}\mathscr{G}\begin{bmatrix}I & -\mathscr{Z}_{11}^{-1}\mathscr{Z}_{12} & -\mathscr{Z}_{11}^{-1}\mathscr{Z}_{13}\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}<0, \tag{3.66}$$

şeklinde düzenlenebilir ve aynı zamanda aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix}\mathscr{Z}_{11} & 0 & 0\\ 0 & \mathscr{Z}_{22}-\mathscr{Z}_{12}^{T}\mathscr{Z}_{11}^{-1}\mathscr{Z}_{12} & \mathscr{X}_{11}^{T}+\mathscr{Z}_{23}-\mathscr{Z}_{12}^{T}\mathscr{Z}_{11}^{-1}\mathscr{Z}_{13}\\ 0 & \mathscr{X}_{11}+\mathscr{Z}_{23}^{T}-\mathscr{Z}_{13}^{T}\mathscr{Z}_{11}^{-1}\mathscr{Z}_{12} & \mathscr{Z}_{33}-\mathscr{Z}_{13}^{T}\mathscr{Z}_{11}^{-1}\mathscr{Z}_{13}\end{bmatrix}<0 \tag{3.67}$$

Aynı zamanda herhangi bir $\mathscr{X}_{11}$ matrisi için (3.67) eşitsizliği, ancak ve ancak aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması ile var olabilir.

$$\mathscr{Z}_{11}<0, \tag{3.68}$$

$$\mathscr{Z}_{22}-\mathscr{Z}_{12}^{T}\mathscr{Z}_{11}^{-1}\mathscr{Z}_{12}<0, \tag{3.69}$$

$$\mathscr{Z}_{33}-\mathscr{Z}_{13}^{T}\mathscr{Z}_{11}^{-1}\mathscr{Z}_{13}<0. \tag{3.70}$$

Ayrıca bu eşitsizlikler,

$$\begin{bmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{12}\\ \mathscr{Z}_{12}^{T} & \mathscr{Z}_{22}\end{bmatrix}<0 \tag{3.71}$$

ve

$$\begin{bmatrix}\mathscr{Z}_{11} & \mathscr{Z}_{13}\\ \mathscr{Z}_{13}^{T} & \mathscr{Z}_{33}\end{bmatrix}<0 \tag{3.72}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\mathscr{Z}_{ij}$, $\mathscr{N}_{\mathscr{U}}$ ve $\mathscr{N}_{\mathscr{V}}$ tanımlamalarıyla (3.52) ve (3.53) eşitsizliklerine ulaşılabilir. Böylelikle ispat sonlanır. ■

Bu bilgiler ışığında ilk olarak, nominal ve kontrolsüz halde kararlı sistemi (Σ) aşağıdaki gibi yeniden yazalım.

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_w w(t) \end{cases} \tag{3.73}$$

Aşağıda verilen teorem, (3.73) sistemi için GDME ile üretilmiş Sınırlı Gerçek Lemması'nı göstermektedir.

Teorem 3.3. ***(Genişletilmiş Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile Üretilmiş Sınırlı Gerçek Lemması)*** *Aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu X, $G = G^T > 0$ matrislerinin ve $\lambda > 0$, $\gamma_\infty > 0$ skalerlerinin var olması halinde, Σ sisteminin $w(t)$'den $z(t)$'ye H_∞ normu γ_∞ skalerinden küçüktür. Bir diğer deyişle, $\|\Sigma\|_\infty < \gamma_\infty$ koşulunu sağlar.*

$$\mathrm{He}\left\{ \begin{bmatrix} -X^T A^T \\ X^T \\ -B_w^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 & G & 0 & X^T C^T \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma_\infty^2 I & D_w^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.74}$$

İspat. Σ sistemi için asimptotik kararlılığı ve H_∞ performans kriterlerini ifade eden (3.28) eşitsizliği, $W = W^T > 0$ Lyapunov matrisi için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$2\phi^T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} A & B_w \end{bmatrix} \phi + \phi^T \begin{bmatrix} C^T \\ D_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D_w \end{bmatrix} \phi + \phi^T \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left(-\gamma_\infty^2 I\right) \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \phi < 0 \tag{3.75}$$

ϕ durum vektörünü sınırlandırdığını bildiğimiz (3.75) eşitsizliği bütünleşik halde,

$$\phi^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B_w \\ 0 & I \\ C & D_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B_w \\ 0 & I \\ C & D_w \end{bmatrix} \phi < 0, \tag{3.76}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca bu ifade,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B_w \\ 0 & I \\ C & D_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B_w \\ 0 & I \\ C & D_w \end{bmatrix} < 0, \tag{3.77}$$

eşitsizliği ile de ifade edilebilir. Kolaylık sağlamak için (3.77) eşitsizliği aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B_w \\ 0 & I \end{bmatrix}^T}_{\mathscr{N}_{\mathscr{U}_n}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C & 0 & D_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C & 0 & D_w \end{bmatrix}}_{\mathscr{Z}_n} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B_w \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathscr{N}_{\mathscr{U}_n}} < 0 \tag{3.78}$$

Burada,

$$\mathscr{Z}_n = \begin{bmatrix} C^T C & W & C^T D_w \\ W & 0 & 0 \\ D_w^T C & 0 & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix}, \tag{3.79}$$

matrisidir.

Görülebileceği üzere (3.78) eşitsizliği, Projeksiyon Lemması'nda verilen (3.52) eşitsizliği ile aynı düzendedir. Ayrıca herhangi bir tutuculuk getirmeyecek eşdeğer bir dışbükey koşul oluşturmak için, Pipeleers vd. [41] tarafından *Bölüm 5.5*'de verilen yöntem kullanılmış ve $\mathscr{U}_n = \begin{bmatrix} -A & I & -B_w \end{bmatrix}$ olarak seçilmiştir. Burada $\mathscr{N}_{\mathscr{U}_n}$ matrisinin sütunlarının $\mathscr{U}_n$ matrisinin sıfır uzaylarını geren baz vektörleri olması, $\mathscr{U}_n \mathscr{N}_{\mathscr{U}_n} = 0$ koşulunu sağlaması ile ispatlanabilir.

Diğer yandan, Projeksiyon Lemması'ndaki (3.53) eşitsizliğini elde etmek için $0 < C^T C < 2\lambda W$ ve $0 < \gamma_\infty^2 I - D_w^T D_w$ eşitsizlikleri ile,

$$C^T C - C^T D_w E D_w^T C < 2\lambda W, \tag{3.80}$$

eşitsizliğini tanımlayalım. Burada λ, minimum γ_∞ değerini bulmak için yapılan çizgisel taramanın pozitif tanımlı skalerini ve $E = (D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I)^{-1}$ matrisini gösterir. (3.78) eşitsizliğinden bildiğimiz üzere E matrisi pozitif tanımlıdır ($E > 0$). $\varepsilon := 0.5\lambda^{-1}$ ataması ile de, tanımlanan ilk matris koşulu $0 < \varepsilon C^T C < W$ şeklinde yeniden yazılabilir. Böylelikle yeterince küçük ε seçimi ile bu eşitsizliğin, Lyapunov matrisinin pozitif tanımlılığını belirten $W > 0$ koşuluna dayandığı gösterilebilir. Öte yandan $D_w^T D_w < \gamma_\infty^2 I$ eşitsizlik koşulu, H_∞ normunun tanımından gelmektedir.

Son olarak (3.80) eşitsizliği, iki tarafından 2λ ile çarpılırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$\varepsilon(C^TC - C^TD_wED_w^TC) < W \tag{3.81}$$

Elde edilen (3.81) eşitsizliğinin sol tarafı, C ve D_w matrislerine bağlı olarak ya negatif yarı tanımlı ya da pozitif tanımlıdır. İlk durum, direk olarak $W > 0$ koşuluna yol açar. Diğer durum ise, yeterince küçük ε seçimi ile elde edilen (3.81) eşitsizliğinin sol tarafını, her C ve D_w matrisi için $W > 0$ koşuluna dayandırır. Bu sebeple genişletme koşulu, herhangi bir tutuculuğa neden olmaz.

(3.81) eşitsizliğinde $\varepsilon = 0.5\lambda^{-1}$ ifadesinin yerine yazılması ve Schur Tümleyen'in uygulanmasıyla,

$$\begin{bmatrix} C^TC - 2\lambda W & C^TD_w \\ D_w^TC & D_w^TD_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.82}$$

eşitsizliği elde edilir ve aşağıdaki formda düzenlenebilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T}_{\mathscr{N}_{\mathscr{V}_n}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C & 0 & D_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C & 0 & D_w \end{bmatrix}}_{\mathscr{Z}_n} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathscr{N}_{\mathscr{V}_n}} \tag{3.83}$$

Böylelikle (3.53) eşitsizliği, (3.83) eşitsizliği ile elde edilmiş olur. Benzer şekilde dışbükey bir koşul oluşturmak için ise, $\mathscr{V}_n = \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 \end{bmatrix}$ olarak seçilmiştir. Burada $\mathscr{N}_{\mathscr{V}_n}$ matrisinin sütunlarının $\mathscr{V}_n$ matrisinin sıfır uzaylarını geren baz vektörleri olması, yine benzer şekilde $\mathscr{V}_n\mathscr{N}_{\mathscr{V}_n} = 0$ eşitliğini sağlaması ile ispatlanabilir.

Projeksiyon Lemması'nda verilen (3.51) eşitsizliği, elde edilen $\mathscr{U}_n$, $\mathscr{V}_n$ ve $\mathscr{Z}_n$ matrisleri ile aşağıdaki gibi yazılabilir ve genişletilmiş DME yapısına ulaşılır.

$$\mathrm{He}\left\{ \begin{bmatrix} -A^T \\ I \\ -B_w^T \end{bmatrix} \mathscr{X} \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} C^TC & W & C^TD_w \\ W & 0 & 0 \\ D_w^TC & 0 & D_w^TD_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.84}$$

Ardından (3.84) eşitsizliğine $\mathrm{diag}\{\mathscr{X}^{-1}, \mathscr{X}^{-1}, I\}$ ile benzerlik dönüşümü uygulanıp, $X := \mathscr{X}^{-1}$ ve $G := X^TWX$ atamaları yapılırsa,

$$\mathrm{He}\left\{ \begin{bmatrix} -X^TA^T \\ X^T \\ -B_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} X^TC^TCX & G & X^TC^TD_w \\ G & 0 & 0 \\ D_w^TCX & 0 & D_w^TD_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.85}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son olarak, (3.85) eşitsizliğine Schur Tümleyen uygulanmasıyla

(3.74) DME'sine ulaşılır. (3.74)'deki $X^T + X < 0$, X'in tersinir olduğunu garanti eder. Böylelikle ispat sonlanır. ■

Yorum 3.1. Teorem 3.3' de verilen genişletilmiş yapıdaki Sınırlı Gerçek Lemması'nda görülebileceği üzere, Lyapunov matrisi sistem matrisleri ile çarpım halinde değildir. Bu sayede kontrolör tasarımları, yeni bir tasarım değişkeni üzerinden yapılabilmiştir. Elde edilen bu genişletilmiş yapı dayanıklı kontrolör tasarımlarında kullanıldığında daha az tutucu sonuçlar vermektedir. Bunun temel nedeni, yeni tasarım değişkeninin simetrik bir matris olma zorunluluğunun olmamasıdır. Böylelikle kontrol probleminin çözüm kümesi genişler. Ayrıca bu tasarım yöntemi, farklı kontrol problemlerinde de tutuculuğu azaltmak için kullanılabilir. Birden fazla DME kısıtı içeren kontrol problemlerinde genişletilmiş yapının kullanılması ve bu sayede her bir kısıt için farklı bir Lyapunov matrisinin seçilebilmesi bu duruma bir örnektir.

Teorem 3.3 üzerinden nominal kontrolör tasarımı gerçekleştirmek için, (3.74)'de A yerine $A+B_uK$ ve C yerine $C+D_uK$ yazılıp, sonrasında da $L := KX$ ataması yapılırsa, nominal sistem için durum-geri beslemeli genişletilmiş H_∞ kontrolörü Sonuç 3.2 olarak elde edilir.

Sonuç 3.2. ***(Genişletilmiş Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile Üretilmiş Durum-Geri Beslemeli Nominal H_∞ Kontrolörü)*** *Kapalı-çevrim nominal sistemi (Γ) ele alalım:*

$$\Gamma \begin{cases} \dot{x}(t) &= \underbrace{(A+B_uK)}_{A_{cl}} x(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= \underbrace{(C+D_uK)}_{C_{cl}} x(t) + D_w w(t) \end{cases} \tag{3.86}$$

Aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu $G = G^T > 0$, L, X matrislerinin ve $\gamma_\infty > 0$, $\lambda > 0$ skalerlerinin var olması halinde, Γ sistemi asimptotik kararlıdır ve $\|\Gamma\|_\infty < \gamma_\infty$ koşulunu sağlar.

$$\mathsf{He}\left\{ \begin{bmatrix} -X^TA^T - L^TB_u^T \\ X^T \\ -B_w^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 & G & 0 & X^TC^T + L^TD_u^T \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma_\infty^2 I & D_w^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.87}$$

Ardından ilgili kontrolör, $u(t) = Kx(t) = LX^{-1}x(t)$ formunda elde edilir.

Normu sınırlı belirsizliklere dayanıklı genişletilmiş formda DME'ler ile üretilmiş kontrolör sentezini gerçekleştirmek için, Bölüm 2'de tanıtılan normu sınırlı belirsizlik yöntemine ve de tanımlanan kapalı-çevrim normu sınırlı belirsiz sistemine (Λ) yeniden

odaklanalım:

$$\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) &= \underbrace{\big(A+\Delta A(t)+(B_u+\Delta B_u(t))K\big)}_{A_{cln}} x(t) + \underbrace{\big(B_w+\Delta B_w(t)\big)}_{B_{wn}} w(t) \\ z(t) &= \underbrace{(C+D_uK)}_{C_{cl}} x(t) + D_w w(t) \end{cases} \tag{3.88}$$

Teorem 3.4, (3.88) sistemi için GDME ile üretilmiş durum-geri beslemeli normu sınırlı tipte belirsizliklere dayanıklı H_∞ kontrolörünü içerir.

Teorem 3.4. *Aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu $G = G^T > 0$, L, X matrislerinin ve $\gamma_\infty > 0$, $\lambda > 0$, $\epsilon_4 > 0$, $\epsilon_5 > 0$, $\epsilon_6 > 0$ skalerlerinin var olması halinde, Λ sistemi asimptotik kararlıdır ve $\|\Lambda\|_\infty < \gamma_\infty$ koşulunu sağlar.*

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & -\lambda B_w & \Theta_{14} & \Theta_{15} & \Theta_{16} & 0 \\ * & \Theta_{22} & -B_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma_\infty^2 I & D_w^T & 0 & 0 & -E_w^T \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon_6 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.89}$$

Burada,

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= -\lambda(AX + X^TA^T + B_uL + L^TB_u^T) + \lambda^2(\epsilon_4 G_a G_a^T + \epsilon_5 G_u G_u^T + \epsilon_6 G_w G_w^T), \\ \Theta_{12} &= -X^TA^T - L^TB_u^T + \lambda X + G + \lambda(\epsilon_4 G_a G_a^T + \epsilon_5 G_u G_u^T + \epsilon_6 G_w G_w^T), \\ \Theta_{14} &= X^TC^T + L^TD_u^T, \\ \Theta_{15} &= -X^TE_a^T, \\ \Theta_{16} &= -L^TE_u^T, \\ \Theta_{22} &= X + X^T + \epsilon_4 G_a G_a^T + \epsilon_5 G_u G_u^T + \epsilon_6 G_w G_w^T, \end{aligned}$$

şeklindedir. Daha sonra ilgili kontrolör, $u(t) = Kx(t) = LX^{-1}x(t)$ formunda elde edilir.

İspat. Kapalı-çevrim nominal sistem (3.86)'nın kontrolü için üretilen (3.87) DME'sinde, A, B_u ve B_w matrislerinin yerine sırasıyla $A + \Delta A(t)$, $B_u + \Delta B_u(t)$ ve

$B_w + \Delta B_w(t)$ matrislerinin yazılmasıyla,

$$\mathrm{He}\left\{\begin{bmatrix} -X^T\big(A+\Delta A(t)\big)^T \\ -L^T\big(B_u+\Delta B_u(t)\big)^T \\ X^T \\ -\big(B_w+\Delta B_w(t)\big)^T \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I & I & 0 & 0\end{bmatrix}\right\} + \begin{bmatrix} 0 & G & 0 & X^TC^T+L^TD_u^T \\ G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & D_w^T \\ CX+D_uL & 0 & D_w & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.90)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bölüm 2'de tanımlanan belirsizlik matrisleri (2.21), (2.22) ve (2.23)'ün, (3.90)'da yerine yazılması ile elde edilen eşitsizlik, nominal (Φ_n) ve belirsiz (Φ_u) parçalara aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir.

$$\Phi_n + \Phi_u < 0 \quad (3.91)$$

Burada,

$$\Phi_n = \mathrm{He}\left\{\begin{bmatrix} -X^TA^T - L^TB_u^T \\ X^T \\ -B_w^T \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I & I & 0 & 0\end{bmatrix}\right\} + \begin{bmatrix} 0 & G & 0 & X^TC^T+L^TD_u^T \\ G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & D_w^T \\ CX+D_uL & 0 & D_w & -I \end{bmatrix},$$

ve

$$\Phi_u = \mathrm{He}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda G_a \\ G_a \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}}_{\mathscr{H}_4}\underbrace{F(t)}_{\mathscr{F}}\underbrace{\begin{bmatrix}-E_aX & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathscr{E}_4}\right\} + \mathrm{He}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda G_u \\ G_u \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}}_{\mathscr{H}_5}\underbrace{F(t)}_{\mathscr{F}}\underbrace{\begin{bmatrix}-E_uL & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathscr{E}_5}\right\}$$

$$+\mathrm{He}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda G_w\\ G_w\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{\mathscr{H}_6}\underbrace{F(t)}_{\mathscr{F}}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & -E_w & 0\end{bmatrix}}_{\mathscr{E}_6}\right\},$$

şeklinde elde edilmiştir. Doğrusal olmayan ifadeler içeren Φ_u matrisi, Lemma 3.3 yardımıyla aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\Phi_n+\epsilon_4\mathscr{H}_4\mathscr{H}_4^T+\epsilon_4^{-1}\mathscr{E}_4^T\mathscr{E}_4+\epsilon_5\mathscr{H}_5\mathscr{H}_5^T+\epsilon_5^{-1}\mathscr{E}_5^T\mathscr{E}_5+\epsilon_6\mathscr{H}_6\mathscr{H}_6^T+\epsilon_6^{-1}\mathscr{E}_6^T\mathscr{E}_6<0 \quad (3.92)$$

Sonrasında (3.92) eşitsizliğine Schur Tümleyen uygulanır ve (3.89) DME'sine ulaşılır. Böylelikle ispat sonlanır. ■

GDME ile politopik belirsizliklere dayanıklı kontrolör sentezi gerçekleştirmek için, Bölüm 2'de tanıtılan politopik belirsizlik yöntemine ve de tanımlanan kapalı-çevrim politopik belirsiz sistemine (Υ) yeniden odaklanalım:

$$\Upsilon\begin{cases}\dot{x}(t) &= \underbrace{\big(A(\theta)+B_u(\theta)K\big)}_{A_{cl}(\theta)}x(t)+B_w(\theta)w(t)\\ z(t) &= \underbrace{(C+D_uK)}_{C_{cl}}x(t)+D_ww(t)\end{cases} \quad (3.93)$$

Theorem 3.5, (3.93) sistemi için GDME ile üretilmiş durum-geri beslemeli politopik tipte belirsizliklere dayanıklı H_∞ kontrolörünü içerir. Ayrıca bu kontrolör, tez çalışmasının önerilen kontrolörüdür.

Teorem 3.5. *Aşağıdaki matris eşitsizliğini sağlayan uygun boyutlu $G=G^T>0$, L, X matrislerinin ve $\gamma_\infty>0$, $\lambda>0$ skalerlerinin var olması halinde Υ sistemi asimptotik kararlıdır ve $\|\Upsilon\|_\infty<\gamma_\infty$ koşulunu sağlar.*

$$\mathrm{He}\left\{\begin{bmatrix}-X^TA(\theta)^T-L^TB_u(\theta)^T\\ X^T\\ -B_w(\theta)^T\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I & I & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}+\begin{bmatrix}0 & G & 0 & X^TC^T+L^TD_u^T\\ * & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\gamma_\infty^2 I & D_w^T\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \quad (3.94)$$

Sonrasında ilgili kontrolör, $u(t)=Kx(t)=LX^{-1}x(t)$ formunda elde edilir.

İspat. Υ sistemi için asimptotik kararlılık ve H_∞ performans kriterleri, (3.45) eşitsizliği üzerinden $W = W > 0$ Lyapunov matrisi için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$2\phi^T \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \end{bmatrix} \phi + \phi^T \begin{bmatrix} C_{cl}^T \\ D_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{cl} & D_w \end{bmatrix} \phi + \phi^T \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left(-\gamma_\infty^2 I\right) \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \phi < 0 \tag{3.95}$$

Burada ϕ durum vektörü, (3.95) eşitsizliği ile sınırlandırılmaktadır ve bütünleşik halde,

$$\phi^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \\ 0 & I \\ C_{cl} & D_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \\ 0 & I \\ C_{cl} & D_w \end{bmatrix} \phi < 0, \tag{3.96}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca bu ifade,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \\ 0 & I \\ C_{cl} & D_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \\ 0 & I \\ C_{cl} & D_w \end{bmatrix} < 0, \tag{3.97}$$

eşitsizliği ile de ifade edilebilir ve aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \\ 0 & I \end{bmatrix}^T}_{\mathcal{N}_{\mathcal{U}_p}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C_{cl} & 0 & D_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C_{cl} & 0 & D_w \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}_p} \times \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{cl}(\theta) & B_w(\theta) \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{N}_{\mathcal{U}_p}} < 0 \tag{3.98}$$

Burada,

$$\mathcal{Z}_p = \begin{bmatrix} C_{cl}^T C_{cl} & W & C_{cl}^T D_w \\ W & 0 & 0 \\ D_w^T C_{cl} & 0 & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix}, \tag{3.99}$$

matrisidir.

