T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EVRİMSEL (2+1)-BOYUTLU HİROTA TİPİ DENKLEMLERİN İKİLİ-HAMİLTONİYEN YAPILARI

Damla KOCAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Danışman

Prof. Dr. Devrim YAZICI

Şubat, 2022

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EVRİMSEL (2+1)-BOYUTLU HİROTA TİPİ DENKLEMLERİN İKİLİ-HAMİLTONİYEN YAPILARI

Damla KOCAMAN tarafından hazırlanan tez çalışması 25.02.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Fizik Anabilim Dalı, Fizik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Devrim YAZICI
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Devrim YAZICI, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Ömer OĞUZ, Üye
Haliç Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Devrim YAZICI sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Evrimsel Hirota Tipi (2+1)-Boyutlu Denklemlerin İkili-Hamilton Yapıları isimli tez çalışmamda, yararlandığım kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırmamda elde ettiğim bilgileri çarpıtmadan aktardığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Damla KOCAMAN

İmza

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince, vaktini, emeğini ve bilgisini benden esirgemeyen, her zaman desteğini arkamda hissettiğim, hayatımda bana basamak olan ve yol gösteren hocam Prof. Dr. Devrim Yazıcı'ya ve lisans eğitimim boyunca, beni yüksek lisans eğitimi için cesaretlendiren ve her zaman yanımda olan hocam Prof. Dr. Kazem Azizi'ye teşekkür ederim.

Damla KOCAMAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vi

KISALTMA LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ iix

ÖZET x

ABSTRACT xii

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 4

1.3 Hipotez 5

2 GENEL BİLGİLER 6

2.1 Çözülebilirlik 6

2.2 Solitonlar 6

2.3 Ters Saçılım Metodu 8

2.4 Lax Çifti 9

2.5 Düz Uzay Şartı 10

2.6 AKNS 10

2.7 Langrange Formülasyonu 11

2.8 Hamilton Yapı 14

2.8.1 Simplektik Yapı 17

2.9 İkili-Hamiltoniyen Yapı 19

2.10 Dirac Parantezi 20

3 EVRİMSEL (2+1)-BOYUTLU HİROTA TİPİ DENKLEMLERİN İKİLİ-HAMİLTONİYEN YAPILARI 23

3.1 Evrimsel Hirota Tipi Langrange Denklemleri ve Simetri Koşulu 23

3.1.1 Langrange Denkleminin Elde Edilmesi 23

3.1.2 Simetri Koşulunun İncelenmesi 27

3.2 Yenileme İlişkileri ve Lax Çifti 28

3.2.1 Genel Durum 29

3.2.2 Belirli Durumlar 32

3.2.3 Özel Durum 34

3.3 İki Bileşenli Yapı ve Hamiltoniyen Formülasyonu 35
3.3.1 Simplektik Yapı ve Hamiltoniyen Formülasyonu 36
3.4 2×2 Matris Formunda Yenileme Operatörleri 41
3.4.1 Genel Durum 41
3.4.2 Belirli Durumlar 44
3.4.3 Özel Durum 45
3.5 İkili-Hamiltoniyen Yapı 46
3.5.1 Genel Durum 46
3.5.2 Belirli Durumlar 53
3.5.3 Özel Durum 56
3.6 Jacobi Özdeşliği 56
4 SONUÇ VE ÖNERİLER 62
KAYNAKÇA 65
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 69

SİMGE LİSTESİ

J_0	Birinci Hamilton operatörü
ϕ_i	Birinci sınıf bağ koşulu
Θ	Bi-vektör
F	Diferansiyel denklemin genel gösterimi
A_i, B_i	Diferansiyel operatörleri
I	Eylem İntegrali
M	Faz uzayı
u	Fiziksel değişken
D_F	Frechet türev operatörü
D_F^*	Frechet türevinin self-adjointi
f	Fonksiyonel
$\dot{q}$	Genelleştirilmiş hız
q_i	Genelleştirilmiş koordinat
p_i	Genelleştirilmiş momentum
τ	Grup parametresi
H	Hamiltoniyen
H_n	Hamilton fonksiyoneli (yoğunluğu)
J_1	İkinci Hamilton operatörü
ϕ_j	İkinci sınıf bağ koşulu
π_i	Kanonik momentum
$\gamma(u)$	Keyfi fonksiyon
T	Kinetik enerji
$i\frac{h}{2\pi}$	Kuantizasyon sabiti
L	Langranjiyen
X_i	Lax operatörü
V	Potansiyel enerji
$PrV_{J\omega}$	Prolongation
c	Sabit
φ	Simetri karakteristiği

$\tilde{\varphi}$	Simetri karakteristiğinin potansiyeli
ψ_t	Simetri karakteristiğinin potansiyelinin zamana göre türevi
ψ	Simetri karakteristiğinin zamana göre türevi
ω	Simplektik form
K	Simplektik matris
J	Simplektik sütun
η	Simplektik sütun matrisi
Ω	Simplektik 2-formun hacim integrali
λ	Spektral Parametre
D_i	Toplam türev operatörleri
z_i, t	Uzay ve zaman koordinatları
J_2	Üçüncü Hamilton operatörü
δ	Varyasyonel türev
R	Yenileme operatörü
$\approx$	Zayıf eşit
$\wedge$	Wedge çarpımı
∇_c	$\vec{c} = (c_1, c_2)$ vektörü yönünde bir türev operatörü

KISALTMA LİSTESİ

AKNS	Mark J. Ablowitz, David J. Kaup, A. C. Newell ve H. Segur metodu
DP	Dirac Parantezi
KdV	Korteweg-de Vries denklemi
mKdV	Modife edilmiş Korteweg-de Vries denklemi
NSE	Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi
PP	Poisson parantezi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 (a) Soliton bükülme yapıyor (b) Soliton dağılma (dispersiyon) yapıyor (c) Soliton dağılma ve bükülme yapmıyor……..8

Şekil 2.2 Farklı dalga uzunluğuna sahip solitonların birleşmesi ve ayrılması…8

ÖZET

Evrimsel Hirota Tipi (2+1)-Boyutlu Denklemlerin İkili-Hamiltoniyen Yapıları

Damla KOCAMAN

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Devrim YAZICI

Bu tez çalışmasında, evrimsel Hirota tipi (2+1)-boyutlu denklemlerin bi-Hamiltoniyen yapıları incelenmiştir. Bu tipteki denklemler için Langrange fonskiyonu, Helmholtz koşulu ve homotopi formülü kullanılarak oluşturulmuştur. Bu Langrange fonskiyonunun Euler-Langrange denklemlerinin simplektik Monge-Ampere formuna sahip olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, simetriler için yenileme ilişkileri ve Lax çifti Langrange denklemleri için elde edilmiştir. Burada simetri koşulu asimetrik çarpanlar formuna dönüştürülerek başlanmıştır ve hemen ardından bu form için simetri durumundan simetriler için bir ilişki Lax çifti ve simetri koşulunun üçüncü formundan simetri ilişkisi elde edilmiştir. Birinci Hamiltoniyen yapıyı oluşturabilmek için, Langrange denklemi iki bileşenli yapıya çevrilmiştir ve sonrasında J_0, birinci Hamiltoniyen operatörünü elde edebilmek için Dirac'ın bağ koşulu teorisi uygulanmıştır. Buna karşılık gelen Hamiltoniyen fonksiyonu, H_0, dejenere Langrange fonksiyonuna Lejendre dönüşümü uygulanarak elde edilmiştir. Böylece iki bileşenli evrimsel Hirota tipi denklem için birinci Hamiltoniyen yapı oluşturulmuştur. İkinci Hamiltoniyen yapıyı oluşturabilmek için ise simetriler için yenileme ilişkileri kullanılarak, 2×2 matris formunda yenileme operatörü elde edilmiştir. Son olarak,

yenileme operatörü, J_0, birinci Hamiltoniyen operatörüne etki ettirilerek, J_1, ikinci Hamilton operatörü ve ona denk Hamiltoniyen yoğunluğu elde edilmiştir. İntegre edilebilirlik koşulu ve katsayılar için bağ koşulu kullanılarak yedi parametreli ikili-Hamiltoniyen sistemler ailesi elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İntegre edilebilirlik, Lax çifti, yenileme operatörü, ikili-Hamiltoniyen yapı, Dirac bağ koşulu.

ABSTRACT

Bi-Hamilton Structure of Evolutionary Hirota Type (2+1)-Dimensional Equations

Damla KOCAMAN

Physics Department

MSc Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Devrim YAZICI

In this thesis, we study bi-Hamilton structures of evolutionary Hirota type equations given in (2+1)-dimensions. The Langrange function for these type equations is constructed by using Helmholtz conditions and Homotopy formula. We show that Euler-Langrange equations of this Langrange function have a sypmlectic Monge-Ampere form. Then, we obtain recursion relations for symmetries and Lax pairs for the Langrange equations. Here we start with converting the symmetry condition in a skew-factorized form and, immediately, obtain Lax pair and relation for symmetries from the symmetry conditions of these forms. In order to construct first Hamiltonian structure, we convert Langrange equation in two component form and after that, we apply Dirac's theory of constraints to obtain first Hamiltonian operator, J_0. Corresponding Hamiltonian function, H_0, is obtained by applying Legendre transformation to degenerate Langrange function. Thus, we construct first Hamiltonian structure for two-component evolutionary Hirota type equation. Recursion operator in 2×2 matris form is derived by using recursion relations for symmetries in order to obtain the second Hamiltonian structure. Finally, composing the recursion operator with the first Hamiltonian operator, J_0, we obtain the second

Hamiltonian operator, J_1, and also corresponding Hamiltonian density. Using integrability condition and constraints for the coefficients, we obtain a seven-parameter family of bi-Hamiltonian systems.

Keywords: Integrability, Lax pair, recursion operator, bi-Hamiltonian system, Dirac constraint theory.

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

İntegre edilebilen sistemler, klasik integre edilebilen ve kuantum edilebilen sistemler olmak üzere ikiye ayrılır. Bu tez klasik integre edilebilen sistemler üzerine yapılmış çalışmaları içerir.

Bir sistemin integre edilebilir (tamamen çözülebilir) olması durumu fizikte birçok alanda kullanılır. Basitçe, dinamik bir sistem çok sayıda korunan nicelik taşıyorsa, bu durum sistemin integre edilebilir olduğunu gösterir

Klasik integre edilebilen sistemlere örnek Hamiltoniyen denklemleri üzerinden verilebilir. Dinamik bir sistemi, iki boyutlu faz uzayı üzerinde bir Hamiltoniyen, $\boldsymbol{H}$ verilmiş olsun. Bu sistemin tamamıyla integre edilebilir olması ancak faz uzayı üzerinde ek Hamiltoniyen fonksiyonellerinin de var olması ile olur [1]. Buradan hareketle, bu tezin içeriğini oluşturan ikili-Hamiltoniyen yapı, ek bir Hamiltoniyen fonksiyoneli de içerdiğinden, "ikili-Hamiltoniyen yapılar tamamen integre edilebilir" sonucuna varılır. Bir sistemin ikili-Hamiltoniyen olabilmesi içinse iki Hamiltoniyen operatörünün teker teker ve toplamda ancak ve ancak ters simetrik (skew adjoint) ve Jacobi özdeşliğini sağlıyorlarsa Magri teoremine göre ikili-Hamiltoniyen olabilirler yani bir Hamiltoniyen çifti oluşturabilirler [2].

İntegre edilebilir denklemlerin tarihi 19'ncu yüzyıla kadar dayanır; bu yüzyılda birçok integre edilebilen denklem keşfedilmiş olmasına rağmen 20'nci yüzyılın neredeyse ilk 70 yılında yeterince bir çalışma olmamıştır. Ancak bu durum 1965 yılına gelindiğinde, Zabusky ve Kruskal tarafından solitonların bulunmasıyla sona ermiştir [1]. Bununla beraber sadece birkaç yıl sonra, 1968'de Peter Lax tarafından Lax çifti bulunmuştur. Lax çifti zamana bağlı diferansiyel denklem içerir ve bir operatör veya bir matristen oluşabilir [3]. Bu denklem sayesinde integre edilebilen bir denklem olan Korteveg-de Vries denkleminin neden sonsuz sayıda korunumlu nicelik içerdiğinin anlaşılması sağlamıştır [4].

Hemen ardından, 1971 yılında, Zakharov ve Faddeev tarafından [1] “tamamen integre edilebilen sistemler” konsepti ilk kez ortaya atılmıştır. Aynı yıl, Zakharov ve Shabat’ın doğrusal olmayan Shrödinger denkleminin tamamen çözülebilir olduğunu ters saçılma teorisini kullanarak ispatlamalarından kısa bir süre sonra Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur (AKNS grubu) aynı metodu sine-Gordon denklemiyle beraber farklı denklemlere uygulamıştır [5].

1991’de ise R. Beals ve D. H. Sattinger ters saçılım metodunu kullanarak evrim denklemlerinin tamamen integre edilebilirliği problemi üzerine çalışmışlardır [6]. A. N. Leznov ve A. V. Razumov integre edilebilen sistemlerin simetrileri konusunu çalıştıkları makaleyi 1993 yılında yayınlamışlardır [7].

2000’li yıllarda integre edilebilen sistemlerle ilgili yapılan çalışmaların bazıları şunlardır; 2002 yılında G. Sardanashvily, G. Giachetta ve L. Mangiarotti tarafından yayınlanan makalede kısmen integre edilebilen Hamiltoniyen sistem, tamamen integre edilebilen Hamiltoniyen sisteme indirgenmiştir [8]. 2004 yılında (1+1)-boyutlu integre edilebilen Hamiltoniyen sistemlerin skaler ve vektör potansiyelleri ile ilgili bir çalışma yayınlamıştır [9]. Aynı yıl V. K. Chandrasekar, M. Senthilvelan ve M. Lakshmanan doğrusal olmayan sistemlerin belli parametrelerde tamamen integre edilebilir olduğunu ispatlamışlardır [10]. 2006’da M.V. Pavlov yeni bir Hamiltoniyen formalizmi geliştirdiği makalesini yayınlamıştır [11]. 2007’de ise A. Sergeyev (1+1)-boyutlu koşula bağlı integre edilebilen sistemlerin sınıflandırılması ile alakalı bir çalışma yapmıştır [12]. Bu yıl içerisinde yapılan bir diğer çalışma ise (2+1)-boyutlu klasik tamamen integre edilebilen sistemlerin özel bir sınıfı M. Gadella, J. Negro ve G. P. Pronko ve M. Santander [13] tarafından tartışılırken bir diğer yandan V. S. Novikov, A. V. Mikhailov ve J. P. Wang [14] integre edilebilir sistemlerin sınıflandırılması üzerine çalışmış ve yeni olduğunu iddia ettikleri iki yeni integre edilebilen sistem geliştirmişlerdir. 2010 yılında E. V. Ferapantov, A. V. Odesskii ve N. M. Stoilov (2+1)-boyutlu integre edilebilen iki bileşenli Hamiltoniyen sistemlerin sınıflandırılması üzerine çalışma yayınlamışlardır [15]. 2011’de M. Marvan ve A. Sergyeyev çok boyutlu integre edilebilen dispersiyonsuz sistemlerin yenileme operatörlerinin oluşturulmasına yeni bir yaklaşım geliştirmişlerdir [16].

Son yıllarda integre edilebilen sistemlerle alakalı yapılan çalışmalardan birkaç örnek vermek gerekirse; 2016 yılında yayınlanan bir çalışmada yüksek mertebeli integre edilebilen doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması yapılmıştır [17]. Sergei Sakovich üç boyutlu ikinci dereceden doğrusal olmayan yeni bir dalga denklemini ortaya attığı çalışmasını 2019 yılında yayınlamıştır [18]. Aynı yıl yapılmış bir başka çalışma ise Linyu Pang' ın doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin simetri analizi üzerine yayınladığı makaledir [19]. 2020 yılına bakıldığında, E. V. Ferapontov, M. V. Pavlov, Lingling Xue, ikinci dereceden iki boyutlu Langrange fonksiyonuna sahip Euler-Langrange denklemlerinin integre edilebilirliğini incelemişlerdir [20]. Yine 2020'de, T. Kappeler ve P. Topalov' un yayınladıkları makalede, Arnold-Liouville teoreminin, integre edilebilir doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemi için sonsuz boyutlu versiyonunun olduğunu ispatlamışlardır [21].

İntegre edilebilen denklemler ile ilgili yapılmış en yeni çalışma olarak ise B. Gormley, E. V. Ferapontov, V. S. Novikov' un 2021 yılında (2+1)-boyutlu Hamiltoniyen denklemlerinin integre edilebilirliğinin sınıflandırılması üzerine yayınladıkları makale örnek verilebilir [22].

İntegre edilebilen sistemler ile ilgili literatürde sayısız makale üretilmiştir ve üretilmeye devam edilmektedir. Ancak Hirota tipi denklemler için aynı durum geçerli değildir, bu alanda yapılan çalışmalar oldukça sınırlıdır.

Hirota tipi integre edilebilen sistemler alanında yapılan çalışmalar çoğunlukla kısmi diferansiyel denklemlerin dağılımsız sınırları ile alakalı olmuştur. Bu dağılımsız (dispersiyonsuz) sınırlar, Korteweg-de Vries, Novikov – Veselov, Kadomtsev – Petviashvili (KP) ve Benny Moment denklemleri gibi çok boyutlu integre edilebilen sistemlerde ortaya çıkar. Ryoga Hirota, Hirota tipi denklemlerle alakalı ilk makalesini 1971 yılında yazmıştır. Makale, farklı genliğe sahip $\boldsymbol{N}$ (rastgele sonlu tamsayı) tane solitonun çoklu çarpışma yaptıkları durum için KdV denkleminin kesin çözümünü elde etmiştir [23]. Hirota tipi denklem demek aslında bir çözüm metodunu ifade eder. 2007 yılında ise E. V. Ferapontov, L. Hadjikos ve K. R. Khusnutdinova tarafından yapılan çalışmada,

integre edilebilen, dispersiyonsuz Hirota tipi denklemlerin faz uzayının farklı boyutları olduğunu ispatlamışlardır [24].

2013 yılına gelindiğinde; E. V. Ferapontov, V. S. Novikov ve I. Roustemoglou' nun beraber yaptıkları çalışmada kesintili, (2+1)-boyutlu, integre edilebilen Hirota tipi denklemler için, farklı bir yaklaşım geliştirerek, bu tür denklemler sınıflandırılmıştır [25].

E. V. Ferapontov, B. Kruglikov ve V. Novikov' un 2018 yılında kaleme aldıkları makalede, en az (3+1)-boyutlu dispersiyonsuz Hirota tipi denkleminin integre edilebilirliğinin, simplektik Monge-Ampere özelliğini gösterdiğini ortaya koymuşlardır. Bu çalışmada ayrıca dördüncü boyutta dejenere olmayan integre edilebilen Hirota tipi denklem için elde ettikleri tüm sonuçları sınıflandırmışlardır [26].

Son olarak yine 2018 yılında, D. Yazıcı ve M. B. Sheftel tarafından yapılmış bir diğer çalışmada ise (3+1)-boyutlu Hirota tipi integre edilebilen denklemlerle ilgili olmuştur. Bu çalışmada, (3+1)-boyuttaki, bir Langranjiyeni olan tüm evrimsel Hirota tipi denklemlerin, simplektik Monge-Ampere yapısında olduğunu göstermişlerdir [27]. Bu çalışmanın yanı sıra aynı yıl, (2+1)-boyutta evrimsel Hirota tipi denklemlerin yedi parametreli integre edilebilen aileleri için yenileme operatörlerini, Lax çiftlerini ve ikili-Hamiltoniyen yapılarını inceledikleri çalışmalarını da yayınlamışlardır. Buna ek olarak, altı parametreli üçlü Hamiltoniyen sistemleri ailesi de bulunmuştur [28].

1.2 Tez Çalışmasının Amacı

Bu tez çalışmasının amacı $u_{tt} = f(u_{1t}, u_{2t}, u_{11}, u_{12}, u_{22})$ formunda verilen (2+1)-boyutlu Hirota tipi denklemlerin yenileme operatörlerini, Lax çiftini ve ikili-Hamiltoniyen yapısını inceleyerek integre edilebilir bir sistem olduğunu göstermektir. Bu tür evrimsel Hirota tipi (2+1)-boyutlu Euler-Langrange denklemlerinin, simplektik Monge-Ampere formunda olduğu gösterilecektir [2]. Elde edilen dejenere Langrange fonksiyonunun denklemleri için simetri koşulu incelendikten sonra asimetrik-çarpanlar (skew-factorize) formunda yazılarak, buradan Lax çifti ve yenileme operatörü (recursion) elde edilecektir. Dirac'ın bağ denklemi teorisini uygulayarak, iki bileşenli denklem sisteminin dejenere

Lagrange fonksiyonu oluşturulacaktır. Dejenere Lagrange fonksiyonu hızın karesine bağlı olmayan sadece hızın birinci mertebe terimlerini içerir. Lagrange fonksiyonundan elde edilen bağ denklemlerinden simplektik yapı elde edilerek birinci Hamiltoniyen yapıya oluşturulacaktır. Simetri koşulundan bulunan yenileme operatörü birinci Hamiltoniyen operatörüne etki ettirilerek ikinci Hamiltoniyen yapı elde edilir. Sonuç olarak yedi farklı parametre için ikili-Hamiltoniyen yapı bulunarak (2+1)-boyutlu evrimsel Hirota tipi denklemin Magri teoremine göre integre edilebilir bir sistem olduğu gösterilecektir.

1.3 Hipotez

Evrimsel (2+1)-boyutlu Hirota tipi Euler-Langrange denklemlerinin Monge-Ampere yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Bu tür denklemlerin sonsuz sayıda hidrodinamik indirgemelere ve Lax çiftine sahip olası sebebiyle integre edilebilir bir sistem olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada farklı bir bakış açısı ile sistemin farklı parametreler için ikili-Hamiltoniyen sistem olduğu kanıtlamaktır.

2
GENEL BİLGİLER

2.1 Çözülebilirlik

İntegre edilebilen sistemler ya da çözülebilen sistemler doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin konusudur. Bu denklemlerin çözülebilir olması, o denklemlerden analitik sonuçlara ulaşılabilmesi anlamına gelmekle beraber sonsuz sayıda korunumlu niceliğe sahip olduğu bilgisini de verir. Böyle bir genel kabulün yanı sıra dinamik bir denklemin yüksek mertebeli simetriye sahip olması bir başka tanımlama olabilir. İntegre edilebilen sistemler fizikte matematikte çok sayıda alanda karşımıza çıkar. Örnek olarak, akışkanlar dinamiği, kuantum alan teorisi, karmaşık analiz, diferansiyel geometri vs. verilebilir [29]. Tamamen çözülebilirlik kriterleri şu şekilde sınıflandırılabilir: Lax çifti, hidrodinamik indirgeme, AKNS metodu, Painleve testi, ters saçılma teorisi, düz uzay şartı ve ikili-Hamiltoniyen yapıdır. Bu çalışmada sadece bir kısmı ele alınacaktır. Literatürde klasik integre edilebilen sistemler ve kuantum integre edilebilen sistemler olmak üzere iki temel alan vardır ancak bu tez çalışması klasik integre edilebilen sistemler alanını kapsamaktadır. (1+1)-boyutlu Korteweg de-Vries (KdV) denklemi integre edilebilir sistemlerin temel denklemi kabul edilir ve yukarıda tanımlanan bütün yöntemler ile tamamen çözülebilen bir denklem olduğu gösterilmiştir. Ters saçılma yöntemi ile analitik çözümü yapılarak soliton çözümleri elde edilmiştir.

