T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PİEZOELEKTRİK MALZEMEDEN YAPILMIŞ PRİZMATİK DOLGU İÇEREN PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE DOĞAL TİTREŞİM ANALİZİ

Gökçe YAZICI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Danışman

Doç. Dr. Ülkü YEŞİL

Haziran, 2023

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PİEZOELEKTRİK MALZEMEDEN YAPILMIŞ PRİZMATİK DOLGU İÇEREN PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE DOĞAL TİTREŞİM ANALİZİ

Gökçe YAZICI tarafından hazırlanan tez çalışması 22.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği, Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ülkü YEŞİL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Ülkü YEŞİL, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üye. Fatih AYLIKCI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üye. Nihan TIRMIKÇIOĞLU, Üye
Kırklareli Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Ülkü YEŞİL sorumluluğunda tarafımca hazırlanan "Pizeoelektrik Malzemeden Yapılmış Prizmatik Dolgu İçeren Plakların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Doğal Titreşim Analizi" başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Gökçe YAZICI

İmza

Bu çalışma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün FYL-2021-4621 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Anneanneme

ve

dedeme

TEŞEKKÜR

Tez konumun seçilmesinden son güne kadar geçen yoğun süreçte emeğini, bilgi birikimini ve desteğini asla esirgemeyen, tüm sorularımı sıcakkanlılıkla cevaplayan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ülkü YEŞİL'e, bana kendisiyle çalışma fırsatı verdiği ve her zaman yol gösterdiği için sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili temel bilgileri edinmemi sağlayan ve fikirleriyle bize yol gösteren çok değerli hocam Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU ve teknik desteğini binlerce kilometre öteden bile esirgemeyen Dr. Armağan ELİBOL hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Eğitim hayatımda olduğu gibi bu süreçte de beni asla yalnız bırakmayan tüm aile bireylerime, özellikle aynı evi paylaştığım sevgili teyzem ve enişteme ayrıca teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasına verdiği destekten dolayı "Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim. (BAP Proje No: FYL-2021-4621)

Gökçe YAZICI

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR **v**

SİMGE LİSTESİ **vii**

KISALTMA LİSTESİ **ix**

ŞEKİL LİSTESİ **x**

TABLO LİSTESİ **xiii**

ÖZET **xv**

ABSTRACT **xvii**

1 GİRİŞ **1**

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 6

1.3 Orijinal Katkı 7

2 ANİZOTROP DİKDÖRTGEN KALIN PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE DOĞAL TİTREŞİM ANALİZİ **9**

2.1 Problemin Matematiksel Modeli 9

2.2 Sonlu Elemanlar Formülasyonu 11

2.3 Sayısal İntegral 14

2.4 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme 16

3 PİEZOELEKTRİK MALZEMEDEN YAPILMIŞ PRİZMATİK DOLGU İÇEREN PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE DOĞAL TİTREŞİM ANALİZİ **21**

3.1 Problemin Matematiksel Modeli 21

3.2 Sonlu Elemanlar Formülasyonu 27

3.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme 31

4 SONUÇ **65**

KAYNAKÇA **68**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **72**

SİMGE LİSTESİ

$D_i^{(m)}$	Elektriksel Yerdeğiştirme Vektörü Bileşeni
$E_k^{(m)}$	Elektrik Alan Bileşeni
K_{EE}	Elektriksel Global Stiffness Matrisi
K_{UE}	Elektro-elastik Global Stiffness Matrisi
K_{UU}	Mekanik Global Stiffness Matrisi
$T_{ji}^{(m)}$	Gerilme Tansörü Bileşeni
V_d	Dolgu Hacmi
$c_{ijkl}^{(m)}$	Elektrik Malzeme Sabiti
$e_{kji}^{(m)}$	Piezoelektrik Sabiti
$s_{kl}^{(m)}$	Green Şekil Değiştirme Tansörü Bileşeni
$\varepsilon_{ik}^{(m)}$	Dielektrik Sabiti
$\phi^{(m)}$	Elektrik Potansiyeli
ϖ^2	Doğal Frekans Değeri
Al	Alüminyum
$BaTiO_3$	Baryum Titanat
Mg	Magnezyum
N	Sonlu Eleman Sayısı
St	Çelik
ZnO	Çinko Oksit
E	Young Modülü
M	Kütle Matrisi
V	Toplam Hacim
u	Yer Değiştirme Vektörü
$\boldsymbol{a}$	Nodlarda Bilinmeyenleri İçeren Vektörler
α	Sonlu Elemanın Ox_1 Ekseni Doğrultusundaki Uzunluğu
β	Sonlu Elemanın Ox_2 Ekseni Doğrultusundaki Uzunluğu
γ	Sonlu Elemanın Ox_3 Ekseni Doğrultusundaki Uzunluğu

ε	Şekil Değiştirme Tansörü
η	Kompozit İçerisindeki Hacim Oranı
λ	Lame Sabiti
μ	Kayma Modülü
ν	Poisson Oranı
ρ	Malzeme Yoğunluğu
σ	Gerilme Tansörü
ω	Dış Kuvvet Frekansı

KISALTMA LİSTESİ

3B	Üç Boyutlu
FEM	Finite Element Method
PZT	Piezoelektrik
SDP	Sınır Değer Problemi
SE	Sonlu Eleman
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Dikdörtgen kalın plak geometrisi 9

Şekil 2.2 Sonlu eleman ağına ait bir kesit. 12

Şekil 2.3 Dikdörtgen prizmatik örnek eleman; seçilen nodlar ve koordinatları. ... 12

Şekil 2.4 Farklı plak malzemesi için $\gamma_{31}(=\ell_3/\ell_1)$ parametresinin $h/\ell_1 = 0.10$ için $\varpi_{cr.I}^2$doğal frekans değerlerine etkisi. 19