Elde edilen (3.98) eşitsizliği, Projeksiyon Lemması'nda verilen (3.52) eşitsizliği ile aynı düzendedir. Ayrıca herhangi bir tutuculuğa neden olmayan eşdeğer bir

dışbükey koşul oluşturmak için, nominal durumdaki yöntem kullanılarak $\mathscr{U}_p = \begin{bmatrix} -A_{cl}(\theta) & I & -B_w(\theta) \end{bmatrix}$ olarak seçilmiştir. Burada $\mathscr{N}_{\mathscr{U}_p}$ matrisinin sütunlarının $\mathscr{U}_p$ matrisinin sıfır uzaylarını geren baz vektörleri olması, $\mathscr{U}_p \mathscr{N}_{\mathscr{U}_p} = 0$ koşulunu sağlaması ile ispatlanabilir.

Diğer yandan, Projeksiyon Lemması'ndaki (3.53) eşitsizliğini elde etmek için nominal durumda kullanılan yöntem izlenmiştir. Öncelikle, $0 < C_{cl}^T C_{cl} < 2\lambda W$ ve $0 < \gamma_\infty^2 I - D_w^T D_w$ eşitsizlikleri ile,

$$C_{cl}^T C_{cl} - C_{cl}^T D_w E D_w^T C_{cl} < 2\lambda W, \tag{3.100}$$

eşitsizliğini tanımlayalım. Burada λ, minimum γ_∞ değerini bulmak için yapılan çizgisel taramanın pozitif tanımlı skalerini ve $E = (D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I)^{-1}$ matrisini gösterir. (3.98) eşitsizliğinden bildiğimiz üzere E matrisi pozitif tanımlıdır ($E > 0$). ε ataması ile de, tanımlanan ilk matris koşulu $0 < \varepsilon C_{cl}^T C_{cl} < W$ şeklinde yeniden yazılabilir. Böylelikle yeterince küçük ε seçimi ile bu eşitsizliğin, Lyapunov matrisinin pozitif tanımlılığını belirten $W > 0$ koşuluna dayandığı gösterilebilir. Öte yandan $D_w^T D_w < \gamma_\infty^2 I$ eşitsizlik koşulu, bilindiği üzere H_∞ normunun tanımından gelmektedir.

Son olarak (3.100) eşitsizliği, iki tarafından 2λ ile çarpılırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$\varepsilon(C_{cl}^T C_{cl} - C_{cl}^T D_w E D_w^T C_{cl}) < W \tag{3.101}$$

Elde edilen (3.101) eşitsizliğinin sol tarafı, C_{cl} ve D_w matrislerine bağlı olarak ya negatif yarı tanımlı ya da pozitif tanımlıdır. İlk durum, direk olarak $W > 0$ koşuluna yol açar. Diğer durum ise, yeterince küçük ε seçimi ile elde edilen (3.101) eşitsizliğinin sol tarafını, her C_{cl} ve D_w matrisi için $W > 0$ koşuluna dayandırır. Bu sebeple genişletme koşulu, herhangi bir tutuculuğa neden olmaz.

(3.101) eşitsizliğinde $\varepsilon = 0.5\lambda^{-1}$ ifadesinin yerine yazılması ve Schur Tümleyen'in uygulanmasıyla,

$$\begin{bmatrix} C_{cl}^T C_{cl} - 2\lambda W & C_{cl}^T D_w \\ D_w^T C_{cl} & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.102}$$

eşitsizliği elde edilir ve aşağıdaki formda düzenlenebilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T}_{\mathscr{N}_{\mathscr{V}_p}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C_{cl} & 0 & D_w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & W & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C_{cl} & 0 & D_w \end{bmatrix}}_{\mathscr{L}_p} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathscr{N}_{\mathscr{V}_p}}$$

$$< 0 \tag{3.103}$$

Böylelikle (3.53) eşitsizliği, (3.103) eşitsizliği ile elde edilmiş olur. Benzer şekilde dışbükey bir koşul oluşturmak için ise, $\mathscr{V}_p = \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 \end{bmatrix}$ olarak seçilmiştir. Burada $\mathscr{N}_{\mathscr{V}_p}$ matrisinin sütunlarının $\mathscr{V}_p$ matrisinin sıfır uzaylarını geren baz vektörleri olması, yine benzer şekilde $\mathscr{V}\mathscr{N}_{\mathscr{V}_p} = 0$ eşitliğini sağlaması ile ispatlanabilir.

Elde edilen $\mathscr{U}_p$, $\mathscr{V}_p$ ve $\mathscr{Z}_p$ matrisleri ile Projeksiyon Lemması'nda verilen (3.51) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir ve genişletilmiş DME yapısına ulaşılır.

$$\mathsf{He}\left\{ \begin{bmatrix} -A_{cl}(\theta)^T \\ I \\ -B_w(\theta)^T \end{bmatrix} \mathscr{X} \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} C_{cl}^T C_{cl} & W & C_{cl}^T D_w \\ W & 0 & 0 \\ D_w^T C_{cl} & 0 & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.104)$$

Ardından (3.104) eşitsizliğinde $\mathsf{diag}\{\mathscr{X}^{-1}, \mathscr{X}^{-1}, I\}$ ile benzerlik dönüşümü uygulanıp, $X := \mathscr{X}^{-1}$ ve $G := X^T W X$ atamaları yapılırsa,

$$\mathsf{He}\left\{ \begin{bmatrix} -X^T A_{cl}(\theta)^T \\ X^T \\ -B_w(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} X^T C_{cl}^T C_{cl} X & G & X^T C_{cl}^T D_w \\ G & 0 & 0 \\ D_w^T C_{cl} X & 0 & D_w^T D_w - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.105)$$

eşitsizliğine ulaşılır ve Schur Tümleyen uygulanmasıyla

$$\mathsf{He}\left\{ \begin{bmatrix} -X^T A_{cl}(\theta)^T \\ X^T \\ -B_w(\theta)^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 & G & 0 & X^T C_{cl}^T \\ G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_\infty^2 I & D_w^T \\ C_{cl} X & 0 & D_w & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.106)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son olarak, (3.106)'da $A_{cl}(\theta)$ yerine $A(\theta) + B_u(\theta)K$ ve C_{cl} yerine $C + D_u K$ yazılıp, ardından da $L := KX$ ataması yapılırsa, (3.94) DME'sine ulaşılır. (3.94)'daki $X^T + X < 0$, X'in tersinir olduğunu garanti eder. Böylelikle ispat sonlanır.

■

4
SAYISAL BENZETİM ÇALIŞMALARI

Yüksek lisans tezinin bu bölümü, tasarlanan kontrolörlerin iki yönlü teleoperasyon sistemleri üzerindeki etkinliğini araştırmak için yapılan sayısal benzetim çalışmalarını içerir. Yapılan bütün çalışmalarda, Intel Core i5-8265U 1.6 GHz işlemcili ve 8 GB RAM kapasiteli Windows 10 Pro ile çalıştırılan bilgisayar üzerinden MATLAB ve Simulink paket programları kullanılmıştır. DME'ler ile ifade edilen dışbükey optimizasyon problemlerinin çözümü ise, YALMIP ayrıştırıcısı [43] ve SeDuMi çözücüsü [44] üzerinden yapılmıştır. İki yönlü teleoperasyon sisteminin parametreleri, Du [2]'nun makalesinden alınmış ve Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1 Sistem parametreleri [2]

Parametre	Değer	Birim
m_m	10	[kg]
m_s	10	[kg]
b_m	1	[Ns/m]
b_s	1	[Ns/m]
c_h	0.5	[Ns/m]
b_e	0.1	[Ns/m]
k_h	0.1	[N/m]
k_e	1	[N/m]

Sistemdeki referans takibi ve kuvvet yansıması performanslarını sağlamak için, tasarlanan kontrolörlerde kullanılmak üzere üç farklı kontrol çıkış durumu belirlenmiştir. Sistemin durum-uzay formuna eklenen hata sinyali integralleri bunlardan iki tanesini oluşturur ve referans takibini sağlamamıza olanak verir. Referans sinyali ile yöneten/yönetilen alt sistemlerin yörüngeleri arasındaki izleme hataları ile oluşturulan bu kontrol çıkış durumları, integral ifadesi sayesinde kararlı hal hatası oluşmamasını sağlar. Kuvvet yansımasını sağlamak için ise, dış kuvvet farklarını içeren hata sinyali kontrol çıkışına eklenmiştir. Kontrol çıkış vektöründe her bir kontrol çıkış durumunun minimize edilmesi, ilgili performansı sağlamamıza olanak verir. Bunlara ek olarak politopik belirsizlik içeren sistemler için geliştirilen kontrolörlerde,

kontrol kuvveti sinyalleri kullanılmıştır. Bu durumların minimizasyonu, kontrol kuvvetlerinin azaltılmasını sağlar.

Tez çalışmasında tasarlanan dayanıklı H_∞ kontrolörler, 3 farklı örnek ile incelenmiştir. Örnek 1 ve Örnek 2, normu sınırlı belirsiz sistem (4.6) için geliştirilen ve Tablo 4.2'de verilen dayanıklı H_∞ kontrolörleri içerir. Örnek 1'de, sistemdeki normu sınırlı belirsiz parametreler olan m_m, m_s, b_m/m_m ve b_s/m_s' in birbirine eşit ve %55 belirsiz olduğu senaryodan oluşur. Böylelikle tasarlanan normu sınırlı belirsizliklere dayanıklı kontrolörlerin etkinliği ortaya konmuştur. Örnek 2 ise, m_m, m_s, b_m/m_m ve b_s/m_s parametrelerinin sırasıyla %30, %30, %85 ve %85 belirsiz olduğu durum için benzetim sonuçlarını içerir. Bu örnek, iki farklı sistem parametresi içeren b_m/m_m ve b_s/m_s belirsiz parametrelerinin, daha yüksek belirsizlik sınırlarını tolere etmesi gereken durum için oluşturulmuştur. Böylelikle tasarlanan normu sınırlı belirsizliklere dayanıklı kontrolörlerin, farklı belirsizlik sınırlarında da etkin bir şekilde performans verebileceği gösterilmiştir. Son olarak Örnek 3, politopik belirsiz sistem (4.12) için geliştirilen ve Tablo 4.9'de verilen dayanıklı H_∞ kontrolörleri içerir. Bu örnek, sistemdeki politopik belirsiz parametreler olan m_m, m_s, b_m ve b_s' in birbirine eşit ve %85 belirsiz olduğu senaryodan oluşur. Böylelikle tasarlanan politopik belirsizliklere dayanıklı kontrolörlerin etkinliği ortaya konmuştur. Ayrıca örnekte kullanılan belirsizlik sınırları, tez çalışmasında ulaşılan en yüksek belirsizlik sınırlarıdır.

4.1 Normu Sınırlı Belirsiz Sistemin Kontrolü

Normu sınırlı belirsiz sistemin kontrolü için tanımlanan kontrol çıkış durumları, çok amaçlı bir yapı oluşturmaktadır. Bu sebeple kontrol çıkış vektörü, çok amaçlı filtreleme yapılması için aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$z(t) = \begin{bmatrix} \int e_{t_m}(t)dt \Big/ \left|\int e_{t_m}(t)dt\right| \\ \int e_{t_s}(t)dt \Big/ \left|\int e_{t_s}(t)dt\right| \\ e_w(t) \Big/ \left|e_w(t)\right| \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Burada $\int e_{t_m}(t)dt$ referans sinyali ile yöneten alt sistemin yörüngesi arasındaki izleme hatasını, $\left|\int e_{t_m}(t)dt\right|$ ise $\int e_{t_m}(t)dt$'nin tahmin edilen en yüksek değerini gösterir. $\int e_{t_s}(t)dt$ referans sinyali ile yönetilen alt sistemin yörüngesi arasındaki izleme hatasını ve $\left|\int e_{t_s}(t)dt\right|$ bu durumun tahmin edilen en yüksek değerini gösterir. Son olarak $e_w(t) = \big(f_h(t) - f_e(t)\big)$, operatör ile çevresel-kaynaklı dış kuvvetler arasındaki izleme hatasını, $\left|e_w(t)\right|$ ise $e_w(t)$'nin tahmin edilen en yüksek değerini gösterir. Sayısal benzetim çalışmalarında kullanılmak üzere (4.1)'de verilen kontrol çıkış vektörü

aşağıdaki formda düzenlenebilir.

$$z(t) = \begin{bmatrix} \alpha \int e_{t_m}(t)dt & \delta \int e_{t_s}(t)dt & \beta e_w(t) \end{bmatrix}^T \tag{4.2}$$

Burada,

$$\alpha + \delta + \beta = 1,$$

olarak seçilmiştir. Ayrıca α, δ ve β skalerleri, kontrol çıkışları arasındaki ödünleşmeyi sağlayan pozitif ağırlıklandırma katsayılarıdır. Böylelikle kontrolörlerde kullanılacak $z(t)$ vektörünün durum-uzay formu matrisleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

$$D_u = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

ve

$$D_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Teorem 3.1 ve Teorem 3.4'de verilen bilgiler ışığında,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (B_u + \Delta B_u(t))u(t) + (B_w + \Delta B_w(t))w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_u u(t) + D_w w(t) \end{aligned} \tag{4.6}$$

açık-çevrim sisteminin kontrolü için iki farklı kontrol problemi tanımlanmış ve Tablo 4.2'de verilmiştir. Sistemdeki $A + \Delta A(t)$, $B_u + \Delta B_u(t)$, $B_w + \Delta B_w(t)$, C, D_u ve D_w matrisleri sırasıyla (2.21), (2.22), (2.23), (4.3), (4.4) ve (4.5)'de verilmiştir.

Tablo 4.2 Normu sınırlı belirsiz sistem için tasarlanan dayanıklı kontrolörler

Standart Dayanıklı H_∞		Genişletilmiş Dayanıklı H_∞	
Minimum	γ_∞	Minimum	γ_∞
Koşullar	(3.36), $Q > 0$	Koşullar	(3.89), $G > 0$
Kontrolör Kazancı	$K = SQ^{-1}$	Kontrolör Kazancı	$K = LX^{-1}$

4.1.1 Örnek 1

Normu sınırlı belirsiz sistem için tasarlanan ve Tablo 4.2'de verilen kontrol problemlerinin, belirsizlik sınırları $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \bar{p} = 0.55$, Lemma 3.3'de

ki skalerler $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 1$ ve ağırlıklandırma parametreleri $\alpha = 0.3$, $\delta = 0.64$, $\beta = 0.06$ iken çözümü ile γ_∞ ve K değerleri Tablo 4.3 ve Tablo

Tablo 4.3 Örnek 1 ile hesaplanan γ_∞ kazançları

Kontrolör	γ_∞
Standart Dayanıklı H_∞	14.3395
Genişletilmiş Dayanıklı H_∞	5.00

Tablo 4.4 Örnek 1 ile hesaplanan kontrolör kazançları

Standart Dayanıklı H_∞						
$K = 10^7 \times$	-0.0501	-0.6292	0.3113	1.2705	-0.0033	-0.0269
	0.1012	1.2705	-0.6287	-2.5658	0.0066	0.0543
Genişletilmiş Dayanıklı H_∞						
$K = 10^4 \times$	0.0423	-0.5702	0.8146	1.8758	-0.0286	-0.1387
	-0.1608	1.8758	-2.7845	-6.4132	0.1006	0.4735

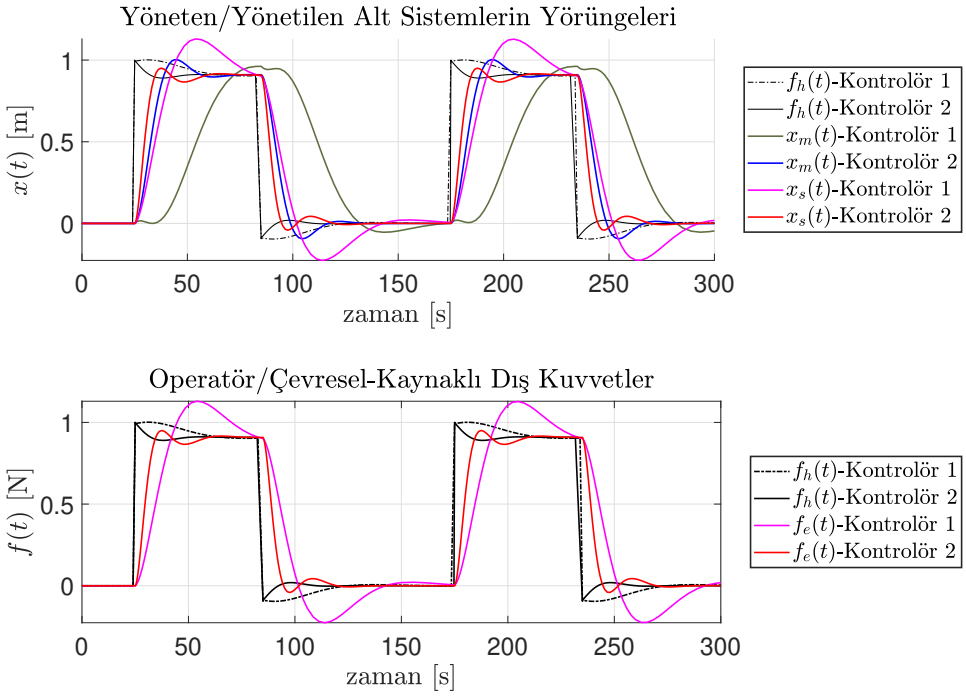
4.4'de ki gibi hesaplanmıştır. Tablo 4.3, standart forma kıyasla genişletilmiş form ile yaklaşık 3 kat daha düşük H_∞ normu elde edildiğini göstermektedir. Genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için λ değeri ise, farklı λ değerleri için hesaplanan γ_∞ kazançları üzerinden, en düşük γ_∞ değerini bulmak için yapılan çizgisel tarama ile 10^4 olarak elde edilmiştir. Yapılan çizgisel taramada kullanılan λ ve elde edilen γ_∞ değerleri Tablo 4.5'de verilmiştir. Tabloda görülebileceği üzere λ ve γ_∞ değerleri

Tablo 4.5 Örnek 1'deki genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için yapılan çizgisel tarama

λ	γ_∞
2.0	*Çözüm Yok*
2.1	52.14
2.5	10.18
5	5.90
10	5.33
50	5.06
100	5.03
10^3	5.01
10^4	5.00
10^5	5.00
10^6	5.02
5×10^6	25.18
10^7	39.97
5×10^7	*Çözüm Yok*

parabolik olarak değişmekte ve en düşük γ_∞ değeri, $\lambda = 10^4$ ve $\lambda = 10^5$'de elde

edilmektedir. Son olarak, kolaylık sağlamak için bu örnekte verilen standart ve genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörler, sırasıyla *Kontrolör 1* ve *Kontrolör 2* olarak isimlendirilmiştir.

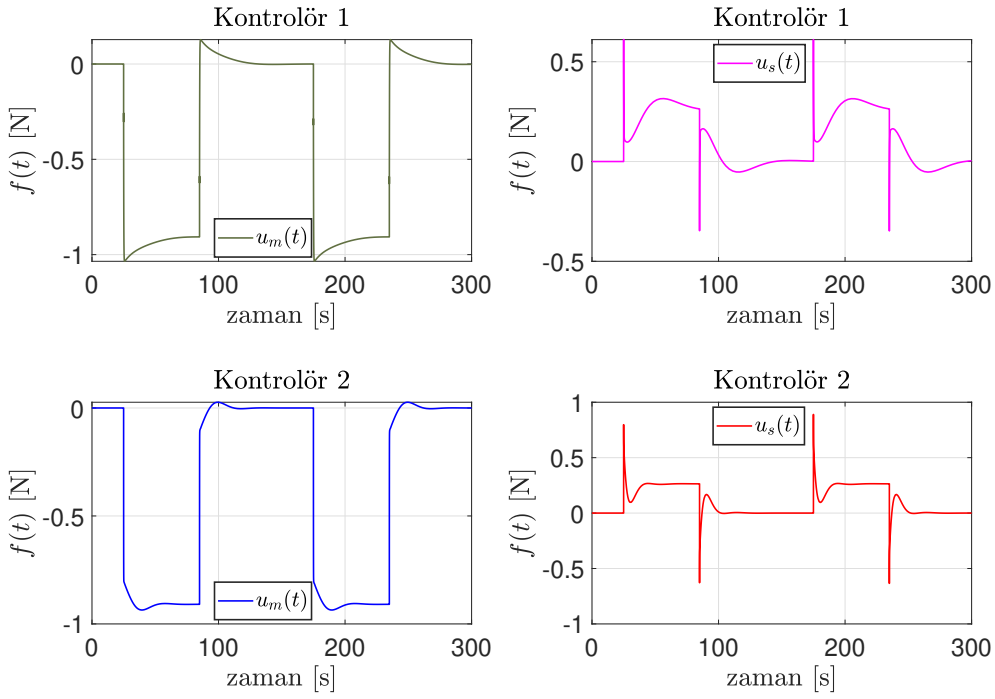


Şekil 4.1 Örnek 1 ile elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması

Örnek 1'in benzetim sonuçları Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de verilmiştir. Şekil 4.1, üstten alta sırasıyla, yöneten/yönetilen alt sistemlerin yörüngelerini ve operatör/çevresel-kaynaklı dış kuvvetlerini göstermektedir. Şekil 4.2 ise kontrolörlerin ürettikleri kuvvet değerlerinden oluşmaktadır.