2.2 Solitonlar

Solitonlar, 1834 yılında J. Scott Russell tarafından bir su kanalında gözlenen tekli dalgalardır (Şekil 2.1 (c)). Bu dalgalar doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (dalga denklemi) özel bir çözümüdür. Solitonların hareketi bir boyutludur; aldıkları yol boyunca kendi şekilleri ve hızları değişmez, yereldir. Bir başka soliton ile çarpışma yaşadıklarında korunurlar yani iki solitonun birbirine çarpması sonrasında, tekrar kendi hızlarına ve şekillerine bürünebilirler ancak çok küçük bir faz kayması meydana gelebilir. Bu özelliği genellikle parçacıklarda (hadron, baryon, proton, elektron gibi “on” eki ile biten tüm parçacıklar)

gözlemlendiği için Zabruski ve Kruskal tarafından 1965 yılında, soliton adı verilmiştir. 1895 yılında Korteveg de Vries, Russell'ın bu gözlemini çözmek için 'seyahat eden dalga teklisini' ifade eden dispersiyonsuz (dağılımsız) KdV denklemini geliştirmiştir. KdV denklemi, konumu ve zamanı içeren iki boyutlu integre edilebilen bir denklemdir ve

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

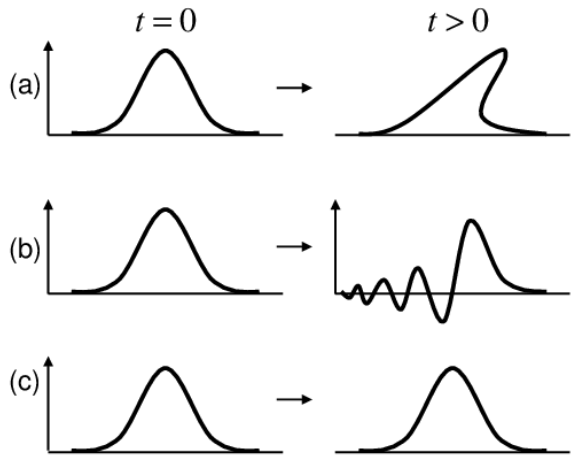
denklemi ile verilir. Burada t zamana göre kısmi türevi ve x dalganın kanal boyunca bulunduğu pozisyonun kısmi türevidir. Kanalın genişliği ise önemsizdir. Burada u_t, u_x ve u_{xxx} terimleri ise,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \; u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ve } u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tag{2.2}$$

şeklinde kısmi türevlerine karşılık gelirler.

KdV denklemi içerdiği ikinci teriminden dolayı doğrusal olmama özelliği gösterir. Bu yüzden superpozisyon prensibi bu dalga denkleminde geçerli değildir.

Aşağıda solitonların hareketini gösteren şekiller verilmiştir.

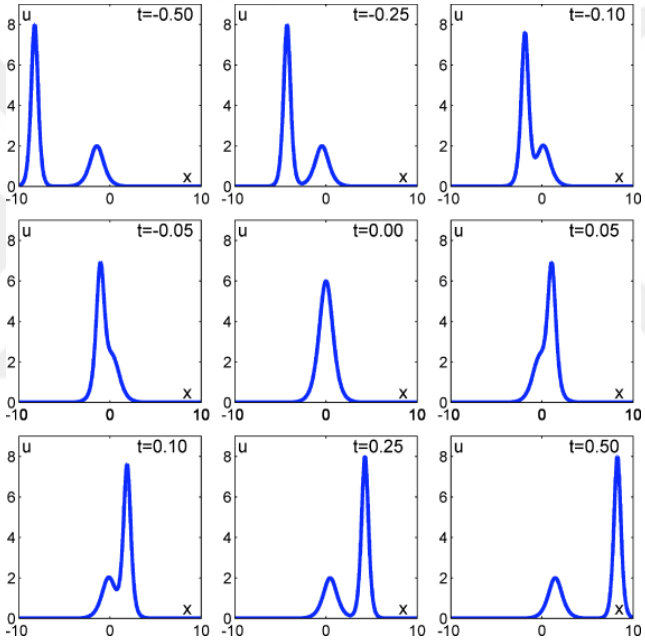


Şekil 2.1 (a) Soliton bükülme yapıyor (b) Soliton dağılma (dispersiyon) yapıyor (c) Soliton dağılma ve bükülme yapmıyor

KdV denklemini x'in bir fonksiyonu olarak u'nun bulunması için integrali alındığında, t zamanı kadar sonra (çok küçük dt kadar sonra) denklemin ikinci terimi giderse (KdV denklemi doğrusallaşırsa) dalganın grafiğinde dispersiyon

(dağılım) meydana gelir (Şekil 2.1 (b)). Dolayısıyla, dalga özelliklerini koruyamaz, dalganın yönü sola doğru kayar. Üçüncü terimi silindiği zaman ise dalga yerel kalır ancak şekli bozulur, yığılma (bükülme) yapar (Şekil 2.1 (a)) [30].

Bunların dışında solitonların bir başka özelliği, farklı dalga uzunluklarına sahip art arda seyahat eden iki soliton anlık olarak birleştikleri zaman dalga uzunluğu bakımından daha büyük olan soliton birleşme esnası boyunca boyu kısalması daha sonra tekrar kendi şekline geri dönebilmesidir (Şekil 2.2) [31]. Solitonlarda dalganın yayılma hızı, dalganın genliği ile doğru orantılı olduğu için daha büyük dalgalar görece küçük olanlara kıyasla daha hızlıdır.



Şekil 2.2 Farklı dalga uzunluğuna sahip solitonların birleşmesi ve ayrılması

Solitonlar, doğada su kanalı gibi sığ sularda görülmesinin yanı sıra optik, akışkan mekaniği, atom fiziği ve biyofizik gibi alanlarda görülebilir [32].

2.3 Ters Saçılım Metodu

Solitonlar için analitik çözüm ilk defa ters saçılım dönüşümü metoduyla elde edilmiştir. Bu metot Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından KdV denkleminin çözümü olarak geliştirilmiştir (1967). Ancak bu yöntemi alt yapısı 1950'li yıllarda Gelfand, Levitan ve Marchenko'nun u potansiyelini bulmak için enerji seviyesi, E, yansıma olasılığı, R ve aktarma olasılığı, T parametrelerini

kullanmalarına dayanır. Çünkü saçılma teorisine göre $+\infty$'dan gelen bir ışının serbest parçacıklarının bir kısmı potansiyeline göre yansıyacak ve bir kısmı da iletilecektir. Bu olayın sonucunda çok sayıda ayrık enerji seviyelerinde bağlı durumlar meydana gelebilir. Ters saçılım metoduna göre, KdV denkleminin başlangıç değeri $u(x,0)$, Schrödinger denkleminin $u_0(x)$ potansiyeline eşit olduğu varsayıldığından, çözümü de $u(x,t)$, bir boyutlu Schrödinger denkleminin potansiyeline denktir. Dolayısıyla bu metot saçılım yapmış parçacığın potansiyeline karar verir. Bir başka elde edilebilecek sonuç ise saçılan parçacığın zaman evrimini basit doğrusal adi diferansiyel denklem olarak vermesidir [29].

2.4 Lax Çifti

Peter Lax tarafından 1968 yılında doğrusal olmayan $(1+1)$-boyutlu bir denklem olan KdV denkleminin integre edilebilir olup olmadığına karar vermek amacıyla kullanılmak üzere formalize edilmiştir ancak her sistemde kullanışlı değildir. KdV denkleminin Lax çifti olarak gösterimi

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t) \quad \text{ve} \quad A = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right) \tag{2.2}$$

şeklinde verilen ikinci ve üçüncü dereceden diferansiyel operatörlerden oluşur [5]. Böylece KdV denklemini veren Lax denklemi

$$\frac{d}{dt}L = [L, A] \tag{2.3}$$

olur ve L ile A operatörleri Lax çifti olarak tanımlanır. (2.3) denkleminin sağ tarafındaki komütatör $[L,A] = LA - AL$ şeklindedir. Genel anlamda A doğrusal evrim denklemidir. L, Lax operatörü de Schrödinger operatörüne karşılık gelmektedir ve özdeğer problemi $L\psi = \lambda\psi$, u potansiyeline ve λ zamandan bağımsız enerji özdeğerine sahip hareket halindeki bir parçacığın zamandan bağımsız Schrödinger denklemidir [4]. İkisinin komütasyonu sonucunda Lax denklemi, KdV denklemini sağlar. Bu yöntem, KdV denkleminin neden sonsuz sayıda korunan büyüklük içerebildiğinin anlaşılmasını sağlamıştır.

2.5 Düz Uzay Şartı (Zero Curvature)

Doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin ters saçılım metodu ile 1971'de Zabursky ve Kruskal tarafından çözümü, KdV denkleminin integre edilebilirliği test edilirken kullanılan Lax yönteminden gelen Lax denkleminin, düz uzay şartı metoduyla doğrusal kısmi diferansiyel denklemler için uyumluluk şartı olarak da kullanılmasını sağlamıştır. Düz uzay şartı metodu Lax yönteminin daha genel halidir. Doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin özdeğer probleminin zamana bağlı türevi ve (2.2)'deki üçüncü dereceden denklem, Lax denklemini sağlamalıdır [4]. Birinci dereceden türev içeren doğrusal denklem cinsinden yazılarak

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U(x,t,\lambda)F$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V(x,t,\lambda)F \tag{2.4}$$

şeklinde elde edilir. Burada U ve V kare matristir ve Lax çifti gibi davranır. F ise sütun vektördür. Matris elemanları ise dinamik değişkenlere bağlıdır. Lax çifti kısmında "özdeğer" olarak verilen λ ise burada spectral parametre adını alır. Düz uzay şartı (2.4)'teki denklemlerin düz uzay şartını yerine getirmeleri tutarlılık koşulunu sağlamalarına bağlıdır. Tutarlılık koşulu

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U,V] = 0 \tag{2.5}$$

şekilde tanımlanır. Burada

$$U = U_0 + \lambda U_1 \quad \text{ve} \quad V = V_0 + \lambda^1 V_1 + \lambda^2 V_2 \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır ve içerdikleri spektral parametreler gider ve giden terimlerden kalanlar da doğrusal olmayan Schrödinger denklemini verir [33]. Tutarlılık koşulu doğrusal olmayan evrim denklemleri tarafından sağlanırsa düz uzay şartı geçerlidir. Düz uzay şartının sağlanması sistemin tamamen çözülebilir olduğunu gösterir.

2.6 AKNS

Zakharov ve Shabat doğrusal olmayan Schrödinger denklemi üzerinde çalışırken geliştirdiği metot daha sonra 1974 yılında Mark J.Ablowitz, David J. Kaup, Alan

C. Newell ve Harvey Segur tarafından genelleştirilerek çeşitli integre edilebilen denklemler için kullanılmıştır [34]. Bu denklemler;

KdV,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.7}$$

mKdV,

$$v_t = v_{xxx} + v^2 v_x \tag{2.8}$$

NSE,

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\kappa|\psi|^2\psi \tag{2.9}$$

Sine –Gordon

$$u_{xt} = \sin u \tag{2.10}$$

Sinh-Gordon

$$\omega_{xt} = \sinh\omega \tag{2.11}$$

ile verilir. Yukarıdaki denklemlerin integre edilebilirliğini test eden farklı yollar vardır ancak burada önemli olan şey Sine-Gordon denkleminin AKNS metodunda, ters saçılım dönüşümü yoluyla çözülmüş olmasıdır. AKNS metodu birinci dereceden bir Lax operatörü, $\frac{\partial}{\partial x}$ kısmi türevi ile kullanılarak doğrusal olmayan evrim denklemi uyumluluk şartı olarak elde edebilmiştir. Burada Lax operatörü spectral parametrenin fonksiyonudur ve tutarlılık koşulu ya da doğrusal olmayan evrim denklemi buna bağlı değildir [34]. Bu formülasyon sayesinde çeşitli integre edilebilir modeller için ortak bir çözüm yolu sunar.

2.7 Lagrange Formülasyonu

1788'de, matematikçi Joseph Louis Langrange tarafından ortaya atılan Langrange mekaniği, klasik mekanikte önemli bir yere sahiptir. Newton Mekaniğine göre, örneğin, düz yolda ilerleyen bir cismin hareketinin "durumunu" tanımlamak için yalnızca kartezyen koordinat sistemi kullanılabilir ancak aynı cismin hareketi daha "karmaşık" hale geldikçe sistemin hareketini tanımlamak için kartezyen koordinatları kullanmak hareket denklemlerinin

yazımını zorlaştırabilir. Bu sebeple Langrange, yeni bir yasa değil ancak yeni bir çözüm yöntemi olan Langrange yöntemini, Newton Mekaniğini yeniden formüle ederek ortaya atmıştır. Herhangi bir cismin hareketi ile ilgili problemlerin çözümünde ister Newton Kanunları uygulansın ister Langrange yöntemi, çıkacak olan sonuçlar birbirine denk olmalıdır. Langrange mekaniğinde bir hareketin eylemini tanımlamak için tek bir denklem yeterlidir; Newton Mekaniği'nde böyle bir durum yoktur. Bununla birlikte Langrange mekaniğinde istenilen koordinat sistemi (silindirik, küresel, polar, vs.) 'genelleştirilmiş koordinatlar' kavramı sayesinde seçilebilir ancak Newton mekaniğinde sadece kartezyen koordinat sistemi kullanılabilir. Genelleştirilmiş koordinatlar, bir sistemin durumunu tamamen belirleyen herhangi bir nicelikler kümesine denir, q_i şeklinde gösterilebilir [35]. Langrange mekaniğine göre herhangi bir fiziksel sistemi incelerken bağ koşulları kavramından da bahsetmek gerekir. Mekanik bir sistemin hareketi esnasında, sistemin istediği yönde ilerlemesini sınırlayan şeye bağ koşulu denir ve sistemin serbestlik derecesini (bağımsız koordinatlarını) sınırlandırır; farklı türleri vardır. Bir sistemdeki parçacıkların, koordinatları arasındaki ilişkiyi bulabilmek için denklemlerin (koordinatların arasındaki ilişki) integralinin alınabilmesi holonom bağ koşuludur [35]. f rastgele bir fonksiyonu ve r koordinat ise holonom bağ koşulu bir parçacığın koordinatına bağlı denklem olarak ifade edilebilir ve

$$f(r_1, r_2, r_3, \cdots, t) = 0 \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır [36]. Bu durumun tam tersi durum söz konusu ise sistemin bağ koşulu holonom olmayan bağ koşuludur, koordinatlar arasındaki bağıntıyı ifade eden denklemin integrali alınamaz ve eşitsizlikler meydana gelir. Bunların yanı sıra eğer bu bağ koşulları zamana açıkça bağlı değilse sklerenom, eğer bağlı ise reonomdur.

Langrange denklemi için kabaca, mekanik bir sistemin hareketini anlamak için T toplam hareket enerjisinden, V potansiyel enerjinin çıkarılmasıdır denilebilir. Genel Langrange formülü sistemin enerjisi hakkında bilgi verir ve

$$L = T - V \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada T kinetik enerji ve V potansiyel enerjidir, denklemin birimi de enerjidir dolayısıyla Langrange fonksiyonu skaler bir niceliktir.

Mekanik bir sistemin Langrange fonksiyonu,

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır. Burada q_i, sistemin genelleştirilmiş koordinatlarıdır ve t zaman değişkenine sahip olduğu için bu sistemin hareketi açıkça zamana bağlıdır. Ayrıca $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ sistemin genelleştirilmiş hızını temsil eder. Yerel koordinat q_i ise sistemin konum veya açı değişkeni olmakla beraber i indeksi, $i = 1,2,3, \dots, n$ kadardır ve buradaki n ise bir dinamik sistemin serbestlik derecesini gösterir.

Açıkça t zamana bağlı olmayan yani enerjisi zamana bağlı olarak değişmeyen fiziksel bir sistemin Langrange fonksiyonu

$$L(q_i, \dot{q}_i) \tag{2.15}$$

ile gösterilir.

Belirli bir zaman aralığındaki bir sistemin hareketini eylem integrali (çizgi integrali) tanımlar. Hareketin ilerlediği gerçek yol için, $L = T - V$ durağan (minimum) değere sahiptir. Bu hareketi tanımlayan eylem integrali

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{2.16}$$

ile verilir. Eylem integralinin varyasyonu alındığında Hamilton prensibine ulaşılır ve şu şekilde tanımlanabilir: t_1 ve t_2 zaman aralığında, dinamik bir sistemin, bir noktadan diğerine giderken konfigürasyon uzayında alabileceği olası tüm yollar arasında gerçekte, integral değerinin minimum olduğu yol boyunca ilerler [35]. Burada, eylem integralinin varyasyonu

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \tag{2.17}$$

şeklinde minimum olmalıdır. Varyasyonel türev, burada integralin ekstremumunu ifade eder ve mekanikte genellikle minumum olur. (2.17) denklemi daha açık olarak

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt=0 \tag{2.18}$$

elde edilir. Parantezin içindeki ikinci terim şu şekilde de

$$\delta \dot{q}_i=\delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\delta q_i \tag{2.19}$$

yazılabilir. Daha sonrasında kısmi integrali alınır ve δq_i'li ifadeler integralin uç noktalarında sıfır olur ve

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt=0 \tag{2.20}$$

sonucuna ulaşılır. İntegral, parantezin içinde sıfır olmalıdır çünkü δq_i'li ifadeler bağımsız ve keyfidir. Dolayısıyla,

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=0 \tag{2.21}$$

Euler-Langrange denklemi elde edilmiş olur ve sistemin hareket denklemine ulaşılır. Parantez içindeki Langrange fonksiyonunun hıza göre kısmi türevi, p_i eşlenik (konjüge) momentumu,

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.22}$$

ile verilir ve (2.21) Euler-Lagrange denklemi

$$\dot{p}=\frac{\partial L}{\partial q} \tag{2.23}$$

şeklinde faklı bir yazılım şekli elde edilir.

Hamiltoniyen yapıdaki genelleştirilmiş koordinatlar (q,p)'yi Langrange mekaniğindeki genelleştirilmiş koordinatlar $(q,\dot{q})$ yerine kullanılabilir yani değişkenler birbiri cinsinden yazılabilir [29]. Bu değişkenlerin değiştirilmesi durumuna fizikte Legendre dönüşümü adı verilir. Herhangi bir fonksiyonun değişkenleri için de gerçekleştirilebilir. Legendre dönüşümü sayesinde Hamiltoniyen fonksiyonu elde edilebilir.

2.8 Hamilton Yapı

Hamilton yapı, klasik integre edilebilen sistemler konusunun temelini oluşturur. İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton'un, Newton denklemlerini

yeniden formüle ederek Hamilton hareket denklemlerini oluşturmuştur. Hamilton hareket denklemleri, Hamilton sistemi adı da verilen Hamilton formülasyonunu yönetir. Bu yeni formülasyon mekanik bir sistemin belli bir zaman aralığındaki durumunun değişimini anlatan evrimsel denklemlerini verir. Hamilton, genelleştirilmiş konum $q_1, q_2, \dots, q_n$ ve genelleştirilmiş momentum $p_1, p_2, \dots, p_n$ kanonik koordinatlarını ortaya koymuştur. Bu koordinatlar sayesinde n serbestlik derecesine sahip fiziksel bir sistemin $2n$ boyutlu M faz uzayındaki hareketini tanımlamıştır. q_i ve p_i ifadelerinden meydana gelen ve dolayısıyla tüm parçacıkların hem konumları hem de momentumlarının gösterilebildiği $2n$ boyutlu uzaya Hamilton faz uzayı ya da faz uzayı denir. Hamilton denklemleri çevrimsel koordinatları da içerir. Çevrimsel koordinatlar T ve V ifadelerinde açıkça görünmez, bu durumda H için çevrimsel koordinat olan şey L için de geçerli olur [29].

Dinamik değişkenlere sahip bir $H = H(p, q, t)$ Hamilton olsun. Burada Hamilton zamana bağlıdır ve t zaman, p, q ise yerel koordinatlardır, $r(p, q)$, sistemin yörüngesini verir. Hamilton H, birçok dinamik sistemin kinetik enerjisinin T ve potansiyel enerjisinin, V, toplamını verir ve en genel haliyle aşağıdaki gibi formüle

$$H = T + V \tag{2.24}$$

edilmiştir. Ancak her zaman doğru değildir. Hamilton fonksiyonunu elde edebilmek için ise

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \tag{2.25}$$

ile verilen Lejendre dönüşümü kullanılır. Bu denklemin hem sağından hem solundan tam diferansiyeli alınıp (2.22) ve (2.23) denklemleri kullanılarak Hamilton kanonik denklemleri

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{ve} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.26}$$

şeklinde elde edilir.

Zamandan bağımsız Hamilton ise $H = H(p, q)$ ile gösterilir ve $H = E$ olur. Toplam enerji E, sistemin Hamiltonuna eşittir yani sistemin hareketi boyunca Hamilton H, korunan bir niceliktir.

Bu duruma eylem sabiti ya da ilk integral denir ve

$$H(p(t), q(t), t) = sabit. \tag{2.27}$$

şeklinde gösterilir. Burada $p(t)$ ve $q(t)$ (2.26)'daki hareket denklemlerinden elde edilen sonuçlardır.

Hamilton bir sistemin değişkenleri Poisson parantezinin özelliklerini göstermelidir. Poisson parantezi, türevlenebilen, yerel olarak doğrusala yakın uzayda Poisson yapısını oluşturan parantezlerdir. Poisson parantezi adını Fransız matematikçi Simone Denis Poisson'dan almıştır; bir diğer adı da Lie parantezidir. Genel durumda verilmiş bir Hamilton $H = H(p, q, t)$ ve herhangi bir

$f = f(p, q, t)$ fonksiyonu ile Poisson parantezi:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \tag{2.28}$$

şeklindedir ve f eğer açıkça zamana bağlı değilse,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{2.29}$$

olur ve denklem

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} = 0 \tag{2.30}$$

şeklini alır.

$f(p, q)$ ve $g(p, q)$ iki ayrı fonksiyon olsun. Bu fonksiyonların poisson parantezi,

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır:

i)Doğrusallık:

$$\{af_i + bg_i, cf_j + dg_i\} = ac\{f_i, f_j\} + ad\{f_i, g_j\} + bc\{g_j, f_i\} + bd\{g_i, g_j\} \tag{2.32a}$$

ii)Ters-simetri:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{2.32b}$$

iii)Leibniz kuralı:

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\} \tag{2.32c}$$

iv)Jacobi özdeşliği:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \tag{2.32d}$$

Hamilton yapı, geometrik açıdan incelendiği zaman bir ilk integralin zamana açıkça bağlı olmaması durumu M faz uzayında bir yüzeyi tanımlar; iki adet yüzey olması durumunda ise iki adet bağımsız ilk integrali tanımlar ve bu integraller eş boyutta bir yüzeyde kesişirler [29]. Genel olarak yörünge $2n - l$ boyutlu bir yüzeyde uzanır ve burada l bağımsız ilk integral sayısını verir, $l = 2n - 1$ ise yüzeyin bir eğri olduğunu gösterir [29].