Şekil 3.1 Dikdörtgen prizmatik formda (a) tek dolgu içeren plak geometrisi (Problem 1) (b) çift dolgu içeren plak geometrisi (Problem 2). 21

Şekil 3.2 (a) Tek dolgu içeren plak için bir kesitte Sonlu Eleman Ağ dizaynı (b) Çift dolgu içeren plak için bir kesitte Sonlu Eleman Ağ dizaynı 28

Şekil 3.4 Farklı PZT dolgu malzemeleri için $\varpi_{cr.I}^2$ ve V_d/V parametreleri arasındaki ilişki a)Ox_1 polarizasyon yönü için, b) Ox_2 polarizasyon yönü için, c) Ox_3 polarizasyon yönü için. 36

Şekil 3.5 PZT-5H dolgu ve Al matris malzemesi için farklı polarizasyon yönlerinde $\varpi_{cr.I}^2$ ve h/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki. 38

Şekil 3.6 Farklı PZT dolgu malzemeleri için Ox_2polarizasyon yönünde $\varpi_{cr.I}^2$ ve h_U/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki..... 39

Şekil 3.7 Farklı PZT dolgu ve Al matris malzemeleri için Ox_2polarizasyon yönünde $\varpi_{cr.I}^2$ ve ℓ_3/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki..... 41

Şekil 3.8 İlk 3 modda tek PZT-5H Dolgu ve Al Matristen oluşan plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için). 44

Şekil 3.9 İlk 3 modda tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta ($Ox2$ polarizasyon yönünde) Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için). 44

Şekil 3.10 İlk 3 modda tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta ($Ox2$ polarizasyon yönünde) Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için). 45

Şekil 3.11 İlk 3 modda tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta ($Ox2$ polarizasyon yönünde) Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{\Phi}$ elektrik

potansiyelinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için). 45

Şekil 3.12 Farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci mod $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Dolgu malzemesi PZT-5H, (b) Dolgu malzemesi PZT-4, (c) Dolgu malzemesi $BaTiO_3$. 47

Şekil 3.13 Farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci mod $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları 47

Şekil 3.14 Farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci mod $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları 47

Şekil 3.15 Farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci mod $\widetilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel dağılımları (a) Dolgu malzemesi PZT-5H, (b) Dolgu malzemesi PZT-4, (c) Dolgu malzemesi $BaTiO_3$. 48

Şekil 3.16 Farklı polarizasyon yönlerinde, tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci modda $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları 49

Şekil 3.17 Farklı polarizasyon yönlerinde, tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci modda $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları 49

Şekil 3.18 Farklı polarizasyon yönlerinde, tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci modda $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları 50

Şekil 3.19 Farklı polarizasyon yönlerinde, tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci modda $\widetilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel dağılımları 50

Şekil 3.20 Tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için $x_2 = h$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde Ox_1 ekseni boyunca ϖ^2 değişiminin (a) $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesine (b) $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesine etkisi. 51

Şekil 3.21 Tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell_1/3$ kesitlerinde Ox_3 ekseni boyunca ϖ^2 değişiminin $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesine etkisi. 52

Şekil 3.22 Tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için $\varpi 2$ değişiminin Φ elektrik potansiyeline etkisi 53

Şekil 3.23 Farklı PZT dolgu malzemeleri için Ox_2 polarizasyon yönünde $\varpi_{cr.I}^2$ ve c/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki. 54

Şekil 3.24 İlk 3 modda ikiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları 59

Şekil 3.25 İlk 3 modda ikiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları 59

Şekil 3.26 İlk 3 modda ikiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları 60

Şekil 3.27 İlk 3 modda ikiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel dağılımları 61

Şekil 3.28 İkiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için $x_2 = h$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde Ox_1 ekseni boyunca ϖ^2 değişiminin (a) $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesine (b) $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesine etkisi. 62

Şekil 3.29 İkiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için a) $\tilde{u}_3$ $(x_2 = h)$ b) $\tilde{\Phi}$ $(x_2 = h/2)$ ve $x_1 = \ell_1/3$ kesitlerinde Ox_3 ekseni boyunca ϖ^2 değişiminin etkisi. 63

Şekil 3.30 İkiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta ($Ox2$ polarizasyon yönünde) $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$, $\varpi^2 = 0.15$ için c/ℓ_1 parametresi değişiminin etkisi. 64

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Gauss noktaları ve ağırlık fonksiyonları. 15

Tablo2.2 Dolgu içermeyen homojen izotrop dikdörtgen plak için $\varpi_{cr.I}^2$ parametresinin farklı $\gamma_{31}(=\ell_3/\ell_1)$ için değerleri 17

Tablo 2.3 Seçilmiş bazı metallerin Elastisite modülleri, Poisson oranları ve Yoğunlukları 17

Tablo 2.4 Ox_1ekseni boyunca dikdörtgen prizmatik sonlu eleman **sayı**sının N_1 Al malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakta $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi 18

Tablo 2.5 Ox_2ekseni boyunca dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının N_2Al malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakta $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi 18

Tablo 2.6 Ox_3ekseni boyunca dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının N_3Al malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakta $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi 18

Tablo 2.7 Al malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plak için ilk 3 doğal frekans değerleri 19

Tablo2.8 Farklı plak malzemeleri için ℓ_3/ℓ_1 parametresinin $\varpi_{cr.I}^2$ doğal frekans değerlerine etkisi 19

Tablo 2.9 Farklı plak malzemeleri ilk 3 doğal frekans değerleri 20

Tablo 3.1 Bazı piezoelektrik malzemelerin elektro-mekanik sabitleri 32

Tablo 3.2 Ox_1 ekseni doğrultusunda dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_1) (PZT-5H Dolgu (Ox_2 Polarizasyon yönü) / Al Matris) için $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi 33

Tablo 3.3 Ox_2 ekseni doğrultusunda dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_2) (PZT-5H Dolgu (Ox_2 Polarizasyon yönü)/Al Matris) için $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi 33