Şekil 4.1'in üst kısmında görülebileceği üzere, önerilen yöntem ile üretilen Kontrolör 2, hem alt sistemlerin referans sinyalini izlemesinde hem de yöneten/yönetilen alt sistemlerin birbirini takip etmesinde oldukça başarılı olmuştur. Öte yandan, Kontrolör 1 ile kontrol edilen sistemin neredeyse referans sinyalini takip edemediği, yöneten/yönetilen alt sistemler arasında ciddi takip hataları oluştuğu görülmektedir. Ayrıca önerilen kontrolörün, Kontrolör 1'e kıyasla, sistemin yörüngelerinde çok daha az aşıma sebep olduğu, çok daha hızlı referansa yerleştiği ve herhangi bir kalıcı hal hatası bırakmadığı gözlemlenebilir. Bütün bunlar ışığında önerilen yöntemin, referans takibinde standart yönteme göre çok daha başarılı olduğu görülmektedir. Şekil 4.1'in alt kısmı, Kontrolör 2'nin dış kuvvet takibinde, bir diğer deyişle kuvvet yansımasında oldukça başarılı olduğunu göstermektedir. Sistemin yörüngelerindeki sonuçlar ile benzer şekilde, önerilen metot standart yönteme göre daha düşük takip hatasına, daha düşük aşıma ve daha düşük yerleşme zamanına sahiptir. Ayrıca Kontrolör 2, dış kuvvet

takibinde de herhangi bir kararlı hal hatası oluşturmamaktadır.



Şekil 4.2 Örnek 1'de oluşan kontrol kuvvetleri

Son olarak Şekil 4.2, kullanılan iki farklı kontrolörün de benzer seviyelerde kontrol kuvvetleri ürettiğini göstermektedir. Burada kontrol kuvvetlerinin ±1 [N] aralığında değişmesi, daha gerçekçi ve pratikte uygulanabilir sonuçlar elde ettiğimizin bir göstergesidir.

4.1.2 Örnek 2

Normu sınırlı belirsiz sistem için tasarlanan ve Tablo 4.2'de verilen kontrol problemlerinin, belirsizlik sınırları $p_1 = p_2 = 0.3, p_3 = p_4 = 0.85$, Lemma 3.3'de ki skalerler $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 1$ ve ağırlıklandırma parametreleri $\alpha = 0.3$, $\delta = 0.61$, $\beta = 0.09$ iken çözümü ile γ_∞ ve K değerleri Tablo 4.6 ve Tablo

Tablo 4.6 Örnek 2 ile hesaplanan γ_∞ kazançları

Kontrolör	γ_∞
Standart Dayanıklı H_∞	13.7001
Genişletilmiş Dayanıklı H_∞	4.87

4.7'de ki gibi hesaplanmıştır. Tablo 4.6, Örnek 1 ile benzer şekilde, standart forma kıyasla genişletilmiş form ile yaklaşık 3 kat daha düşük H_∞ normu elde edildiğini göstermektedir. Ayrıca genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için λ, farklı λ değerleri

Tablo 4.7 Örnek 2 ile hesaplanan kontrolör kazançları

Standart Dayanıklı H_∞						
$K = 10^7 \times$	-0.0396	-0.5348	0.2693	1.0966	-0.0033	-0.0233
	0.0812	1.0966	-0.5522	-2.2486	0.0067	0.0478
Genişletilmiş Dayanıklı H_∞						
$K = 10^5 \times$	0.0112	-0.1021	0.1540	0.3577	-0.0060	-0.0259
	-0.0408	0.3577	-0.5464	-1.2692	0.0216	0.0919

için hesaplanan γ_∞ kazançları üzerinden, en düşük γ_∞ değerini bulmak için yapılan çizgisel tarama ile 10^4 olarak elde edilmiştir. Yapılan çizgisel taramada kullanılan λ ve elde edilen γ_∞ değerleri Tablo 4.8'de verilmiştir. Tabloda görülebileceği üzere

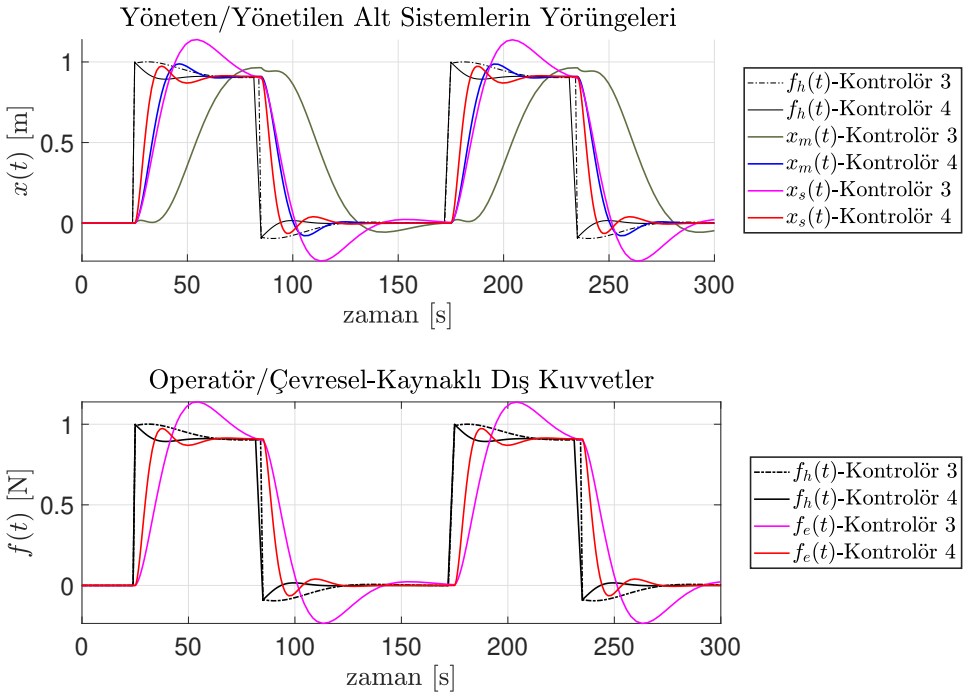
Tablo 4.8 Örnek 2'deki genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için yapılan çizgisel tarama

λ	γ_∞
1.9	*Çözüm Yok*
2.0	24.58
2.1	14.74
2.5	8.64
5	5.64
10	5.15
50	4.91
100	4.89
10^3	4.87
10^4	4.87
10^5	4.87
10^6	4.87
2.5×10^6	9.83
5×10^6	21.84
10^7	39.95
4×10^7	*Çözüm Yok*

λ ve γ_∞ değerleri parabolik olarak değişmekte ve en düşük γ_∞ değeri, $\lambda = 10^3$, $\lambda = 10^4$, $\lambda = 10^5$ ve $\lambda = 10^6$'da elde edilmektedir. Son olarak, kolaylık sağlamak için bu örnekte verilen standart ve genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörler, sırasıyla *Kontrolör 3* ve *Kontrolör 4* olarak isimlendirilmiştir.

Örnek 2'nin benzetim sonuçları Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'de verilmiştir. Şekil 4.3, üstten alta sırasıyla, yöneten/yönetilen alt sistemlerin yörüngelerini ve operatör/çevresel-kaynaklı dış kuvvetlerini göstermektedir. Şekil 4.4 ise kontrolörlerin ürettikleri kuvvet değerlerinden oluşmaktadır.

Şekil 4.3'de gözlemlenebileceği üzere bu örnekte, Örnek 1 ile oldukça benzer sonuçlar elde edilmiştir. Önerilen Kontrolör 4, standart yönteme kıyasla çok daha başarılı



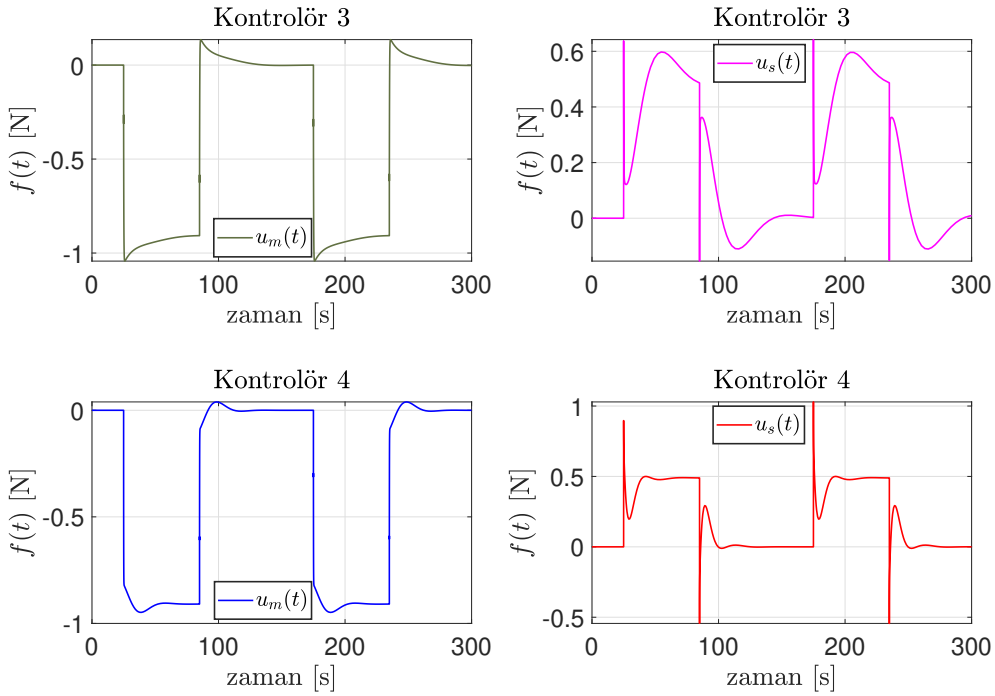
Şekil 4.3 Örnek 2 ile elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması

referans takip performansı göstermektedir. Sistemin yörüngeleri çok daha az aşım yapmakta, daha hızlı referansa yerleşmekte ve kararlı hal hatası bırakmamaktadır. Ayrıca kuvvet yansıması performansı da, sistemin yörüngelerinde olduğu gibi başarılı ve önerilen yöntem ile daha iyi sonuçlar vermektedir.

Şekil 4.4 ise, kullanılan iki farklı kontrolörün de benzer seviyelerde kontrol kuvvetleri ürettiğini göstermektedir. Burada, Örnek 1 ile benzer şekilde, kontrol kuvvetleri ±1 [N] aralığında değişmekte, kontrolörün gerçekçiliğini ve pratikte uygulanabilirliğini arttırmaktadır.

Belirsiz parametrelerden b_m/m_m ve b_s/m_s, iki farklı sistem parametresi içermektedir. Bu nedenle b_m/m_m ve b_s/m_s parametrelerinde daha yüksek belirsizlik sınırlarını düşünmemiz gerekebilir. Örnek 2, önerilen yöntemin farklı belirsizlik sınırlarında da benzer şekilde performans sergileyebildiğini göstermektedir.

Yorum 4.1. Kontrolör tasarım sürecinde normu sınırlı tipte parametre belirsizliklerinin varlığı, iki yönlü teleoperasyon sisteminin referans takip ve kuvvet yansıma kontrolü için daha gerçekçi sonuçlar sunar. Sayısal sonuçlar, standart forma kıyasla genişletilmiş DME formu aracılığıyla yaklaşık 3 kat daha düşük H_∞ normunun elde edildiğini göstermektedir. Bu, tanımlanan çok amaçlı kontrol probleminde tutuculuğunun azaltıldığının bir göstergesidir. Öte yandan, önerilen metodun standart yönteme kıyasla sistemin performans kriterlerindeki üstün başarısı, daha az tutucu



Şekil 4.4 Örnek 2'de oluşan kontrol kuvvetleri

bir kontrolör elde edildiğinin bir diğer göstergesidir. Dahası, önerilen kontrolör m_m, m_s, b_m/m_m ve b_s/m_s belirsiz parametrelerinde yüzde 55'e kadar belirsizlikler için dayanıklılık sağlamaktadır. Ayrıca aynı belirsiz parametrelerde sırasıyla 30, 30, 85 ve 85 gibi farklı belirsizlik sınırları için, benzer bir performansla dayanıklılık sağlanabildiği görülmektedir. Bütün bunlar ışığında sayısal benzetim sonuçları, önerilen GDME'ler ile üretilen Kontrolör 2 ve Kontrolör 4'ün norm sınırlı parametre belirsizliklerinden bağımsız olarak başarılı referans takibi ve kuvvet yansıması gerçekleştirebildiğini göstermektedir.

4.2 Politopik Belirsiz Sistemin Kontrolü

(4.1)'de verilen kontrol çıkış vektörüne, kontrol kuvveti sinyallerinin eklenmesiyle politopik belirsiz sistemin kontrol çıkış vektörü aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$z(t) = \begin{bmatrix} \int e_{t_m}(t)dt \Big/ \left|\int e_{t_m}(t)dt\right| \\ \int e_{t_s}(t)dt \Big/ \left|\int e_{t_s}(t)dt\right| \\ u_m(t) \Big/ \left|u_m(t)\right| \\ u_s(t) \Big/ \left|u_s(t)\right| \\ e_w(t) \Big/ \left|e_w(t)\right| \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Burada $\left|u_m(t)\right|$ ve $\left|u_s(t)\right|$, sırasıyla $u_m(t)$ ve $u_s(t)$'nin tahmin edilen en yüksek değerlerini gösterir. Sayısal benzetim çalışmalarına uygun olarak (4.7)'de verilen kontrol çıkış vektörü aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$z(t) = \left[\alpha \int e_{t_m}(t)dt \quad \delta \int e_{t_s}(t)dt \quad \eta_m u_m(t) \quad \eta_s u_s(t) \quad \beta e_w(t)\right]^T \tag{4.8}$$

Burada,

$$\alpha + \delta + \eta_m + \eta_s + \beta = 1$$

olarak belirlenmiştir. Ayrıca α, δ, η_m, η_s ve β skalerleri, kontrol çıkışları arasındaki ödünleşmeyi sağlayan pozitif ağırlıklandırma katsayılarıdır. Böylelikle kontrolörlerde kullanılacak $z(t)$ vektörünün durum-uzay formu matrisleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

$$D_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \eta_m & 0 \\ 0 & \eta_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

ve

$$D_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Teorem 3.2 ve Teorem 3.5'de verilen bilgiler ışığında,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_u(\theta)(t)u(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_u u(t) + D_w w(t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

açık-çevrim sistemin kontrolü için iki farklı kontrol problemi tanımlanmış ve Tablo 4.9'de verilmiştir. Sistemdeki $\left(A(\theta), B_u(\theta), B_w(\theta)\right)$ gerçeklemesi ve C, D_u, D_w matrisleri sırasıyla (2.52)-(2.67), (4.9), (4.10) ve (4.11)'de verilmiştir. Burada (2.52)-(2.67) gerçeklemeleri, sırasıyla 1'den 16'ya köşe noktaları kullanılarak oluşturulmuştur.

Tablo 4.9 Politopik belirsiz sistem için tasarlanan dayanıklı kontrolörler

Standart Dayanıklı H_∞		Genişletilmiş Dayanıklı H_∞	
Minimum	γ_∞	Minimum	γ_∞
Koşullar	(3.41), $Q > 0$	Koşullar	(3.94), $G > 0$
Kontrolör Kazancı	$K = SQ^{-1}$	Kontrolör Kazancı	$K = LX^{-1}$

4.2.1 Örnek 3

Politopik belirsiz sistem için tasarlanan ve Tablo 4.9'da verilen kontrol problemlerinin, belirsizlik alt ve üst sınırları Tablo 4.10'da verildiği gibi ve ağırlıklandırma

Tablo 4.10 Örnek 3'teki politopik belirsiz parametrelerin alt ve üst değerleri

Parametre	Alt ve Üst Sınır
$m_m(\theta)$	$\begin{bmatrix}1.5 & 18.5\end{bmatrix}$
$m_s(\theta)$	$\begin{bmatrix}1.5 & 18.5\end{bmatrix}$
$b_m(\theta)$	$\begin{bmatrix}0.15 & 1.85\end{bmatrix}$
$b_s(\theta)$	$\begin{bmatrix}0.15 & 1.85\end{bmatrix}$

parametreleri $\alpha = 0.075$, $\delta = 0.075$, $\eta_m = 0.3$, $\eta_s = 0.3$, $\beta = 0.25$ iken çözümü ile γ_∞ ve K değerleri Tablo 4.11 ve Tablo 4.12'de ki gibi hesaplanmıştır. Tablo 4.11, standart

Tablo 4.11 Örnek 3 ile hesaplanan γ_∞ kazançları

Kontrolör	γ_∞
Standart Dayanıklı H_∞	0.8161
Genişletilmiş Dayanıklı H_∞	0.67

forma kıyasla genişletilmiş form ile yaklaşık yüzde 20 oranında daha düşük H_∞ normu elde edildiğini göstermektedir. Ayrıca genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için λ, farklı λ değerleri için hesaplanan γ_∞ kazançları üzerinden, en düşük γ_∞ değerini bulmak için yapılan çizgisel tarama ile 10^4 olarak elde edilmiştir. Yapılan çizgisel taramada kullanılan λ ve elde edilen γ_∞ değerleri Tablo 4.13'de verilmiştir. Tabloda görülebileceği üzere λ ve γ_∞ değerleri parabolik olarak değişmekte ve en düşük γ_∞ değeri, $\lambda = 10^4$ ve $\lambda = 10^5$'de elde edilmektedir. Son olarak, kolaylık sağlamak için bu örnekte verilen standart ve genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörler, sırasıyla *Kontrolör 5* ve *Kontrolör 6* olarak isimlendirilmiştir.

Örnek 3'ün benzetim sonuçları Şekil 4.5'den Şekil 4.44'ya, 40 farklı şekil ile verilmiştir. Şekil 4.5-Şekil 4.35 arasında verilen grafikler, 1'den 16'ya köşe noktaları için, yöneten/yönetilen alt sistemlerin yörüngelerini, operatör/çevresel-kaynaklı dış kuvvetleri ve kontrolör kuvvetlerini gösteren grafikleri içermektedir. Şekil 4.37-Şekil 4.40 arasındaki şekiller, yöneten alt sistemin farklı belirsiz parametrelerde gösterdiği

Tablo 4.12 Örnek 3 ile hesaplanan kontrolör kazançları

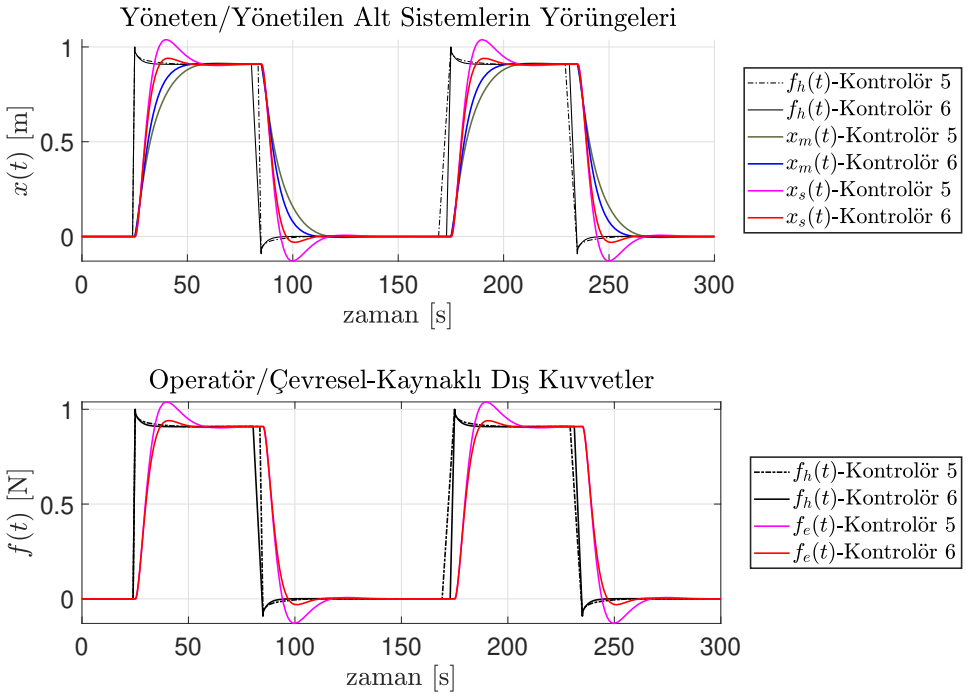
Standart Dayanıklı H_∞
$K = 10^7 \times \begin{bmatrix} -0.0260 & -0.0251 & -0.0332 & -0.0711 & 0.0048 & 0.0052 \\ -0.5754 & -0.5541 & -0.7336 & -1.5697 & 0.1057 & 0.1141 \end{bmatrix}$
Genişletilmiş Dayanıklı H_∞
$K = \begin{bmatrix} -15.8074 & -29.8075 & -11.2261 & -20.7296 & 2.4509 & 1.7307 \\ -198.6261 & -190.1144 & -266.1022 & -573.9636 & 36.7378 & 40.9726 \end{bmatrix}$

Tablo 4.13 Örnek 3'teki genişletilmiş dayanıklı H_∞ kontrolörü için yapılan çizgisel tarama

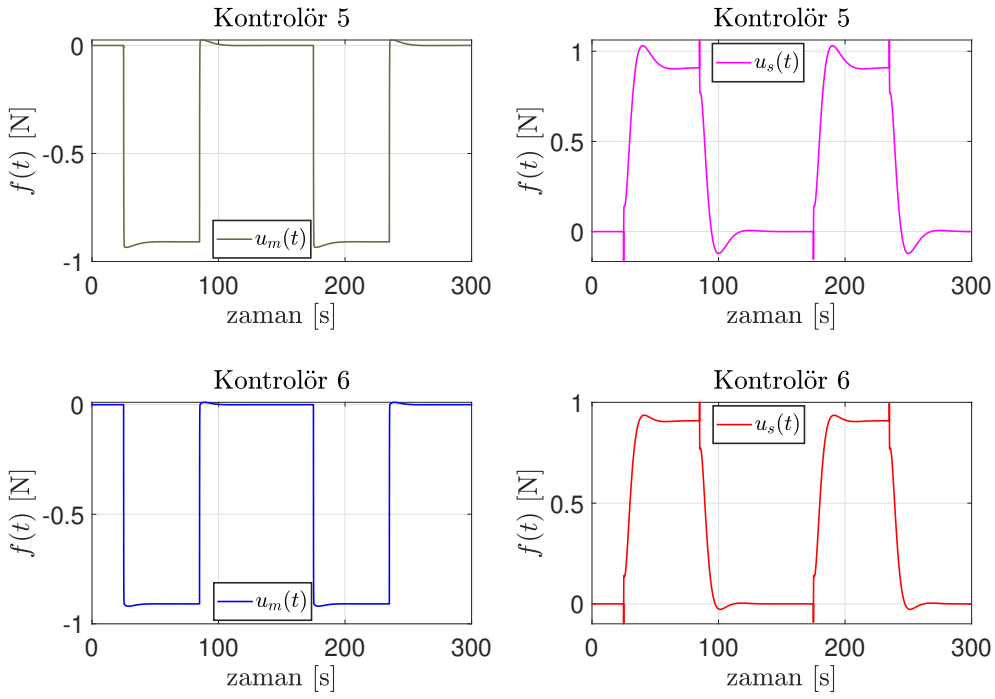
λ	γ_∞
0.5	*Çözüm Yok*
1	31.98
1.5	6.18
2.5	2.29
5	1.19
10	0.88
50	0.72
100	0.70
10^3	0.68
10^4	0.67
10^5	0.67
10^6	0.73
1.5×10^6	1.55
2×10^6	3.19
2.5×10^6	10.6
5×10^6	61.96
8×10^6	*Çözüm Yok*

performansı, hata sinyalleri üzerinden ortalama değer ve maksimum değerler ile gösteren yüzey grafiklerini içerir. Ayrıca Tablo 4.14 ve Tablo 4.15, sırasıyla yöneten alt sistemin yüzey grafiklerini oluşturan noktaların ortalama karekök ve maksimum değerlerini içermektedir. Şekil 4.41-Şekil 4.44 arasındaki şekiller ise, yönetilen alt sistem için üretilen aynı yüzey grafikleridir. Ek olarak Tablo 4.16 ve Tablo 4.17, sırasıyla yönetilen alt sistemin yüzey grafiklerini oluşturan noktaların ortalama karekök ve maksimum değerlerini içerir.