2.8.1 Simplektik Yapı

Klasik mekanikte bir cismin bir boyuttaki hareketi Poisson yapılarının özel bir durumu olan simplektik yapı ile incelenir [29]. Böyle bir objenin iki boyutlu Öklid düzlemindeki kanonik simplektik yapısının genel formu yine yerel koordinatları (p, q) momentum ve konum vektörleri olmak üzere şu şekildedir:

$$\omega = dp \wedge dq \tag{2.33}$$

ω, iki boyutlu simplektik manifold, (M, ω), üzerinde bulunur. M, düz manifoldu analitiktir ve simplektik manifold için çift boyutluluk yani $2n$ tane eleman içermesi zorunluluktur. Bu formun kanonik simplektik genel hali de,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{2.34}$$

şeklindedir.

n tane serbestlik derecesi olan $2n$ tane eleman içeren bir sistemin simplektik matris (sütun) notasyonunu ifade etmek için Hamilton kanonik denklemlerini

kullanılır. η simplektik sütun matrisi olmak üzere $\eta_i = q_i$ ile $\eta_{i+1} = p_i$ ve $i \leq n$ olmak üzere Hamilton kanonik denklemlerinin yeni hali ise şu şekilde

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{i+1} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.35}$$

ifade edilir. Kanonik denklemlerin genel anlamda simplektik formda ifade edilebilmesi için ise $2n \times 2n$ matrisine ihtiyacı vardır. Bu matris $n \times n$ sıfırlardan ve birim matristen oluşur, J ile gösterilir ve

$$J = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

şeklinde tanımlanır. $2n$ tane eleman içeren simplektik sütun matrisinin bir elemanının bulunması için Hamilton hareket denklemleri aşağıdaki şekilde,

$$\dot{\eta} = J\frac{\partial H}{\partial \eta} \tag{2.37}$$

yazılabilir. Ya da

$$\begin{pmatrix} \eta_i \\ \eta_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} \dot{\eta}_i \\ \dot{\eta}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix}$$

tanımları kullanılarak (2.37) denklemini daha açık olarak

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

şeklinde yazılır. Böylece (2.37) veya (2.38) denklemleri Hamilton kanonik denklemlerinin simplektik gösterimini oluşturur.

Simplektik iki form ω ters simetrik, dejenere olmayan ve çift doğrusal map özelliğine sahiptir. (2.33)'deki formun diferansiyelinin sıfır olması ise de $d\omega = 0$ kapalılık özelliğidir. Eğer ω kapalılık özelliğine sahipse ve dejenere ise simplektiktir denir. Ayrıca birinci Hamilton operatörünün Jacobi özdeşliğini sağladığını garantiler.

2.9 İkili-Hamiltoniyen Yapı

Fiziksel bir sistemde, evrimsel denklemler iki farklı Hamiltoniyen yapısına sahip olabilir; bu, şu anlama gelir bir Hamiltoniyen çifti oluşturabilirler. Bu denklemler J_0 ve J_1 Hamiltoniyen operatörlerine ve sırasıyla H_1 ve H_0 Hamiltoniyen fonksiyonellerine sahiptirler. $u_t = F(u, u_x, \dots)$, evrimsel denklemi için iki adet Poisson yapısı vardır. J_0 Hamiltoniyen operatörünün H_1 Hamiltoniyen fonksiyoneli ile birlikteliği Hamiltoniyen yapıyı oluşturur aynı şekilde J_1 Hamiltoniyen operatörü ve H_0 Hamiltoniyen fonksiyoneli ayrı bir Hamiltoniyen yapı oluşturur ve bu yapılar Hamiltoniyen çifti oluşturarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = J_0 \delta H_1 = J_1 \delta H_0 \tag{2.39}$$

şeklinde tanımlanır. Burada δ Euler türevi ve J_0 ve J_1 sırası ile birinci ve ikinci Hamiltoniyen operatörleridir. (2.39) denklem formunda yazılabilen bir evrimsel denklem sistemi Magri teoremine göre ikili-Hamiltoniyen yapıdır. Her integre edilebilen denklem sistemlerinde olduğu gibi bu Poisson parantezi de korunumlu nicelik içerir. Çift Hamiltoniyenli yapı sayesinde ilk integraller oluşturulabilir. Hamiltoniyen operatörü J'nin dejenere olmadığı durumda ikili-Hamiltoniyen bir sistem için R yenileme (recursion) operatörü kullanılarak, $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$ tane Hamiltoniyen fonksiyoneli üretilebilir. Yenileme operatörünün genel gösterimi

$$R = J_1 \cdot {J_0}^{-1} \tag{2.40}$$

şeklindedir. $q \times q$ matrisinin ters simetrik denilen özelliğe sahip olduğu durumda, türev operatörleri J_0 ve J_1'nin tüm doğrusal kombinasyonları a ve b'nin sabit olma koşulu ile $aJ_0 + bJ_1$ bir Hamiltoniyen operatörü ve Jacobi özdeşliği sağlanıyorsa o halde türev operatörleri J_0 ve J_1 bir Hamiltoniyen çifti oluşturabilir dolayısıyla böyle bir sistem (2.39) formunda yazılabilir [2].

Bir Hamiltoniyen çifti oluşturabilmiş denklem sisteminin yani ikili-Hamiltoniyen yapının, $R = J_1 \cdot {J_0}^{-1}$ operatörü, sistemin başlangıç denklemine uygulandığı zaman orijinal ikili-Hamiltoniyen sistemden sonsuz sayıda genelleştirilmiş simetrisi üretilebilir [2]. Bu genelleştirilmiş simetrinin formülasyonu

$$J_0 \delta H_n = R^n [J_0 \delta H_1] \qquad n = 1,2, \dots \tag{2.41}$$

ile verilir. H_n korunan fonksiyoneldir. Yenileme (recursion) operatörü etki ettirilmesi ile çoğaltılabilirler.

2.10 Dirac Parantezleri

Paul Dirac tarafından Poisson parantezlerinin genelleştirilmesi ile geliştirilmiştir. Klasik mekanikte, bir sistemin Langrangianın elde edilen denklem ile Hamiltoniyenden elde edilen denklemin aynı olmaması sebebi ile bağ koşullarının bulunduğu bu tarz sistemlerde ortaya çıkabilen tutarsızlıkların giderilmesini sağlar [37]. Langrange formalizminden Hamilton formalizmine geçişte Dirac'ın bağ koşulu analizine ihtiyaç duyulabilir. Bunun sebebi Langrange denkleminin dejenere olmasıdır. Dejenere Langrange fonksiyonu yalnızca birinci mertebeden hız içeren denklemdir. Bu durumda elde edilen Hamiltoniyenden türetilen hareket denklemleri Langrange fonksiyonundan türetilenler ile aynı olmaz. Yani elde edilen H doğru olmadığı gibi Poisson parantezleri de yetersiz kalmaktadır. Dirac bu çelişkiyi ortadan kaldırmak için Poisson parantezlerinin daha genel hali olan Dirac parantezlerini tanımlamıştır. Bunun için dejenere Langrange fonksiyonundan elde edilen momentumlar bağ denklemleri olarak yazılarak simplektik yapı elde edilir [38]. Bir sisteme kanonik kuantizasyon uygulanmak isteniyorsa Dirac parantezine ihtiyaç duyulur. Ancak Dirac parantezinin tanımı verilmeden önce birinci sınıf ve ikinci sınıf bağ koşullarından bahsetmek gereklidir.

ϕ_i, bağ koşulları birinci sınıf ve ikinci sınıf olmak üzere iki türdedir. Birinci sınıf bağ koşulu bütün bağ koşullarının Poisson parantezi sıfıra zayıf eşit olduğu durumda geçerlidir ve iki birinci sınıf bağ koşulunun Poisson parantezi yine birinci sınıftır ve

$$\{\phi_i, \phi_i\} \approx 0 \tag{2.42}$$

şeklindedir.

İkinci sınıf bağ koşulu ise tüm bağ koşullarından en az bir tanesinin Poisson parantezi sıfırdan farklı ise geçerlidir ve aynı birinci sınıf bağ koşulu gibi burada da sıfıra olan ya da bir sabite olan eşitlik zayıftır. Yani

$$\{\phi_i, \phi_i\} \approx 0,\ \{\phi_i, \phi_j\} \approx c,\ \{\phi_j, \phi_j\} \approx 0 \qquad (2.43)$$

şeklinde ifade edilir. Burada c sabitine zayıf eşit olan ortadaki terim ikinci sınıf bağ koşuludur. Burada "≈" zayıf eşit sembolüdür. Bunun anlamı Poisson parantezi işlemi yapıldıktan sonra bağ koşulları uygulanır ve sonuç elde edilir. Bir sisteminin Langrange fonksiyonundan, Hamiltoniyeni elde edilirken Dirac parantezinin ikinci sınıf bağ koşullarının Poisson parantezleri her zaman sıfır olmadığı için önemlidir. İkinci sınıf bağ koşulu, Langrange denkleminden elde edilen birincil bağ koşulları adı verilen doğrusal denklemlerin Poisson parantezidir. Birincil bağ koşulları, Hamiltoniyen formalizmine göre q ve p değişkenlerinin birbiri ile

$$\phi_l(q, p) = 0 \qquad (2.44)$$

şeklinde ilişki içinde olmasına denir. Burada Langrange hareket denklemlerindeki momentumun hızdan bağımsız bir değişken olma olasılığı vurgulanır.

Hamiltoniyenin momentum ve konum değişkenleri arasında oluşan yeni eşitliklere (bağ koşullarına) ikincil bağ koşulları denir ve bu da yeni tutarlılık koşulunu gerektirir. İkincil bağ koşullarının değeri sıfırdır ve

$$\phi_l^{'} = 0\,, \dot{\phi}_l^{'} = 0 \qquad (2.45)$$

şeklinde gösterilir.

Klasik mekanikte ikinci sınıf bağ koşulları Dirac parantezleri aracılığıyla kuantize edilebilirler ancak Poisson parantezi bunu sağlayamaz. Bağ koşullarının Dirac parantezi kuantize edildiği için artık birer operatördürler bu yüzden üzerlerinde şapka vardır. Kuantize etmek için $i\hbar$ ile çarpılır ve

$$[\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2] \approx i\frac{h}{2\pi}c = i\hbar c \qquad (2.46)$$

ile gösterilir.

Dirac parantezi, faz uzayında bulunan herhangi bir f, g fonksiyonları için şu şekilde

$$\{f, g\}_{DP} = \{f, g\}_{PP} - \{f, \phi_i\} J_{ij}^{-1} \{\phi_j, g\} \tag{2.47}$$

tanımlanır. Eşitliğin solundaki parantezin alt indisinde gösterilen, DP Dirac parantezinin simgesidir, hemen sağındaki parantezin alt indisi de Poisson parantezine göre işlem yapılacağını belirtmektedir. J_{ij}^{-1}, simplektik matrisin tersidir ve birinci Hamiltoniyen operatörünü verir. Bu formülasyonun nasıl kullanıldığı 3. Bölümde ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır.

3

EVRİMSEL (2+1)-BOYUTLU HİROTA TİPİ DENKLEMLERİN İKİLİ-HAMİLTONİYEN YAPILARI

3.1 Evrimsel Hirota Tipi Langrange Denklemleri ve Simetri Koşulu

3.1.1 Langrange Denkleminin Elde Edilmesi

Bu bölümde evrimsel Hirota tipi (2+1)-boyutlu denklemlerin Euler-Langrange formunun simplektik Monge-Ampere yapısına sahip olduğu gösterilmiş ve Langrange fonksiyonu elde edilmiştir. Bu doğrultuda Hirota tipi başlangıç denklemi

$$F = -u_{tt} + f(u_{t1}, u_{t2}, u_{11}, u_{12}, u_{22}) = 0 \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada f fonksiyonu $u = u(t, z_1, z_2)$, ve u'nun kısmi türevlerinin fonksiyonudur. Alt indisler kısmi türevleri gösterir ve $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j}$ ile $u_{ti} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z_i}$ şeklinde gösterilir. (3.1) denklemine P. Olver'in [2] kitabındaki

$$D_F = \sum_j F_j[u] D_j, \qquad j = u_t, u_1, u_2, \cdots u_{1t}, u_{2t}, u_{tt} \tag{3.2}$$

formülü uygulandığında Frechet türev operatörü

$$D_F = -D_t^2 + f_{u_{t1}} D_t D_1 + f_{u_{t2}} D_t D_2 + f_{u_{11}} D_1^2 + f_{u_{12}} D_1 D_2 + f_{u_{22}} D_2^2 \tag{3.3}$$

şeklinde elde edilir. Burada $D_i \equiv D_{z_i}, D_t$ toplam türev operatörleridir. Formülün kendine eşlenik (self-adjoint) formu

$$D_F^* = \sum_j (-D)_j \frac{\partial F}{\partial u_j} \tag{3.4}$$

kullanılarak da eşlenik Frechet türev operatörü

$$D_F^* = -D_t^2 + D_t D_1 f_{u_{t1}} + D_t D_2 f_{u_{t2}} + D_1^2 f_{u_{11}} + D_1 D_2 f_{u_{12}} + D_2^2 f_{u_{22}} \tag{3.5}$$

şeklinde elde edilir. Helmholtz koşullarına göre (3.1)'in Frechet türevi kendine eş (self adjoint), $D_F^* = D_F$ özelliği gösterirse bir varyasyon problemi için Euler-Langrange denklemidir. Bu durumda $D_F^* = D_F$ eşitliği

$$-D_t^2 + D_t D_1 f_{u_{t1}} + D_t D_2 f_{u_{t2}} + D_1^2 f_{u_{11}} + D_1 D_2 f_{u_{12}} + D_2^2 f_{u_{22}} = -D_t^2 + f_{u_{t1}} D_t D_1$$
$$+ f_{u_{t2}} D_t D_2 + f_{u_{11}} D_1^2 + f_{u_{12}} D_1 D_2 + f_{u_{22}} D_2^2 \tag{3.6}$$

şeklinde olur. (3.6) denkleminin sol tarafındaki terimlerin türev işlemleri yapılarak

$$\begin{aligned}
&-D_t^2 + D_tD_1\left(f_{u_{1t}}\right) + D_1\left(f_{u_{1t}}\right)D_t + D_t\left(f_{u_{1t}}\right)D_1 + f_{u_{1t}}D_1D_t \\
&+D_tD_2\left(f_{u_{2t}}\right) + D_2\left(f_{u_{2t}}\right)D_t + D_t\left(f_{u_{2t}}\right)D_2 + f_{u_{2t}}D_2D_t \\
&+D_1D_1\left(f_{u_{11}}\right) + D_1\left(f_{u_{11}}\right)D_1 + D_1\left(f_{u_{11}}\right)D_1 + f_{u_{11}}D_1D_1 \\
&+D_2D_2\left(f_{u_{22}}\right) + D_2\left(f_{u_{22}}\right)D_2 + D_2\left(f_{u_{22}}\right)D_2 + f_{u_{22}}D_2D_2 \\
&+D_1D_2\left(f_{u_{12}}\right) + D_2\left(f_{u_{12}}\right)D_1 + D_1\left(f_{u_{12}}\right)D_2 + f_{u_{12}}D_2D_1 \\
&= -D_t^2 + fu_{1t}D_tD_1 + fu_{2t}D_tD_2 + fu_{11}D_1^2 + fu_{12}D_1D_2 + fu_{22}D_2^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. Eşitliliğin sağ tarafındaki bütün terimler soldaki terimlerle sadeleşir. Geriye kalan terimlerin toplamı sıfır olduğundan denklemin sağlanabilmesi için D_t, D_1 ve D_2'nin katsayılarının ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir ve

$$D_1\left(f_{u_{1t}}\right) + D_2\left(f_{u_{2t}}\right) = 0 \tag{3.8}$$

$$D_t\left(f_{u_{1t}}\right) + 2D_1\left(f_{u_{11}}\right) + D_2\left(f_{u_{12}}\right) = 0 \tag{3.9}$$

$$D_t\left(f_{u_{2t}}\right) + 2D_2\left(f_{u_{22}}\right) + D_1\left(f_{u_{12}}\right) = 0 \tag{3.10}$$

$$D_tD_1\left(f_{u_{t1}}\right) + D_2D_t\left(f_{u_{2t}}\right) + D_1^2\left(f_{u_{11}}\right) + D_1D_2\left(f_{u_{12}}\right) + D_2^2\left(f_{u_{22}}\right) = 0 \tag{3.11}$$

ile verilen dört denklem elde edilir. Burada f'yi çözmek için (3.8) ile başlanır.

(3.8) denkleminde $f = f(u_{t1}, u_{t2}, u_{11}, u_{12}, u_{22})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&f_{u_{1t}u_{1t}}u_{11t} + f_{u_{1t}u_{2t}}u_{12t} + f_{u_{1t}u_{11}}u_{111} + f_{u_{1t}u_{12}}u_{112} + f_{u_{1t}u_{22}}u_{122} + f_{u_{2t}u_{2t}}u_{22t} + \\
&f_{u_{2t}u_{1t}}u_{12t} + f_{u_{2t}u_{11}}u_{112} + f_{u_{2t}u_{12}}u_{122} + f_{u_{2t}u_{22}}u_{222} = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur. Denklemin sağlanması için her üçlü türevli terimlerin katsayısı sıfır olmalıdır ve

i. $f_{u_{1t}u_{1t}} = 0$

ii. $2f_{u_{1t}u_{t2}} = 0$

iii. $f_{u_{t1}u_{11}} = 0$

iv. $f_{u_{1t}u_{12}} + f_{u_{2t}u_{11}} = 0$

v. $f_{u_{1t}u_{22}} + f_{u_{2t}u_{12}} = 0$

vi. $f_{u_{2t}u_{t2}} = 0$

vii. $f_{u_{2t}u_{22}} = 0$

denklem sistemi elde edilir. Yukarıdaki denklem sisteminden f'yi çözmek için

$$f = au_{1t} + bu_{2t} + c \tag{3.13}$$

şeklinde bir çözüm önerilmiş olsun. Burada $a = a(u_{11}, u_{12}, u_{22})$, $b = b(u_{11}, u_{12}, u_{22})$ ve $c = c(u_{11}, u_{12}, u_{22})$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlardır. Amaç a, b ve c' yi bularak f fonksiyonun elde etmektir.

Önce f (3.8) denkleminde yazılarak $f_{u_{1t}} = a$ ve $f_{u_{2t}} = b$ elde edilir. Dolayısıyla (iii) denkleminden

$$f_{u_{1t}u_{11}} = a_{u_{11}} = 0 \Longrightarrow a = a(u_{12}, u_{22}) \tag{3.14}$$

ve (vii) denkleminden

$$f_{u_{2t}u_{22}} = b_{u_{22}} = 0 \Longrightarrow b = b(u_{12}, u_{11}) \tag{3.15}$$

bulunur. a ve b' nin bulanan değerleri ile birlikte (iv) ve (v) denklemlerinden a ve b yeni fonksiyonlar g, h, K ve l'ye bağlı olarak

$$b(u_{11}, u_{12}) = g(u_{12})u_{11} + h(u_{12})$$

$$a(u_{12}, u_{22}) = K(u_{12})u_{22} + l(u_{12}) \tag{3.16}$$

şeklini alır. Burada (3.16)'deki denklemlerin aşağıdaki gibi kısmi türevleri alındığında

$$a_{u_{12}} + b_{u_{11}} = K'(u_{12})u_{22} + l'(u_{12}) + g(u_{12}) = 0$$

$$a_{u_{22}} + b_{u_{12}} = g'(u_{12})u_{11} + h'(u_{12}) + K(u_{12}) = 0 \tag{3.17}$$

bulunur. Buradan $K = sabit$, $l = -gu_{12} + c_6$ ve $h = -Ku_{12} + c_5$ bulunur.

Böylece a ve b;

$$a = Ku_{22} - gu_{12} + c_6 \text{ ve } b = gu_{11} - Ku_{12} + c_5 \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir. Bu değerler (3.13)'te yerine yazılırsa

$$f = (Ku_{22} - gu_{12})u_{1t} + (gu_{11} - Ku_{12})u_{2t} + c(u_{11}, u_{12}, u_{22}) + c_5u_{2t} + c_6u_{1t} \tag{3.19}$$

şeklinde olur. Burada K, g, $c_5$ve c_6 sabittir. (3.19) denklemi sırasıyla (3.9) ve (3.10) da yerine yazılırsa c için

$$2\left(c_{u_{11}u_{11}}u_{111} + c_{u_{11}u_{12}}u_{112} + c_{u_{11}u_{22}}u_{122}\right) + c_{u_{12}u_{11}}u_{112} + c_{u_{12}u_{12}}u_{122} +$$

$$c_{u_{12}u_{22}}u_{222} = 0 \tag{3.20}$$

denklemi elde edilir. Yukarıda yapılan çözüme benzer olarak

$$\text{i.} \quad c_{u_{11}u_{11}} = 0$$

$$\text{ii.} \quad c_{u_{11}u_{12}} = 0$$

$$\text{iii.} \quad 2c_{u_{11}u_{22}} + c_{u_{12}u_{12}} = 0$$

$$\text{iv.} \quad c_{u_{12}u_{22}} = 0$$

denklemleri elde edilir. (i) denklemi yardımı ile

$$c = h(u_{12}, u_{22})u_{11} + l(u_{12}, u_{22}) \tag{3.21}$$

şeklinde yazılabilir. Burada h ve l fonksiyonları tüm değişkenleri ayrı ayrı bir fonksiyona bağlı olarak ifade edilirse

$$c = [p(u_{12}) + q(u_{22})]u_{11} + r(u_{12}) + s(u_{22}) \tag{3.22}$$

şeklinde yazılabilir. (3.22) denklemi (ii) ve (iii) denklemlerinde yazılarak

$$c = u_{11}[P - c_1u_{22} + c_3] + c_1u_{12}^2 + c_2u_{12} + c_0 + s(u_{22}) \tag{3.23}$$

sonucu bulunur. Burada, P, c_1, c_2 ve c_0 rastgele sabitlerdir, daha sonra bu ifadeler düzenlenecektir. Son olarak (3.23) denklemi ile (3.10) denklemi kullanılırsa

$$c = u_{11}(P - c_1u_{22}) + c_1u_{12}^2 + c_2u_{12} + c_4u_{22} + c_0 \tag{3.24}$$

bulunur. Böylece $f = au_{1t} + bu_{2t} + c$ şeklinde verilen f fonksiyonunda bilinmeyen a, b ve c bulunmuş oldu. a, b ve c f'te yerine yazıldıktan sonra (3.1) denklemi

$$u_{tt} = c_1(u_{1t}u_{12} - u_{2t}u_{11}) + c_2(u_{1t}u_{22} - u_{2t}u_{12}) + c_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2)$$

$$+ c_4u_{1t} + c_5u_{2t} + c_6u_{11} + c_7u_{12} + c_8u_{22} + c_9 \tag{3.25}$$

şeklini alır. f'nin bu çözümü ile (3.1) evrimsel Hirota denklemi, (3.25) simplektik Monge-Ampere formunu veren Lagrange fonksiyonu bulmaya olanak sağlar.

(3.25) denklemi için Lagrange fonksiyonu Homotopi formülünü, $F = -u_{tt} + f$ denklemine uygulayarak elde edilir [2],

$$L[u] = \int_0^1 u \cdot F[\lambda u] d\lambda \tag{3.26}$$

uygulandığında,

$$L[u] = \int_0^1 u \cdot [c_1(\lambda^2 u_{1t} u_{12} - \lambda^2 u_{2t} u_{11}) + c_2(\lambda^2 u_{1t} u_{22} - \lambda^2 u_{2t} u_{12}) + c_3(\lambda^2 u_{11} u_{22}$$

$$-\lambda^2 u_{12}^2 + c_4 \lambda u_{1t} + c_5 \lambda u_{2t} + c_6 \lambda u_{11} + c_7 \lambda u_{12} + c_8 \lambda u_{22} + c_9 - \lambda u_{tt}] d\lambda \tag{3.27}$$

elde edilir ve kolaylıkla sistemin Langrange fonksiyonu

$$L = -\frac{1}{2} u u_{tt} + \frac{u}{3}[c_1(u_{1t} u_{12} - u_{2t} u_{11}) + c_2(u_{1t} u_{22} - u_{2t} u_{12}) + c_3(u_{11} u_{22} - u_{12}^2)]$$

$$+\frac{u}{2}(c_4 u_{1t} + c_5 u_{2t} + c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22}) + c_9 u \tag{3.28}$$

şeklinde olur.