Tablo 3.4 Ox_3 ekseni doğrultusunda dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_3) (PZT-5H Dolgu (Ox_2 Polarizasyon yönünde) / Al Matris) için $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi 34

Tablo 3.5 V_d/V değişiminin tek dolgu (farklı PZT Dolgu/Al Matris) içeren plak için farklı polarizasyon yönlerinde 1. doğal frekans değerlerine etkisi 35

Tablo 3.6 h/ℓ_1 değişiminin tek dolgu (PZT-5H Dolgu/Al Matris) içeren plak için tüm polarizasyon yönlerinde $V_d/V = 0.1875$durumunda 1. doğal frekans değerlerine etkisi. 37

Tablo 3.7 h_U/ℓ_1 değişiminin tek dolgu (PZT Dolgu/Al Matris) içeren plakta Ox_2 polarizasyon yönünde $V_d/V = 0.1875$ durumunda 1. doğal frekans değerlerine etkisi 38

Tablo 3.8 ℓ_3/ℓ_1 değişiminin tek dolgu (farklı PZT Dolgu/Al Matris) içeren plakta Ox_2 polarizasyon yönünde $V_d/V = 0.1875$ 1. doğal frekans değerlerine etkisi 40

Tablo 3.9 Farklı PZT Dolgu ve Farklı Matris ve Ox_2 polarizasyon yönü yönü için ele alınan plağın 1. doğal frekans değerleri 42

Tablo 3.10 PZT-5H dolgu ve Al matris den oluşan plakta farklı polarizasyon yönlerinde $V_d/V = 0.1875,\ h/\ell_1 = 0.10$ için ilk 3 doğal frekans değerleri 42

Tablo 3.11 Farklı PZT dolgu ve Al matristen oluşan plakta Ox_2 polarizasyon yönünde $V_d/V = 0.1875,\ h/\ell_1 = 0.10$ için ilk 3 doğal frekans değerleri 43

Tablo 3.12 İkiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta farklı piezoelektrik dolgu (Ox_2 polarizasyon yönü) için c/ℓ_1 parametresi değişiminin 1. doğal frekans değerlerine $(\varpi_{cr.I}^2)$ etkisi..... 54

Tablo 3.13 İkiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta farklı dolgu malzemelerinde Ox_2 polarizasyon yönü için ilk 3 doğal frekans değerleri. 55

Tablo 3.14 İkiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta PZT-5H dolgu malzemesi için Ox_2 polarizasyon yönünde h_U/ℓ_1 parametre değişiminin ilk 3 doğal frekans değerlerine etkisi. 56

Tablo 3.15 İkiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta PZT-5H dolgu malzemesi için farklı polarizasyon yönleri için ilk 3 doğal frekans değerleri. 56

Tablo 3.16 PZT-5H ikiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta farklı matris malzemeleri için ilk 3 doğal frekans değerleri. 57

Tablo 3.17 h/ℓ_1 değişiminin ikiz dolgu (PZT-5H Dolgu/Al Matris) içeren plak için ilk 3 doğal frekans değerlerine etkisi. 58

ÖZET

Piezoelektrik Malzemeden Yapılmış Prizmatik Dolgu İçeren Plakların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Doğal Titreşim Analizi

Gökçe YAZICI

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ülkü YEŞİL

Bu tez çerçevesinde, dikdörtgen plak içerisine gömülü piezoelektrik (PZT) malzemeden yapılmış prizmatik dolgu/dolgular için doğal titreşim problemi ele alınmıştır. Problemin matematiksel formülasyonu, elektro-elastisite teorisinin 3 boyutlu kesin hareket denklemleri kapsamında, parçalı-homojen cisim modeli yardımıyla modellenmiştir. Dikdörtgen kalın plağın yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve elektrik potansiyelin sıfır olduğu aynı zamanda, PZT dolguyu saran matris malzemesi ile dolgu arasındaki ara yüzeyde ideal temas koşullarını sağladığı varsayılmıştır. Yapıdaki PZT dolgunun/dolguların plağın iç kısmında ve plağın arkaya doğru kalınlığı (Ox_3 ekseni) doğrultusunda ve bu eksene paralel olarak yerleştiği kabul edilmiştir.

İncelenen sınır-değer problemlerinin çözümleri, üç boyutlu (3B) sonlu elemanlar yöntemi (SEY) ile, tarafımızdan oluşturulan algoritma ve programlar kullanılarak yapılmıştır. İncelenen PZT dolgu/dolgular içeren dikdörtgen plağın verilen sınır koşullarında doğal frekans değerlerine, PZT dolgunun/dolguların boyutu, hacim oranı, konumu, malzemesi, polarizasyon yönü, mekaniksel ve elektriksel alanların

karşılıklı etkileri ve PZT dolguların karşılıklı etkisi gibi pek çok problem parametresinin etkileri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Piezoelektrik malzeme, prizmatik dolgu, 3B SEY, doğal titreşim, elektro-elastisite teorisi, dikdörtgen plak

ABSTRACT

Free Vibration Analysis of Plates Containing Prismatic Inclusion Made of Piezoelectric Material by Finite Element Method

Gokçe YAZICI

Department of Mathematical Engineering

Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ulku YESIL

In this thesis, the natural vibration problem for prismatic inclusion(s) made of PZT material embedded in a rectangular plate is discussed. The mathematical formulation of the problem is modeled with the help of the piecewise-homogeneous body model within the scope of the 3-dimensional exact equations of motion of the electro-elasticity theory. It is assumed that the lateral surfaces of the rectangular thick plate are simply supported and the electric potential is zero, and at the same time, ideal contact conditions are satisfied by the interface surfaces between the elastic medium and PZT inclusions. It is assumed that the PZT inclusion/(s) in the structure is/(are) located in the inner part of the plate and in the direction of the thickness (Ox_3 axis) of the plate towards the back and parallel to this axis.