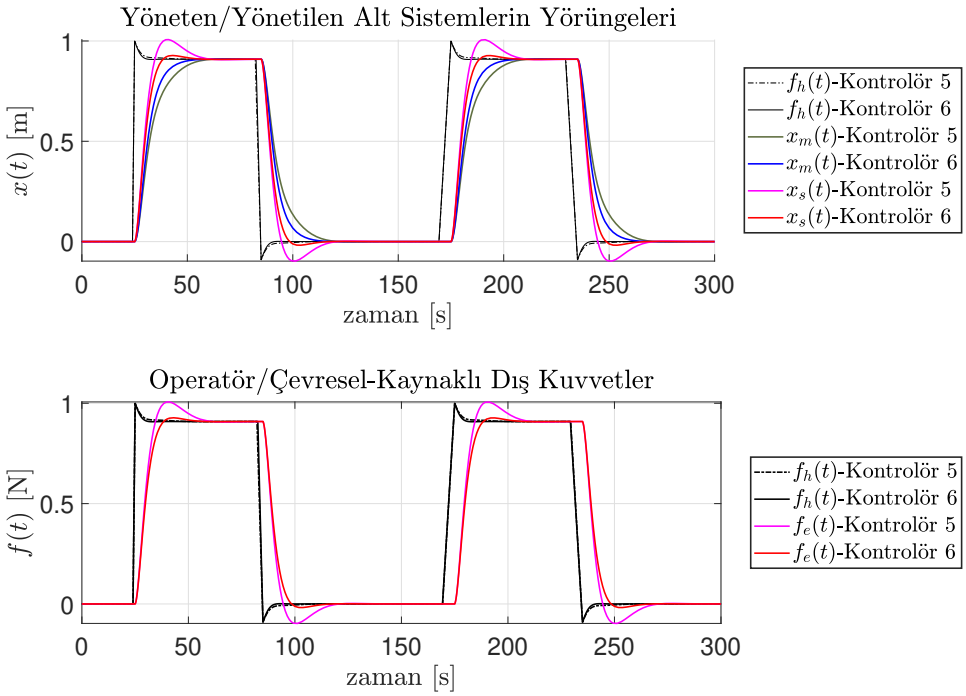
Şekil 4.5-Şekil 4.35 arasındaki yöneten/yönetilen alt sistemlerin yörüngelerini gösteren grafikler, iki yöntemle üretilen kontrolörün de alt sistemlerin referans sinyalini izlemesinde birbirine yakın ve iyi sonuçlar elde ettiğini göstermiştir. Ancak yöneten/yönetilen alt sistemlerin birbirini takip etmesinde önerilen Kontrolör 6, Kontrolör 5'e kıyasla oldukça iyi sonuçlar vermiştir. Ayrıca önerilen kontrolörün, sistemin yörüngelerinde daha az aşıma sebep olduğu, az da olsa daha hızlı referansa



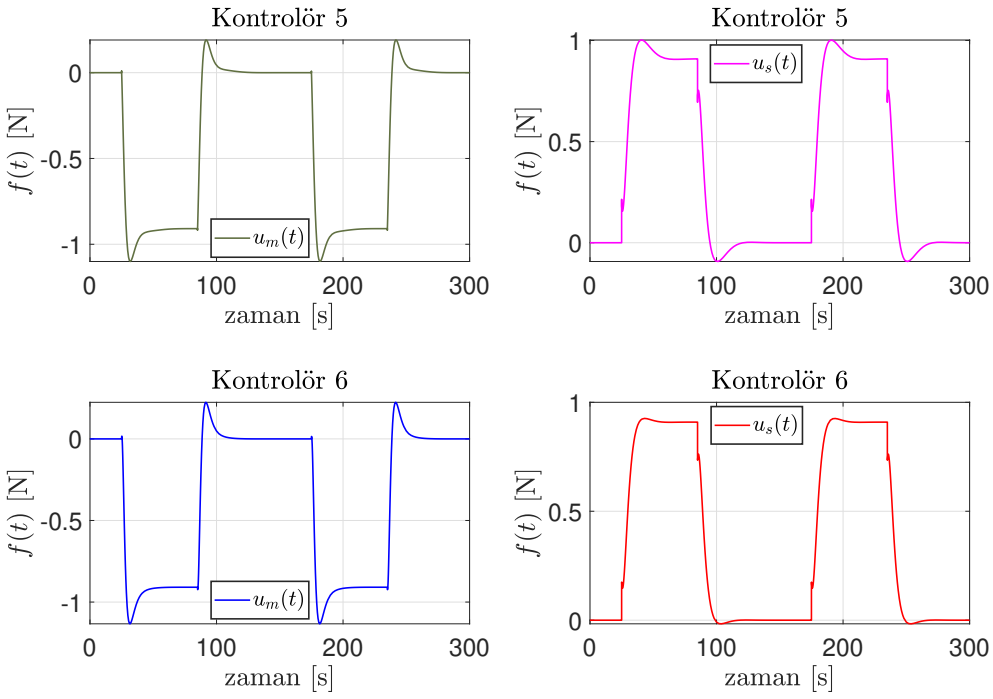
Şekil 4.5 Örnek 3 ile 1. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



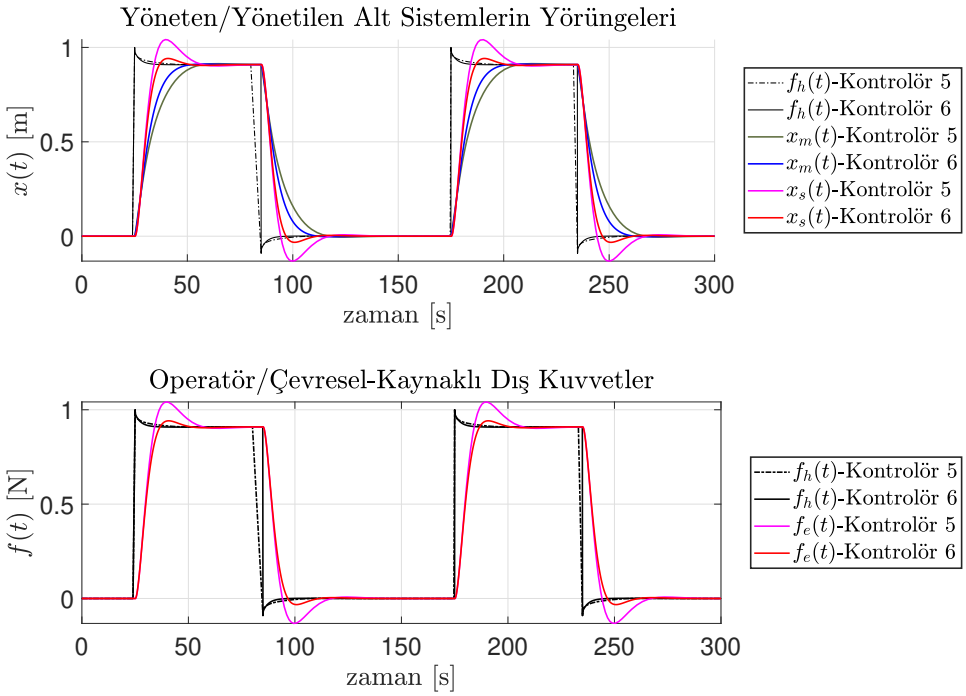
Şekil 4.6 Örnek 3 ile 1. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



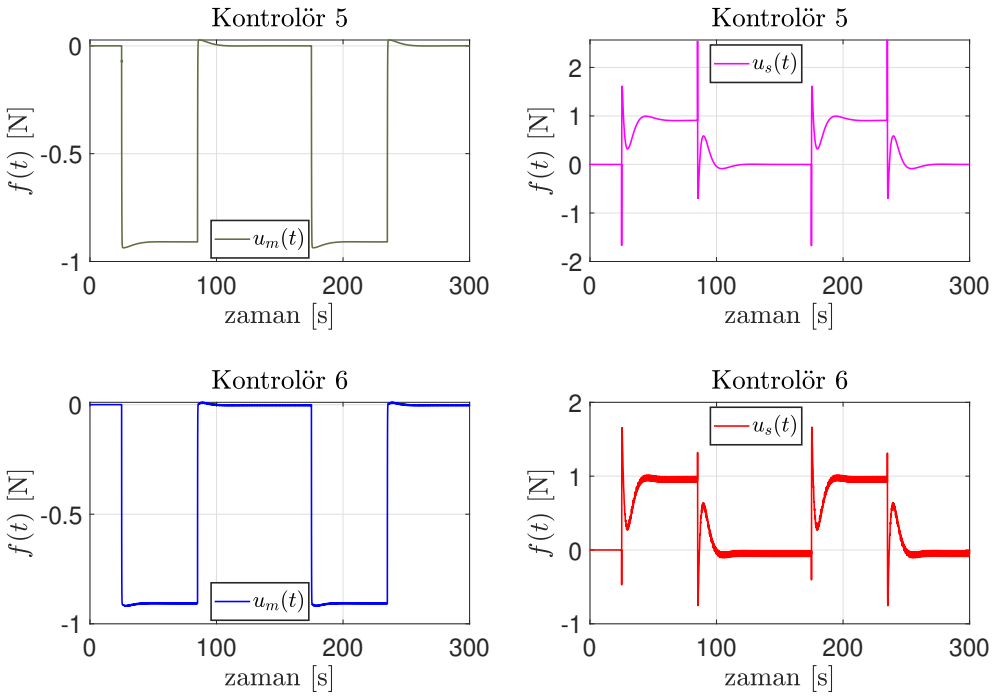
Şekil 4.7 Örnek 3 ile 2. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



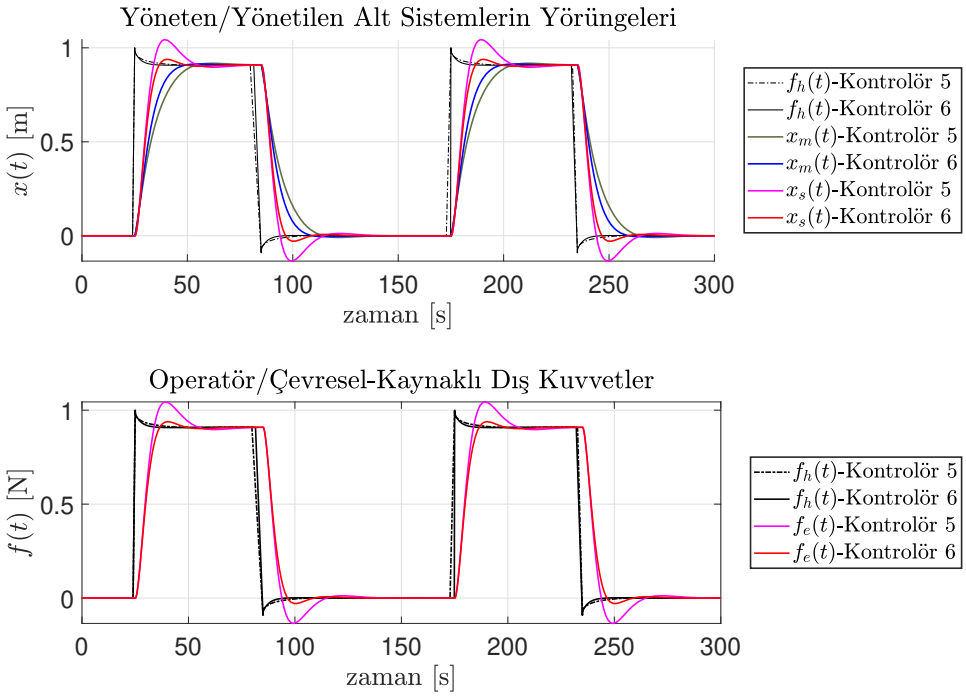
Şekil 4.8 Örnek 3 ile 2. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



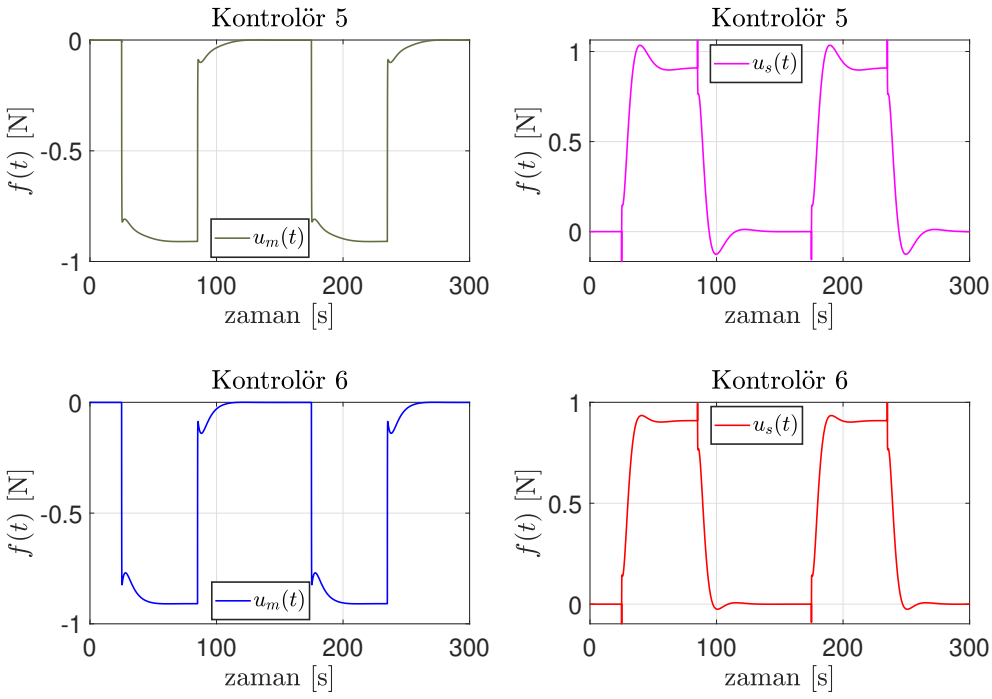
Şekil 4.9 Örnek 3 ile 3. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



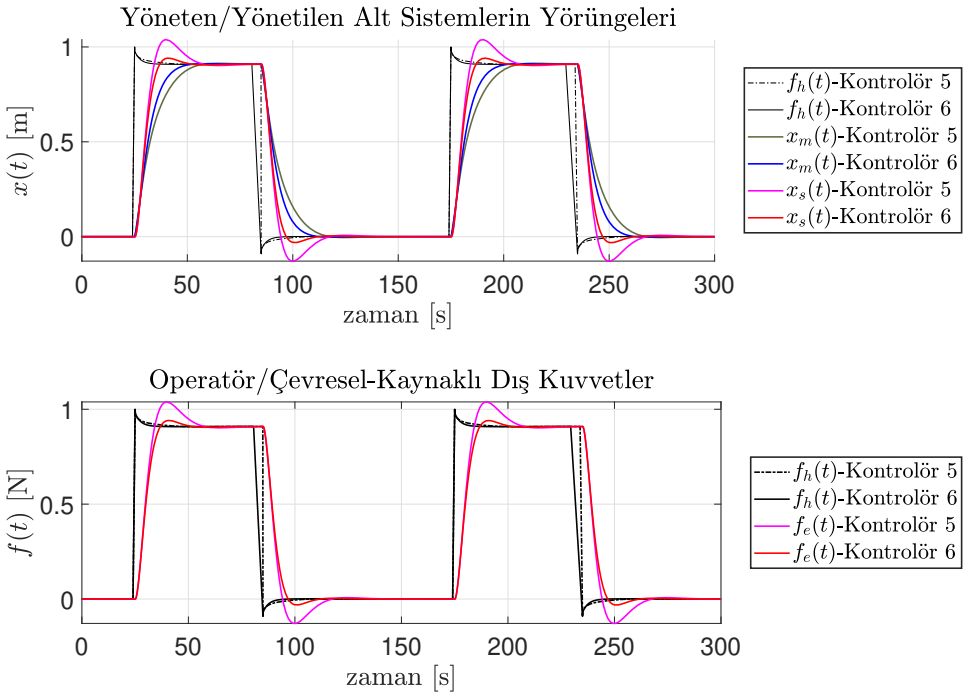
Şekil 4.10 Örnek 3 ile 3. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



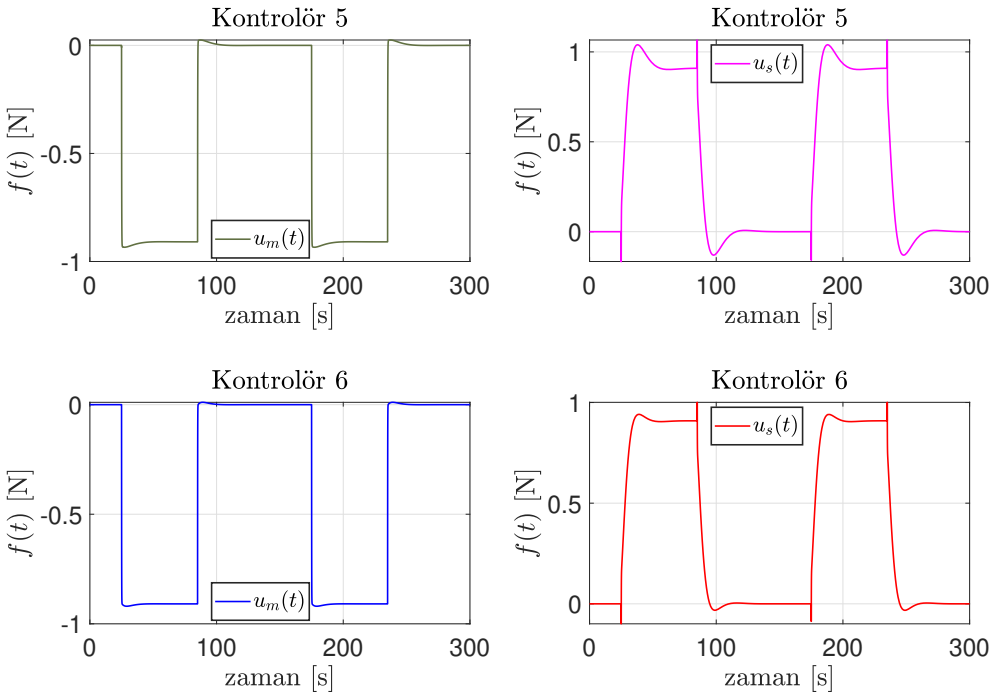
Şekil 4.11 Örnek 3 ile 4. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