3.1.2 Simetri Koşulunun İncelenmesi

Simetri koşulu diferansiyel uyumluluk (compatible) koşuludur. Elde edilen (3.25) denkleminin simetri koşulunun incelenmesi gereklidir. Bu sebeple öncelikle $\vec{c} = (c_1, c_2)$ vektörü yönünde bir türev operatörü

$$\nabla_c = c_1 D_1 + c_2 D_2 \tag{3.29}$$

şeklinde tanımlanarak (3.25) denklemi daha sade biçimde yazılarak.

$$u_{tt} = u_{1t} \nabla_c(u_2) - u_{2t} \nabla_c(u_1) + c_3(u_{11} u_{22} - u_{12}) + c_4 u_{1t} + c_5 u_{2t} + c_6 u_{11}$$

$$+c_7 u_{12} + c_8 u_{22} \tag{3.30}$$

şeklini alır. Simetri koşulunu elde etmek için (3.31) denkleminin u değişkenlerinin, grup parametresi τ'ya göre türevi alınarak ve Lie denklemi $u_\tau = \varphi$ kullanılarak simetri koşulu,

$$\varphi_{tt} = \nabla_c(u_2)\varphi_{1t} + u_{1t} \nabla_c(\varphi_2) - \nabla_c(u_1)\varphi_{2t} - u_{2t} \nabla_c(\varphi_1) + c_3(u_{22}\varphi_{11} + u_{11}\varphi_{22}$$

$$-2u_{12}\varphi_{12}) + c_4 \varphi_{1t} + c_5 \varphi_{2t} + c_6 \varphi_{11} + c_7 \varphi_{12} + c_8 \varphi_{22} \tag{3.31}$$

şeklinde bulunur. Yapılacak hesaplamalarda karmaşıklığı azaltmak için bu denklem $L_{ij\,(k)} = u_{jk} D_i - u_{ik} D_j = -L_{ji\,(k)}$ kuralına göre tanımlanan diferansiyel operatörler cinsinden yazmak uygun olacaktır. Buna göre

$$L_{12\,(1)} = u_{12} D_1 - u_{11} D_2,$$

$$L_{12(2)} = u_{22}D_1 - u_{12}D_2, \tag{3.32}$$

$$L_{12(t)} = u_{2t}D_1 - u_{1t}D_2$$

operatörleri elde edilir ve (3.31) denklemi

$$\{c_1\big(D_tL_{12(1)} - D_1L_{12(t)}\big) + c_2\big(D_tL_{12(2)} - D_2L_{12(t)}\big) + c_3\big(D_1L_{12(2)} - D_2L_{12(1)}\big) - D_t^2 +$$

$$c_4D_1D_t + c_5D_2D_t + c_6D_1^2 + c_7D_1D_2 + c_8D_2^2\}\varphi = 0 \tag{3.33}$$

şeklini alır. Böylece Langrange denklemleri için simetri koşulu elde edilmiş olur. Bu denklem ileride yenileme operatörünü elde etmek için kullanılacaktır.

3.2 Yenileme İlişkileri ve Lax Çifti

Bu kısımda bir öncekinde elde edilmiş simetri koşulu, integre edilebilirlik koşulu ile asimetrik-çarpanlar (skew factorized) denilen forma dönüştürülecektir ve simetriler için yenileme ilişkileri ve Lax çifti bu yeni formdaki simetri koşulundan çıkarılacaktır. İntegre edilebilirlik koşulu, E. V. Ferapantov [24] tarafından simplektik Monge-Ampere denklemi için oluşturulmuştur. Bu denklem

$$\in det\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{12} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} + h_1(u_{22}u_{33} - u_{23}^2) + h_2(u_{11}u_{33} - u_{13}^2) + h_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2)$$

$$+g_1(u_{11}u_{23} - u_{12}u_{13}) + g_2(u_{22}u_{13} - u_{12}u_{23}) + g_3(u_{33}u_{12} - u_{13}u_{23}) + s_1u_{11} +$$

$$+s_2u_{22} + s_3u_{33} + \tau_1u_{23} + \tau_2u_{13} + \tau_3u_{12} + v = 0 \tag{3.34}$$

şeklindedir. İntegre edilebilirlik burada yukarıdaki denklemin sonsuz sayıda hidrodinamik indirgenme içerdiğini gösterir [39]. Bizim ilgilendiğimiz evrimsel (3.25) denklemi için katsayılar (3.34) denkleminden

$$h_1 = h_2 = h_3 = g_3 = 0, \;\; g_1 = -c_1, \;\; c_2 = g_2, \;\; s_1 = c_6, \;\; s_2 = c_8, \;\; s_3 = -1,$$
$$\tau_1 = c_5, \;\; \tau_2 = c_5, \;\; \tau_3 = c_7, \;\; c_9 = v. \tag{3.35}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca integre edilebilirlik koşulu referans [24]'ün (22) numaralı denkleminde (3.34) denklemi için

$$h_1^2s_1^2 + h_2^2s_2^2 + h_3^2s_3^2 + g_1^2s_2s_3 + g_2^2s_1s_2 + g_3^2s_1s_2 - 2(h_1h_2s_1s_2 + h_1h_3s_1s_2$$

$$+h_2h_3s_2s_3) + 4\epsilon s_1s_2s_3 + 4vh_1h_2h_3 + \epsilon\tau_1\tau_2\tau_3 - vg_1g_2g_3 - \epsilon^2v^2$$

$$-v(g_1^2h_1 + g_2^2h_2 + g_3^2h_3) - (g_1\tau_1 + g_2\tau_2 + g_3\tau_3 + 2\epsilon v)(h_1s_1 + h_2s_2 + h_3s_3 - \epsilon v)$$

$$+2(g_1h_1s_1\tau_1 + g_2h_2s_2\tau_2 + g_3h_3s_3\tau_3) + \tau_1^2h_2h_3 + \tau_2^2h_1h_3 + \tau_3^2h_1h_2$$

$$+\epsilon(\tau_1^2s_1 + \tau_2^2s_2 + \tau_3^2s_3) + s_1\tau_1g_2g_3 + s_2\tau_2g_1g_3 + s_3\tau_3g_1g_2$$

$$-(g_1h_1\tau_2\tau_3 + g_2h_2\tau_1\tau_3 + g_3h_3\tau_1\tau_2) = 0 \qquad (3.36)$$

şeklinde verilmiştir. (3.25) denklemi için yukarıdaki integre edilebilirlik koşulu

$$c_2(c_1c_7 - c_2c_6 + c_3c_4) = c_1(c_1c_8 + c_3c_5) - c_3^2 \qquad (3.37)$$

şeklinde olur. (3.37) eşitliğini sağlayan (3.25) formundaki herhangi bir denklem integre edilebilir olduğu denklemin bir Lax çifti elde edilerek de gösterilebilir. Bu durum parametrelerin farklı durumları için ele alınacaktır.

3.2.1 Genel Durum: $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \neq 0$

(3.37) integre edilebilirlik koşulu için $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \neq 0$ durumu ele alınacaktır. (3.25) formundaki integre edilebilen denklemlerin simetri koşulunun doğrusal operatörü "asimetrik-çarpan" adı verilen formda

$$(A_1B_2 - A_2B_1)\varphi = 0 \qquad (3.38)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer iki boyutlu vektör operatörler $\vec{R} = (A_1, A_2)$ ve $\vec{S} = (B_1, B_2)$ şeklinde tanımlanırsa (3.38) denkleminde asimetrik-çarpanlar formu

$$(\vec{R} \times \vec{S})\varphi = 0 \qquad (3.39)$$

ile verilen dış çarpım şekline dönüşür. Burada A_i ve B_i diferansiyel operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A_1 = c_1D_t - c_3D_2 \quad ; \quad A_2 = -c_2D_t - c_3D_1$$

$$B_1 = c_1\left(c_3L_{12(2)} - c_1L_{12(t)}\right) + c_1c_6D_1 + (c_1c_7 - c_2c_6 + c_3c_4)D_2 \qquad (3.40)$$

$$B_2 = c_1\left(c_3L_{12(1)} - c_2L_{12(t)}\right) - c_1c_8D_2 - c_3D_t + (c_2c_6 - c_3c_4)D_1$$

ve (3.40) operatörleri

$$[A_1, A_2] = 0, \qquad [A_1, B_2] - [A_2, B_1] = 0, \qquad [B_1, B_2] = 0 \qquad (3.41)$$

komütasyon ilişkilerini sağlamalıdır. Öncelikle A_1 ve A_2 operatörlerinin komütasyon ilişkisini sağlandığını gösterelim:

$$[A_1, A_2] = 0. \qquad (3.42)$$

Operatörler açıkça parantez içine yazıldığında

$$\{c_1 D_t - c_3 D_2, -c_2 D_t - c_3 D_1\} = 0$$

şeklinde olmalıdır ve

$$\{c_1 D_t, -c_2 D_t\} + \{c_1 D_t, -c_3 D_1\} + \{-c_3 D_2, -c_2 D_t\} + \{-c_3 D_2, c_3 D_1\} = 0 \qquad (3.43)$$

şeklinde olur ve kolaylıkla $[A_1, A_2] = 0$ ilişkisi sağlanır. (3.41)'de ortadaki operatörler için komütasyan ilişkisi

$$[A_1, B_2] - [A_2, B_1] = 0 \qquad (3.44)$$

şeklindedir. Poisson parantezi içindeki terimler açıkça yazıldığında

$$\{c_1 D_t, c_1(c_3 L_{12(1)} + c_2 L_{12(t)})\} + \{c_1 D_t, (c_3 c_4 - c_2 c_6) D_1\}$$
$$+\{c_1 D_t, -c_1 c_8 D_2\} + \{c_1 D_t, -c_3 D_t\} + \{c_3 D_2, c_1(c_3 L_{12(1)} + c_2 L_{12(t)})\} \qquad (3.45)$$
$$+\{c_3 D_2, (c_3 c_4 - c_2 c_4) D_1\} + \{-c_3 D_2, -c_1 c_8 D_2\} + \{-c_3 D_2, -c_3 D_t\} = 0$$

şeklinde olur. (3.32)'den gelen terimler de yerine yazılarak gerekli işlemler yapıldığında kalan terimler

$$c_1^2 c_3\{-(u_{12t} D_1 - u_{1tt} D_2) + (u_{122} D_1 - u_{112} D_2) + (u_{12t} D_1 - u_{11t} D_2)$$
$$-(u_{122} D_1 - u_{112} D_2)\} + c_1 c_2 c_3\{(u_{22t} D_1 - u_{12t} D_2^2) - (u_{22t} D_1 - u_{12t} D_2^2)\}$$
$$+c_2 c_1^2\{(u_{2tt} D_1 - u_{1tt} D_2) - (u_{2tt} D_1 - u_{1tt} D_2)\} = 0 \qquad (3.46)$$

şeklinde olmalıdır. Burada kalan üçlü türevler birbirini götürerek sıfır olur ve (3.44) sağlanır. Son komütasyon ilişkisi

$$[B_1, B_2] = 0 \qquad (3.47)$$

şeklindedir. B_1 ve B_2 operatörleri (3.40)'tan yerine yazılıp komütasyon ilişkisi alınırsa

$$\{c_1(c_3 L_{12(2)} - c_1 L_{12(t)}) + c_1 c_6 D_1 + M D_2\}\{c_1(c_3 L_{12(1)} + c_2 L_{12(t)}) + N D_1 + c_1 c_8 D_2$$
$$-c_3 D_t\} - \{c_1(c_3 L_{12(1)} + c_2 L_{12(t)}) + N D_1 - c_1 c_1 c_8 D_2 - c_3 D_t\}\{c_1(c_3 L_{12(2)} - c_1 L_{12(t)})$$
$$+c_1 c_6 D_1 + M D_2\} \qquad (3.48)$$

olur. Burada

$$M = c_1 c_7 - N \quad \text{ve} \quad N = c_3 c_4 - c_2 c_6 \qquad (3.49)$$

şeklindeki sabitlerdir. Terimler yerine yazıldığında ve ilk türevler alınarak (3.37) integre edilebilirlik koşulu uygulandığında ve toplam türevler $D_1,\ D_2$ parantezin sağına atılarak ortak paranteze alınırsa

$$c_1^2c_3\{c_3(-u_{22}u_{111}+2u_{12}u_{112}-u_{11}u_{112})+c_2(-u_{22}u_{11t}+u_{12}u_{12t}+u_{2t}u_{112}$$
$$-u_{1t}u_{22t})+c_1(-u_{12}u_{11t}+u_{11}u_{12t}+u_{2t}u_{111}-u_{1t}u_{112})-c_6u_{111}-c_7u_{112}-$$
$$c_8u_{122}-c_4u_{11t}-c_5u_{12t}+u_{tt1}\}D_2$$
$$c_1^2c_3\{c_3(u_{22}u_{112}-2u_{12}u_{122}+u_{11}u_{222})c_2(u_{22}u_{12t}-u_{12}u_{22t}-u_{2t}u_{122}+u_{1t}u_{22t})$$
$$+c_1(u_{12}u_{12t}-u_{11}u_{22t}-u_{2t}u_{112}+u_{1t}u_{122})+c_4u_{12t}+c_5u_{22t}+c_6u_{112}+c_7u_{221}$$
$$+c_8u_{222}-u_{tt2}\}D_1 \qquad (3.50)$$

elde edilir. (3.50) denklemindeki her parantez toplam türev şeklinde yazılarak düzenlenirse,

$$-c_1^2c_3D_1\{c_3(u_{11}u_{22}-u_{12}^2)+c_2(u_{1t}u_{22}-u_{2t}u_{12})+c_1(-u_{2t}u_{11}+u_{1t}u_{12})+c_4u_{1t}$$
$$+c_5u_{2t}+c_6u_{11}+c_7u_{21}+c_8u_{22}-u_{tt}\}D_2$$
$$+c_1^2c_3D_2\{c_3(u_{11}u_{22}-u_{12}^2)+c_2(u_{1t}u_{22}-u_{2t}u_{12})+c_1(-u_{2t}u_{11}+u_{1t}u_{12})+$$
$$c_4u_{1t}+c_5u_{2t}+c_6u_{11}+c_7u_{21}+c_8u_{22}-u_{tt}D_1 \qquad (3.51)$$

elde edilir. Parantez içindeki terimler görüldüğü üzere (3.25) denkleminin kendisidir ve böylece sıfıra eşit olur. Dolayısıyla komütasyon ilişkisi, B_1, B_2 için sağlanmıştır. Ayrıca A_i ve B_i operatörlerden elde edilen X_1 ve X_2

$$X_1=\lambda A_1+B_1 \quad \text{ve} \quad X_2=\lambda A_2+B_2 \qquad (3.52)$$

operatörlerinin

$$[X_1,X_2]=0 \qquad (3.53)$$

ve

$$\lambda[A_1,B_2]-\lambda[A_2,B_2]=0 \qquad (3.54)$$

komütasyon ilişkisini sağladığı kolaylıkla görülmektedir. Burada X_1 ve X_2, (3.25) için Lax denklemini verir ve λ spectral parametredir.

(3.38)'de verilen simetri durumu sadece (3.25) denklemi için Lax denklemini vermekle kalmaz aynı zamanda

$$A_1\tilde{\varphi} = B_1\varphi \qquad A_2\tilde{\varphi} = B_2\varphi \tag{3.55}$$

şeklinde tanımlanan simetriler için yenileme ilişkisini verir. Burada $\tilde{\varphi}$, φ'ın potansiyelidir. (3.55) denklemi, (3.41)'deki komütasyon ilişkileri ile kullanıldığında

$$(A_1B_2 - A_2B_1)\varphi = [A_1, A_2]\tilde{\varphi} = 0 \tag{3.56}$$

olduğu görülür. Burada φ simetri karakteristiğidir. Bununla beraber (3.55)'e göre

$$(A_1B_2 - A_2B_1)\tilde{\varphi} = ([A_1, B_2] - [A_2, B_1] + B_2A_1 - B_1A_2)\tilde{\varphi} = [B_1, B_2]\varphi = 0 \tag{3.57}$$

bulunur ve burada $\tilde{\varphi}$'nın (3.38)'deki simetri koşulunu sağladığı için bir simetri olduğu anlaşılır. Dolayısıyla φ simetri karakteristiği eğer bir simetri belirtiyorsa simetri karakteristiğinin potansiyeli, $\tilde{\varphi}$ da simetri olmalıdır.

Simetri koşulunun asimetrik-çarpanlar formu tekil olmadığından ayrık simetri dönüşümü uygulanarak yenisi elde edilebilir. Bu dönüşüm

$$c_1 \leftrightarrow -c_2,\ c_4 \leftrightarrow c_5,\ c_6 \leftrightarrow c_8,\ D_1 \leftrightarrow -D_2,\ D_t \leftrightarrow -D_2,\ v \leftrightarrow -v,\ L_{12(1)} \leftrightarrow L_{12(2)} \tag{3.58}$$

şeklinde olur ve bu ayrık simetri dönüşümü ile elde edilen yeni diferansiyel operatörler

$$\begin{aligned} A_1 &= c_2D_t + c_3D_1 \quad ; \quad A_2 = c_3D_2 - c_1D_t \\ B_1 &= -c_2\left(c_3L_{12(1)} + c_2L_{12(t)}\right) + c_2c_8D_2 + (c_2c_7 - c_1c_8 + c_3c_5)D_1 \\ B_2 &= c_2\left(c_1L_{12(t)} - c_3L_{12(2)}\right) - c_2c_6D_1 + c_3D_t - (c_1c_8 + c_3c_5)D_2 \end{aligned} \tag{3.59}$$

ile ifade edilir. Bu yeni operatörler simetri koşulunun (3.38)'deki asimetrik-çarpan adı verilen formunu ve (3.41)'deki komütasyon ilişkilerini sağlamaktadır. (3.54) ve (3.55) kullanılarak ikinci Lax çifti ve simetriler için bir başka yenileme ilişkileri oluşturulabilir.

3.2.2 Belirli Durumlar: $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ ve $c_2 = 0, c_1 \neq 0$

Burada ilk olarak $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ durumu ele alınacaktır. Bu sabitler (3.37) koşuluna uygulandığında integre edilebilirlik koşulu

$$c_2(c_2c_6 - c_3c_4) = c_3^2 \tag{3.60}$$

şeklini alır.

(3.40)'taki operatörlere $c_1 = 0$ uygulandığında, bu operatörler lineer bağımlı olur ve bu durumda asimetrik-çarpanlar gösteriminden (3.31) simetri denklemini üretememektedir. Bu nedenle $c_1 = 0$ sabiti (3.59)'da verilen ikinci operatör setine uygulanır ve

$$A_1 = c_2D_t + c_3D_1 \quad ; \quad A_2 = c_3D_2$$

$$B_1 = -c_2\left(c_3L_{12(2)} + c_2L_{12(t)}\right) + (c_2c_7 - c_3c_5)D_1 + c_2c_8D_2 \tag{3.61}$$

$$B_2 = c_3D_t - c_2c_3L_{12(2)} - c_2c_6D_1 - c_3c_5D_2$$

elde edilir. (3.61)'deki operatörler simetri koşulunun asimetrik-çarpanlar formunu ve komütator ilişkilerini sağlar. Böylece yukarıda gösterildiği gibi (3.61) denklemlerinin simetriler için yenileme ilişkileri

$$c_3D_2\tilde{\varphi} = (c_3D_t - c_2c_3L_{12(2)} - c_2c_6D_1 - c_3c_5D_2)\varphi$$

$$(c_2D_t + c_3D_1)\tilde{\varphi} = \{-c_2\left(c_3L_{12(2)} + c_2L_{12(t)}\right) + (c_2c_7 - c_3c_5)D_1 + c_2c_8D_2\}\varphi \tag{3.62}$$

şeklini alır ve (3.25) denklemi için $c_1 = 0$ Lax çiftini oluşturur ve

$$X_1 = \lambda(c_2D_t + c_3D_1) - c_2\left(c_3L_{12(2)} + c_2L_{12(t)}\right) + (c_2c_7 - c_3c_5)D_1 + c_2c_8D_2$$

$$X_2 = \lambda c_3D_2 + c_3D_t - c_2c_3L_{12(2)} - c_2c_6D_1 - c_3c_5D_2 \tag{3.63}$$

şeklinde olur.

İkinci durum olarak genel koşulda oluşturulmuş ilk operatörlere $c_2 = 0$ uygulandığında

$$A_1 = c_1D_t - c_3D_2 \quad ; \quad A_2 = -c_3D_1$$

$$B_1 = c_1\left(c_3L_{12(2)} - c_1L_{12(t)}\right) + (c_1c_7 - c_3c_4)D_2 + c_1c_6D_1 \tag{3.64}$$

$$B_2 = -c_3D_t + c_1c_3L_{12(2)} - c_1c_8D_2 + c_3c_4D_1$$

elde edilir. İntegre edilebilirlik koşulu $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$ için

$$c_1(c_1c_6 + c_3c_5) = c_3^2 \tag{3.65}$$

şeklini alır. (3.64)'teki operatörler simetri koşulunun asimetrik-çarpan formunu ve komütasyon ilişkilerini sağlar. Dolayısıyla yukarıda görüldüğü gibi bu

operatörler (3.52) ve (3.55)'te kullanılarak Lax çifti ve simetriler için yenileme ilişkileri elde edilir.

(3.38)'deki asimetrik-çarpan formu simetri koşulu üretmek yerine sıfır olduğu için (3.59)'daki ikinci operatör ailesi $c_2 = 0$ durumu için kullanılamaz.

(3.38)'deki değişmezlik koşulunun asimetrik-çarpan formu hala tekil değildir. Bu yüzden $c_2 = 0$ durumu için geçerli olabilecek yeni A_i ve B_i operatörleri tanımlanarak

$$A_1 = c_1 D_1 \quad ; \quad A_2 = c_3 D_2 - c_1 D_t$$

$$B_1 = c_1^2 L_{12(1)} + (c_1 c_5 - c_3) D_2 - c_1 D_t \tag{3.66}$$

$$B_2 = c_1\{c_4 D_t + c_3 L_{12(2)} - c_1 L_{12(t)} + c_7 D_2 + c_6 D_1$$

şeklinde bulunabilir. Yenileme ilişkileri ve Lax çifti elde edilmiş yeni operatörler için sağlanır. Son olarak $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ durumundan (3.37) integre edilebilirlik koşulundan $c_3 = 0$ durumu elde edilir. Bu durum (3.25) denklemini lineer bir denkleme dönüştürür.

3.2.3 Özel Durum: $c_3 = 0$

Bu özel durumda (3.37)'nin $c_3 = 0$ ve $c_1 \cdot c_2 \neq 0$ olması durumu ele alınacaktır. Bu durum için integre edilebilirlik koşulu

$$c_1 c_2 c_7 = c_1^2 c_8 + c_2^2 c_6 \tag{3.67}$$

şeklini alır. (3.66)'daki diferansiyel operatörlere uygulandığında asimetrik-çarpan formdaki simetri koşulunun A_i ve B_i operatörleri

$$A_1 = c_1 D_t \quad ; \quad A_2 = c_1 D_1 + c_2 D_2 = \nabla_c$$

$$B_1 = c_1 c_2 L_{12(t)} - c_1 c_8 D_2 - c_2 c_6 D_1 \tag{3.68}$$

$$B_2 = c_2\big(c_1 L_{12(1)} - c_2 L_{12(2)}\big) + c_5 D_2 + c_4 D_1 - D_t$$

şeklinde olur. (3.68)'deki operatörler (3.41)'deki komütasyon ilişkisini sağlar ve böylece dolayısıyla yukarıda gösterildiği gibi (3.55) denkleminden

$$c_1 D_t \tilde{\varphi} = \{c_2 c_1 L_{12(t)} - c_2 c_6 D_1 - c_1 c_8 D_2\}\varphi$$

$$\nabla_c \tilde{\varphi} = c_2\{\big(c_1 L_{12(1)} + c_2 L_{12(2)}\big) + c_4 D_1 - D_t + c_5 D_2\}\varphi \tag{3.69}$$

şeklinde simetriler için yenileme denklemleri elde edilir. $c_3 = 0$ durumunda (3.25) denklemi için Lax çifti

$$X_1 = \lambda c_1 D_t + c_2 c_1 L_{12(t)} - c_2 c_6 D_1 - c_1 c_8 D_2$$

$$X_2 = \lambda \nabla_c + c_2\{\left(c_1 L_{12(1)} + c_2 L_{12(2)}\right) + c_4 D_1 - D_t + c_5 D_2\} \qquad (3.70)$$

şeklinde olur. Bu durumu genel durumdaki (3.40) veya (3.56) operatörünü $c_3 = 0$ durumu için özel bir durumu olarak ele alırsak, A_i, B_i lineer bağımlı olabilir ve asimetrik-çarpan formu (3.38), (3.33) simetri koşulunu sağlamayabilir.