The solutions of the examined boundary-value problems are made with the 3D finite element method (FEM) using algorithms and programs created by us. The effects of many problem parameters such as the size, volume ratio, position, material, polarization direction of the PZT inclusion(s), the mutual effects of mechanical and electrical fields, and the mutual effects of PZT inclusions, on the natural frequency values of the rectangular plate containing the PZT inclusion(s) are investigated under the given boundary conditions.

Keywords: Piezoelectric material, prismatic inclusion, 3D FEM, free vibration, electro-elasticity theory, rectangular plate

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Günümüzde teknolojinin gelişmesine paralel olarak kullanım amacına göre gelişmiş özellikte cihazlar tasarlanmaktadır. Malzeme üzerine bilgi ve teknolojik malzemelerin üretimi arttıkça, geleneksel mühendislik malzemelerinin yanı sıra, yeni malzemelerin kullanımı da yaygınlaşmaktadır.

1880'lerde Pierre ve Jacques Curie kardeşler yaptıkları deneylerde doğadaki bazı malzemelere uygulanan mekanik etkinin elektrik potansiyel oluşturduğunu gözlemlemişlerdir. Kristal malzemenin elektrik alana yerleştirildiği zaman malzemenin mekanik deformasyona maruz kalması gerektiği Gabriel Lippman tarafından teorik olarak gösterilmiştir. Curie kardeşler tarafından yapılan deneysel doğrulama ile Lippman'ın buluşu, bazı malzemelerde mekanik alan ile elektriksel alan arasındaki karşılıklı etkileşimin iki yönlü olarak gerçekleştiğini kanıtlamıştır. Bu etkinin gerçeklendiği elastik malzemelere elektro-elastik malzemeler denir. Bu malzemelerin özelliği, elektrik alana konulduğunda mekanik deformasyon, mekanik yükleme altında yapısında kutuplanma (elektrik polarizasyon) oluşmasıdır. Eğer elektriksel alan ve mekaniksel alan arasındaki etkileşim doğrusal bir ilişkiye sahipse, bu tür malzemelere "piezoelektrik" malzemeler denir. Piezoelektriklik, bazı malzemelere uygulanan mekanik basınç altında bir elektrik potansiyelini veya elektrik alanını değiştirme yeteneğidir [1]. Bu etki, malzeme içindeki polarizasyon yoğunluğunun değişimi ile doğrudan ilişkilidir. Piezoelektrik etki yaratmak için en önemli şey, kristal yapısı merkezi olarak asimetrik olan kristaller kullanmaktır. Piezoelektrik malzemeler doğada bulunabildiği gibi laboratuvar koşullarında üretilmesi de mümkündür. Günümüzde piezoelektrik malzeme olarak genellikle baryum titanat ($BaTiO_3$), kurşun-zirkonyum-titanyum (PZT), turmalin, kuvars, çinko oksit (ZnO) ve seramik kullanılmaktadır.

Piezoelektrik malzemelerin ilk çalışmaları genellikle kristal yapıya sahip doğal malzemeler üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalar, piezoelektrik malzemelerin

temel özellikleri, kristal simetrisi, elektrik yükleri ve mekanik deformasyonlar arasındaki ilişkiler üzerine odaklanmıştır. Sonraki yıllarda, yapay olarak üretilen piezoelektrik malzemeler geliştirilmiştir. Özellikle seramik malzemeler, polimerler ve kompozitler piezoelektrik özelliklere sahip olacak şekilde üretilebilmiştir. Bu yapay malzemelerin geliştirilmesi, piezoelektrik etkisini daha geniş bir uygulama alanına taşımıştır. İkinci Dünya Savaşı sırasında piezoelektrik malzemelerin kullanımı artmıştır. Özellikle piezoelektrik kristaller, askeri alanda kullanılan sonar sistemlerinde ses dalgalarının üretimi ve algılanmasında önemli bir rol oynamıştır. Daha sonraki yıllarda, yapay piezoelektrik malzemelerin üretimi ve geliştirilmesi odak noktası haline gelmiştir. Seramikler, polimerler ve kompozit malzemeler, piezoelektrik özelliklere sahip olacak şekilde üretilmiştir. Bu yapay malzemeler, daha geniş bir uygulama yelpazesine sahip olmuş ve endüstriyel alanda kullanılan piezoelektrik cihazların geliştirilmesine katkıda bulunmuştur.

Son zamanlarda, piezoelektrik malzemelerin özelliklerini belirlemek için deneysel ve teorik olarak birçok araştırma yürütülmektedir. Bu araştırmalar sayesinde, bu malzemelerin kullanımları artmış ve çeşitli cihazlarda kullanımı yaygınlaşmıştır. Bu malzemelerin önemli uygulama alanlarından biri, enerjiyle çalışan cihazlarda hareketli parçalarda kullanılarak elektrik üretimi ve cihazların enerji gereksiniminin karşılanmasıdır, bu süreç enerji hasadı olarak adlandırılır. Piezoelektrik malzemelerin uygulamalarına örnek olarak; aktüatörler, sensörler, transdüserler ve üreteçler gibi birçok ileri teknolojik uygulama; mikrofonlar, hoparlörler, basınç sensörleri, ultrasonik görüntüleme sistemleri, cep telefonları, taşınabilir elektronikler ve titreşim sensörleri verilebilir.