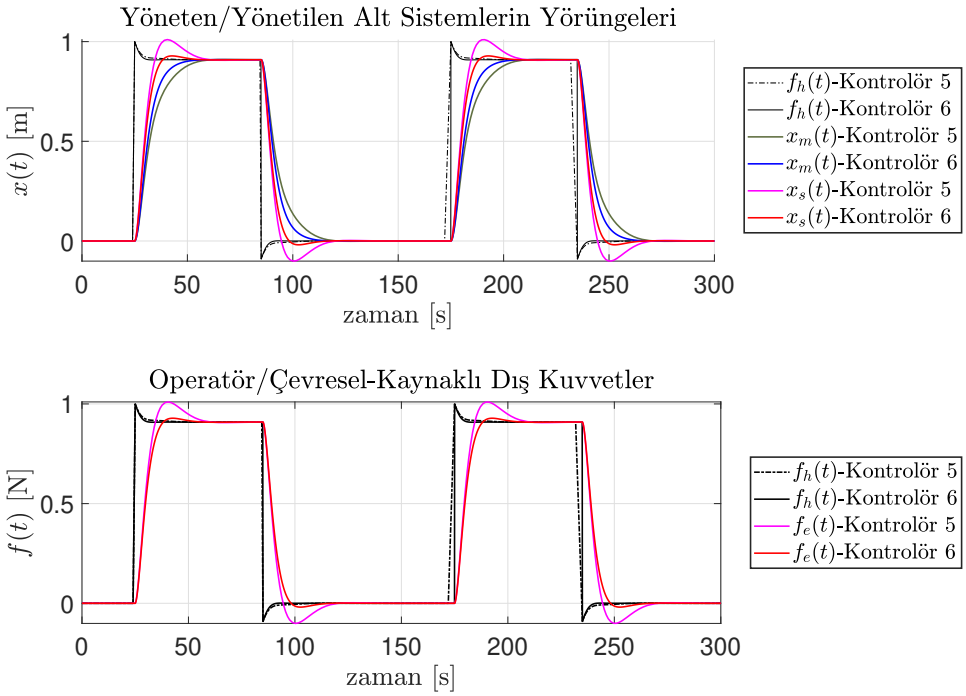
Şekil 4.12 Örnek 3 ile 4. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



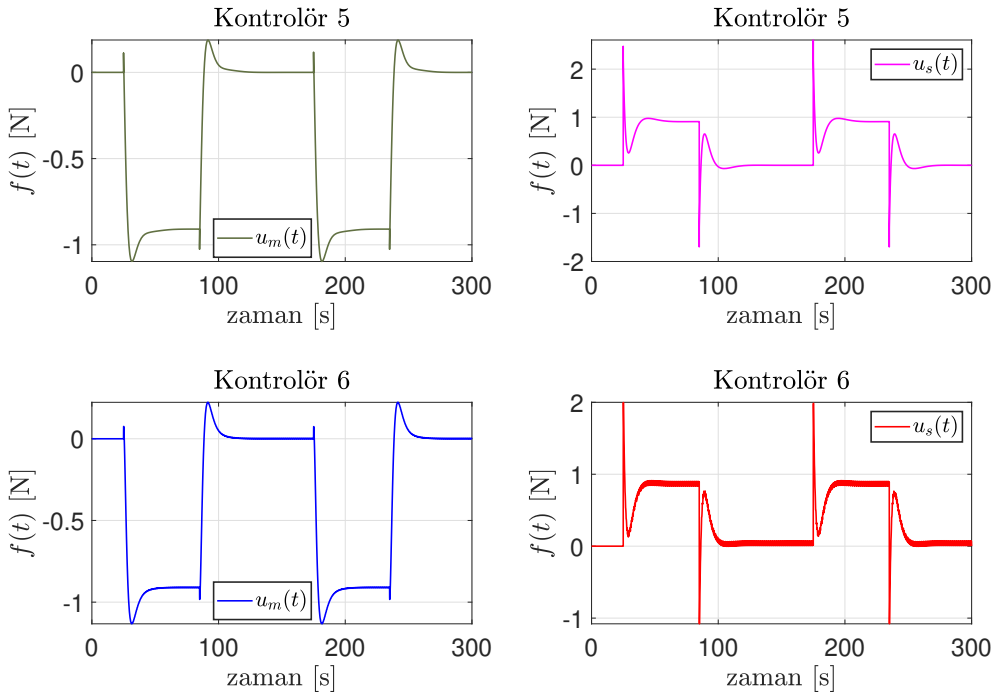
Şekil 4.13 Örnek 3 ile 5. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



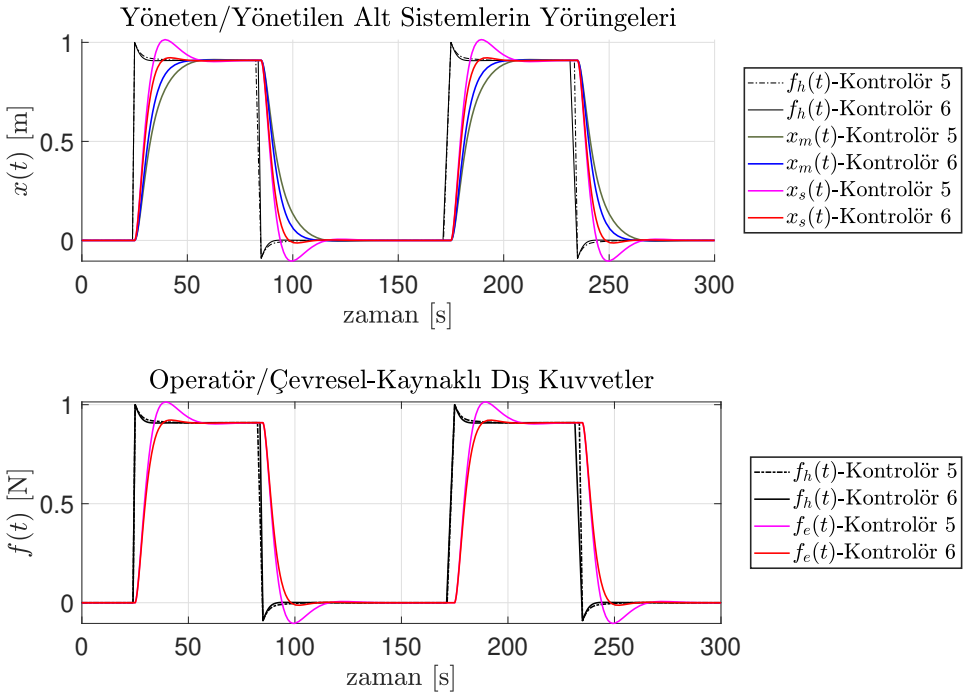
Şekil 4.14 Örnek 3 ile 5. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



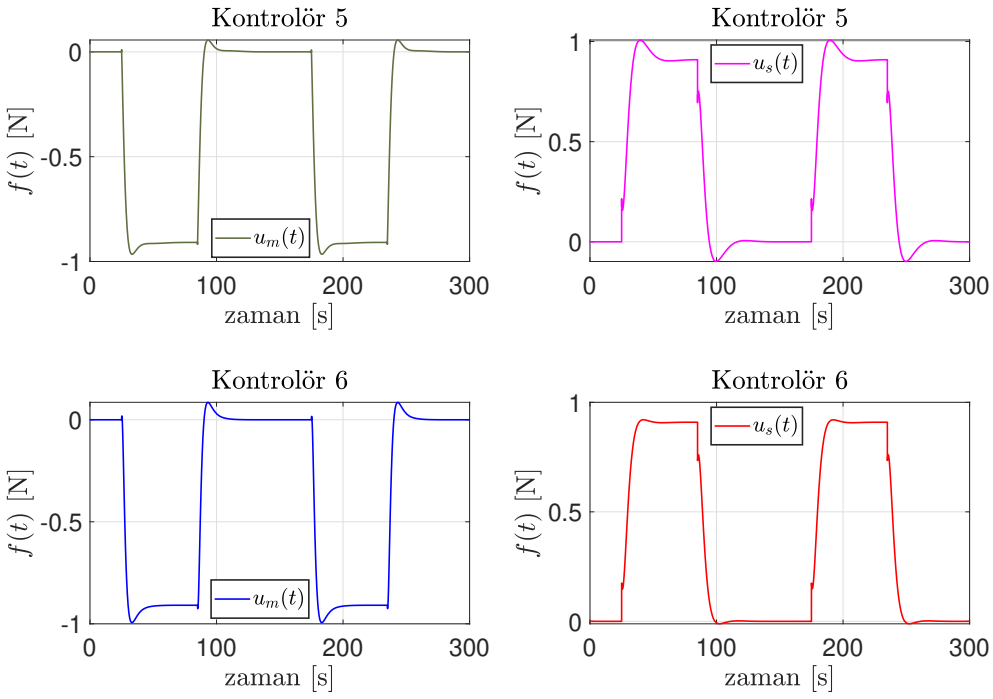
Şekil 4.15 Örnek 3 ile 6. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



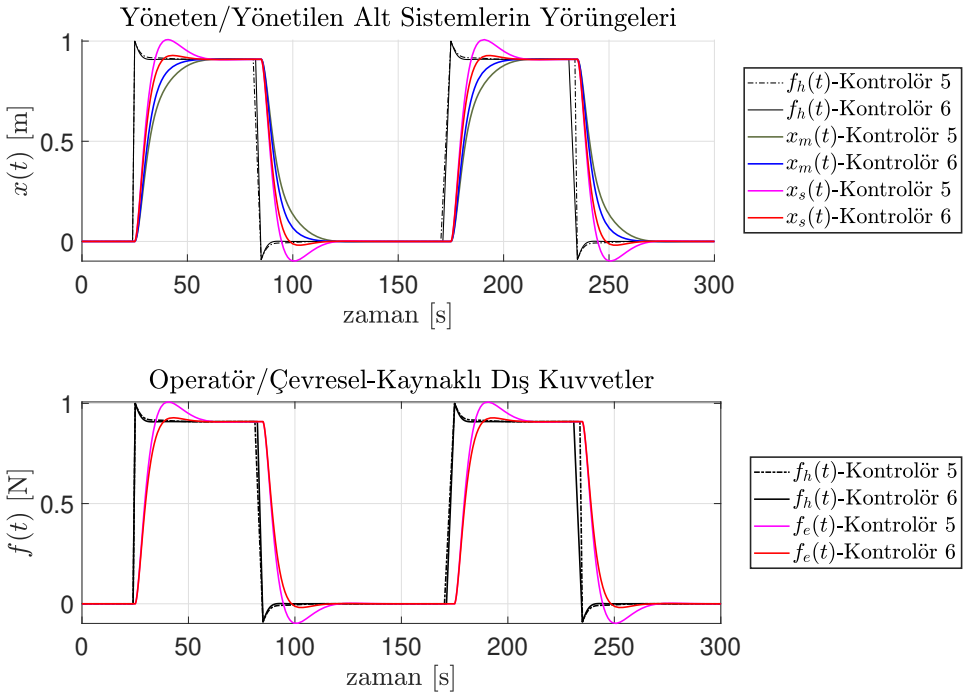
Şekil 4.16 Örnek 3 ile 6. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



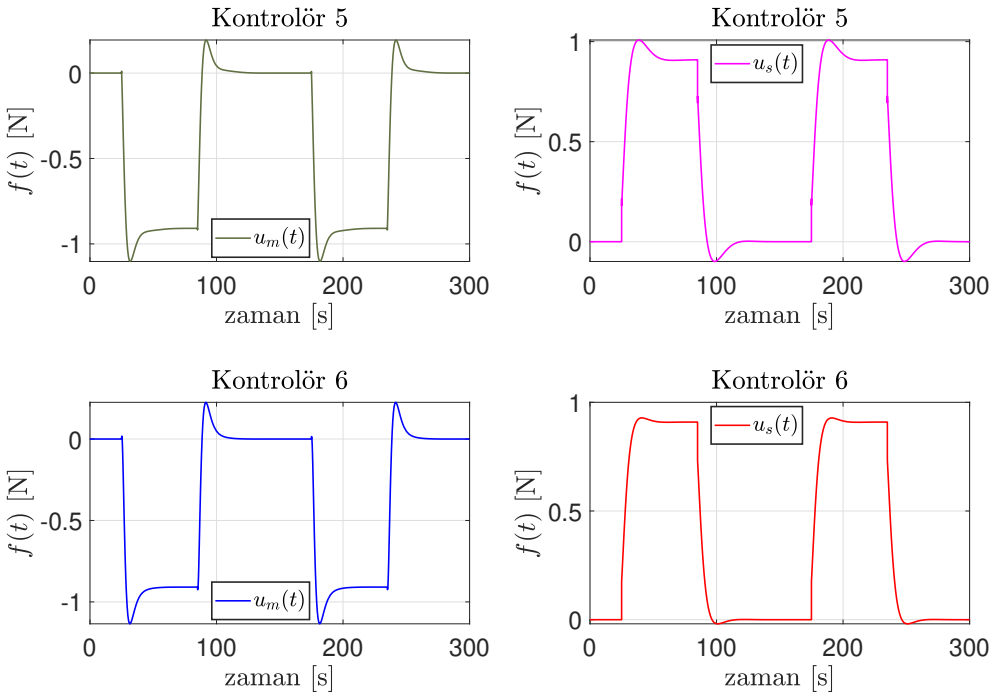
Şekil 4.17 Örnek 3 ile 7. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



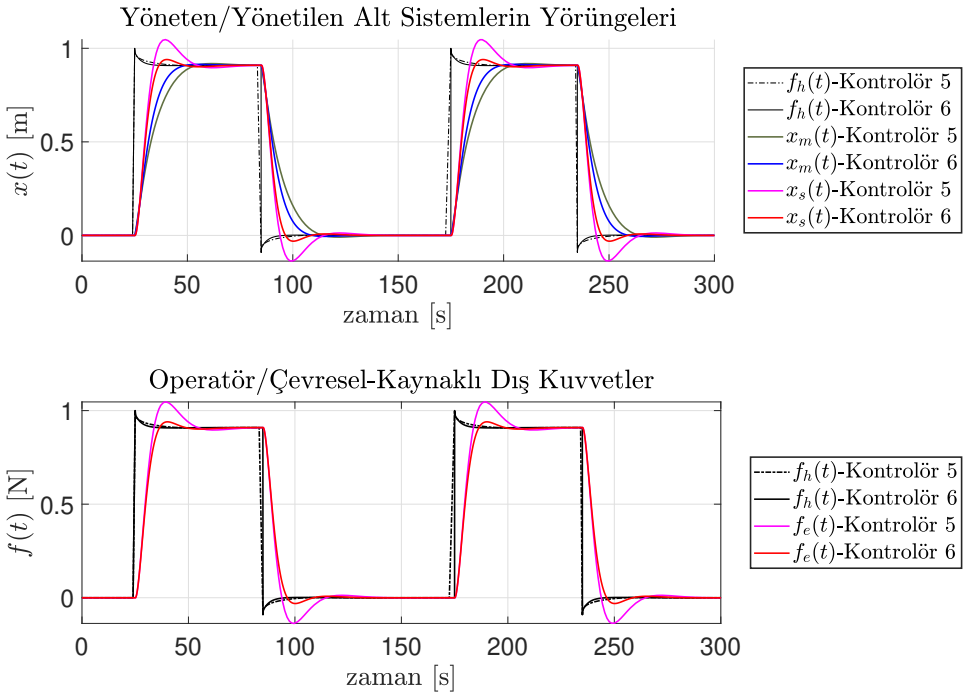
Şekil 4.18 Örnek 3 ile 7. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



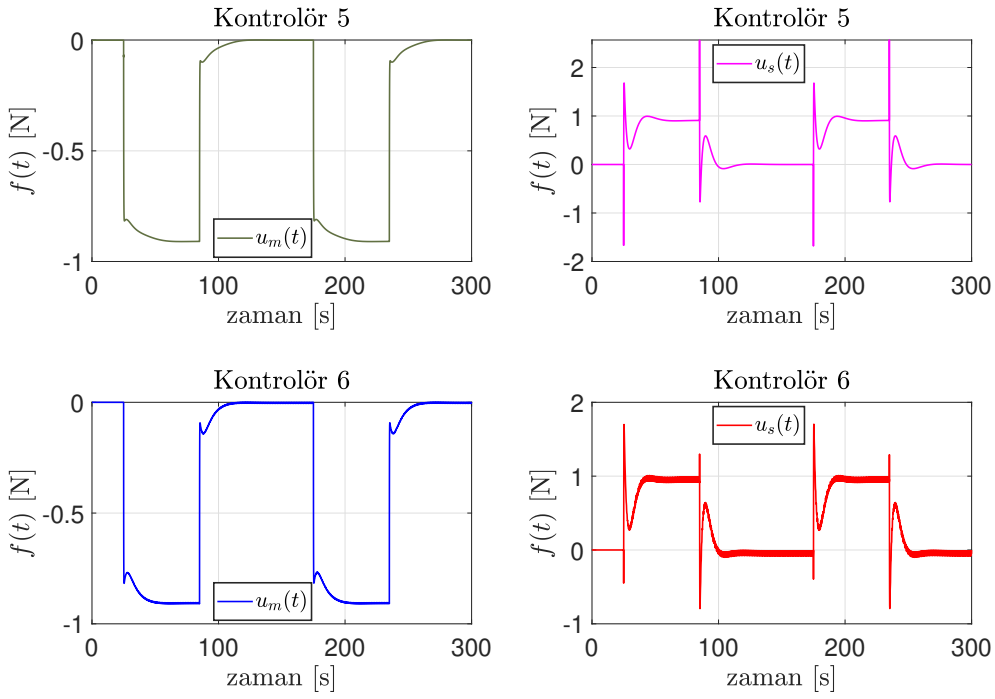
Şekil 4.19 Örnek 3 ile 8. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



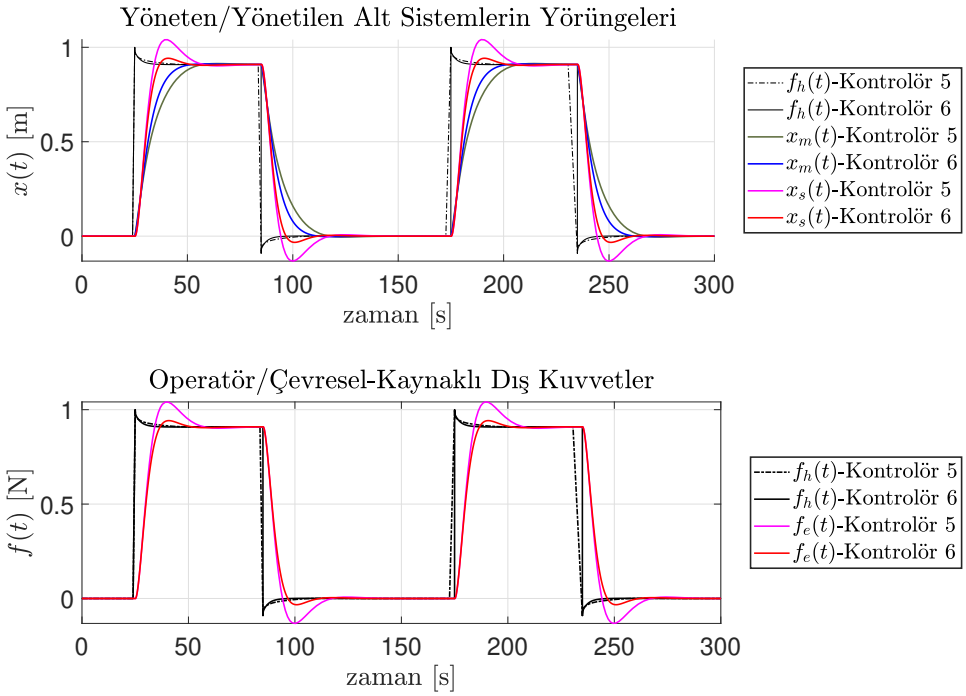
Şekil 4.20 Örnek 3 ile 8. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



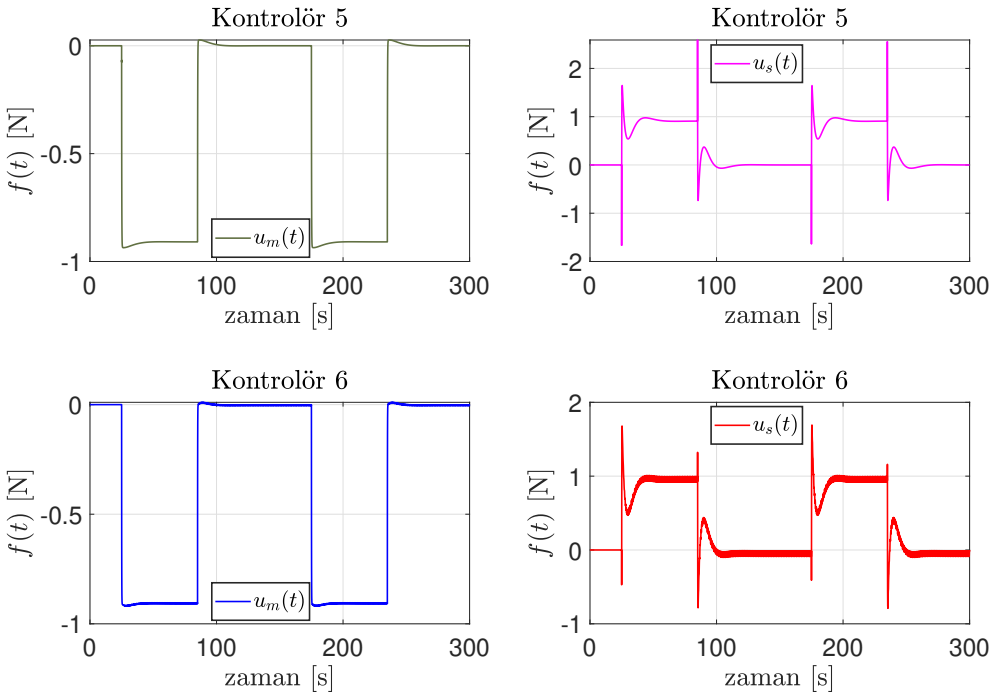
Şekil 4.21 Örnek 3 ile 9. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