3.3 İki Bileşenli Yapı ve Hamiltoniyen Formülasyonu

Bu bölümde (3.31) evrimsel denklemi iki bileşenli formda yazılarak Hamiltoniyen yapı incelenecektir. Burada $v = u_t$ dönüşümü yapılarak iki bileşenli denklem sistemi

$$u_t = v$$

$$v_t = v_1 \nabla_c(u_2) - v_2 \nabla_c(u_1) + c_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_4 v_1 + c_5 v_2 + c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22} + c_9 \qquad (3.71)$$

şeklinde elde edilir. İki bileşenli sistemi veren Langrange fonksiyonu, daha önce bir bileşenli sistem için bulduğumuz Langrange fonksiyonunda yapılacak uygun değişikliklerle elde edilecektir. Toplam türevli terimler atılarak iki boyutlu sistem için Langrange fonksiyonu

$$L = u_t v - \frac{v^2}{2} + \frac{u_t}{3}\{c_1(u_2 u_{11} - u_1 u_{12}) + c_2(u_2 u_{12} - u_1 u_{22})\} - \frac{u_1}{2}(c_4 u_1 + c_5 u_2) + \\ + \frac{c_3}{3} u(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + \frac{u}{2}(c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22}) + c_9 u \qquad (3.72)$$

şeklinde bulunur. Bu yeni Langrange fonksiyonunun varyasyonu (3.71) denklemini vermelidir. Bunu görmek için

$$E_j = \frac{\delta}{\delta \phi_j} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \partial_x^m \frac{\partial}{\partial \phi_j} \qquad (3.73)$$

şeklinde tanımlanan Euler türevi kullanılır. Burada $\phi_1 = v$ ve $\phi_2 = u$ ile tanımlanır ve Langrange fonksiyonunu v'nin türevlerini içermediğinden

$$\frac{\delta L}{\delta v} = \frac{\partial L}{\partial v} = u_t - v = 0 \quad \text{ve} \quad u_t = v \tag{3.74}$$

bulunur. Öte yandan u birinci ve ikinci mertebeden türevleri içerdiğinden, L'nin u'ya göre Euler türevi (varyasyonu)

$$\frac{\delta L}{\delta u} = \frac{\partial L}{\partial u} - \partial_t \frac{\partial L}{\partial u_t} - \partial_1 \frac{\partial L}{\partial u_1} - \partial_2 \frac{\partial L}{\partial u_2} + \partial_1^2 \frac{\partial L}{\partial u_{11}} + \partial_2^2 \frac{\partial L}{\partial u_{22}} + \partial_1 \partial_2 \frac{\partial L}{\partial u_{12}} \tag{3.75}$$

şeklinde olur ve L, (3.75)'te türevler hesaplanıp yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{c_3}{3}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + \frac{1}{2}(c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22}) + c_9 \\ &-\partial_t \left[\frac{1}{3}\{c_1(u_2 u_{11} - u_1 u_{12}) + c_2(u_2 u_{12} - u_1 u_{22})\} + \frac{1}{2}(c_4 u_1 + c_5 u_2) + v\right] \\ &-\partial_1 \left[-\tfrac{c_1}{3} u_t u_{12} - \tfrac{c_2}{3} u_t u_{22} + \tfrac{c_4}{2} u_t\right] - \partial_2 \left[\tfrac{c_1}{3} u_t u_{11} + \tfrac{c_2}{3} u_t u_{12} - \tfrac{c_5}{2} u_t\right] \\ &+\partial_1^2 \left[\frac{c_1}{3} u_t u_2 + \frac{c_3}{3} u u_{22} + \frac{c_6}{2} u\right] + \partial_1^2 \left[-\frac{c_7}{3} u_t u_1 + \frac{c_3}{3} u_{11} + \frac{c_8}{2} u\right] \\ &+\partial_1 \partial_2 \left[-\frac{c_1}{3} u_t u_1 + \frac{c_2}{3} u_t u_2 - 2\frac{c_3}{3} u u_{12} + \frac{c_7}{2} u\right] \end{aligned} \tag{3.76}$$

bulunur. Bu terimlerin de türevleri alınıp gerekli ara işlemler yapılarsa birçok terim sadeleşir ve

$$\begin{aligned} v_t = {} & c_1(v_1 u_{12} - v_2 u_{11}) + c_2(v_1 u_{22} - v_2 u_{12}) + c_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_4 v_1 \\ & + c_5 v_2 + c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22} + c_9 \end{aligned} \tag{3.77}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem iki bileşenli sistemin ikinci denklemidir. Bu yüzden (3.72)'de verilen denklemin iki bileşenli sistemin Langrange fonksiyonu olduğu sonucuna ulaşılır.

3.3.1 Simplektik Yapı ve Birinci Hamiltoniyen Formülasyonu

Burada başlangıç noktası (3.72)'de verilen dejenere Langrange fonksiyonudur:

$$\begin{aligned} L = {} & u_t v - \frac{v^2}{2} + \frac{u_t}{3}\{c_1(u_2 u_{11} - u_1 u_{12}) + c_2(u_2 u_{12} - u_1 u_{22})\} - \frac{u_1}{2}(c_4 u_1 + c_5 u_2) + \\ & + \frac{c_3}{3} u(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + \frac{u}{2}(c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22}) + c_9 u. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Hamiltoniyen formülasyonunu elde etmek için Dirac'ın bağ şartı teorisinin uygulanması gerekmektedir. Bunun için kanonik momentum

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial u_{_t}{}^i} \tag{3.79}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\{\pi_i(z), u^k(z^{'})\} = \delta_i^k \delta(z - z^{'}) \tag{3.80}$$

ile verilen Poisson parantezini sağlamalıdır. Burada $u^1 = u$, $u^2 = v$, $z = (z_1, z_2)$ ve sıfırdan farklı tek Poisson parantezi için

$$\{\pi_u, u\} = \delta(z_1 - z_1^{'})\delta(z_2 - z_2^{'}) \tag{3.81}$$

şeklinde tanımlanır. Momentumun tanımı kullanılarak (3.78) Langrange fonksiyonundan

$$\pi_u = \frac{\partial L}{\partial u_t} = v + \frac{1}{3}\{c_1(u_2 u_{11} - u_1 u_{12}) + c_2(u_2 u_{12} - u_1 u_{22})\} - \frac{1}{2}(c_4 u_1 + c_5 u_2)$$
$$\pi_v = \frac{\partial L}{\partial v_t} = 0 \tag{3.82}$$

bulunur. Görüldüğü gibi momentumlar π_u ve π_v, u_t ve v_t hızları cinsinden çekilip yazılamazlar. Bu nedenle Langrange fonksiyonu dejeneredir. Bu durumda Dirac'ın önerdiği gibi momentum denklemleri ikinci sınıf bağ denklemleri şeklinde yazılır [35]. Yani bağ denklemleri

$$\phi_u = \pi_u - v - \frac{1}{3}\{c_1(u_2 u_{11} - u_1 u_{12}) + c_2(u_2 u_{12} - u_1 u_{22})\} + \frac{1}{2}(c_4 u_1 + c_5 u_2)$$
$$\phi_v = \pi_v \tag{3.83}$$

şeklinde elde edilir. Bağ denklemlerinin Poisson parantezleri

$$K_{11} = \{\phi_u(z_1, z_2), \phi_{u'}(z_1^{'}, z_2^{'})\}; \qquad K_{12} = \{\phi_u(z_1, z_2), \phi_{v'}(z_1^{'}, z_2^{'})\};$$
$$K_{21} = \{\phi_v(z_1, z_2), \phi_{u'}(z_1^{'}, z_2^{'})\}; \qquad K_{22} = \{\phi_v(z_1, z_2), \phi_{v'}(z_1^{'}, z_2^{'})\}; \tag{3.84}$$

ile verilir. Poisson parantezini hesaplarken Burada $z_1 = x$, $z_2 = y$ ve $z_1^{'} = x^{'}$, $z_2^{'} = y^{'}$ değişken dönüşümü yapmak kolaylık sağlar. Burada $K_{22} = 0$ ve $K_{12} = -K_{21} = 1$ olduğu kolayca görülmektedir. Ancak K_{11} için durum farklıdır. Öncelikle K_{11}'in içerdiği terimleri açıkça yazalım:

$$K_{11} = \{\pi_u - v - \frac{1}{3}[c_1(u_2 u_{11} - u_1 u_{12}) + c_2(u_2 u_{12} - u_1 u_{22})] + \frac{1}{2}(c_4 u_1 + c_5 u_2)\,,$$

$$\pi_{u'} - v - \frac{1}{3}[c_1(u_{2'} u_{1'1'} - u_{1'} u_{1'2'}) + c_2(u_{2'} u_{1'2'} - u_{1'} u_{2'2'})] + \frac{1}{2}(c_4 u_{1'} + c_5 u_{2'})\}$$

Poisson parantezinin özellikleri ve (3.80)'nin tanımı kullanılarak

$$K_{11} = \frac{c_1}{3}\,[-u_{2'}\,\delta_{x'x'}(x-x')\delta(y-y') - u_{1'1'}\,\delta(x-x')\delta_{y'}(y-y')$$

$$+u_{1'}\,\delta_x(x-x')\delta_{y'}(y-y') + u_{1'2'}\,\delta_{x'}(x-x')\delta(y-y')]$$

$$+\frac{c_2}{3}[-u_{2'}\,\delta_{x'}(x-x')\delta_{y'}(y-y') - u_{1'2'}\,\delta(x-x')\delta_{y'}(y-y')$$

$$+u_{1'}\,\delta(x-x')\delta_{y'y'}(y-y') + u_{2'2'}\,\delta_{x'}(x-x')\delta(y-y')]$$

$$+\frac{c_4}{2}\delta_{x'}(x-x') + \frac{c_5}{2}\delta_{y'}(y-y') \qquad (3.85)$$

$$+\frac{c_1}{3}[-u_2\delta_{xx}(x'-x)\delta(y'-y) - u_{11}\delta(x'-x)\delta_y(y'-y)$$

$$+u_1\delta_x(x'-x)\delta_y(y'-y) + u_{12}\delta_x(x'-x)\delta(y'-y)]$$

$$+\frac{c_2}{3}[-u_2\delta_{xy}(x'-x)\delta(y'-y) - u_{12}\delta(x'-x)\delta_y(y'-y)$$

$$+u_1\delta(x'-x)\delta_{yy}(y'-y) + u_{22}\delta_x(x'-x)\delta(y'-y)]$$

$$+\frac{c_4}{2}\delta_x(x'-x) + \frac{c_5}{2}\delta_y(y'-y)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu denklem, $f(x',y')$ yardımcı fonksiyonu ile çarpılır ve integre edilirse, elde edilecek denklem

$$K_{11} = -\frac{c_1}{3}\iint u_{2'}(x',y')f(x',y')\,\delta_{x'x'}(x-x')\delta(y-y')dx'dy'$$

$$-\frac{c_1}{3}\iint u_{1'1'}(x',y')f(x',y')\,\delta(x-x')\delta_{y'}(y-y')dx'dy'$$

$$+\frac{c_1}{3}\iint u_{1'}(x',y')f(x',y')\,\delta(x-x')\delta_{y'}(y-y')dx'dy'$$

$$+\frac{c_1}{3}\iint u_{1'2'}(x',y')f(x',y')\delta_{x'}(x-x')\delta(y-y')dx'dy'$$

$$-\frac{c_2}{3}\iint u_{2'}(x',y')f(x',y')\delta_{x'}(x-x')\delta_{y'}(y-y')dx'dy'$$

$$-\frac{c_2}{3}\iint u_{1'2'}(x',y')f(x',y')\delta(x-x')\delta_{y'}(y-y')dx'dy'$$

$$+\frac{c_2}{3}\iint u_{1'}(x',y')f(x',y')\delta(x-x')\delta_{y'y'}(y-y')dx'dy'$$

$$+\frac{c_2}{3}\iint u_{2'2'}(x',y')f(x',y')\delta_{x'}(x-x')\delta(y-y')dx'dy'$$

$$+\frac{c_4}{2}\int f(x',y')\delta_{x'}(x-x')dx' + \frac{c_5}{2}\int f(x',y')\,\delta_{y'}(y-y')dy' \qquad (3.86)$$

$$+\frac{c_1}{3}\iint u_2(x,y)f(x',y')\delta_{xx}(x'-x)\delta(y'-y)dx'dy'$$

$$+\frac{c_1}{3}\iint u_{11}(x,y)f(x',y')\delta(x'-x)\delta_y(y'-y)dx'dy'$$

$$-\frac{c_1}{3}\iint u_1(x,y)f(x',y')\delta_x(x'-x)\delta_y(y'-y)\,dx'dy'$$

$$-\frac{c_1}{3}\iint u_{12}(x,y)f(x',y')\delta_x(x'-x)\delta(y'-y)dx'dy'$$

$$+\frac{c_2}{3}\iint u_2\,(x,y)f(x',y')\delta_x(x'-x)\delta_y(y'-y)dx'dy'$$

$$+\frac{c_2}{3}\iint u_{12}(x,y)f(x',y')\,\delta(x'-x)\delta_y(y'-y)dx'dy'$$

$$-\frac{c_2}{3}\iint u_1(x,y)f(x',y')\delta(x'-x)\delta_{yy}(y'-y)dx'dy'$$

$$-\frac{c_2}{3}\iint u_{22}\,(x,y)f(x',y')\delta_x(x'-x)\delta(y'-y)dx'dy'$$

$$+\frac{c_4}{2}\int f(x',y')\delta_{x'}(x-x')dx' + \frac{c_5}{2}\int f(x',y')\delta_y(y'-y)dy'$$

bulunur. Burada Dirac delta fonksiyonları yardımı ile integraller alınarak

$$\frac{c_1}{3}(-D_1^2(u_2f)+D_2(u_{11}f)+D_1D_2(u_1f)-D_1(u_{12}f)+u_{11}D_2f-u_1D_1D_2f-u_{12}D_1+$$

$$u_2D_2f)+\frac{c_2}{3}(-D_1D_2(u_2f)+D_2(u_{12}f)+D_2^2(u_1f)-D_1(u_{22}f)+u_2D_1D_2f+u_{12}D_2f$$

$$-u_1D_2^2f-u_{22}D_1f)+\frac{c_4}{2}(D_1f+D_1f)+\frac{c_5}{2}(D_2f+D_2f) \qquad (3.87)$$

terimleri elde edilir. Buradan türevler alınır ve denklem düzenlenirse

$$K_{11}=[c_1(u_{11}D_2-u_{12}D_1)+c_2(u_{12}D_2-u_{22}D_1)+c_4D_1+c_5D_2)]f \qquad (3.88)$$

sonucu bulunur. Böylece K matrisinin tüm elemanları bulunmuş olur ve

$$K=\begin{pmatrix}-K_{11} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (3.89)$$

şeklinde yazılır ve matrisin bütün elemanlarının $(-)$ ile çarpılması sonucu değiştirmez. K matrisi simplektik matris adını alır ve tersi J_0, birinci Hamiltoniyen operatörünü verir [40]. Yani $J_0=K^{-1}$ olur ve

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c_1(u_{12}D_1 - u_{11}D_2) + c_2(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + c_4D_1 + c_5D_2 \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$J_0^{22} = c_1(u_{12}D_1 - u_{11}D_2) + c_2(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) + c_4D_1 + c_5D_2 \quad (3.91)$$

şeklindedir. J_0'ın Hamiltoniyen operatörü olabilmesi için K'nın mutlaka simplektrik olması gerekir. Yani

$$\omega = (1/2)du^i \wedge K_{ij}\, du^j \quad (3.92)$$

şeklindedir olmalıdır. Burada (3.92)'deki i ve j, 1 ile 2 değerlerini alır ve $u^1 = u$, $u^2 = v$ şeklinde olur simplektik iki-formun hacim integrali

$$\Omega = \iiint \omega dV, \quad (3.93)$$

simplektik formda olmalıdır ve integralin sınır koşullarında

$$d\omega = 0 \quad (3.94)$$

şeklindedir olmalıdır. (3.92)'nin tanımına göre K simplektik matrisi kullanılarak

$$\omega = \frac{1}{2}[c_1(u_{12}du \wedge du_1 - u_{11}du \wedge du_2) + c_2(u_{22}du \wedge du_1 - u_{12}du \wedge du_2) -$$
$$(c_4du \wedge du_1 - c_5du \wedge du_2 - 2du \wedge dv] \quad (3.95)$$

bulunur. (3.95)'in tam diferansiyeli alınarak ve toplam diverjans terimleri atılarak K'nın simplektik olduğunu kanıtlayan $d\omega = 0$ durumu incelenmelidir. Bu sebeple (3.95)'in tam diferansiyeli

$$d\omega = c_1(du_{12} \wedge du \wedge du_1 - du_{11} \wedge du \wedge du_2) + c_2(du_{22} \wedge du \wedge du_1 - du_{12} \wedge du \wedge du_2) \quad (3.96)$$

şeklinde yazılır. Diğer terimler $d^2 = 0$ kuralı gereği sıfır olur ve düzenlenerek,

$$c_1(D_1[du_2 \wedge du \wedge du_1] - du_2 \wedge du_1 \wedge du_1 - du_2 \wedge du_1 \wedge du_{11} + du_2 \wedge du \wedge du_{11})$$
$$+c_2(D_2[du_2 \wedge du \wedge du_1] - du_2 \wedge du_2 \wedge du_1 - du_2 \wedge du \wedge du_{12} + du_2 \wedge du \wedge du_{12})$$

elde edilir. Burada toplam türevli terimler sınırlarda sıfır olur ve $d\omega = 0$ sonucu elde edilir. Bu durum aynı zamanda birinci Hamiltoniyen operatörü J_0'ın Hamiltoniyen operatörü olduğu anlaşılmış olur.

Sistemin birinci Hamiltoniyen formu

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & J_0^{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\delta H_1}{\delta u} \\ \frac{\delta H_1}{\delta v} \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

şeklindedir. Burada H_1 sistemin Hamiltoniyen yoğunluğudur ve

$$H_1 = \pi_u u_t + \pi_v v_t - L \tag{3.98}$$

Legendre dönüşümü ile Langrange fonksiyonundan elde edilir. Burada (3.82)'de π_v ile π_u ve (3.72)'den Langrange fonksiyonu yerine yazılarak

$$H_1 = \frac{v^2}{2} - u\frac{c_3}{3}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) - \frac{u}{2}(c_6u_{11} + c_7u_{12} + c_8u_{22}) - c_9u \tag{3.99}$$

şeklinde bulunarak birinci Hamiltoniyen yoğunluğu elde edilir. Burada (3.96)'daki sütun matrisini u ve v'ye göre varyasyonel türev alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\delta H_1}{\delta v} &= v \\ \frac{\delta H_1}{\delta u} &= -c_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) - c_6u_{11} - c_7u_{12} - c_8u_{22} - c_9 \end{aligned} \tag{3.100}$$

elde edilir. (3.100), (3.97)'de yerine yazıldığında

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = v_1\nabla_c(u_2) - v_2\nabla_c(u_1) + c_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_4v_1 + c_5v_2 + c_6u_{11} + c_7u_{12} + c_8u_{22} + c_9 \end{cases}$$

bulunarak sistemin birinci Hamiltoniyen formunun iki bileşenli değişim denklemini verdiği ispatlanmıştır olur.

3.4 2×2 Matris Formunda Yenileme Operatörleri

Yenileme operatörleri ikili-Hamiltoniyen yapıyı oluşturmada kritik öneme sahiptir. Bu operatörler yardımıyla sonsuz sayıda Hamiltoniyen operatörü üretilebilir. Tıpkı Lax çifti ve yenileme ilişkileri bölümünde olduğu gibi bu kısım da üç bölümde incelenecektir.

3.4.1 Genel Durum: $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \neq 0$

Burada yenileme operatörü $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \neq 0$ durumu için elde edilecektir. Öncelikle iki bileşenli simetri karakteristikleri, $(\varphi, \psi)^T$ ile $\psi = \varphi_t$ ve $\left(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right)^T$ ile $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}_t$ sırası ile orijinal ve dönüşmüş simetriler için tanımlanır. Burada T matrisin transpozunu tanımlar. (3.55)'te tanımlanan yenileme ilişkileri

$$A_1\tilde{\varphi} = B_1\varphi \quad \text{ve} \quad A_2\tilde{\varphi} = B_2\varphi \tag{3.101}$$

ve (3.40)'daki operatörler kullanılarak

$$c_1\tilde{\psi} - c_3D_2\tilde{\varphi} = \{c_1\big(c_3(u_{22}D_1 - u_{12}D_2) - c_1(u_{2t}D_1 - u_{1t}D_2)\big) + c_1c_6D_1(c_3c_4 + c_1c_7 - c_2c_6)D_2\}\varphi$$

$$-c_2\tilde{\psi} - c_3D_1\tilde{\varphi} = \{c_1\big(c_3(u_{12}D_1 - u_{11}D_2) + c_2(u_{2t}D_1 - u_{1t}D_2)\big) + (c_3c_4 - c_2c_6)D_1 - c_1c_8D_2\}\varphi - c_3\psi \tag{3.102}$$

elde edilir. Buradan öncelikle $\tilde{\varphi}$'ya bağlı bir denklem elde edilir. Birinci denklem c_2 sabiti ile ve ikinci denklem ise c_1 sabiti ile çarpılarak eşitliğin solu ve sağı taraf tarafa toplanır ve ∇_c cinsinden yazılarak $\tilde{\psi}$ elenmiş olur. Sağ tarafında da toplam türevler D_1 ve D_2' ye göre türev alınır ve denklemler $\varphi_1$ve φ_2 ortak parantezinde yazılırsa

$$c_3\nabla_c\tilde{\varphi} = [c_1c_2c_3u_{22} - c_1^2c_2u_{2t} + c_1c_2c_6 + c_1^2c_3u_{12} + c_1^2c_2u_{2t} + (c_1c_3c_4 - c_1c_2c_6)]\varphi_1 + [-c_1c_2u_{12} + c_1^2c_2u_{1t} + c_2(c_3c_4 + c_1c_7 - c_2c_6) - c_1^2c_3u_{11} - c_1^2c_2u_{1t} - c_1^2c_3]\varphi_2 - c_1c_3\psi \tag{3.103}$$

şeklini alır. Burada (3.37) denklemi kullanılır ve c_3 sabitine bölünürse

$$\nabla_c(\tilde{\varphi}) = c_1\{\nabla_c(u_1)\varphi_2 - \nabla_c(u_2)\varphi_1\} - c_1c_4\varphi_1 - (c_1c_5 - c_3)\varphi_2 + c_1\psi \tag{3.104}$$

elde edilir.