Yaygın kullanımı nedeniyle, piezoelektrik malzemelerin davranış özelliklerinin belirlenebilmesi üzerine pek çok çalışma mevcuttur. Mühendislik alanında, piezoelektrik bileşenlerin diğer yapı elemanlarıyla birleştirilerek oluşturulan kompozit yapılar, dış etkiler ve yapım sürecindeki farklı teknolojik uyumsuzluklar gibi sebeplerle karşılaşılan sorunlar, piezoelektrik yapılar için de araştırma konusu haline gelmektedir. Son zamanlarda oldukça geniş bir araştırma alanına sahip piezoelektrik malzemeler, genellikle piezoelektrik olmayan malzemelerle entegre edilerek (içerisine gömülerek) kullanılmaktadır. Elastik bir ortama gömülü piezoelektrik dolgular, mühendislik ve teknolojide basınç sensörleri, ivme ölçerler,

ultrason dönüştürücüler ve titreşim kontrol sistemleri gibi çeşitli uygulamalara sahiptir. Ortam titreşimlerinden veya mekanik deformasyonlardan enerji toplamak için kullanılabilirler. Bu teknoloji kendi kendine çalışan sistemlerde, kablosuz sensör ağlarında ve giyilebilir cihazlarda kullanılmaktadır. Piezoelektrik malzemeden yapılmış dolgular, hoparlörler, mikrofonlar ve ultrasonik cihazlar dahil olmak üzere çeşitli akustik cihazlarda da kullanılmaktadır. Elektrik sinyallerini mekanik titreşimlere dönüştürerek ses dalgalarını üretebilir ve algılayabilirler ve bunun tersini de yapabilirler. Ultrason probları gibi biyomedikal mühendisliğinde, kemik implantlarında, ilaç dağıtım sistemlerinde ve doku mühendisliğinde de kullanılabilirler. Ayrıca piezoelektrik jeneratörler ve dönüştürücüler gibi enerji dönüştürme sistemlerinde kullanılabilirler. Bu malzemelerin benzersiz özellikleri, onları elektronik ve robotikten sağlık hizmetlerine ve enerji toplamaya kadar çok sayıda alanda çok yönlü ve değerli kılmaktadır.

Literatürde içerisinde çeşitli geometrik formlarda süreksizlikler içeren piezoelektrik malzemelerle ilgili birçok çalışma mevcuttur. Başlangıçta, sonsuz ortamda piezoelektrik malzemeden yapılmış plaklar için bu problemlerin kesin çözümleri elde edilmiş [2-8] ve düzlem elektro-elastik problemler çözülmüştür [9-17]. Bu çalışmalarda gerilme ve yer değiştirme yayılımlarına, süreksizliklerin geometrik şekillerinin etkileri, dış kuvvetlerin etkisi (mekanik veya elektriksel yükleme) vb. araştırılmıştır. Yapı elemanlarının uygulanan sınır koşulları altında davranışlarının daha iyi anlaşılabilmesi için 3 boyutlu çözümler elde edilmelidir [18]. Bu amaçla basit mesnetli düz panellerin ve dikdörtgen plakların piezoelektrik tepkisi için kesin 3B analitik çözümler sunulmuştur [19-21]. Kesin 3B analitik çözümler, yalnızca belirli basit sınır koşullarına sahip bazı düzenli şekiller için mevcut olduğundan, daha genel piezoelektrik bileşik yapıların sayısal çözümünün mümkün olması için, SEY gibi sayısal çözüm yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile piezoelektrik dolgu içeren dikdörtgen plakların elektrostatik analizi elektro-elastisite teorisinin 3 boyutlu kesin denklemleri kullanılarak incelenmiştir [22]. Ayrıca, 3B manyeto-elektro-elastik plaklardaki eliptik bir delik etrafındaki gerilme yayılımlarını analiz etmek için COMSOL yazılımına dayalı bir SE modeli Zheng G. ve arkadaşları tarafından geliştirilmiştir [23]. Bu çalışmalarda elde edilen sayısal sonuçlar, yapısal

elemanlardaki bu tür geometrik süreksizliklerin bu yapıların mekanik dayanım sınırlarını azalttığını, ancak plak malzemesi olarak piezoelektrik malzeme seçilmesi, piezoelektrik etkilerin gerilme yayılımlarını düşürmede etkisi olduğunu göstermektedir.

Bir diğer önemli araştırma alanı da piezoelektrik malzemelerin dinamik özelliklerinin belirlenmesidir. Tiersten, (1969) tarafından piezoelektrik malzemeler için lineer titreşimin temel matematik modellemesi geliştirilmiştir [24]. Ele alınan yapı elemanının güvenliği açısından, dinamik davranışının belirlenmesi önemlidir. Süreksizlik içermeyen çok katmanlı ince veya kalın piezoelektrik plaklarda dinamik davranışlara karşılıklı elektro-mekanik etkiler analitik veya sayısal olarak birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Basit mesnetli çok katmanlı dikdörtgen plakların serbest titreşimleri için analitik çözümler geliştirilmiştir [25,26]. Farsangi ve arkadaşları, Mindlin plak teorisini kullanarak piezoelektrik malzeme ile kaplı tabakalardan oluşan hibrit dikdörtgen bir plağın serbest titreşimleri için kesin bir çözüm elde etmiştir [27]. Daşdemir, öngerilmeli cisimlerde, üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga teorisinin temel ilkelerine dayanan bir analitik yaklaşım sunarak, rijit bir zemin üzerine yerleştirilmiş, sonlu boyutlara sahip ve iki tabakalı plakanın zorlanmış titreşimini araştırmıştır [28]. Pietrzakowski, Kirchhoff ve Mindlin'in kinematik yaklaşımlarını kullanarak, piezoelektrik aktüatör/sensör katmanlarına sahip aktif kompozit plakların titreşim analizini incelemiştir [29]. Shokrgozar ve arkadaşları tarafından yay-kütle sistemlerine sahip piezoelektrik aktüatörler ile kaplanmış, dönen silindirik, orta kalınlıkta bir kabuğun burkulma ve titreşim özelliklerini araştırmak için kapsamlı bir çalışma yapılmıştır [30].