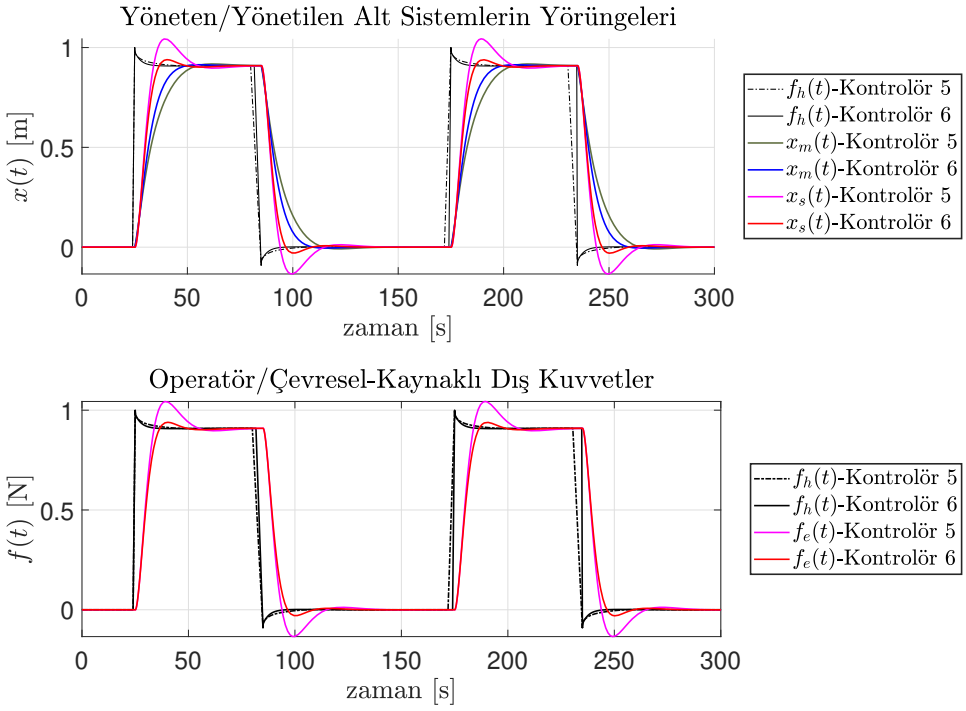
Şekil 4.22 Örnek 3 ile 9. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



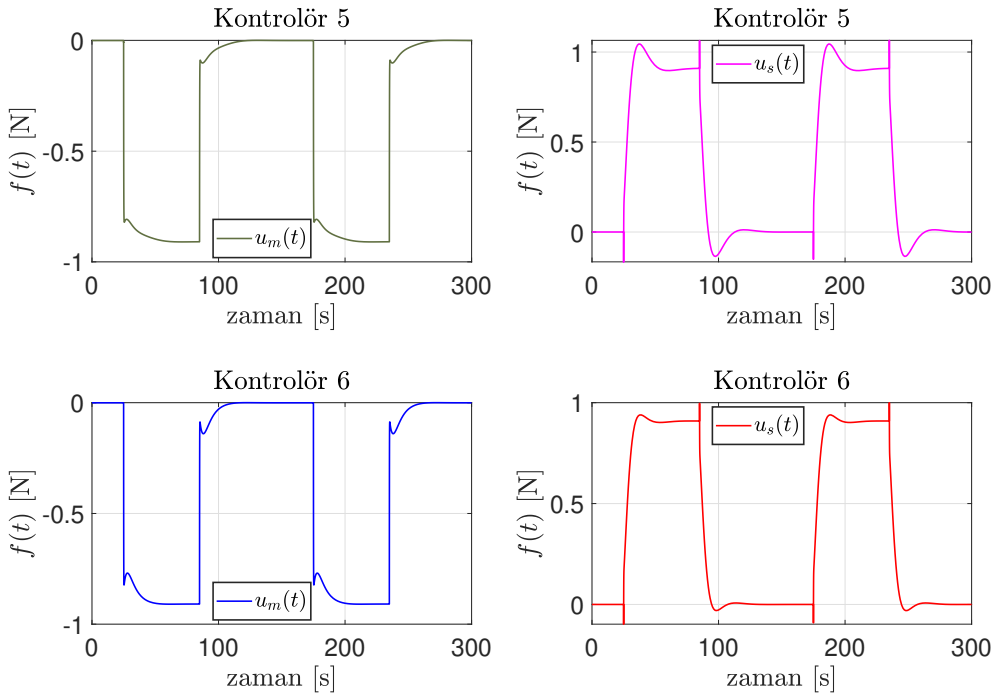
Şekil 4.23 Örnek 3 ile 10. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



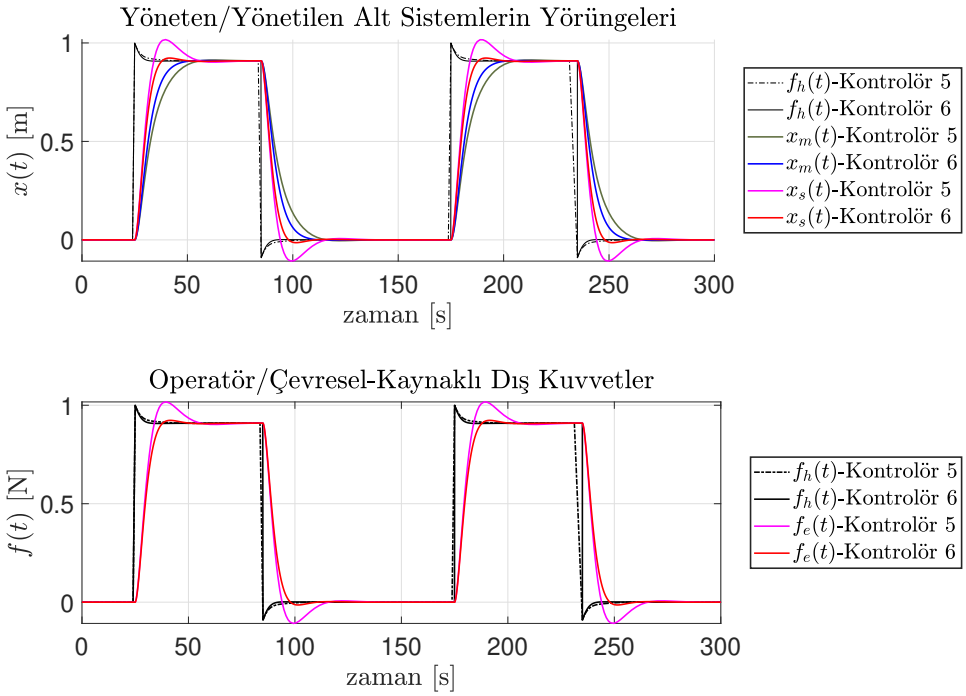
Şekil 4.24 Örnek 3 ile 10. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



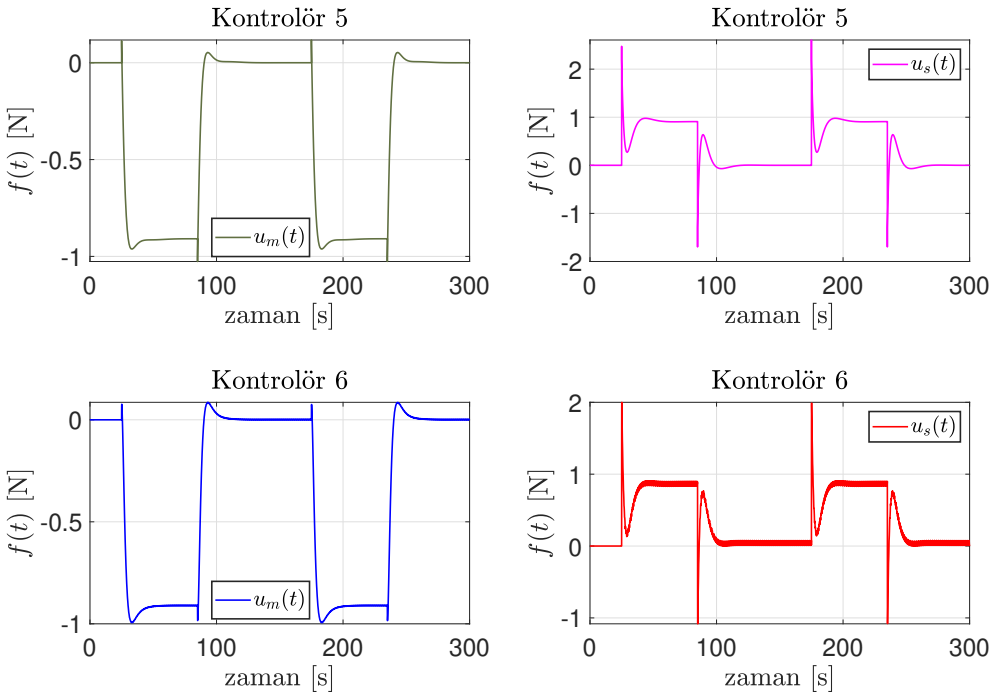
Şekil 4.25 Örnek 3 ile 11. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



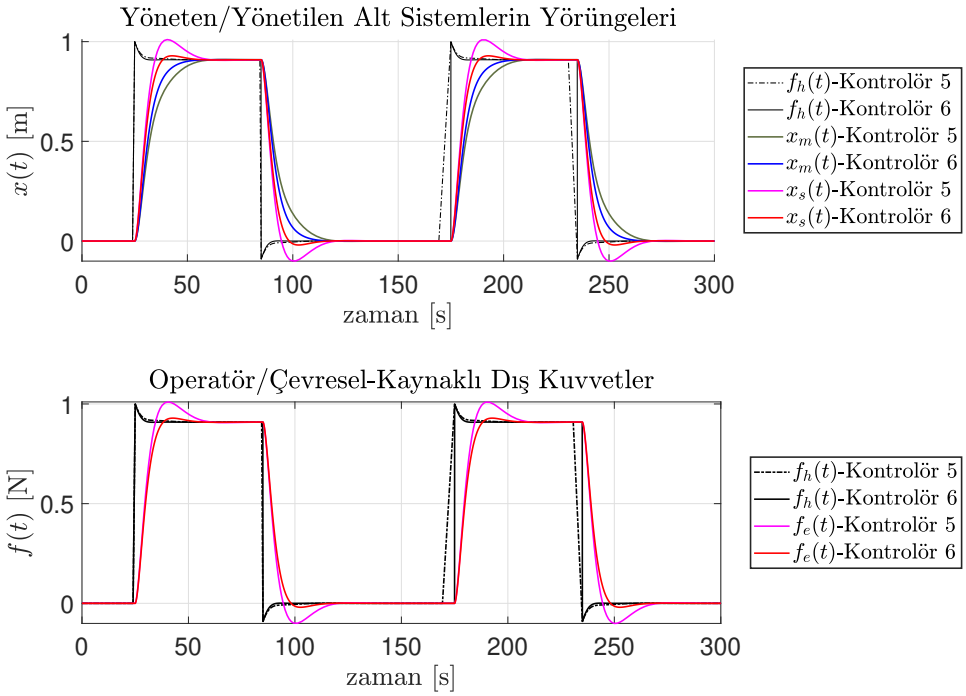
Şekil 4.26 Örnek 3 ile 11. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



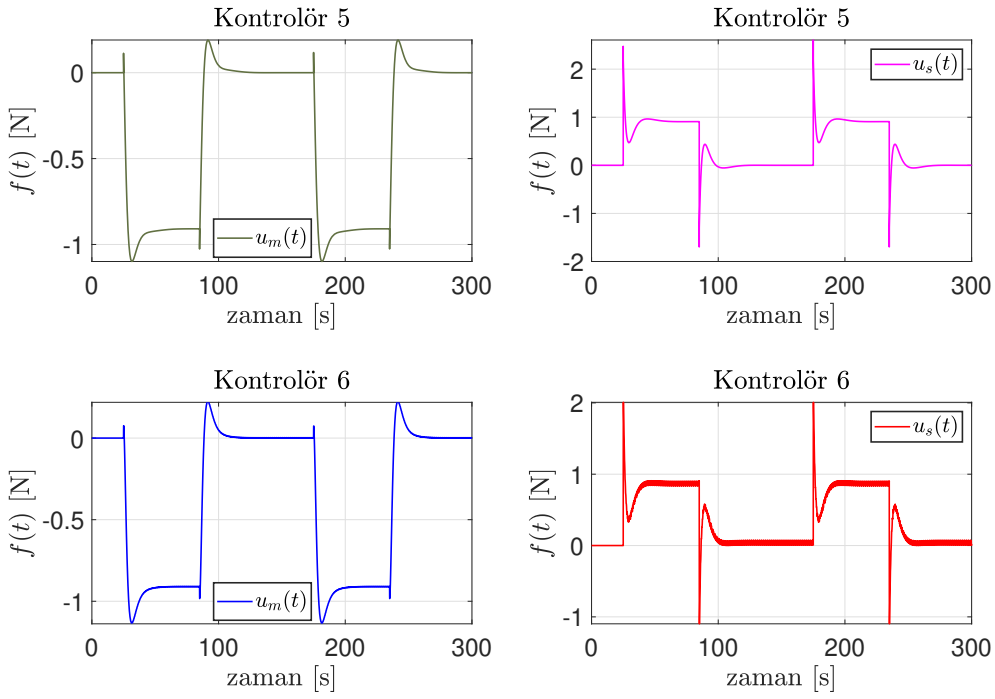
Şekil 4.27 Örnek 3 ile 12. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



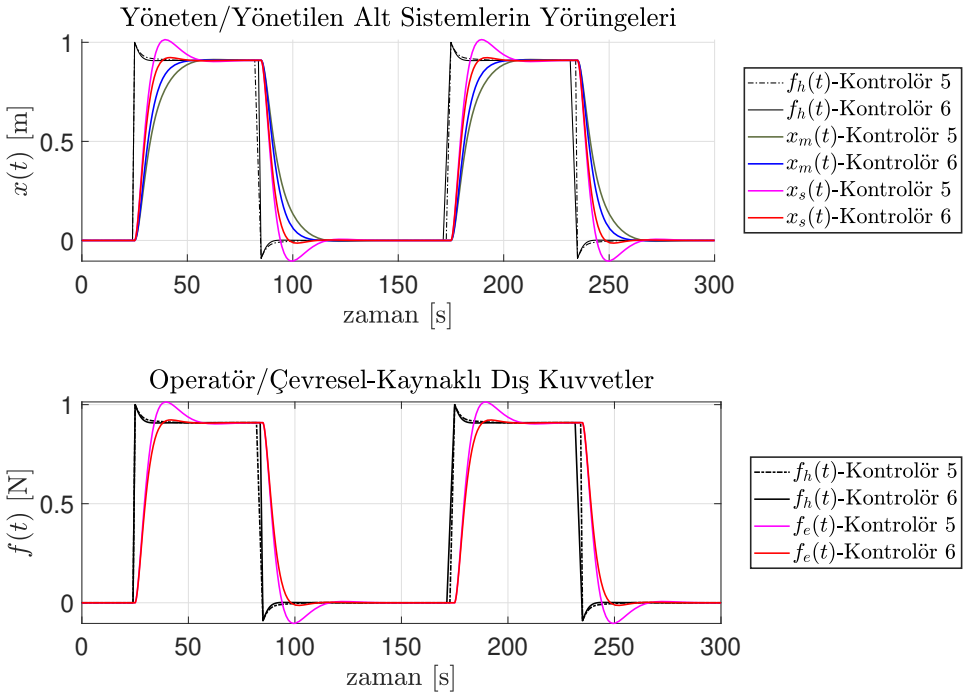
Şekil 4.28 Örnek 3 ile 12. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



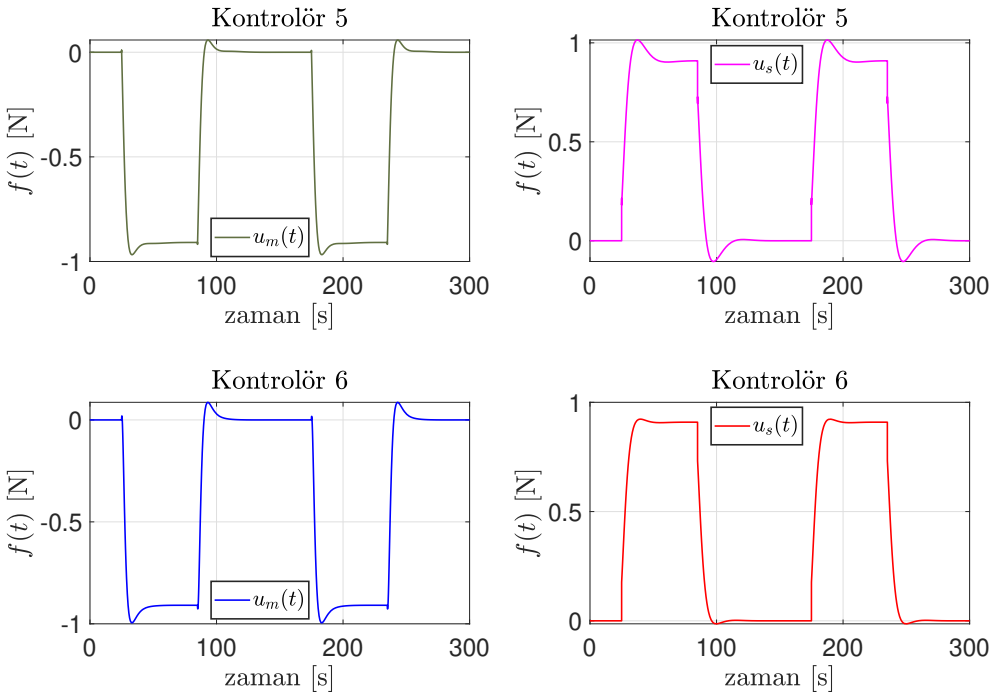
Şekil 4.29 Örnek 3 ile 13. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



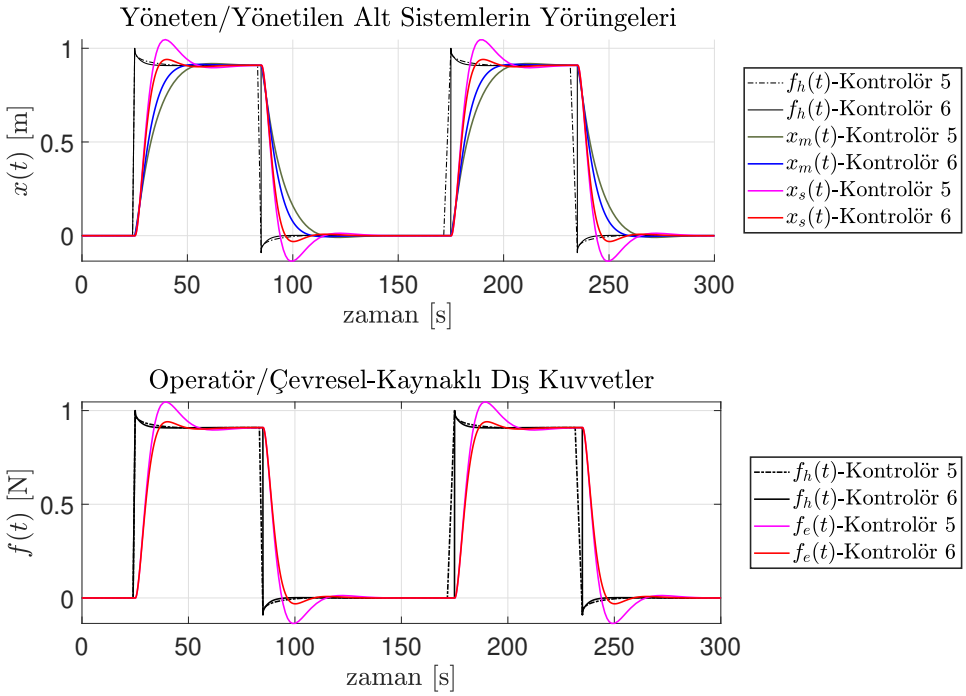
Şekil 4.30 Örnek 3 ile 13. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



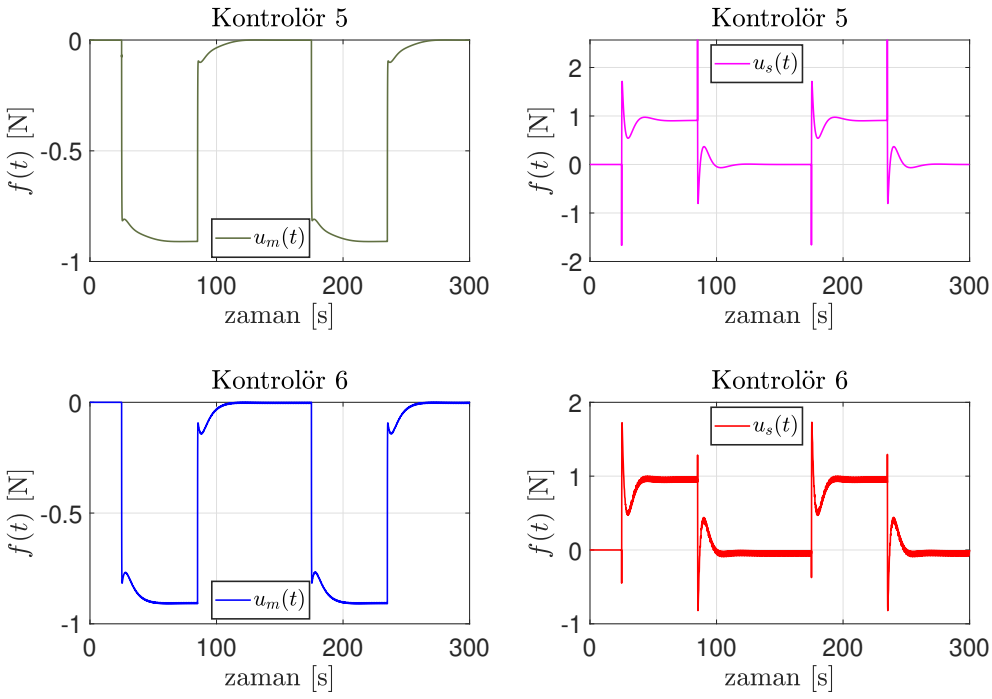
Şekil 4.31 Örnek 3 ile 14. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