$\tilde{\psi}$'ye bağlı denklemi elde etmek için (3.102)'deki denklemlerden üstteki D_1 operatörü ile alttaki ise D_2 operatörü ile çarpılır ve yine taraf tarafa toplanır. Sonrasında eşitliğin sağındaki türevler alınır ve ara işlemler yapılarak

$$\nabla_c(\tilde{\psi}) = [c_1c_3u_{22}\varphi_{11} - c_1^2u_{2t}\varphi_{11} + c_1c_6\varphi_{11} - 2c_1c_3u_{12}\varphi_{12} + c_1c_2u_{2t}\varphi_{12} + c_1^2u_{2t}\varphi_{11} + c_1c_7\varphi_{12} + c_1c_3u_{11}\varphi_{22} + c_1c_2u_{1t}\varphi_{22} + c_1c_8\varphi_{22} + c_3\psi_2] \tag{3.105}$$

elde edilir ve düzenlenerek

$$\nabla_c(\tilde{\psi}) = c_1\nabla_c(v_1\varphi_2 - v_2\varphi_1) + c_3(u_{22}\varphi_{11} + u_{11}\varphi_{22} - 2u_{12}\varphi_{12}) + c_6\varphi_{11} + c_7\varphi_{12} + c_8\varphi_{22}\} + c_3\psi_2 \tag{3.106}$$

şeklini alır. Burada φ ve ψ'in alt indisleri kısmi türevleri ifade eder. $\tilde{\varphi}$ ve $\tilde{\psi}$'yi yalnız bırakmak için (3.104) ve (3.105) denklemleri ∇_c^{-1} ile çarpılır ve

$$\nabla_c^{-1}\nabla_c = 1$$

özelliği kullanılarak

$$\tilde{\varphi} = \nabla_c^{-1}[c_1\{\nabla_c(u_1)D_2 - \nabla_c(u_2)D_1 - c_4D_1 - c_5D_2\}\varphi + c_3D_2\varphi + c_1\psi]$$

$$\tilde{\psi} = c_1(v_1D_2 - v_2D_1)\varphi + \nabla_c^{-1}[c_1c_3(u_{22}D_1^2 + u_{11}D_2^2 - 2u_{12}D_1D_2) + (c_6D_1^2 + c_7D_1D_2 + c_8D_2^2\varphi) + c_3D_2\psi] \quad (3.107)$$

elde edilir. Bu iki denklem matris formda

$$\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} \quad (3.108)$$

şeklinde yazılabilir. Burada 2×2 matris formunda R yenileme operatörü (3.107) denklemleri

$$R = \begin{pmatrix}R_{11} & c_1\nabla_c^{-1}\\ R_{21} & c_3\nabla_c^{-1}D_2\end{pmatrix} \quad (3.109)$$

şeklinde bulunur. Burada matris elemanları

$$R_{11} = \nabla_c^{-1}[c_1\{\nabla_c(u_1)D_2 - \nabla_c(u_2)D_1 - c_4D_1 - c_5D_2\} + c_3D_2]$$

$$R_{21} = c_1(v_1D_2 - v_2D_1) + \nabla_c^{-1}[c_1\{c_3(u_{22}D_1^2 + u_{11}D_2^2 - 2u_{12}D_1D_2) + (c_6D_1^2 + c_7D_1D_2 + c_8D_2^2)\}] \quad (3.110)$$

şeklindedir. Aynı işlemler benzer şekilde (3.59)'daki alternatif set için de yenileme operatörü elde ederken baştan sona uygulanır. Bu durumda (3.59)'un yenileme ilişkileri ile (3.32)'deki türev operatörleri kullanılarak iki bileşenli formda yazılmış hali

$$c_3D_2\tilde{\varphi} - c_1\tilde{\psi} = B_2 \equiv \{c_2(c_2L_{12(t)} - c_3L_{12(2)}) - c_2c_6D_1 - (c_1c_8 + c_3c_5)D_2\}\varphi + c_3\psi$$

$$c_2\tilde{\psi} + c_3D_1\tilde{\varphi} = B_1\varphi \equiv \{-c_2(c_3L_{12(1)} + c_2L_{12(t)}) + (c_2c_7 - c_1c_8 - c_3c_5)D_1 - c_2c_8D_2\}\varphi \quad (3.111)$$

şeklinde olur. Burada $\tilde{\varphi}$'yi elde etmek için (3.111)'de birinci denklem c_1 sabiti ile ikinci denklem ise c_2 ile çarpılarak taraf tarafa toplanır ve ara işlemlerden sonra

$$c_3\nabla_c(\tilde{\varphi}) = [-c_1c_2c_3u_{12} + (c_1c_2c_7 - c_1^2c_8 - c_1c_3c_5) - c_2^2c_3u_{22} - c_2^2c_6]\varphi_1 + [c_1c_2c_3u_{11} + c_2^2c_3u_{12} - c_2c_3c_5]\varphi_2 + c_2c_3\psi \quad (3.112)$$

elde edilir. Sabit terimlerin birbirini götürmesi için (3.37) denklemi yeniden düzenlenir ve integre edilebilirlik koşulu kullanılarak

$$-c_2^2 c_6 = -(c_2 c_3 c_4 + c_3^2) - (c_1^2 c_8 + c_1 c_3 c_5 - c_1 c_2 c_7) \tag{3.113}$$

yerine yazıldığında

$$\tilde{\varphi} = \nabla_c^{-1}\{-c_2\left(c_1 L_{12(1)} + c_2 L_{12(2)}\right) - (c_2 c_4 + c_3) D_1 - c_2 c_5 D_2\}\varphi + c_2 \nabla_c^{-1}\psi \tag{3.114}$$

bulunur. $\tilde{\psi}$'yi elde etmek için (3.111)'deki denklemlerden birincisi D_2 toplam türevi, ikincisi ise D_1 toplam türevi ile çarpılır ve taraf tarafa toplanır. Eşitliğin sağ tarafında ise türev işlemi yapılıp gerekli işlemlerden sonra

$$\begin{aligned}\nabla_c \tilde{\psi} = [&-c_2 c_3 u_{12}\varphi_{12} - c_2^2 u_{2t}\varphi_{12} + (-c_1 c_8 - c_3 c_5 + c_2 c_7)\varphi_{11} - c_2 c_1 u_{2t}\varphi_{11} \\ &+ c_2 c_3 u_{22}\varphi_{11} + c_2 c_6 \varphi_{11} + c_2 c_3 u_{11}\varphi_{22} + c_2^2 u_{1t}\varphi_{22} + c_2 c_8 \varphi_{22} + \\ &c_2 c_1 u_{1t}\varphi_{12} - c_2 c_3 u_{12}\varphi_{12} + (c_1 c_6 + c_3 c_5)\varphi_{12} + c_3\psi_1]\end{aligned} \tag{3.115}$$

şeklinde olur ve $\nabla_c^{-1}\nabla_c = 1$ ilişkisi uygulanarak

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} = [&c_3 \nabla_c^{-1} D_1 \left\{c_1 L_{12(1)} + c_2 L_{12(2)} + \left(c_4 + \frac{c_3}{c_2}\right) D_1 + c_5 D_2\right\} + \\ &\left\{-\left(c_3 L_{12(1)} + c_2 L_{12(t)}\right) + \frac{1}{c_2}(c_2 c_7 - c_1 c_8 - c_3 c_5) D_1 + c_8 D_2\right\} - c_3 \nabla_c^{-1} D_1 \psi\end{aligned} \tag{3.116}$$

bulunur. İkinci yenileme ilişkileri 2×2 matris formunda

$$R' = \begin{pmatrix} R_{11}' & c_2 \nabla_c^{-1} \\ R_{21}' & -c_3 \nabla_c^{-1} D_1 \end{pmatrix} \tag{3.117}$$

şeklinde gösterilir. Burada R_{11}' ve R_{21}' matris elemanları

$$R_{11}' = -c_2 \nabla_c^{-1}\left\{c_1 L_{12(1)} + c_2 L_{12(2)} + \left(c_4 + \frac{c_3}{c_2}\right) D_1 + c_5 D_2\right\}$$

$$\begin{aligned}R_{21}' = c_3 \nabla_c^{-1} D_1 &\left\{c_1 L_{12(1)} + c_2 L_{12(2)} + \left(c_4 + \frac{c_3}{c_2}\right) D_1 + c_5 D_2\right\} - \left(c_3 L_{12(1)} + c_2 L_{12(t)}\right) + \\ &\frac{1}{c_2}(c_2 c_7 - c_1 c_8 - c_3 c_5) D_1 + c_8 D_2\end{aligned} \tag{3.118}$$

şeklindedir.

3.4.2 Belirli Durumlar: $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ ve $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$

İkinci yenileme operatörü bulunurken geçerli olan durum $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ şeklinde olacaktır. Buna karşılık geçerli olan integre edilebilirlik koşulu

$$c_2(c_2c_6 - c_3c_4) = c_3^2 \tag{3.119}$$

şeklinde olur.

Genel durumda (3.117)'deki ikinci yenileme operatörünün matris elemanlarına integre edilebilirlik koşulu ve $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ uygulandığında

$$R^{'} = \begin{pmatrix} -c_2 D_2^{-1}\left(L_{12(2)} + \frac{c_6}{c_3}D_1\right) - c_5 & D_2^{-1} \\ R_{21}^{'} & -\frac{c_3}{c_2}D_2^{-1}D_1 \end{pmatrix} \tag{3.120}$$

elde edilir ve

$$R_{21}^{'} = c_3 D_2^{-1} D_1\left(L_{12(2)} + \frac{c_6}{c_3}D_1\right) - \left(c_3 L_{12(1)} + c_2 L_{12(t)}\right) + c_7 D_1 + c_8 D_2 \tag{3.121}$$

ile verilir.

İkinci durum $c_2 = 0,\ c_1 \neq 0,\ R$ operatörünün özel bir durumu olarak (3.109) denklemleri kullanılırsa

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & D_1^{-1} \\ R_{21} & \frac{c_3}{c_1}D_1^{-1}D_2 \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

şeklinde olur ve

$$R_{11} = -D_1^{-1}\{c_1 L_{12(1)} + (c_1c_5 - c_3)D_2\} - c_1c_4 \tag{3.123}$$

$$R_{21} = -c_1 L_{12(t)} + c_6 D_1 + c_7 D_2 + D_1^{-1}\{c_3(u_{22}D_1^2 + u_{11}D_2^2 - 2u_{22}D_1D_2) + c_8 D_2^2\}$$

ile verilir.

3.4.3 Özel Durum: $c_3 = 0,\ c_1 \cdot c_2 \neq 0$

Bu durum için (3.69) için yenileme ilişkileri iki bileşenli formda

$$c_1\tilde{\psi} = c_1c_2(v_2\varphi_1 - v_1\varphi_2) - c_2c_6\varphi_1 - c_1c_8\varphi_2$$

$$\nabla_c(\tilde{\varphi}) = c_2\{\nabla_c(u_2)\varphi_1 - \nabla_c(u_1)\varphi_2 + c_4\varphi_1 + c_5\varphi_2 - \psi\} \tag{3.124}$$

şeklini alır. (3.124)'deki yenileme ilişkilerinin iki bileşenli formunun açık hali

$$\tilde{\psi} = c_2(v_2\varphi_1 - v_1\varphi_2) - \frac{c_2c_6}{c_1}\varphi_1 - c_8\varphi_2$$

$$\tilde{\varphi} = \nabla_c^{-1}c_2\{\nabla_c(u_2)\varphi_1 - \nabla_c(u_1)\varphi_2 + c_4\varphi_1 + c_5\varphi_2 - \psi\} \tag{3.125}$$

şeklindedir. (3.125)'deki yenileme operatörünün matris formu

$$R = \begin{pmatrix} -c_2\nabla_c^{-1}\{\nabla_c(u_2)D_1 - \nabla_c(u_1)D_2 + c_4D_1 + c_5D_2\} & -c_2\nabla_c^{-1} \\ c_2(v_2D_1 - v_1D_2) - \frac{c_2c_6}{c_1} - c_8D_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.126)$$

şeklinde olur. Böylece üç farklı durum için yineleme operatörleri elde edilmiştir. Bu operatörler bir sonraki bölümde ikinci Hamiltoniyen operatörlerini elde etmek için kullanılacaktır.

3.5 İkili-Hamiltoniyen Yapı

3.5.1 Genel Durum

3.5.1.1 Birinci İkili-Hamiltoniyen Ailesi

Bir önceki bölümde elde edilen yenileme operatörlerini kullanarak ikili-Hamiltoniyen yapı oluşturulabilir. İkinci Hamiltoniyen operatörü J_1, daha önce elde edilen birinci Hamiltoniyen operatörü J_0'a (3.108)'de verilen yenileme operatörünün etki ettirilmesi ile bulunur. Bu durumda

$$J_1 = RJ_0 \quad (3.127)$$

şeklindedir. İkinci Hamiltoniyen operatörü J_1'in 2×2 matris formunda ifade edilmek istenirse

$$\begin{pmatrix} J_1^{11} & J_1^{12} \\ J_1^{21} & J_1^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & J_0^{22} \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

şeklinde olur. Burada matris elamanları yerlerine yazılarak matris çarpımı yapıldığında matris elemanları

$$\begin{aligned} J_1^{11} &= c_1\nabla_C^{-1} \\ J_1^{21} &= -c_3D_2\nabla_c^{-1} \\ J_1^{12} &= c_3D_2\nabla_c^{-1} \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$J_1^{22} = c_3L_{12(2)} - c_1L_{12(t)} + \nabla_c^{-1}\{c_1(c_6D_1^2 + c_7D_1D_2 + c_8D_2^2) + c_3D_2(c_4D_1 + c_5D_2)\}$$

şeklinde bulunur ve ters simetrik J_1 operatörü matris formunnda

$$J_1 = \begin{pmatrix} -c_3\nabla_c^{-1} & c_3\nabla_c^{-1}D_2 \\ -c_3\nabla_c^{-1}D_2 & J_1^{22} \end{pmatrix} \quad (3.130)$$

ile gösterilir. Kolaylık sağlaması açısından J_1^{22} matris elemanını işlemlerde kullanırken

$$J_1^{22} = \frac{1}{c_1}(B_1 + \nabla_c^{-1} c_3^2 D_2^2) \tag{3.131}$$

şeklinde de ifade edilebiliriz. Burada B_1 terimi önceki bölümde (3.40) operatör denklemlerinde verilmiş olup

$$B_1 = c_1\big(c_3 L_{12(2)} - c_1 L_{12(t)}\big) + c_1 c_6 D_1 + (c_1 c_7 - c_2 c_6 + c_3 c_4) D_2 \tag{3.132}$$

ile ifade edilmektedir ve J_1 ters simetrik ve Jacobi özdeşliğini sağlamaktadır. J_1 ve J_0'ın Jacobi özdeşliğini sağladığı bölüm 3.6' da gösterilecektir.

İkili-Hamiltoniyen yapıyı tamamlamak için J_1 Hamiltoniyen operatörüne karşılık gelen H_0, Hamiltoniyen yoğunluğunun bulunması gereklidir. Böylece iki bileşenli sistemin ikili-Hamiltoniyen formu

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} \tag{3.133}$$

ile ifade edilebilir. Bu sonuca göre (3.71) sisteminin Magri teoremine göre integre edilebilir olduğu anlaşılır [41,42].

Önerme 3.5.1:

(3.133) denkleminde verilen ikili-Hamiltoniyen gösterimde H_0 ikinci Hamiltoniyen yoğunluğu

$$H_0 = v\left\{\frac{1}{c_1}\nabla_c(u) + \frac{c_4}{c_1} z_2 + \frac{(c_3 - c_1 c_5)}{c_1^2} z_1 + s_0\right\} - \frac{-c_3}{2c_1^2} u_2 \nabla_c(u) + \frac{c_3 c_4}{c_1^2} u \tag{3.134}$$

şeklindedir ve

$$c_9 = \frac{1}{c_2^2}\{c_8(c_2 c_4 + c_3) + c_5(c_3 c_5 - c_2 c_7)\} \tag{3.135}$$

ile verilen bağ koşulu altında geçerlidir.

İspat:

H_0 ikinci Hamiltoniyen operatörü, H_1 gibi Langrange fonksiyonundan bulunamayacağından (3.133) denklemi kullanılır. Kolaylık olması için J_1 matrisinin J_1^{22} elemanı, daha önce tanımlanan B_1 operatörü cinsinden

$$J_1^{22} = \frac{1}{c_1}(B_1 + \nabla_c^{-1} c_3^2 D_2^2) \tag{3.136}$$

şeklinde yazılabilir. (3.133) denkleminde J_1'in ilk satırı H_0'ın varyasyonel türevlerine etki ettirilip, ∇_c uygulanırsa

$$\nabla_c(J_1^{11}\delta_u H_0 + J_1^{12}\delta_v H_0) \equiv c_3 D_2 \delta_v H_0 - c_1 \delta_u H_0 = \nabla_c(v) = c_1 v_1 + c_2 v_2 \quad (3.137)$$

elde edilir. (3.132) kullanılarak J_1'in ikinci satırına uygulanırsa

$$J_1^{21}\delta_u H_0 + J_1^{22}\delta_v H_0 \equiv \frac{1}{c_1} B_1 \delta_v H_0 + \frac{c_3}{c_1} D_2 \nabla_c^{-1}(c_3 D_2 \delta_v H_0 - c_1 \delta_u H_0) = v_t \quad (3.138)$$

şeklinde bulunur ve (3.137)'nin kullanılmasıyla

$$\frac{1}{c_1} B_1(\delta_v H_0) + \frac{c_3}{c_1} v_2 = v_t \;\Leftrightarrow\; B_1(\delta_v H_0) = c_1 v_t - c_3 v_2 \quad (3.139)$$

bulunur. Böylece H_0'ın, v'ye lineer bağlı olduğunu kabul ederek

$$H_0 = b[u]v + c[u] \quad (3.140)$$

yazılabilir. Burada b ve c yalnızca u ve türevlerine bağlıdır. Buradan

$$\delta_v H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial v} = b[u] \quad (3.141)$$

elde edilir. (3.141), (3.139)'te yerine yazıldığında ve (3.132) kullanıldığında

$$B_1(b[u]) = c_1 v_t - c_3 v_2 \quad (3.142)$$

şeklinde olur ve daha açık haliyle

$$c_1\{c_3(u_{22}D_1[b] - u_{12}D_2[b]) + c_1(v_1 D_2[b] - v_2 D_1[b])\} + c_1 c_6 D_1[b] + (c_1 c_7 - c_2 c_6 + c_3 c_4) D_2[b] = c_1\{v_1 \nabla_c(u_2) - v_2 \nabla_c(u_1) + c_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_4 v_1 + c_5 v_2 + c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22} + c_9\} - c_3 v_2 \quad (3.143)$$

şeklini alır. Eşitliğin sağ tarafı sıfır olacak şekilde yeniden düzenlenirse

$$v_1[c_1^2 D_2[b] - c_1(\nabla_c(u_2) + c_4)] + v_2[-c_1^2 D_1[b] + c_1 \nabla_c(u_1) + c_1 c_5 - c_3] + c_1\{c_3(u_{22}D_1[b] - u_{12}D_2[b]) + c_1 c_6 D_1[b] + (c_1 c_7 - c_2 c_6 + c_3 c_4) D_2[b] - c_1\{c_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22} + c_9\} = 0\} \quad (3.144)$$

elde edilir ve (3.140) denkleminin v'den bağımsız olması gerektiğinden v_1 ve v_2 parantezleri

$$[c_1^2 D_1[b] - c_1(\nabla_c(u_1) + c_1 c_7 - c_3)] = 0$$
$$[c_1^2 D_2[b] - c_1(\nabla_c(u_2) + c_4)] = 0 \quad (3.145)$$

olur ve düzenlenerek

$$D_2[b] = \frac{1}{c_1}\{\nabla_c(u_2) + c_4\}$$

$$D_1[b] = \frac{1}{c_1}\left\{\nabla_c(u_1) + \frac{(c_3 - c_1 c_5)}{c_1}\right\} \tag{3.146}$$

denklemleri elde edilir. Burada her iki denklemin integrali alınarak b

$$b = \frac{1}{c_1}\nabla_c(u) + \frac{c_4}{c_1}z_2 + \frac{(c_3 - c_1 c_5)}{c_1^2}z_1 + s_0 \tag{3.147}$$

şeklinde çözülür. Bu sonuç (3.140)'taki b terimini verir ve s_0 integral sabitidir. (3.146)'daki denklemler (3.144)'de yerine yazıldığında kalan tüm terimler birbirini götürür yalnızca u_{22} ifadesini içeren terimler (3.37)'deki integre edilebilirlik koşuluna göre sıfır olur. Böylece b, H_0'da yerine yazılırsa

$$H_0 = v\left\{\frac{1}{c_1}\nabla_c(u) + \frac{c_4}{c_1}z_2 + \frac{(c_3 - c_1 c_5)}{c_1^2}z_1 + s_0\right\} - c[u] \tag{3.148}$$

bulunur. (1.138) denklemi kullanılarak ve

$$\delta_u H_0 \equiv \delta_u(b[u]v) + \delta_u(c[u]) \tag{3.149}$$

şeklindeki genel ifadeden başlayarak (3.137)'daki ifade düzenlenirse

$$c_1\delta_u H_0 = c_3 D_2 \delta_v H_0 - \nabla_c(v) \tag{3.150}$$

elde edilir. c_1 sabiti sağ tarafa bölüm olarak geçer ve (3.141)'deki ifade yerine yazılırsa

$$\delta_u H_0 \equiv \delta_u(b[u]v) + \delta_u(c[u]) \equiv \frac{1}{c_1}\{c_3 D_2[b] - \nabla_c(v)\} \tag{3.151}$$

bulunur.

(3.147) denklemden

$$\delta_u(bv) = -\frac{1}{c_1}\nabla_c(v) \tag{3.152}$$

şeklinde bulunur ve (3.149)'da eşitliğin sağında yerine yazılır, soluna ise (3.151)'de oluşturulan ifade yazılırsa

$$\delta_u(c[u]) = \frac{1}{c_1}c_3 D_2[b] \tag{3.153}$$

elde edilir. (3.146)'da $D_2[b]$ ifadesi yerine konulursa

$$\delta_u(c[u]) = \frac{1}{c_1^2}c_3(\nabla_c(u_2) + c_4) \tag{3.154}$$

ve $c[u]$'nun

$$c[u] = au_1u_2 + \beta u_2^2 + \gamma(u) \tag{3.155}$$

formunda bir denklem olacağı açıktır. Buradan a ve β denklem sabitleri ve $\gamma(u)$ keyfi fonksisyondur. (3.155), (3.154)'te kullanılırsa a, β ve γ bulunarak

$$c[u] = -\frac{c_3}{2c_1^2}u_2\nabla_c(u) + -\frac{c_3c_2}{c_1^2}u + \gamma_0 \tag{3.156}$$

elde edilir. Burada γ_0 integral sabitidir böylece H_0, Hamiltoniyen yoğunluğu

$$H_0 = v\left\{\frac{1}{c_1}\nabla_c(u) + \frac{c_4}{c_1}z_2 + \frac{(c_3 - c_1c_5)}{c_1^2}z_1 + s_0\right\} - \frac{-c_3}{2c_1^2}u_2\nabla_c(u) + \frac{c_3c_4}{c_1^2}u + \gamma_0 \tag{3.157}$$

şeklinde bulunur ve (3.135)'teki koşul altında geçerlidir. Bundan sonraki kısımda ikinci Hamiltoniyen operatörü varyasyonel türevi alınan Hamiltoniyen yoğunluğuna etki ettirildiğinde (3.39)'u sağlayarak Magri teoremine göre integre edilebilir olduğunu ispatlamak gerekecektir. Böylece öncesinde (3.133)'teki ifadenin 2×2 matris formu

$$\binom{u_t}{v_t} = \begin{pmatrix} -c_1\nabla_c^{-1}\frac{\delta H_0}{\delta u} & c_3\nabla_c^{-1}D_2\frac{\delta H_0}{\delta v} \\ -c_3\nabla_c^{-1}D_2\frac{\delta H_0}{\delta u} & J_1^{22}\frac{\delta H_0}{\delta v} \end{pmatrix} \tag{3.158}$$

şeklini alır ve Hamiltoniyen yoğunluğunun v ve u' ya göre varyasyonel türevleri sırasıyla

$$\frac{\delta H_0}{\delta v} = \frac{1}{c_1}(c_1u_1 + c_2u_2) + \frac{c_4}{c_1}z_2 + \left(\frac{c_3 - c_1c_5}{c_1^2}\right)z_1 + s_0 \tag{3.159}$$

$$\frac{\delta H_0}{\delta u} = \frac{c_3}{2c_1}u_{12} + \frac{c_3c_2}{c_1^2}u_{22} + \frac{c_3}{2c_1}u_{12} + \left(\frac{c_1v_1 + c_2u_2}{c_1}\right) + \frac{c_3c_4}{c_1^2} \tag{3.160}$$

şeklinde olur. (3.159) ve (3.160), (3.158)'de verilen 2×2 matris formundaki ifadede yerine yazıldığında sütun matrisi

$$\begin{pmatrix} v \\ v_1\nabla_c(u_2) - v_2\nabla_c(u_1) + c_3(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) + c_4v_1 + c_5v_2 + c_6u_{11} + c_7u_{12} + c_8u_{22} + c_9 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur ve iki bileşenli sistem elde edilir.