Lee ve Ng, rastgele yükleme koşulları altında gömülü piezoelektrik aktüatörler içeren kompozit plaklardaki titreşimleri azaltmak için H∞ kontrol tasarımının uygulanmasını araştıran bir çalışma sunmuşlardır [31]. Mateescu ve arkadaşları, burkulma salınımları, mekanik yükler, piezoelektrik aktüatörler veya kararsız aerodinamik yükler tarafından üretilen, bağlı piezoelektrik şeritler içeren hasarlı yapıların sergilediği dinamiklerin derinlemesine bir analizini gerçekleştirmişlerdir [32]. Carrera ve Boscolo, virtüel iş prensibi ve Reissner varyasyonel teoremlerini

kullanarak, piezoelektrik katman içeren çok tabakalı levhalardaki birleşik elektro-mekanik problemlerin istatistiksel ve dinamik analizini araştırmışlardır [33]. Qing ve arkadaşları, basit mesnetli piezoelektrik plakların dinamik analizi için bir durum vektörü denklemini ters laplace dönüşümü ile türetmişlerdir. Türetme, özel olarak piezoelektrik gövdeleri için uyarlanmış, değiştirilmiş bir karma varyasyonel ilkesine dayanıyordu [34]. Della ve Shu, Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde piezoelektrik dolgular içeren kirişlerin titreşimiyle ilgili bir matematiksel model incelemişlerdir [35]. Batra ve arkadaşları birleştirilmiş piezoelektrik lamine plakların analizini Fourier serisi yöntemini kullanarak gerçekleştirmişlerdir [36]. Reddy, plak davranışının kapsamlı bir şekilde anlaşılması için hem klasik hem de kayma deformasyonu plak teorileri ile Navier çözümlerinden türetilen teorik ifadeleri formüle etmiş ve entegre sensörler ve aktüatörler içeren katmanlı kompozit plaklar için FE modelleri geliştirmişlerdir [37]. Ayrıca Kamali ve Shodja, Hamilton prensibine dayalı olarak piezoelektrik ve elastik ortamdan oluşan yapıların serbest titreşim özelliklerini analiz etmek için üç boyutlu yarı analitik bir yaklaşım keşfetmişlerdir [38]. Silindirik formda boşluk içeren piezoelektrik malzemeden yapılmış dikdörtgen plakların doğal titreşim analizleri, elektro-elastisite teorisinin 3B lineerize edilmiş kesin denklemleri çerçevesinde Babuşcu Yeşil ve Yahnioğlu çalışmasında kapsamlı bir şekilde incelenmiştir [39].

Literatür araştırmasından görüldüğü kadarıyla piezoelektrik malzemeden yapılmış boşluk içeren plakların 3 boyutlu titreşim analizi ile ilgili kesin teoriler kullanılarak yapılan çalışmalar mevcut iken, kesin teoriler kullanılarak piezoelektrik malzemeden yapılmış elastik malzeme içine gömülü dolgu problemlerinin titreşim analizi ile ilgili bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu tez çerçevesinde içerisinde PZT malzemeden yapılmış prizmatik formda dolgu gömülü dikdörtgen plakların elektro-statik durum için ele alınan [22] çalışması elektro-dinamik problemler için geliştirilerek, parçalı homojen cisim modeli ve 3B elektro-elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri yardımıyla modellenmiş ve 3B SEY ile sayısal olarak incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, yapısında PZT malzemeden oluşmuş prizmatik formda dolgu/dolgular içeren dikdörtgen plağın, incelenen sınır ve temas koşullarında doğal titreşim problemlerinin 3B SEY ile nümerik olarak incelenmesidir. Plağın dört yanal yüzeyinden basit mesnetli ve elektrik potansiyelin sıfır olduğu (sadece PZT içeren kısımlar) aynı zamanda, matris malzemesi ile PZT dolgu arasındaki ara yüzeyde ideal temas koşullarının sağlandığı varsayılmıştır. Yapı elemanlarının süreksizlik içermesi durumunda, doğal frekans değerlerinin daha hassas hesaplanabilmesi, 3B problem formülasyonu ve ele alınan problemlerin kesin teorilere dayalı olarak modellenmesi gerekmektedir. Belirtilen problemler tez çerçevesinde parçalı-homojen cisim modeli kullanılarak, elektroelastisite teorisinin 3 boyutlu kesin hareket denklemleri kapsamında formüle edilmiştir. Elde edilen matematik modelleme çerçevesinde ele alınan sınır değer problemlerinin (SDP) çözümü, mekaniksel alana ait 6 adet gerilme, 6 adet şekil değiştirme, 3 adet yer değiştirme büyüklüğü ile elektriksel alana ait 3 adet elektriksel alan vektörü bileşeni, 3 adet elektriksel yer değiştirme ve 1 adet elektrik potansiyel olmak üzere toplam 22 adet bilinmeyenin, toplam 22 adet (4 adet kısmı türevli alan denklemleri, 9 adet mekaniksel alan ile elektriksel alanın karşılıklı etkisini içeren bünye denklemleri, 6 adet kinematik bağıntı ile 3 adet elektriksel alan ile elektrik potansiyelin ifadesi) denklemler takımının hep birlikte, ele alınan sınır ve temas koşulları ile yükleme altında çözümünü gerektirmektedir.

Yapıdaki PZT dolgunun/dolguların, plağın ön ve arka yanal yüzeylerinden görünecek şekilde bu yönde boylu boyunca yer aldığı ve plağın diğer yüzeylerinden belirli mesafede olacak şekilde, plağın iç kısmında bulunduğu kabul edilmiştir. Yapının kritik doğal frekans değerine yaklaşan dış kuvvet frekans değeri durumunda, yer değiştirmelerin sonsuza gitmesi kriterine dayanarak kritik doğal frekans değerleri elde edilmiştir. İncelenen titreşim problemleri, titreşim olayının başlangıcından uzun bir süre sonra yani titreşimin "sabit-kararlı (steady state)" durumuna geçtiği zamanda ele alınmıştır. Sayısal incelemelerde bu doğal frekans değerlerine, bazı geometrik ve malzeme parametreleri ile mekaniksel ve elektriksel alanların karşılıklı etkisi incelenmiştir.