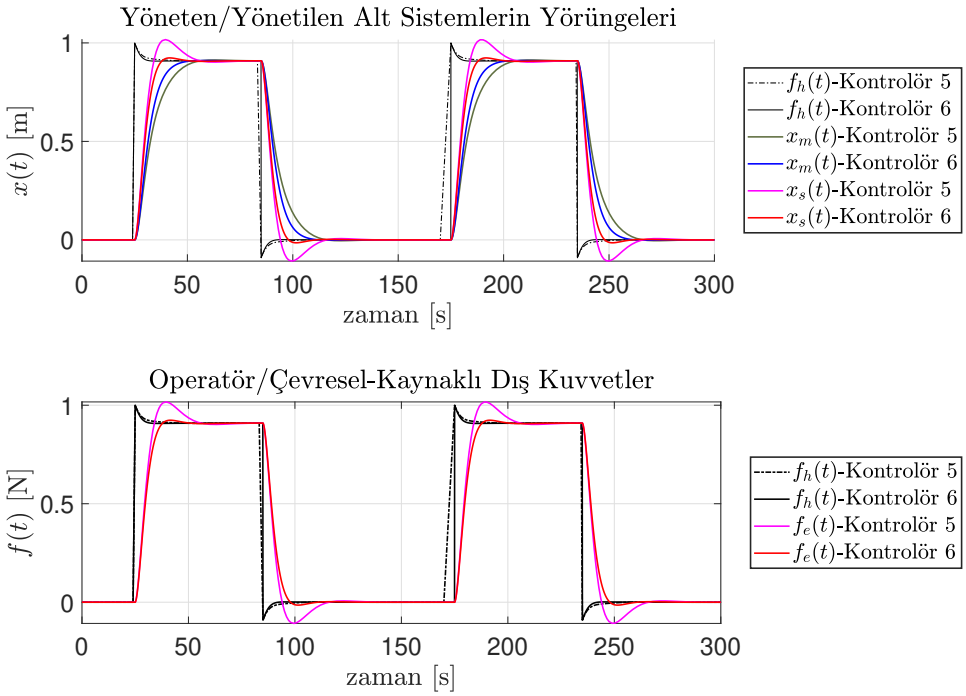
Şekil 4.32 Örnek 3 ile 14. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



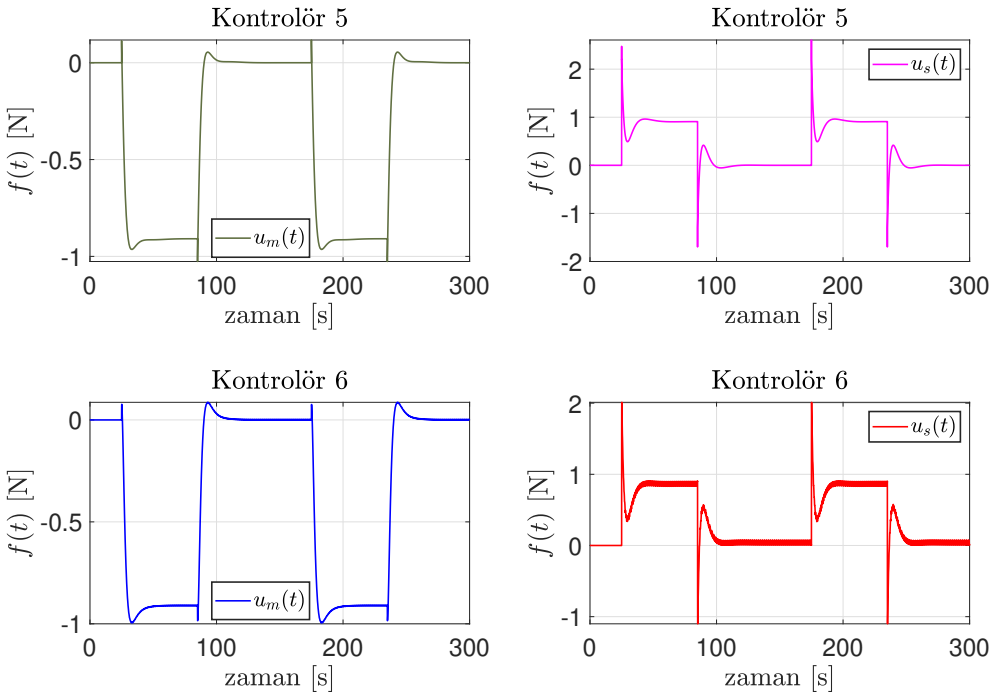
Şekil 4.33 Örnek 3 ile 15. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



Şekil 4.34 Örnek 3 ile 15. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri



Şekil 4.35 Örnek 3 ile 16. köşe noktası için elde edilen referans takibi ve kuvvet yansıması



Şekil 4.36 Örnek 3 ile 16. köşe noktasında oluşan kontrol kuvvetleri

yerleştiği görülmektedir. Son olarak, iki kontrolör için de herhangi bir kalıcı hal hatası olmadığı gözlemlenebilir. Bütün bunlar göz önüne alındığında, önerilen yöntemin referans takibinde standart yönteme kıyasla daha başarılı olduğu anlaşılmaktadır.

Şekil 4.5-Şekil 4.35 arasındaki operatör/çevresel-kaynaklı dış kuvvetleri gösteren grafikler, Kontrolör 6'nın kuvvet yansımasında da standart yönteme göre daha başarılı sonuçlar verdiğini göstermektedir. Önerilen metot, Kontrolör 5'e kıyasla benzer takip hatalarına neden olsa da, daha düşük aşım ve daha hızlı yerleşme zamanına sahiptir. Ayrıca her iki kontrolör de dış kuvvet takibinde herhangi bir kararlı hal hatası oluşturmamaktadır.

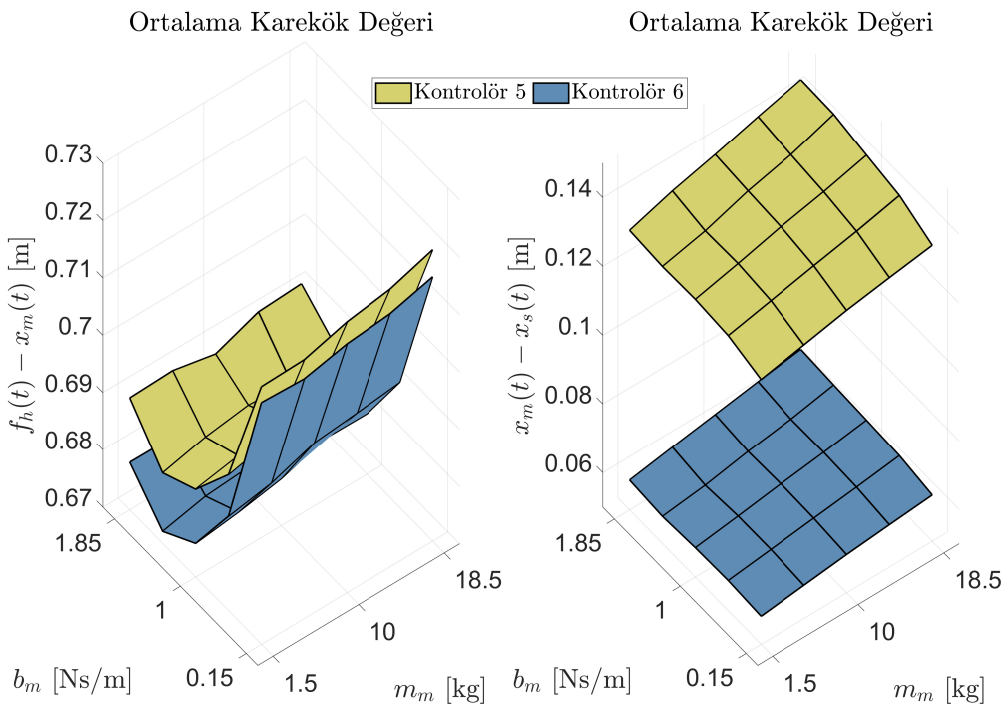
Şekil 4.6-Şekil 4.36 arasındaki kontrolör kuvvetlerini gösteren grafikler, kullanılan iki farklı kontrolörün de benzer seviyelerde kontrol kuvvetleri ürettiğini göstermektedir. Ayrıca kontrol kuvvetlerinin ağırlıklı olarak yöneten alt sistem tarafında ±1 [N] aralığında değiştiği, ancak 16. köşe noktasında da gözlemlenebileceği gibi, yönetilen alt sistemde ±2.5 [N] değerlerine çıkabildiği anlaşılmaktadır. Ortaya çıkan bu kuvvet değerleri, önerilen kontrolörün gerçekçiliğini ve pratikte uygulanabilirliğini göstermektedir.

Şekil 4.37 ve Şekil 4.38, yöneten alt sistem için referans takip performansını tanımlayan $f_h(t) - x_m(t)$ ve $x_m(t) - x_s(t)$ hata sinyallerinin, sırasıyla ortalama karekök ve maksimum değer grafikleridir. Yöneten alt sistemdeki belirsiz parametrelerin farklı değerlerindeki performansı gösteren bu grafikler, az da olsa önerilen yöntemin, yöneten alt sistemin referansı takip etmesinde daha başarılı olduğunu göstermektedir. Öte yandan önerilen Kontrolör 6, Kontrolör 5'e göre yaklaşık 2.25 kat daha az alt sistemler arasında takip hatası oluşturmaktadır.

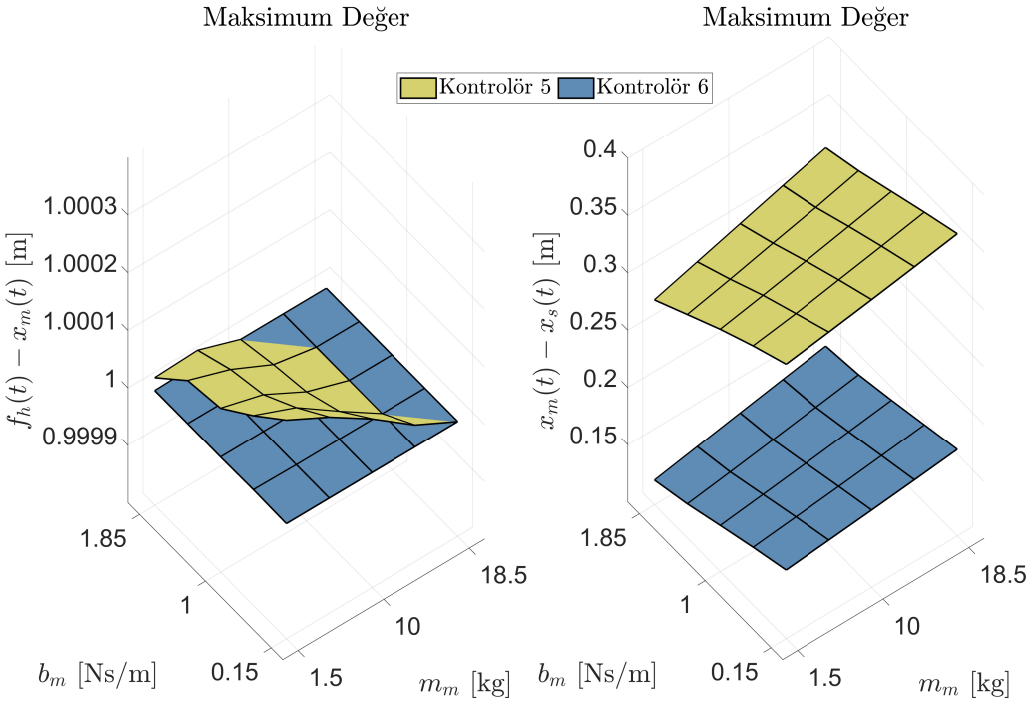
Şekil 4.39, yöneten alt sistemin farklı belirsiz parametre değerlerindeki kuvvet yansıması performansını, $f_h(t) - f_e(t)$ hata sinyali ile, ortalama değer ve maksimum değer grafikleri üzerinden tanımlamaktadır. Elde edilen sonuçlar, kontrolörlerin birbirine benzer sonuçlar verdiğini ve farkların 10^{-3} değerleri civarında oluştuğunu göstermektedir.

Şekil 4.40, yöneten alt sistemdeki kontrolör kuvvetlerinin farklı belirsiz parametrelerdeki değerlerini göstermektedir. Grafiklerden görülebileceği gibi, üretilen kontrolörler benzer kuvvet değerleri oluşturduğu ve artan kütle değerlerinde kontrolör kuvvetlerinin de arttığı anlaşılmaktadır.

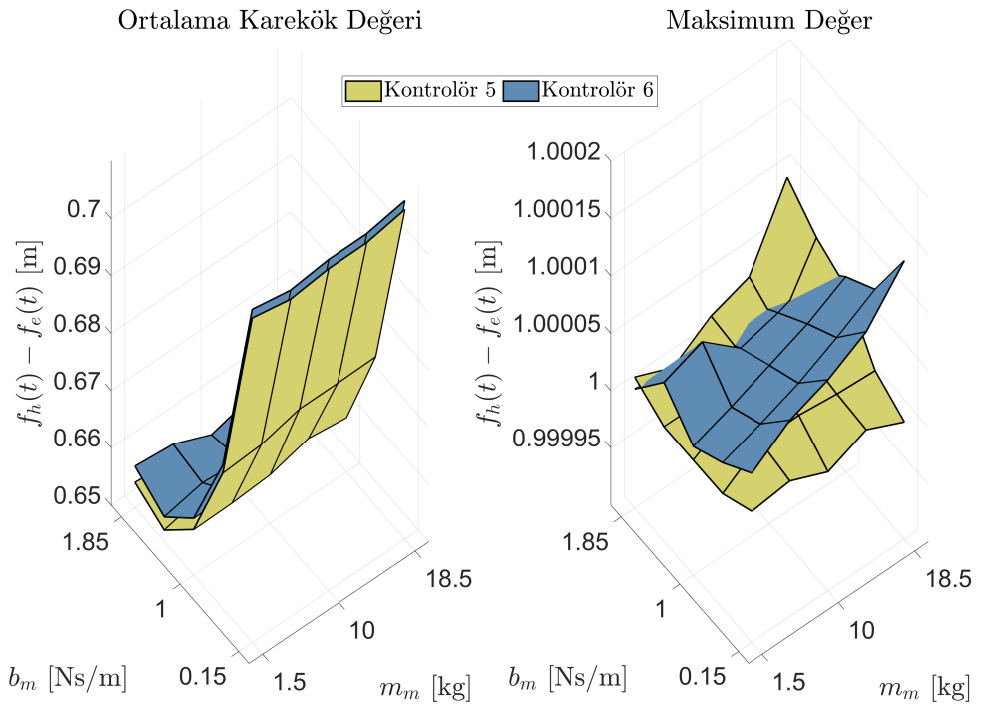
Tablo 4.16 ve Tablo 4.17, sırasıyla yöneten alt sistemin yüzey grafiklerini oluşturan noktaların ortalama karekök ve maksimum değerlerini içermektedir. Verilen bu tablolar, elde edilen sonuçları desteklemekte ve karşılaştırılabilir kılmaktadır.



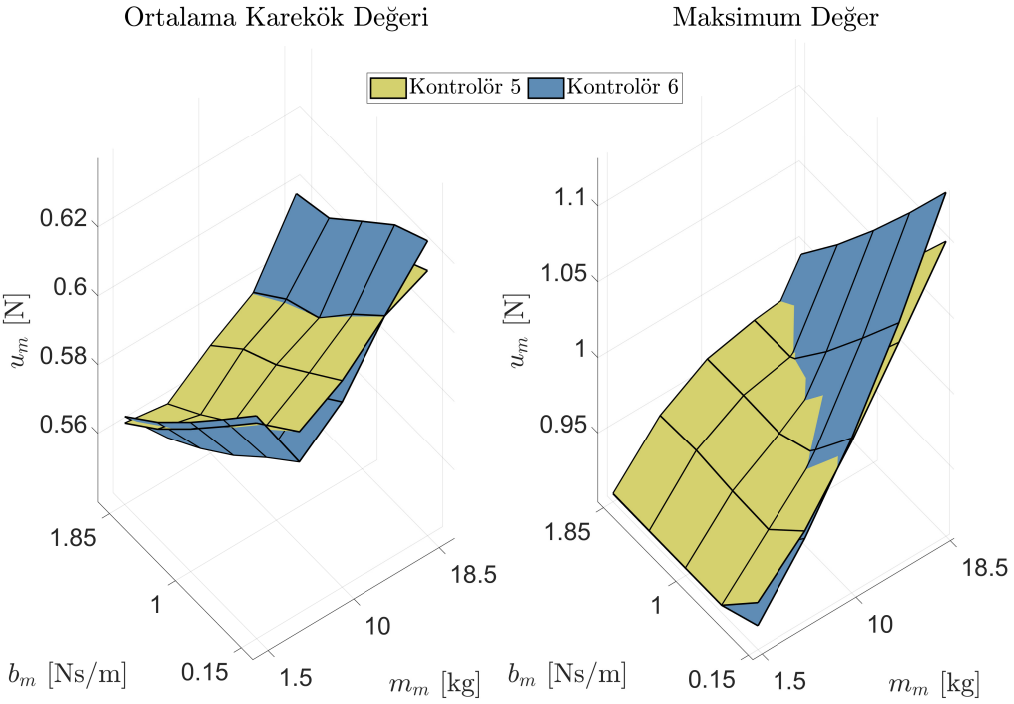
Şekil 4.37 Yöneten alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök değerleri ile referans takibi



Şekil 4.38 Yöneten alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen maksimum değerler ile referans takibi



Şekil 4.39 Yöneten alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök ve maksimum değerler ile kuvvet yansıması



Şekil 4.40 Yöneten alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök ve maksimum değerler ile kontrol kuvvetleri

Tablo 4.14 Yöneten alt sistem için elde edilen ortalama karekök değerleri

	Standart Dayanıklı H_∞	Genişletilmiş Dayanıklı H_∞
$f_h(t)-x_m(t)$	0.6957	0.6868
$x_m(t)-x_s(t)$	0.1360	0.0619
$f_h(t)-f_e(t)$	0.6694	0.6714
$u_m(t)$	0.5887	0.5879

Tablo 4.15 Yöneten alt sistem için elde edilen maksimum değerler

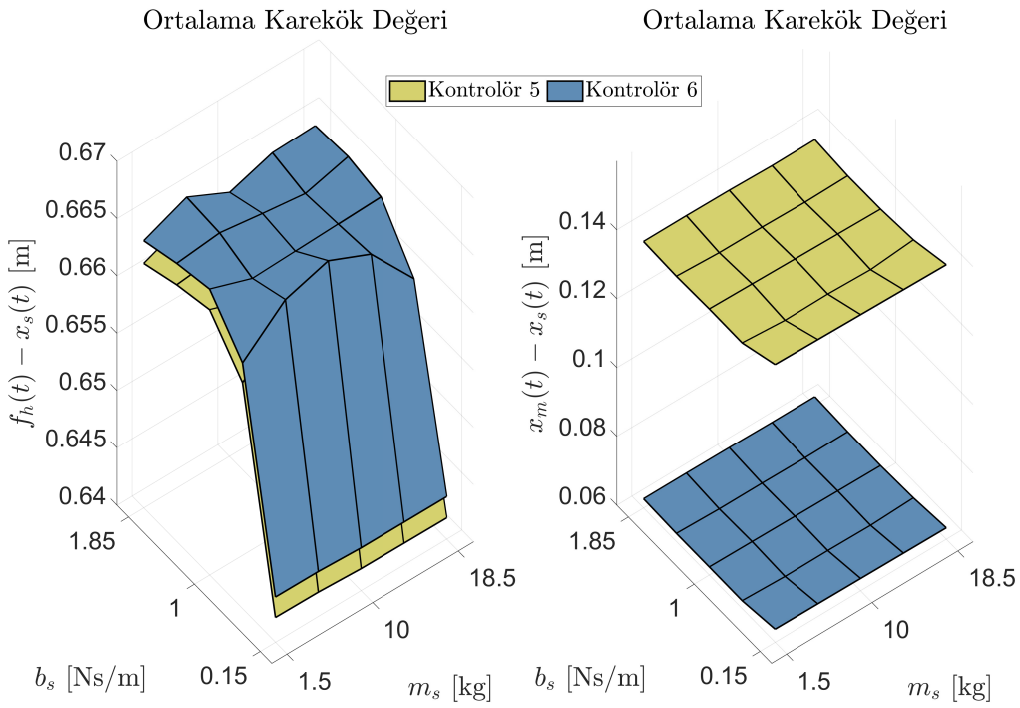
	Standart Dayanıklı H_∞	Genişletilmiş Dayanıklı H_∞
$f_h(t)-x_m(t)$	1.0002	1.0000
$x_m(t)-x_s(t)$	0.3636	0.1755
$f_h(t)-f_e(t)$	1.0001	1.0001
$u_m(t)$	1.0994	1.1318

Şekil 4.41 ve Şekil 4.42, yönetilen alt sistem için referans takip performansını tanımlayan $f_h(t)-x_m(t)$ ve $x_m(t)-x_s(t)$ hata sinyallerinin, sırasıyla ortalama karekök ve maksimum değer grafikleridir. Yönetilen alt sistemdeki belirsiz parametrelerin farklı değerlerindeki performansı gösteren bu grafikler, yöneten sistem için üretilen yüzey grafikleri ile benzer şekilde, standart formda üretilen kontrolöre kıyasla önerilen kontrolörün yaklaşık 2.25 kat daha az alt sistemler arasında takip hatası oluşturduğunu göstermektedir. Yönetilen alt sistemin referansı takip etmesinde ise benzer sonuçlar elde edilmesine karşın Kontrolör 5, Kontrolör 6'ya oranda yüksek sönüm değerlerinde az da olsa daha iyi performans göstermiştir. Ancak bu farka sebep olan hata azalması, 10^{-2}'nin altındadır.