3.5.1.2 İkinci İkili-Hamiltoniyen Ailesi

İkinci ikili-Hamiltoniyen ailesi R' alternatif yenileme operatörüne alternatif ikinci Hamiltoniyen oluşturmak için birinci Hamiltoniyen operatörü J_0'a uygulanarak $J_1' = R'J_0$ elde edilebilir. Alternatif ikinci Hamiltoniyen operatörü

$$J_1^{'} = \begin{pmatrix} -c_2\nabla_c^{-1} & -c_3\nabla_c^{-1}D_1 \\ c_3\nabla_c^{-1}D_1 & \frac{1}{c_2}(c_3^2\nabla_c^{-1}D_1^2 + B_1) \end{pmatrix} \tag{3.170}$$

şeklindedir. Burada B_1 ifadesi

$$B_1 = -c_2\left(c_3L_{12(1)} + c_2L_{12(t)}\right) + c_2c_8D_2 + (c_2c_7 - c_1c_8 + c_3c_5)D_1 \tag{3.171}$$

ile verilir. $H_0^{'}$, $J_1^{'}$ operatörüne karşılık gelen Hamiltoniyen yoğunluğu olmak üzere ikili-Hamiltoniyen gösterim

$$J_0\begin{pmatrix}\delta_u H_1 \\ \delta_v H_1\end{pmatrix} = J_1^{'}\begin{pmatrix}\delta_u H_0^{'} \\ \delta_v H_0^{'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} \tag{3.172}$$

şeklinde bulunur.

Önerme 3.5.2:

(3.25) sisteminin (3.172)'de verilen ikili-Hamiltoniyen gösterimine göre $H_0^{'}$, Hamiltoniyen yoğunluğu

$$H_0^{'} = \frac{v}{c_2}\left\{\nabla_c(u) - c_5z_1 + \left(c_4 + \frac{c_3}{c_2}\right)z_2\right\} + s_0v + \frac{c_3}{2c_2^2}(u_1\nabla_c(u) + 2c_5u) \tag{3.173}$$

şeklindedir ve

$$c_9 = \frac{(c_3c_5 + c_1c_8)}{c_1c_2^2c_3}\{c_3(c_3 - c_1c_5) - c_1^2c_8\} + \frac{c_6c_8}{c_3} \tag{3.174}$$

bağ koşulu altında geçerlidir.

İspat:

$J_1^{'}$ matrisinin ilk satırı, $H_0^{'}$'ın varyasyonel türevinin sütunu ile çarpıldığında ve ∇_c uygulandığında

$$\delta_u H_0^{'} = -\frac{1}{c_2}(c_3D_1\delta_u H_0^{'} + \nabla_c v) \tag{3.175}$$

elde edilir (3.172)'nin ikinci sırası ise

$$c_3\nabla_c^{-1}D_1\delta_u H_0^{'} + \frac{1}{c_2}(c_3^2\nabla_c^{-1}D_1^2 + B_1)\delta_v H_0^{'} = v_t \tag{3.176}$$

olur. (3.175)'deki denklem (3.176)'de yerine yazılırsa

$$B_1(\delta_v H_0^{'}) = c_2v_t + c_3v_1 \tag{3.177}$$

bulunur ve $H_0^{'}$, v'ye lineer bağlı olarak

$$H_0^{'} = b[u]v + c[u] \quad \Rightarrow \quad \delta_v H_0^{'} = \frac{\partial H_0^{'}}{\partial v} = b[u] \tag{3.178}$$

elde edilir. Burada b ve c yalnızca u ve türevlerine bağlıdır. (3.178), (3.177)'de yerine yazılır ve (3.171)'deki B_1 ile (3.71)'deki v_t kullanılarak, b'nin toplam türevlerine göre ayrıldıklarında iki ayrı denklem elde edilir ve bu denklemler

$$D_1[b] = \frac{1}{c_2}\{\nabla_c(u_1) - c_5\}; \quad D_2[b] = \frac{1}{c_2}\left\{\nabla_c(u_2) + c_4 + \frac{c_3}{c_2}\right\} \tag{3.179}$$

şeklinde olur. İntegraller alındığında bu iki denklem

$$b = \frac{1}{c_2}\left\{\nabla_c(u) - c_5 z_1 + \left(c_4 + \frac{c_3}{c_2}\right) z_2\right\} \pm s_0 \tag{3.180}$$

şeklinde elde edilir. Kalan değişkenler gider ve sabit terimler de (3.174)'teki koşul uygulandığında birbirlerini götürür. (3.180), (3.178)'de yerine yazılır ve (3.175) kullanılarak $\delta_u H_0^{'}$ hesaplandığında

$$\delta_u c[u] = -\frac{c_3}{c_2^2}(c_1 u_{11} + c_2 u_{12} - c_5) \tag{3.181}$$

elde edilir ve

$$c[u] = \frac{c_3}{2c_2^2}(u_1 \nabla_c(u) + 2c_5 u) + \gamma_0 \tag{3.182}$$

sonucu bulunur. Böylece ikili-Hamiltoniyen sistemlerin ikinci ailesi için (3.173)'teki Hamiltoniyen yoğunluğu oluşturulmuştur. Burada γ_0 integral sabitidir ve $H_0^{'}$ için sıfır alınmıştır.

3.5.1.3 Üçlü-Hamiltoniyen Sistemler Ailesi

Eğer (3.135) ve (3.174) denklemlerinde verilen koşullar için c_9 elenirse ve (3.37) integre edilebilirlik koşulu göz önünde bulundurulursa, katsayılar için

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{c_2 c_3}(c_2^2 c_6 - c_1^2 c_8 - c_1 c_3 c_5) \\ c_7 &= \frac{1}{c_1 c_2}(2c_1^2 c_8 + 2c_1 c_3 c_5 - c_3^2) \\ c_9 &= \frac{(c_3 c_5 + c_1 c_8)}{c_1 c_2^2 c_3}\{c_3(c_3 - c_1 c_5) - c_1^2 c_8\} + \frac{c_6 c_8}{c_3} \end{aligned} \tag{3.183}$$

çözümleri elde edilebilir. Bu üç koşul altında altı parametreli üçlü-Hamiltoniyen sistem

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} \delta_u H_1 \\ \delta_v H_1 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} = J_1^{'} \begin{pmatrix} \delta_u H_0^{'} \\ \delta_v H_0^{'} \end{pmatrix} \tag{3.184}$$

elde edilir. Burada koşullar $c_1, c_2, c_3, c_5, c_6, c_8$ altı serbest parametreye bağlıdır.

3.5.2 Belirli Durumlar: $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ ve $c_2 = 0, c_1 \neq 0$

Öncelikle $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ durumunu ikinci ikili-Hamiltoniyen ailesine uygulanır. Bu nedenle Hamiltoniyen operatörü $J_1^{'}$'de yerine yazıldığında

$$J_1^{'} = \begin{pmatrix} -D_2^{-1} & -\frac{c_3}{c_2} D_2^{-1} D_1 \\ \frac{c_3}{c_2} D_2^{-1} D_1 & \frac{c_3^2}{c_2^2} D_2^{-1} D_1^2 + \frac{1}{c_2} B_1 \end{pmatrix} \tag{3.185}$$

elde edilir. Buradaki B_1 ifadesi açık bir şekilde yazıldığında

$$B_1 = -c_2\left(c_3 L_{12(2)} + c_2 L_{12(t)}\right) + (c_2 c_7 - c_3 c_5) D_1 + c_2 c_8 D_2 \tag{3.186}$$

ve

$$(J_1^{'})^{22} = -\left(c_3 L_{12(1)} + c_2 L_{12(t)}\right) + \left(c_7 - \frac{c_3 c_5}{c_2}\right) D_1 + c_8 D_2 \tag{3.187}$$

şeklini alır. Belirli durumların ilkine ait Hamiltoniyen yoğunluğu, (3.173)'teki Hamiltoniyen yoğunluğuna $c_1 = 0$ yazılarak

$$H_0^{'} = v\left\{u_2 - \frac{c_5}{c_2} z_1 + \frac{c_6}{c_3} z_2\right\} + s_0 v + \frac{c_3}{2c_2} u_1 u_2 + \frac{c_3 c_5}{c_2^2} u \tag{3.188}$$

şeklinde elde edilir. $H_0^{'}$'nun geçerli olduğu ek bağ koşulu ve integre edilebilirlik koşulu sırasıyla $c_1 = 0$ için

$$c_2(c_2 c_6 - c_3 c_4) = c_3^2$$

$$c_9 = \frac{1}{c_2^2}\{c_8(c_2 c_4 + c_3) + c_5(c_3 c_5 - c_2 c_7)\} \tag{3.189}$$

şeklini alır.

İkinci olarak $c_2 = 0,\ c_1 \neq 0$ durumu birinci ikili-Hamiltoniyen yapının özel bir durumu olarak tanımlanır. Bu nedenle ikinci Hamiltoniyen operatörü J_1'de, $c_2 = 0$ yazılır ve

$$J_1 = \begin{pmatrix} -D_1^{-1} & \frac{c_3}{c_1} D_1^{-1} D_2 \\ -\frac{c_3}{c_1} D_1^{-1} D_2 & \frac{c_3^2}{c_1^2} D_1^{-1} D_2^2 + \frac{1}{c_1} B_1 \end{pmatrix} \tag{3.190}$$

elde edilir. Burada

$$B_1 = c_1\left(c_3 L_{12(2)} - c_1 L_{12(t)}\right) + (c_1 c_7 - c_3 c_4) D_2 + c_1 c_6 D_1 \tag{3.191}$$

ve

$$(J_1)^{22} = \frac{c_3^2}{c_1^2} D_1^{-1} D_2^2 + c_3 L_{12(2)} - c_1 L_{12(t)} + c_6 D_1 + \left(c_7 + \frac{c_3 c_4}{c_1}\right) D_2 \tag{3.192}$$

şeklinde olur. (3.148)'deki H_0, Hamiltoniyen yoğunluğunda c_2 sabiti yerine sıfır konularak

$$H_0 = v\left(u_1 + \frac{c_4}{c_1} z_2 + \frac{c_8}{c_3} z_1 + s_0\right) - \frac{c_3}{2c_1} u_1 u_2 + \frac{c_3 c_4}{c_1^2} u \tag{3.193}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda ek bağ koşulu ve integre edilebilirlik koşulu sırasıyla

$$c_1(c_1 c_6 + c_3 c_5) = c_3^2$$

$$c_9 = \frac{1}{c_1^2}\{c_6(c_3 - c_1 c_5) + c_4(c_1 c_7 + c_3 c_4)\} \tag{3.194}$$

şeklini alır.

3.5.3 Özel Durum: $c_3 = 0$

İkinci Hamiltoniyen operatörü, yenileme operatörü yardımı ile $J_1 = RJ_0$'dan hesaplanıp $c_3 = 0$ alındığında

$$J_1 = \begin{pmatrix} c_2 \nabla_c^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_1} B_1 \end{pmatrix} \tag{3.195}$$

elde edilir. Burada

$$B_1 = c_1 c_2 L_{12(t)} - c_1 c_8 D_2 - c_2 c_6 D_1 \tag{3.196}$$

ve

$$J_1^{22} = -c_2\left(v_1 D_2 - v_2 D_1 + \frac{c_6}{c_1} D_1 + \frac{c_8}{c_2} D_2\right) = \frac{1}{c_1} B_1 \tag{3.197}$$

şeklinde olur ve bu durum için Hamiltoniyen gösterimi

$$J_1 \begin{pmatrix} \delta_u H_0 \\ \delta_v H_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} \tag{3.198}$$

şeklinde ifade edilir. Burada H_0 Hamiltoniyen yoğunluğu aşağıda verilen önerme ile elde edilir.

Önerme 3.5.3:

(3.198)'deki sistemin ikili-Hamiltoniyen gösterimine göre

$$H_0 = \frac{v}{c_2}\{-\nabla_c(u) + c_5 z_1 - c_4 z_2 + s_0\} \tag{3.199}$$

şeklindedir ve

$$c_9 = \frac{(c_1 c_4 c_8 - c_2 c_5 c_6)}{c_1 c_2} \tag{3.200}$$

şeklinde verilen bağ koşulu için geçerlidir.

İspat:

(3.198)'deki matris ifadesinin ilk sırası,

$$\delta_u H_0 = \frac{v}{c_2}\nabla_c(v) = \frac{c_5}{c_2}v_1 + v_2 \tag{3.201}$$

ve ikinci sırası

$$\frac{1}{c_1}B_1(\delta_v H_0) = v_t \tag{3.202}$$

şeklinde bulunur. Daha önce de yapıldığı gibi H_0'ın v'ye lineer bağlı olduğu kabul edilerek

$$H_0 = b[u]v + c[u] \quad \Rightarrow \quad \delta_v H_0 = b[u] \tag{3.203}$$

şeklinde ifade edilir. Burada b ve c yalnızca u ve türevlerine bağlıdır. (3.71)'de verilen v_t, (3.196)'daki B_1 ile kullanıldığında

$$c_2(v_1 D_2[b] - v_2 D_1[b]) + \frac{c_2 c_6}{c_1}D_1[b] + c_8 D_2[b] = \{-v_1\nabla_c(u_2) - v_2\nabla_c(u_1) + c_4 v_1 +$$

$$c_5 v_2 + c_6 u_{11} + c_7 u_{12} + c_8 u_{22} + c_9\} \tag{3.204}$$

elde edilir. (3.204) denklemi v'den bağımsız olması gerektiğinden v_1 ve v_2'li terimler sıfıra eşitlenerek

$$D_1[b] = -\frac{1}{c_2}\nabla_c(u_1) + \frac{c_5}{c_2}; \quad D_2[b] = -\frac{1}{c_2}\nabla_c(u_2) - \frac{c_4}{c_2} \tag{3.205}$$

bulunur ve denklemlerin integrali alınarak

$$b = \frac{1}{c_2}\{-\nabla_c(u) + c_5 z_1 - c_4 z_2 + s_0\} \tag{3.206}$$

elde edilir. (3.206) kullanılarak (3.203)'teki kalan sabit olmayan terimlerin birbirlerini götürmeleri için sabitler arasındaki ilişki

$$c_9 = \frac{(c_1 c_4 c_8 - c_2 c_5 c_6)}{c_1 c_2} \tag{3.207}$$

ile verilen koşul altında elde edilir. (3.206), (3.203)'te yerine yazıldığında

$$H_0 = \frac{v}{c_2}\{-\nabla_c(u) + c_5 z_1 - c_4 z_2 + s_0\} + c[u] \tag{3.208}$$

elde edilir. (3.208)'in u'ya göre varyasyon türevi alınarak (3.201)'de yerine yazıldığında $c[u]$'nun u'ya göre varyasyonu sıfır değerini alır. Bu sebeple $c[u] = 0$ olur.

3.6 Jacobi Özdeşliği

Bir ikili-Hamiltoniyen sistem için elde edilen ters simetrik J_0 ve J_1 Hamiltoniyen operatörlerinin hem ayrı ayrı hem de lineer birleşiminin Jacobi özdeşliğini sağlaması gerekmektedir. Bunun için

$$J = aJ_0 + bJ_1 \tag{3.209}$$

lineer birleşiminin Jacobi özdeşliğini sağladığını kontrol etmek yeterli olacaktır. Burada a ve b keyfi sabitlerdir. Sırasıyla $a = 1$ ile $b = 0$ ve $a = 0$ ile $b = 1$ seçilirse J_0 ve J_1'in ayrı ayrı Jacobi özdeşliği hesaplanmış olacaktır. $a = b = 1$ seçilirse lineer birleşiminde uyumlu (compatible) olduğu gösterilmiş olur. Burada Jacobi özdeşliğinin hesabı için P. Olver'in [2] kitabında verilen 7.8 Teoremi kullanılır.

Teorem: $\mathcal{D}$ ters simetrik $l \times l$ matris diferansiyel operatör ve

$$\Theta = \frac{1}{2}\int\left[\left(J_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta}\right) \wedge \omega^{\alpha}\right] dz_1 dz_2 \tag{3.210}$$

karşılık gelen ikili-vektör olsun. $\mathcal{D}$ operatörünün Hamiltoniyen olması ancak ve ancak

$$PrV_{\mathcal{D}\omega}(\Theta) = 0 \tag{3.211}$$

ile sağlanır. $PrV_{\mathcal{D}\omega}(\Theta)$ uzatılmış (prolonged) evrimsel vektör alandır ve

$$PrV_{\mathcal{D}\omega} = \sum_{\alpha\beta} D_J\left(\mathcal{D}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial u_J^{\alpha}}; \quad J = 0, z_1, z_2, z_1 z_1, z_2 z_2, \cdots \tag{3.212}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u_0^i = u^i$ ve bu durum için $\alpha, \beta = 1{,}2$ olurken $u^1 = u$ ve $u^2 = v$ değerlerini alır. Burada $\omega = (\omega^1, \omega^2) = (\eta, \theta)$ tek-vektör olup (uni-vektör) türev operatörü $D_J(\omega^i) = \omega_J^i$ şeklinde etkir. Çoklu vektörlerin (multi-vector) fonksiyonel uzayında, Θ ve $PrV_{\mathcal{D}\omega}(\Theta)$'deki bütün toplam türevler yok olur. Yani hesaplama yapılırken $PrV_{\mathcal{D}\omega}$ integrali içindeki toplam türevli terimleri dikkate almaya gerek kalmayacaktır. Ek olarak uzatılmış evrimsel vektör alan $PrV_{\mathcal{D}\omega}$'ın tek vektörlere etkisi $PrV_{\mathcal{D}\omega}(\omega_i) = 0$'dır. Böylece Jacobi özdeşliğini hesaplamak için $J = aJ_0 + bJ_1$ yazarak başlayabiliriz. Bu ifadenin matris formu

$$J = \begin{pmatrix} -bc_1\nabla_c^{-1} & bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a \\ -bc_3\nabla_c^{-1}D_2 - a & aJ_0^{22} + bJ_1^{22} \end{pmatrix} \tag{3.213}$$

şeklindedir. Kolaylık olması açısından $J^{22} = aJ_0^{22} + bJ_1^{22}$ terimi için

$$A = ac_1u_{12} + ac_2u_{22} + ac_4 + bc_3u_{22} - bc_1v_2 + bc_6$$

$$B = -bc_3u_{12} + bc_1v_1 - ac_1u_{12} - ac_2u_{12} + ac_5 + \frac{b}{c_1}(c_1c_7 - c_2c_6 + c_3c_4) + \frac{b}{c_1}\nabla_c^{-1}c_3^2D_2 \tag{3.214}$$

olmak üzere

$$J_{22} = AD_1 + BD_2 \tag{3.215}$$

şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki teoreme göre $\mathcal{D} = J$ alınarak iki-vektör Θ

$$\Theta = \frac{1}{2}\int\left[\left(J_{\alpha\beta}\,\omega^\beta\right) \wedge \omega^\alpha\right]dz_1dz_2 \tag{3.216}$$

ve

$$\Theta = \frac{1}{2}\int [(J_{11}\omega^1) \wedge \omega^1 + (J_{12}\omega^2) \wedge \omega^1 + (J_{21}\omega^1) \wedge \omega^2 + (J_{22}\omega^2) \wedge \omega^2]\, dz_1dz_2$$

şeklini alır. Burada $\omega^1 = \eta$ ve $\omega^2 = \theta$ ve J_{ij} operatörleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Theta = \frac{1}{2}\int\{&-bc_1\eta \wedge \nabla_c^{-1}\eta + 2a\eta \wedge \theta + 2bc_3\eta \wedge \nabla_c^{-1}\theta_2 \\ &+a\theta \wedge (c_1u_{12} + c_2u_{22} + c_4)\theta_1 - a\theta \wedge (c_1u_{11} + c_2u_{12} + c_5)\theta_2 \\ &+b\theta \wedge (c_3u_{22} + c_1v_1)\theta_1 - b\theta \wedge (c_3u_{12} + c_1v_1)\theta_2\}dz_1dz_2\end{aligned} \tag{3.217}$$

elde edilir. Burada "∧" dış çarpan ve

$$\eta \wedge \theta = -\theta \wedge \eta \quad \text{ve} \quad \theta \wedge \theta = \eta \wedge \eta = 0 \tag{3.218}$$

özelliklerine sahiptir. Böylece Θ (3.216) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(\Theta) = \frac{1}{2}\{&[ac_1\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{12}) + ac_2\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{22}) + bc_3\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{22}) - \\ &bc_1\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(v_2)]\theta_1 \wedge \theta + [-ac_1\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{11}) - ac_2\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{12}) \\ &+bc_3\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{12}) + bc_1\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(v_1)]\theta_2 \wedge \theta\}dz_1dz_2\end{aligned} \tag{3.219}$$

bulunur. Uzatılmış $PrV_{J\omega}$ evrimsel vektör alanları J operatörünün matris elemanları cinsinden:

$$\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{ij}) = D_iD_j(J^{11}\eta + J^{12}\theta) \tag{2.220}$$

$$\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(v_i) = D_i(J^{21}\eta + J^{12}\theta) \tag{2.221}$$

şeklinde hesaplanır ve

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(v_1) &= D_1[-(bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\eta + A\theta_1 + B\theta_2] \\ \boldsymbol{PrV_{J\omega}}(v_2) &= D_2[(bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\eta - A\theta_1 - B\theta_2] \\ \boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{22}) &= D_2^2[-bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta] \\ \boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{12}) &= D_1D_2[-bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta] \\ \boldsymbol{PrV_{J\omega}}(u_{11}) &= D_1^2[-bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta]\end{aligned} \tag{3.222}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler (3.219)'da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PrV_{J\omega}}(\Theta) = \frac{1}{2}\int\{&ac_1D_1D_2\,[bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta] \wedge \theta_1 \wedge \theta \\ &+ac_2D_2^2[bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta] \wedge \theta_1 \wedge \theta \\ &+bc_3D_2^2[bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta] \wedge \theta_1 \wedge \theta \\ &+bc_1D_2[(bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\eta - A\theta_1 - B\theta_2] \wedge \theta_1 \wedge \theta \\ &-ac_1D_1^2[bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta] \wedge \theta_2 \wedge \theta \\ &+ac_2D_1D_2[bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta] \wedge \theta_2 \wedge \theta \\ &-bc_3D_1D_2[bc_1\nabla_c^{-1}\eta + (bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\theta] \wedge \theta_2 \wedge \theta \\ &- bc_1D_1[(bc_3\nabla_c^{-1}D_2 + a)\eta - A\theta_1 - B\theta_2] \wedge \theta_2 \wedge \theta\}dz_1dz_2\end{aligned} \tag{3.223}$$

şeklinde ifade edilir. Burada A ve B çok sayıda terim içerdiği için burada açıkça yazılmamıştır. Daha önce belirtildiği gibi J operatörünün Jacobi özdeşliğini sağlaması için yukarıdaki integralin sıfır olması gerekiyordu. Hesapların daha anlaşılır olabilmesi için η'lı ve θ'lı terimlerin ayrı ayrı hesaplanması kolaylık sağlar. Toplam türevli terimler integralin dışına çıkar ve integral sınırlarında sıfır olur.