Tez çerçevesinde incelenen problemleri üç gruba ayırabiliriz. Bunlar,

1. Süreksizlik içermeyen anizotrop dikdörtgen kalın plakların doğal titreşim analizinin belirlenmesine ait SDP'nin incelenmesi,

2. Piezoelektrik malzemeden yapılmış tek prizmatik dolgu içeren plakların doğal titreşim analizinin belirlenmesine ait SDP'nin incelenmesi,

3. Piezoelektrik malzemeden yapılmış ikiz prizmatik dolgu içeren plakların doğal titreşim analizinin belirlenmesine ait SDP'nin incelenmesi

olarak verilebilir.

1. gruptaki SDP potansiyel enerji fonksiyoneli ve Ritz tekniği yardımıyla yapılmıştır. 2. ve 3 gruptaki SDP Hamilton prensibi kullanılarak yapılmıştır. Ele alınan sınır-değer problemleri 3B elektro-elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri ve parçalı homojen cisim modeli kapsamında kullanılarak matematiksel olarak modellenen ele alınan tüm SDP, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla incelenmiştir. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılmasında 8 noda sahip dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar seçilmiştir. Nümerik integral hesaplamaları için 10 Gauss noktalı Gauss Karelemesi yöntemi kullanılmıştır. Yer değiştirme tabanlı SEY kullanıldığı için, nodlarda üç eksen doğrultusundaki yer değiştirmeler ve elektrik potansiyel, bilinmeyen olarak tanımlanmıştır. Sayısal çözümde Fortran programlama dili yardımıyla her bir problem için algoritma ve programlar ayrı ayrı oluşturulmuştur.

1.3 Orijinal Katkı

Son zamanlarda piezoelektrik malzemelerin yaygın olarak kullanımına bağlı olarak, bu özellikteki malzemelerin davranışlarının belirlenmesi oldukça önemlidir. Özellikle gelişen teknoloji ile birlikte yeni enerji üretim sistemleri tasarlanmaktadır. Piezoelektrik malzemeler üzerine yapılan araştırmaların gün geçtikçe artmasının temel nedenlerinden biri de bu malzemelerin aynı zamanda enerji sağlayıcı malzemeler olmasıdır. Bu alandaki öncü çalışmalar genel olarak deneysel çalışmalardır. Fakat deneysel çalışmaların kısıtlılığı ve zorluğu dikkate alındığında, daha kapsamlı bilgi birikiminin teorik çalışmalar ile elde edilebileceği aşikardır. Bu kapsamda incelenen tez çalışması, piezoelektrik bileşenleri bulunan 3B plakların, kesin teoriler kapsamında mekaniğinin araştırılması açısından önemli destekler sunacaktır. Ayrıca, incelenen doğal titreşim problemlerinin kesin teoriler

çerçevesinde matematiksel formülasyonunun elde edilmesi, 3B SE modellemesi ve nümerik çözüm için herhangi bir paket program kullanmadan gerekli algoritma ile programların yazarlar tarafından oluşturulması faydalı bir bilgi kaynağı sağlayacaktır.

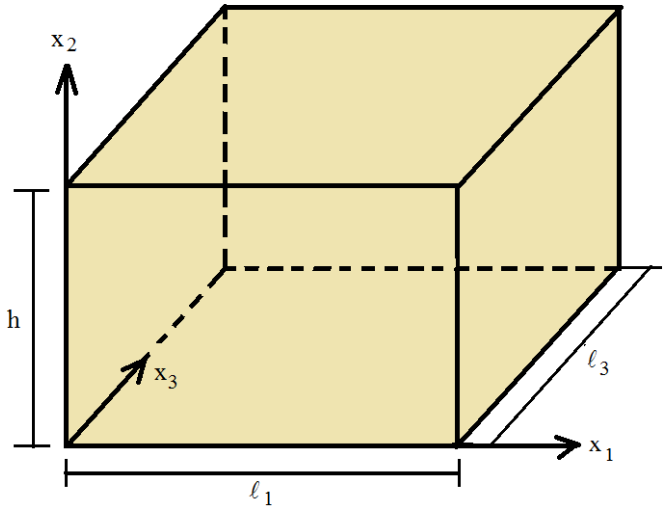
Literatür araştırmasında da sunulduğu gibi, PZT malzemeden yapılmış boşluk/delik içeren plakların 3 boyutlu titreşim analizi ile ilgili çalışmalar mevcut iken piezoelektrik malzemeden yapılmış elastik malzeme içine gömülü dolgu problemlerinin titreşim analizi ile ilgili bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu tez kapsamında yapısında PZT malzemeden yapılmış dikdörtgen prizmatik formda dolgu içeren dikdörtgen plakların elektro-statik durum için ele alınan [22] çalışması elektro-dinamik problemler için geliştirilerek, parçalı homojen cisim modeli ve 3B elektro-elastisite teorisinin kesin hareket denklemleri yardımıyla modellemesi yapılmış ve 3B SEY ile sayısal olarak incelenmiştir. Yani, tez çerçevesinde ele alınan doğal titreşim problemleri, piezoelektrik malzemeden yapılmış dolgu içeren dikdörtgen plakların kesin teoriler ile araştırılması açısından ilk girişimleri oluşturmaktadır. Bu bağlamda, ele alınan problemlerin başarılı bir şekilde çözülmesi, literatürdeki iki boyutlu ve yaklaşık teorilere dayalı sayısal sonuçların doğruluğunu belirlemek için kullanılabilir ve gelecekteki çalışmalara sağlam bir temel sağlayabilir.