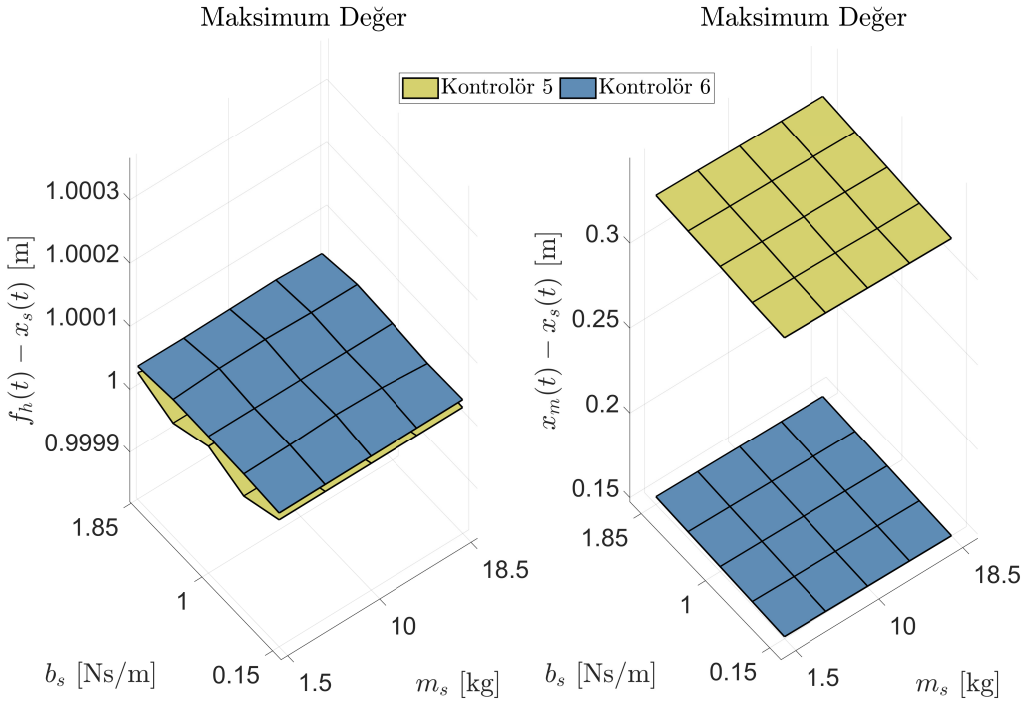
Şekil 4.43, yönetilen alt sistemin farklı belirsiz parametre değerlerindeki kuvvet yansıması performansını, $f_h(t)-f_e(t)$ hata sinyali ile, ortalama değer ve maksimum değer grafikleri üzerinden tanımlamaktadır. Elde edilen sonuçlar, kontrolörlerin birbirine benzer sonuçlar verdiğini ve farkların 10^{-3} değerleri civarında oluştuğunu göstermektedir.

Şekil 4.44, yönetilen alt sistemdeki kontrolör kuvvetlerinin farklı belirsiz parametrelerdeki değerlerini göstermektedir. Grafiklerde benzer kuvvet değerleri elde edilmesine karşın, yüksek kütle değerlerinde önerilen Kontrolör 6, daha düşük kuvvet değerleri ile sistemi kontrol edebilmektedir.

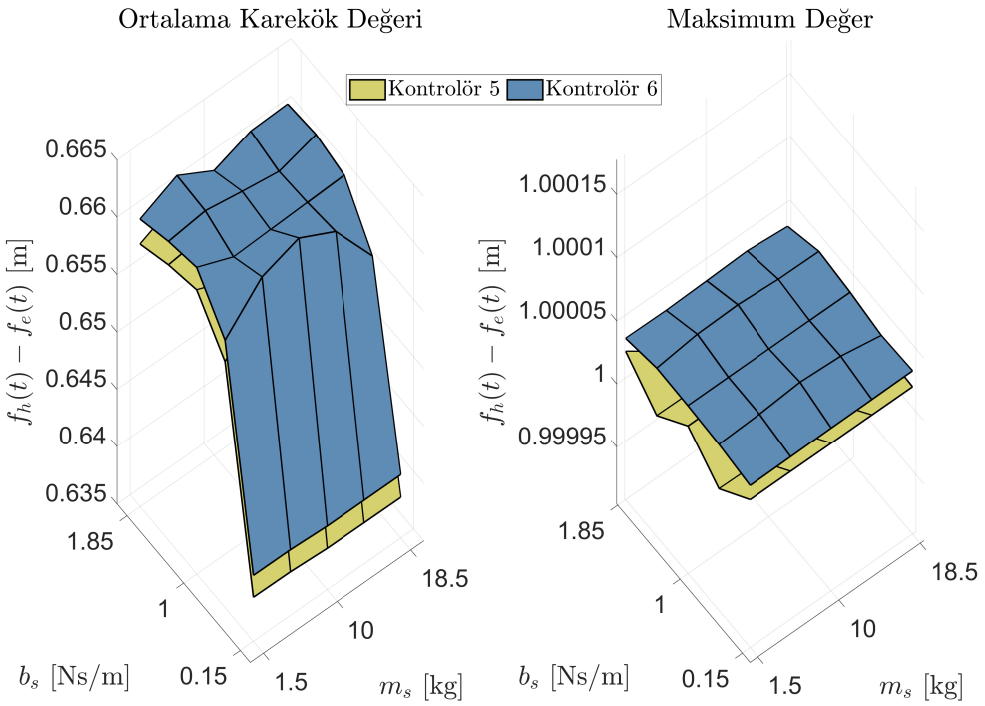
Tablo 4.16 ve Tablo 4.17, sırasıyla yönetilen alt sistemin yüzey grafiklerini oluşturan noktaların ortalama karekök ve maksimum değerlerini içermektedir. Verilen bu tablolar, yönetilen alt sistem için elde edilen sonuçları desteklemekte ve sayısal olarak karşılaştırılabilir kılmaktadır.



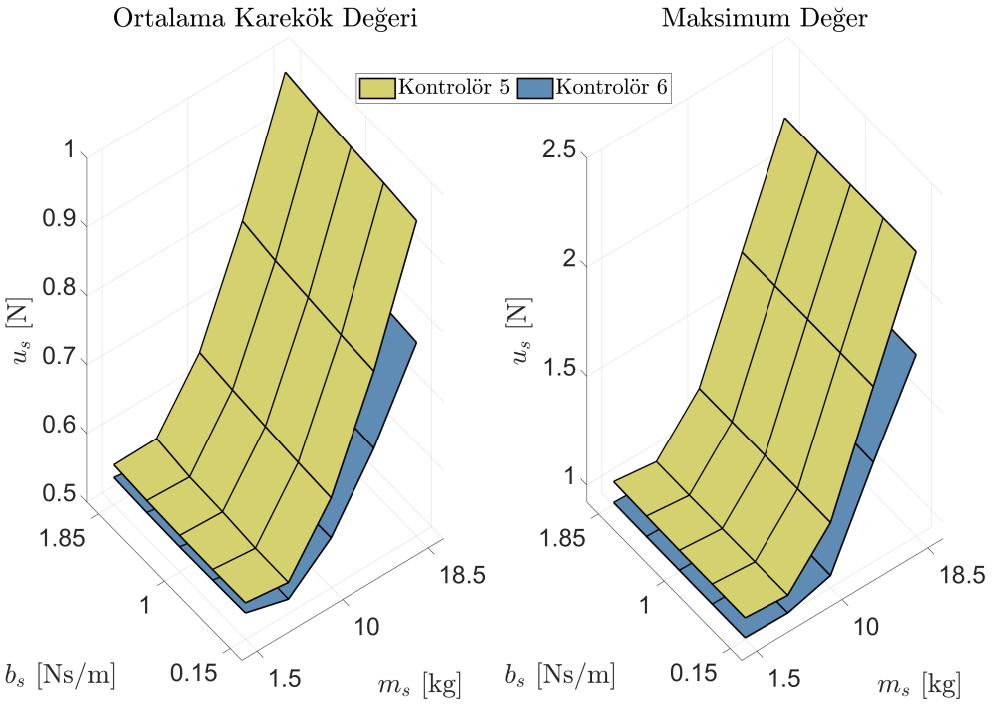
Şekil 4.41 Yönetilen alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök değerleri ile referans takibi



Şekil 4.42 Yönetilen alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen maksimum değerler ile referans takibi



Şekil 4.43 Yönetilen alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök ve maksimum değerler ile kuvvet yansıması



Şekil 4.44 Yönetilen alt sistem için hata sinyalleri üzerinden üretilen ortalama karekök ve maksimum değerler ile kontrol kuvvetleri

Tablo 4.16 Yönetilen alt sistem için elde edilen ortalama karekök değerleri

	Standart Dayanıklı H_∞	Genişletilmiş Dayanıklı H_∞
$f_h(t)-x_s(t)$	0.6580	0.6599
$x_m(t)-x_s(t)$	0.1375	0.0624
$f_h(t)-f_e(t)$	0.6547	0.6567
$u_s(t)$	0.7177	0.6282

Tablo 4.17 Yönetilen alt sistem için elde edilen maksimum değerler

	Standart Dayanıklı H_∞	Genişletilmiş Dayanıklı H_∞
$f_h(t)-x_s(t)$	1.0000	1.0000
$x_m(t)-x_s(t)$	0.3296	0.1520
$f_h(t)-f_e(t)$	1.0000	1.0000
$u_s(t)$	2.2273	1.7671

Yorum 4.2. Kontrolör tasarımlarında parametre belirsizliklerinin dikkate alınması, iki yönlü teleoperasyon sisteminin referans takibi ve kuvvet yansıması kontrol problemleri için daha gerçekçi sonuçlar sunar. Tasarımlarda kullanılan politopik yöntem ile önerilen kontrolör, m_m, m_s, b_m ve b_s belirsiz parametrelerinde yüzde 85'e kadar belirsizlikler için dayanıklılık sağlamaktadır. Bu oran, tez çalışmasında elde edilen en yüksek belirsizlik sınırıdır. Ek olarak bu yöntem sayesinde, normu sınırlı tipte belirsizliklerin aksine oransal haldeki belirsiz parametreler ayrı ayrı değerlendirilebilmiştir. Sayısal sonuçlar, standart DME formuna kıyasla genişletilmiş DME formu aracılığıyla yaklaşık yüzde 20 oranında daha düşük H_∞ normunun elde edildiğini göstermektedir. Ayrıca önerilen metot ile elde edilen kontrolör, standart yöntemle elde edilene kıyasla sistemin performans kriterlerinde daha başarılı sonuçlar vermiştir. Bu iki sonuç, tanımlanan çok amaçlı kontrol probleminde tutuculuğunun azaltıldığının göstergeleridir. Bütün bunlar ışığında sayısal benzetim sonuçları, önerilen metot ile tasarlanan GDME temelli dayanıklı H_∞ kontrolörün, sistemdeki zorlayıcı politopik belirsizliklere rağmen oldukça başarılı referans takibi ve kuvvet yansıması elde ettiğini göstermektedir. Ayrıca bu kontrolör, bir diğer deyişle Kontrolör 6, tez çalışmasının önerilen kontrolörüdür.

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tezi ile, iki yönlü teleoperasyon sistemi için GDME temelli dayanıklı H_∞ kontrol problemi değerlendirildi. Daha az tutucu bir dayanıklı H_∞ kontrolörü elde etmek için, durum-geri besleme kontrol kanununa dayalı, pratikte uygulanabilir yeni kontrol stratejisi geliştirilmiştir. Önerilen denetleyicinin etkinliğini göstermek için, tek serbestlik dereceli iki yönlü teleoperasyon sistemi kullanılmıştır. Önerilen GDME temelli tasarım metodunun performansını ortaya çıkarmak için, standart dayanıklı H_∞ kontrolöre kıyasla kapsamlı sayısal benzetim çalışmaları yapılmıştır. Odaklanılan yöneten/yönetilen alt sistemdeki en yüksek belirsizlik sınırına ulaşmak için, normu sınırlı ve politopik olmak üzere iki farklı belirsizlik tipi ile yapılan tasarımlar karşılaştırılmıştır. Sayısal benzetim çalışmaları, önerilen kontrolör olan GDME temelli politopik belirsizliklere dayanıklı H_∞ kontrolörünün, standart dayanıklı tasarıma kıyasla, daha düşük γ_∞ kazancında dayanıklı kapalı-çevrim kararlılığı garanti ettiğini ve daha iyi referans takip ve kuvvet yansıması performansı verdiğini göstermiştir. Ayrıca normu sınırlı tipte belirsizliklere oranla, politopik tipte belirsizlikler ile daha yüksek belirsizlik sınırında dayanıklı kapalı-çevrim kararlılık garanti edilmiştir.

Gelecekteki çalışmalarda, önerilen genişletilmiş formda doğrusal kesirli gösterim ile sistemdeki belirsizlikler tanımlanabilir. Ayrıca çıkış geri besleme kontrol kanunu ile kontrolör tasarımı gerçekleştirilebilir. Son olarak, yöneten ve yönetilen alt sistemler arasındaki iletişim kanalında oluşan zaman gecikmesinin etkilerine de odaklanılabilir.

KAYNAKÇA

[1] P. F. Hokayem, M. W. Spong, "Bilateral teleoperation: An historical survey," *Automatica*, vol. 42, no. 12, pp. 2035–2057, 2006.

[2] H. Du, "H_∞ state-feedback control of bilateral teleoperation systems with asymmetric time-varying delays," *IET Control Theory & Applications*, vol. 7, no. 4, pp. 594–605, 2013.

[3] H. Yazıcı, *Eyleyici Gecikmesine Bağlı Doyumlu ve Dayanıklı H_∞ Denetleyiciyle Deprem Etkisi Altındaki Yapısal Sistemlerin Titreşimlerinin Kontrolü*. Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2011.

[4] R. C. Goertz, *Master-Slave Manipulator*. Argonne National Laboratory, 1949.

[5] T. B. Sheridan, W. R. Ferrell, "Remote manipulative control with transmission delay," *IEEE Transactions on Human Factors in Electronics*, vol. HFE-4, no. 1, pp. 25–29, 1963.

[6] W. R. Ferrell, "Remote manipulation with transmission delay," *IEEE Transactions on Human Factors in Electronics*, vol. HFE-6, no. 1, pp. 24–32, 1965.

[7] F. Miyazaki, S. Matsubayashi, T. Yoshimi, S. Arimoto, "A new control methodology toward advanced teleoperation of master-slave robot systems," in *Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 1986, pp. 997–1002.

[8] K. Furuta, K. Kosuge, Y. Shiote, H. Hatano, "Master-slave manipulator based on virtual internal model following control concept," in *Proceedings of 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 1987, pp. 567–572.

[9] G. J. Raju, G. C. Verghese, T. B. Sheridan, "Design issues in 2-port network models of bilateral remote manipulation," in *Proceedings, 1989 International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, 1989, pp. 1316–1321.

[10] B. Hannaford, P. Fiorini, "A detailed model of bi-lateral teleoperation," in *Proceedings of the 1988 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, 1988, pp. 117–121.

[11] R. J. Anderson, M. W. Spong, "Bilateral control of teleoperators with time delay," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 5, pp. 494–501, 1989.

[12] D. A. Lawrence, "Stability and transparency in bilateral teleoperation," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 5, pp. 624–637, 1993.

[13] Y. Yokokohji, T. Yoshikawa, "Bilateral control of master-slave manipulators for ideal kinesthetic coupling-formulation and experiment," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 10, no. 5, pp. 605–620, 1994.

[14] S. Lee, K. Jeong, "Design of robust time delayed teleoperator control system," in *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'94)*, IEEE, 1994, pp. 1413–1420.

[15] G. M. H. Leung, B. A. Francis, J. Apkarian, "Bilateral controller for teleoperators with time delay via μ-synthesis," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, no. 1, pp. 105–116, 1995.

[16] H.-K. Lee, K. Tanie, C. M. Jin, "Design of a robust bilateral controller for teleoperators with modeling uncertainties," in *Proceedings 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human and Environment Friendly Robots with High Intelligence and Emotional Quotients (Cat. No.99CH36289)*, IEEE, 1999, pp. 1860–1865.

[17] M. Boukhnifer, A. Ferreira, J.-G. Fontaine, "Scaled teleoperation controller design for micromanipulation over internet," in *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, IEEE, 2004, pp. 4577–4583.

[18] Z. Hu, S. E. Salcudean, P. D. Loewen, "Robust controller design for teleoperation systems," in *1995 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Intelligent Systems for the 21st Century*, IEEE, 1995, pp. 2127–2132.

[19] J. Yan, S. Salcudean, "Teleoperation controller design using H_∞-optimization with application to motion-scaling," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 4, no. 3, pp. 244–258, 1996.

[20] S. Sirouspour, A. Shahdi, "Model predictive control for transparent teleoperation under communication time delay," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 22, no. 6, pp. 1131–1145, 2006.

[21] M. Sha Sadeghi, H. R. Momeni, R. Amirifar, "H_∞ and L_1 control of a teleoperation system via LMIs," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 206, no. 2, pp. 669–677, 2008.

[22] B. Zhang, A. Kruszewski, J.-P. Richard, "H_∞ robust control design for teleoperation systems," in *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Robust Control Design*, IFAC, 2012, pp. 666–671.

[23] J. H. Cho, H. I. Son, D. G. Lee, T. Bhattacharjee, D. Y. Lee, "Gain-scheduling control of teleoperation systems interacting with soft tissues," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 3, pp. 946–957, 2013.

[24] C. A. López Martínez, İ. Polat, R. v. d. Molengraft, M. Steinbuch, "Robust high performance bilateral teleoperation under bounded time-varying dynamics," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 1, pp. 206–218, 2015.

[25] F. Turki, H. Gritli, S. Belghith, "An LMI-based design of a robust state-feedback control for the master-slave tracking of an impact mechanical oscillator with double-side rigid constraints and subject to bounded-parametric uncertainty," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 82, p. 105 020, 2020.

[26] A. M. Lyapunov, "The general problem of the stability of motion," *International Journal of Control*, vol. 55, no. 3, pp. 531–534, 1992.

[27] A. I. Lur'e, *Some Non-linear Problems in the Theory of Automatic Control: Nekotorye Nelineinye Zadachi Teorii Avtomaticheskogo Regulirovaniya (Gos. Isdat. Tekh. Teor. Lit., 1951, U.S.S.R.) A Translation from the Russian*. H.M. Stationery Office, 1957.

[28] R. E. Kalman, "Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 49, no. 2, pp. 201–205, 1963.

[29] J. C. Willems, "Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, no. 6, pp. 621–634, 1971.

[30] Y. S. Pyatnitskiy, V. I. Skorodinskiy, "Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem," *Systems & Control Letters*, vol. 2, no. 2, pp. 130–135, 1982.

[31] B. A. Francis, *A Course in H_∞ Control Theory*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987, vol. 88.

[32] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989.

[33] P. Gahinet, P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, no. 4, pp. 421–448, 1994.

[34] M. Chilali, P. Gahinet, "H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 358–367, 1996.

[35] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, ser. Studies in Applied Mathematics. SIAM, 1994, vol. 15.

[36] M. C. De Oliveira, J. C. Geromel, J. Bernussou, "Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems," *International Journal of Control*, vol. 75, no. 9, pp. 666–679, 2002.

[37] P. Apkarian, H. D. Tuan, J. Bernussou, "Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, pp. 1941–1946, 2001.

[38] Y. Ebihara, T. Hagiwara, "New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis," *Automatica*, vol. 40, no. 11, pp. 2003–2009, 2004.

[39] S. Sajjadi-Kia, F. Jabbari, "Dilated matrix inequalities for control design in systems with actuator constraint," in *Proceedings of 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 2007, pp. 5678–5683.

[40] W. Xie, "An equivalent LMI representation of bounded real lemma for continuous-time systems," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2008, pp. 1–8, 2008.

[41] G. Pipeleers, B. Demeulenaere, J. Swevers, L. Vandenberghe, "Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 58, no. 7, pp. 510–518, 2009.

[42] G.-R. Duan, H.-H. Yu, *LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications(1st ed.)* CRC Press, 2013.

[43] J. Löfberg, "YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in matlab," in *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*, IEEE, 2004, pp. 284–289.

[44] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization Methods and Software*, vol. 11, no. 1-4, pp. 625–653, 1999.

[45] L. Xie, "Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty," *International Journal of Control*, vol. 63, no. 4, pp. 741–750, 1996.

[46] M. N. A. Parlakçı, "Improved robust stability criteria and design of robust stabilizing controller for uncertain linear time-delay systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 16, no. 13, pp. 599–636, 2006.

[47] M. N. A. Parlakçı, İ. B. Küçükdemiral, "Robust delay-dependent H_∞ control of time-delay systems with state and input delays," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, no. 9, pp. 974–1007, 2011.

[48] K. Gu, V. L. Kharitonov, J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhauser: Basel, Boston, 2003.

[49] P. C. Pellanda, P. Apkarian, H. D. Tuan, "Missile autopilot design via a multi-channel LFT/LPV control method," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, no. 1, pp. 1–20, 2002.

[50] E. Özülkü, *Giriş Gecikmeli Politopik Belirsizlik İçeren Uçak İniş Takımı Sistemi İçin Dayanıklı L_2 Kazançlı Kontrolör Tasarımı*. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2018.

[51] H. Yazici, M. Sever, "L_2 gain state derivative feedback control of uncertain vehicle suspension systems," *Journal of Vibration and Control*, vol. 24, no. 16, pp. 3779–3794, 2018.

[52] A. Aktas, H. Yazici, M. Sever, "LMI-based design of an I-PD+PD type LPV state feedback controller for a gantry crane," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 41, no. 6, pp. 1640–1655, 2018.

[53] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[54] G. E. Dullerud, F. G. Paganini, *A Course in Robust Control Theory: a convex approach*, ser. Texts in Applied Mathematics. Splinger, 2005, vol. 36.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. B. Gormus and H. Yazici, "Robust state feedback H-infinity controller design for bilateral teleoperation system having saturated actuators," 2021 7th International Conference on Automation, Robotics and Applications (ICARA), IEEE, 2021, pp. 157-162.