Öncelikle, sadece η içeren terimler göz önüne alınırsa bu terimler,

$$\begin{aligned} &abc_1^2(\nabla_c^{-1}\eta)_{12} \wedge \theta_1 \wedge \theta + abc_1c_2(\nabla_c^{-1}\eta)_{22} \wedge \theta_1 \wedge \theta \\ &+b^2c_1c_3(\nabla_c^{-1}\eta)_{22} \wedge \theta_1 \wedge \theta - b^2c_1c_3(\nabla_c^{-1}\eta)_{22} \wedge \theta_1 \wedge \theta \\ &+abc_1\eta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta - abc_1^2(\nabla_c^{-1}\eta)_{11} \wedge \theta_2 \wedge \theta \\ &-abc_1c_2(\nabla_c^{-1}\eta)_{12} \wedge \theta_2 \wedge \theta - b^2c_1c_3(\nabla_c^{-1}\eta)_{12} \wedge \theta_2 \wedge \theta \\ &+b^2c_1c_3(\nabla_c^{-1}\eta)_{12} \wedge \theta_2 \wedge \theta - abc_1\eta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta \end{aligned} \tag{3.224}$$

şeklinde ayrılır ve sonrasında (3.224) denklemindeki çift türevli terimlere art arda iki kez kısmi integrasyon uygulanır ve gerekli ara işlemler yapılırsa $-2abc_1^2(\nabla_c^{-1}\eta)_1 \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 - 2abc_1c_2(\nabla_c^{-1}\eta)_2 - abc_1\eta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta] + abc_1\eta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta$ elde edilir ve

$$c_1(\nabla_c^{-1}\eta)_1 = \eta - c_2(\nabla_c^{-1}\eta)_2 \tag{3.225}$$

eşitliği yerine yazılarak tekrar kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned} &-2abc_1[\eta - c_2\nabla_c^{-1}\eta_2] \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 - 2abc_1c_2\nabla_c^{-1}\eta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 - abc_1\eta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + \\ &abc_1\eta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta \end{aligned} \tag{3.226}$$

sonucu bulunur ve birbirini yok eden terimlerden sonra

$$-abc_1\eta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + abc_1\eta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta - 2abc_1\eta \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \tag{3.227}$$

terimleri elde edilir ve yine uygun terimlere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} &-2abc_1\eta \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 - [abc_1\eta \wedge \theta_1 \wedge \theta]_2 + abc_1(\eta \wedge \theta_{12} \wedge \theta + \eta \wedge \theta_1 \wedge \theta_2) \\ &+[abc_1\eta \wedge \theta_2 \wedge \theta]_1 - abc_1(\eta \wedge \theta_{12} \wedge \theta + \eta \wedge \theta_2 \wedge \theta_1) \end{aligned} \tag{3.228}$$

bulunur. Açıkça görüldüğü gibi terimler birbirini götürür ve sıfır bulunur. Aynı şekilde sadece θ içeren terimler yazıldığında,

$$abc_1c_3(\nabla_c^{-1}\theta_2)_{12}\wedge\theta_1\wedge\theta+a^2c_1\theta_{12}\wedge\theta_1\wedge\theta$$
$$+abc_2c_3(\nabla_c^{-1}\theta_2)_{22}\wedge\theta_1\wedge\theta+a^2c_2\theta_{22}\wedge\theta_1\wedge\theta$$
$$b^2c_3^2(\nabla_c^{-1}\theta_2)_{22}\wedge\theta_1\wedge\theta+abc_3\theta_{22}\wedge\theta_1\wedge\theta$$
$$-b^2c_1D_2(A\theta_1)\wedge\theta_1\wedge\theta-b^2c_1D_2(B\theta_2)\wedge\theta_1\wedge\theta$$
$$-abc_1c_3(\nabla_c^{-1}\theta_2)_{11}\wedge\theta_2\wedge\theta-a^2c_1\theta_{12}\wedge\theta_2\wedge\theta \quad (3.229)$$
$$-abc_2c_3(\nabla_c^{-1}\theta_2)_{12}\wedge\theta_2\wedge\theta-a^2c_2\theta_{12}\wedge\theta_2\wedge\theta$$
$$-b^2c_3^2(\nabla_c^{-1}\theta_2)_{12}\wedge\theta_2\wedge\theta-abc_3\theta_{12}\wedge\theta_2\wedge\theta$$
$$+b^2c_1D_2(A\theta_1)\wedge\theta_2\wedge\theta+b^2c_1D_2(B\theta_2)\wedge\theta_2\wedge\theta$$

şeklinde olur. Ardından aynı şekilde A ve B içermeyen terimler için kısmi integrasyon art arda uygulanır ve

$$\nabla_c^{-1}\theta_{12}=\theta_2-c_2\nabla_c^{-1}\theta_{22} \quad (3.230)$$

ifadesi yerine yazılarak tekrar art arda kısmi integrasyon alınır. Burada terimler çoğunlukla birbirini götürür ancak

$$-b^2c_3^2\nabla_c^{-1}\theta_{22}\wedge\theta_1\wedge\theta_2+b^2c_3^2\nabla_c^{-1}\theta_{22}\wedge\theta_2\wedge\theta_1 \quad (3.231)$$

şeklindeki iki terim kalır. Bu terimlerle birlikte türevi alınmış A ve B terimlerinin de kısmi integrasyonu alınarak toplandığında

$$-b^2c_3^2\nabla_c^{-1}\theta_{22}\wedge\theta_1\wedge\theta_2+b^2c_3^2\nabla_c^{-1}\theta_{22}\wedge\theta_2\wedge\theta_1+b^2c_3^2\nabla_c^{-1}D_2D_1\theta_2\wedge\theta_1\wedge\theta$$
$$+(-bac_1^2u_{12}-bac_1c_2u_{22}-b^2c_1c_3u_{22}+b^2c_1^2u_{22})\theta_{12}\wedge\theta_1\wedge\theta$$
$$+(abc_1^2u_{112}+abc_1c_2u_{122}+b^2c_1c_3u_{122}-b^2c_1^2v_{12}-b^2\nabla_c^{-1}c_3^2D_2)\theta_2\wedge\theta_1\wedge\theta$$
$$+(abc_1^2u_{11}+abc_1c_2u_{12}+b^2c_1c_3u_{12}-b^2c_1^2v_1-b^2\nabla_c^{-1}c_3^2D_2)\theta_{22}\wedge\theta_1\wedge\theta \quad (3.232)$$
$$+(abc_1^2u_{112}+abc_1c_2u_{122}+b^2c_1c_3u_{122}-b^2c_1^2v_{12})\theta_1\wedge\theta_2\wedge\theta$$
$$+(abc_1^2u_{12}+abc_1c_2u_{22}+b^2c_1c_3u_{22}-b^2c_1^2v_2)\theta_{11}\wedge\theta_2\wedge\theta$$
$$+(-abc_1^2u_{11}-abc_1c_2u_{12}-b^2c_1c_3u_{12}+b^2c_1^2v_1+b^2\nabla_c^{-1}c_3^2D_2)\theta_{21}\wedge\theta_1\wedge\theta$$

elde edilir. Kalan tüm terimler bc_1^2a, bc_1c_2a, $b^2c_1c_3$, $b^2c_1^2$, $b^2c_3^2$ ortak parantezlerine göre alınarak her terimin ayrı ayrı sıfır olması gerekir.

Sırasıyla, bc_1^2a ortak çarpanı için kısmi integrasyon işlemi yapılan terimler

$$-u_{121}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{112}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{112}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{112}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta + u_{112}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta - u_{112}\theta_1 \Lambda \theta_2 \Lambda \theta = 0 \quad (3.233)$$

b$c_1 c_2 a$ ortak çarpanı içeren terimler için;

$$-u_{221}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{122}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{122}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{122}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta + u_{122}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta - u_{122}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta = 0 \quad (3.234)$$

$b^2 c_1 c_3$ ortak çarpanı içeren terimler için;

$$-u_{221}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{122}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{122}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta + u_{122}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta + u_{122}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta - u_{122}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta = 0 \quad (3.235)$$

$b^2 c_1^2$ ortak çarpanına sahip olan terimler için;

$$-v_{21}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta - v_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta - v_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 \wedge \theta - v_{12}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta - v_{12}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta + v_{12}\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta = 0 \quad (3.236)$$

ve son olarak $b^2 c_3^2$ ortak çarpanı için;

$$\nabla_c^{-1}\theta_{22} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 - \nabla_c^{-1}\theta_{22} \wedge \theta_2 \wedge \theta_1 - \nabla_c^{-1}\theta_{22} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 + \nabla_c^{-1}\theta_{22} \wedge \theta_2 \wedge \theta_1 - \nabla_c^{-1}\theta_{221} \wedge \theta_2 \wedge \theta + \nabla_c^{-1}\theta_{221} \wedge \theta_2 \wedge \theta = 0 \quad (3.237)$$

şeklinde bulunarak tüm terimlerin kendi içinde toplandığında sıfır olduğu görülür.

Böylece (3.25) evrimsel akış için Jacobi özdeşliği, $J = aJ_0 + bJ_1$ için sağlanmıştır. Bu sonuç bize J_0 ve J_1'in ters simetrik ve Jacobi özdeşliğini sağlayan uyumlu (compatible) operatörler olduğunu göstererek (3.25) denkleminin Magri teoremine göre integre edilebilir ikili-Hamiltoniyen sistem olduğunu gösterir.

4
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, evrimsel Hirota tipi (2+1)-boyutlu denklemlerin ikili-Hamiltoniyen yapıları incelenerek, tamamen çözülebilirliği analiz edilmiş ve Magri teoremine göre tamamen çözülebilir olduğu sonucuna varılmıştır. Hirota tipi denklem Ryogo Hirota'nın farklı genliğe sahip N tane solitonun çoklu çarpışma yaptıkları durumda KdV denkleminin kesin çözümünü elde ederek oluşturmuş olduğu bir çözüm yöntemidir.

Giriş kısmında Hirota tipi denklemler tanımlanarak tarihsel gelişiminden ve yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Literatürde integre edilebilen denklemler ile ilgili çalışmalar genellikle farklı kriterlere göre integre edilebilen sistemlerin sınıflandırılması üzerine olmuştur. Hirota tipi denklemler için literatürde az sayıda çalışma vardır ve bu çalışmalar da genellikle dispersiyonsuz (dağılımsız) kısmi türevli diferansiyel denklemler ile ilgili olmuştur.

İkinci bölümde ise bu tez çalışmasında ele alınacak olan problemin fizikle olan ilişkisine değinilmiştir. Öncelikle tam olarak çözülebilirliğin tanımı yapılarak, literatürde temel denklem olarak kabul edilen ve soliton çözümü olan KdV denkleminin tamamen çözülebilir olduğunu gösteren kriterlerden bahsedilmiştir ve bu kriterlerin önemli bir kısmı açıklanmıştır. Langrange dinamiği konusu ele alınarak, Newton mekaniği ile aralarındaki farklardan bahsedilmiş ve bağ koşulları konusuna değinilmiştir. Bunun yanı sıra eylem integrali tanımlanmış ve Euler-Langrange denklemi elde edilmiştir. Hemen ardından Langrange fonksiyonuna Lejendre dönüşümü yapılarak Hamilton mekaniğine geçilmiş ve Hamiltoniyen kanonik denklemlerinin elde edilmesinden bahsedilmiştir. Hamiltoniyen kanonik denklemlerinin Poisson parantez gösterimi yapılarak tüm bu özellikleri incelenmiştir. Poisson parantezleri kullanılarak Hamiltoniyen kanonik denklemlerinin nasıl simplektik matris formunda yazıldığı gösterilmiştir. Bir dinamik sistemin Langrange fonksiyonundan elde edilen denklem ile Hamiltoniyenden elde edilen denklem arasındaki farklılıktan kaynaklanan

tutarsızlıklardan bahsedilerek Dirac bağ koşulları tanımlanmış ve Poisson parantezinin genelleştirilmiş hali olan Dirac parantezi oluşturulmuştur.

Üçüncü bölümde sırasıyla Hirota tipi (2+1)-boyutlu denklemin ikili-Hamiltoniyen yapısı incelenmiştir. Öncelikle evrimsel Hirota tipi (2+1)-boyutlu denklemlerin Euler-Langrange formunun simplektik Monge-Ampere yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Daha sonrasında elde edilen bu denkleme Homotopy formülü uygulanarak, dejenere Langrange fonksiyonu oluşturulmuştur. Dejenere Langrange fonksiyonu yalnızca birinci mertebeden hız içerdiğinden, Langrange formalizminden Hamiltoniyen formalizmine geçişte Dirac'ın bağ koşulu analizi kullanılmıştır. Sonrasında simetri koşulu tanımlanarak ve simplektik Monge-Ampere formundaki Hirota tipi denkleme Lie denklemi uygulanarak simetri koşulu elde edilmiştir. Bu aşamadan sonra E. V. Ferapontov'un makalesi referans alınmış ve o çalışmasında verilen integre edilebilirlik koşulu bizim üzerinde çalıştığımız sisteme uygulanarak asimetrik-çarpan formuna çevrilmiştir. İntegre edilebilirlik koşulu sırasıyla genel durum, belirli durumlar ve özel durum olmak üzere üç farklı durumdaki diferansiyel operatörlere uygulanmış ve diferansiyel operatörlerin komütasyon ilişkileri incelenmiştir. Bu komütasyon ilişkileri kullanılarak her durum için Lax çifti elde edilmiştir. Evrimsel denklemler iki bileşenli formda yazılmış ve bu denklemleri veren Langrange fonksiyonu homotopi formülünden elde edilen dejenere Langrange fonksiyonu modifiye edilerek elde edilmiştir. Böylece Dirac'ın bağ koşulları teorisi kullanılarak simplektik Hamiltoniyen operatörü bulunmuştur. Bu operatörün tersi alınarak birinci Hamiltoniyen operatörü elde edilmiş ve buna karşılık gelen Hamiltoniyen yoğunluğu da Lejendre dönüşümü ile bulunarak birinci Hamiltoniyen yapı oluşturulmuştur. Sonrasında ikinci Hamiltoniyen yapı için yenileme operatörleri üç farklı durum için ayrı ayrı bulunmuştur.

Elde edilen yenileme operatörleri birinci Hamiltoniyen operatörüne etki ettirilerek ikinci Hamiltoniyen operatörleri elde edilmiştir. İkinci Hamiltoniyen operatörlerine karşılık gelen Hamiltoniyen fonksiyonları belirli koşullar altında elde edilmiş ve ikili-Hamiltoniyen yapı bulunmuştur. Ayrıca simetri durumunun farklı asimetrik-çarpan formunda yazıldığında integre edilebilirlik koşuluna ek olarak farklı koşullar için üçlü (tri)-Hamiltoniyen yapı elde edilmiştir.

Son bölümde bir sistemin ikili-Hamiltoniyen yapıyı oluşturabilmesi ve Magri teoremine göre ikili-Hamiltoniyen sistem olabilmesinin olmazsa olmaz koşullarından biri olan Jacobi özdeşliği ele alınmıştır. Ters simetrik ve uyumlu (compatible) Hamiltoniyen operatörlerinin hem ayrı ayrı hem de J_0 ve J_1 'in lineer birleşimi $J = aJ_0 + bJ_1$ olan operatörünün de Jacobi özdeşliğini sağladığı gösterilerek evrimsel iki bileşenli Hirota tipi $(2+1)$-boyutlu doğrusal olmayan diferansiyel denklemin verilen özel koşullar altında Magri teoremine göre integre edilebilir ikili-Hamiltoniyen sistem olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKÇA

[1] V. E. Zakharov, What is Integrability?, Birinci Basım, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.

[2] P.J. Olver, Applications of Lie Group to Differential Equations, İkinci Basım, Springer, New York, 1986.

[3] S. Ruijsenaars, "Integrable Systems: An Overview", https://www1.maths.leeds.ac.uk/ ˜siru/ISsurvey.pdf.,2015.

[4] G. S. Krishnaswami, "Introduction to Integrable Systems", https://www.cmi.ac.in/∼govind/teaching/integ-serb-thep-del-19/ integrability serbthep2019-gk.pdf, 2019

[5] A.V. Mikhailov, "Integrability, Lect. Notes Phys. 767", Springer, Berlin Heidelberg, 2009.

[6] R. Beals and D. H. Sattinger, "On The Complete Integrability Of Completely Integrable Systems", Comm. Math. Phys., 138, pp. 409-436, 1991.

[7] A. N. Leznov and A. V. Razumov, "The Canonical Symmetry For Integrable Systems", Journal Of Mathematical Physics, vol. 35, pp. 1738-1754, 1993.

[8] G. Giachetta, L. Mangiarotti ve G.Sardanashvily, "A Note on the KAM Theorem for Partially Integrable Hamiltonian Systems", arXiv:math/0211211v1 [math.SG], 2002.

[9] G. Pucacco, K. Rosquist, "Integrable Hamiltonian Systems with Vector Potentials", Journal of Math. Phys., 2004.

[10] V. K. Chandrasekar, M Senthilvelan and M. Lakshmanan, "New Aspects of Integrability of Force-Free Duffing-Van der Pol Oscillator and Related Nonlinear Systems", Journal of Physics A, vol. 37, pp. 4527-4534, 2004.

[11] M.V. Pavlov, "New Hamiltonian Formalism and Lagrangian Representation for Integrable Hydrodynamic Type Systems", arXiv:nlin/0608029v1 [nlin.SI], 2006.

[12] A. Sergeyev, "On the Classification of Conditionally Integrable Evolution Systems in (1+1)-Dimensions", Journal of Mathematical Science, Vol. 136, pp. 4392-4400, 2004.

[13] M. Gadella1, J. Negro1, G.P. Pronko2,3, M. Santander1, "Classical and Quantum Integrability in 3D Systems", Journal of Physics A, Vol. 41, pp. 304030, 2007.

[14] A. V. Mikhailov, V. S. Novikov ve J. P. Wang, “Symbolic Representation and Classification of Integrable Systems”, arXiv:0712.1972v1 [nlin.SI], 2007.

[15] E.V. Ferapontov, A. V. Odesskii ve N. M. Stoilov, “Classification of Integrable Two-Component Hamiltonian Systems of Hydrodynamic Type in (2+1)- Dimensions”, Journal of Mathematical Physics, vol. 52, pp. 073505, 2011.

[16] M. Marvan and A. Sergyeyev, “Recursion Operators for Dispersionless Integrable Systems in any Dimension”, Inverse Problems, Vol. 28, pp. 025011, 2011.

[17] Il'in I. A., Noshchenko D. S.,Perezhogin A. S., “On Classification of Higher-Order Integrable Nonlinear Partial Differential Equations” arXiv:1611.09292v [nlin.SI], 2016.

[18] S. Sakovich, “A New Painlev´e-Integrable Equation Possessing KdV- Type Solitons”, arXiv:1907.01324v1 [nlin.SI], 2019.

[19] L. Pang, “Symmetries and Reductions of Integrable Nonlocal Partial Differential Equations”, Symmetry, vol. 11, pp. 884, 2019.

[20] E. V. Ferapontov, M. V. Pavlov, LinglingXue, “Second-Order Integrable Lagrangians and WDVV Equations”, Letters in Mathematical Physics, vol. 111, pp. 1-33, 2020.

[21] T. Kappelerve P. Topalov, “Arnold-Liouville Theorem for Integrable PDEs: A Case Study of the Focusing NLS Equation”, arXiv:2002.11638 [math.AP], 2020.

[22] B. Gormley, E.V. Ferapontov, V.S. Novikov, “On a Class of Integrable Hamiltonian Equations in (2+1)-Dimensions”, Proceedings of the Royal Society A 477, 2021.

[23] R. Hirota, “Exact Solition of Korteweg-de Vries for Multiple Collisions of Solitons”, Physical Review Letters, vol. 27, no.18, pp.1192-1194, 1971.

[24] E.V. Ferapontov, L. Hadjikos ve K.R. Khusnutdinova, “Integrable Equations of the Dispersionless Hirota Type and Hypersurfaces in the Lagrangian Grassmannian”, Int. Math. Res. Not. pp.496-535, 2007.

[25] E.V. Ferapontov, V.S. Novikov ve I. Roustemoglou, “On the classification of Discrete Hirota-Type Equations in 3D”, International Mathematics Research Notices, pp.4933-4974, 2015.

[26] E.V Ferapontov, B. Kruglikov ve V. Novikov, “Integrability of Dispersionless Hirota Type Equations and the Symplectic Monge-Amp`ere Property”, arXiv:1707.08070 [nlin.SI], 2017.

[27] M.B. Sheftel ve D. Yazıcı, “Lax pairs, Recursion Operators and Hamiltonian Representations of (3+1)-Dimensional Hirota Type Equations” Journal of Geometry and Physics, 2019.

[28] M.B. Sheftel, D. Yazıcı, “Evolutionary Hirota Type (2+1)-Dimensional Equations: Lax Pairs, Recursion Operators and Bi-Hamiltonian Structures”, Symmetry, Integrability and Geometry: Method and Applications, SIGMA14, 017, 17 pages, 2018.

[29] M. Dunajski, Solitons, Instantons and Twistors, First Edition, Oxford University Press, UK, 2010.

[30] P. Tikavic, “Evolution of Tsunami Science”, Asia Pacific Newsletter, Vol 1, No 3, pp. 13, 2011.

[31] T. Soomere, Solitons Interactions. In: Meyers R. (eds) Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, Springer, New York, NY, 2012. https//doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_101

[32] N. Singh, “Structure and Dynamics of Solitary Waves in Fluid Media”, Doktora Tezi, University of Southern Queensland Faculty of Health, Engineering and Sciences, Australia, 2016.

[33] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

[34] A. Das, Integrable Models, World Scientific, Singapur, 1989.

[35] S. T. Thornton, J. B. Marion, Parçacıklar ve Sistemler İçin Klasik Mekanik, Birinci Baskı, Akademi Yayıncılık, Ankara, 2011.

[36] H. Goldstein, Classical Mechanics, Üçüncü Basım, Addison Wesley, ABD, 2001.

[37] P. A. M Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Dördüncü Basım, Oxford University Press, London, 1958.

[38] P. A. M Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science Monographs Series, Vol. 2, Belfer Graduate School of Science, New York, 1967

[39] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, “On the Integrability of (2+1)-Dimensional Quasilinear Systems”, Comm. Math. Phys., vol. 248, pp. 187 -206, 2004.

[40] B. Fuchssteiner, A.S. Fokas, “Symplectic Structures, Their Backlund Transformations and Heredity Symmetries”,Phys. D 4, pp. 47-66, 1981.

[41] F. Magri, “A Simple Model of the Integrable Hamiltonian Equation, J. Math. 19, pp.1156-1162, 1978.

[42] F. Magri, “A Geometrical Approach to the Nonlinear Solvable Equations, in Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (Proc. Meeting, Univ. Lecce, Lecce, 1979)”, Lecture Notes in Phys., Vol. 120, pp.233-263, Springer, Berlin-New York, 1980.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. D. Kocaman, D. Yazıcı, “Bi-Hamilton Structures of (2+1)-Dimensional Evolutionary Hirota Type Equations” Turkish Physical Society 37th International Physical Congress, pp.167, Muğla, Türkiye, 1-5 Eylül 2021.