2
ANİZOTROP DİKDÖRTGEN KALIN PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE DOĞAL TİTREŞİM ANALİZİ

Bu kısımda anizotrop malzemeden yapılmış, yapısında herhangi bir süreksizlik içermeyen plakların doğal titreşim frekanslarına bazı geometrik ve malzeme parametrelerinin etkisi incelenmiştir. Ele alınan sınır-değer probleminin matematiksel modelli, Elastisite Teorisi'nin kesin hareket denklemleri çerçevesinde yapılmış ve bu problemlerin çözümü, 3B Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla elde edilmiştir.

2.1 Problemin Matematiksel Modeli

Ele alınan ve yapısında süreksizlik içermeyen dikdörtgen kalın plağın geometrik özellikleri Şekil 2.1'de verilmiştir. Bu kalın plağın tüm yanal yüzeylerinden basit mesnetli olduğu kabul edilmektedir. İncelemeler plağa bağlı koordinat takımı (Şekil 2.1) kullanılarak yapılmıştır.



Şekil 2.1 Dikdörtgen kalın plak geometrisi

Ele alınan problemin çözüm bölgesi;

$$\Omega = \{0 \le x_1 \le \ell_1, 0 \le x_2 \le h, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \tag{2.1}$$

Bu bölgede sağlanan hareket denklemleri ve bünye denklemleri sırasıyla,

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{2.2}$$

$$\sigma = D\varepsilon \tag{2.3}$$

dir. (2.3) eşitliğinde aşağıdaki notasyonlar kabul edilmiştir.

$$(\sigma)^T = (\sigma_{11}, \quad \sigma_{22}, \quad \sigma_{33}, \quad \sigma_{23}, \quad \sigma_{13}, \quad \sigma_{12}),$$

$$(\varepsilon)^T = (\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{12}) \tag{2.4}$$

(2.3)'deki **D** matrisi, incelenen yapı elemanının malzemesinin mekanik özelliklerine ait matris olup, izotrop malzeme için

$$D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

olur [40]. Yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.6}$$

Ele alınan probleme ait sınır koşulları;

$$u_2|_{x_1=0;\ell_1} = u_2|_{x_3=0;\ell_3} = 0$$

$$\sigma_{11}|_{x_1=0;\ell_1} = \sigma_{13}|_{x_1=0;\ell_1} = 0$$

$$\sigma_{31}|_{x_3=0;\ell_3} = \sigma_{33}|_{x_3=0;\ell_3} = 0 \tag{2.7}$$

ve plağın üst ve alt yüzeylerinde sağlanan sınır koşulları;

$$\sigma_{2i}|_{x_2=h} = 0, \ \ \sigma_{2i}|_{x_2=0} = 0, \ \ i = 1,2,3. \tag{2.8}$$

dır. Yukarıda verilen (2.2)-(2.8) denklem ve bağıntılarında σ_{ij} gerilme tansörü bileşenlerini; ε_{ij}, şekil değiştirme tansörü bileşenlerini, u_i'ler, $(i,j = 1,2,3)$ yer değiştirme vektörü bileşenlerini ve ρ malzeme yoğunluğunu göstermektedir. Buna göre ele alınan dikdörtgen kalın plağın doğal titreşimine ait matematiksel model (2.2)-(2.8) denklem takımı aracılığıyla verilebilir. Belirtmek gerekir ki, incelenen

titreşim problemleri, titreşim olayının başlangıcından uzun bir süre sonra yani titreşimin "sabit-kararlı (steady state)" durumuna geçtiği zamanda araştırılacağından zaman parametresine göre başlangıç koşulları verilmemiştir.

Titreşimin kararlı olduğu durum için aranan büyüklüklerin zamana bağımlılığı aşağıdaki şekilde seçilebilir:

$$\{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i\} = \{\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{u}_i\} e^{i\omega t} \tag{2.9}$$

(2.9)'da $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{u}_i$'ler ilgili büyüklüklerin genliğini, ω dış kuvvete ait frekansı, $i(i^2 = -1)$ kompleks (sanal) büyüklüğü temsil etmektedir. (2.9) ifadeleri (2.2)-(2.8)'de yerine yazılır, gerekli işlemler yapılır ve genlikleri temsil eden sembollerdeki üst çizgiler göz ardı edilirse, (2.2)'den genlikler için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = -\rho\omega^2 u_i \tag{2.10}$$

Diğer tüm denklem ve ifadeler aranan büyüklüklerin genlikleri için de aynen sağlanmaktadır. Böylelikle ele alınan dikdörtgen kalın plağın titreşimini ifade eden matematiksel formülasyon, bu plağın doğal titreşim frekanslarının belirlenmesine ait özdeğer problemine dönüşmüş olur.

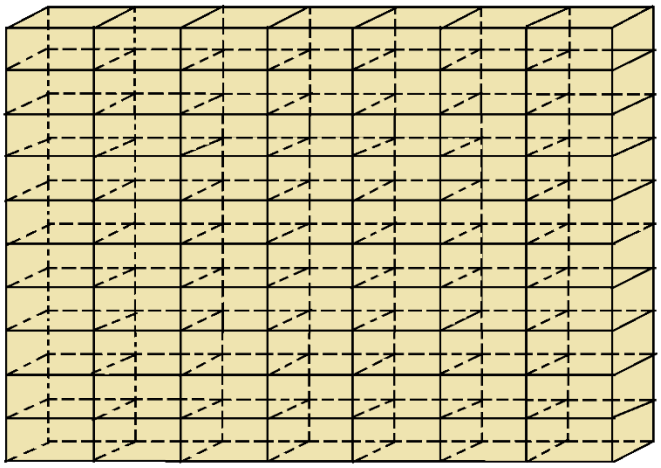
2.2 Sonlu Elemanlar Formülasyonu

Matematiksel modeli Kısım 2.1 de verilen problemlerin çözümü SEY yardımıyla nümerik olarak incelenecektir. SE ayrıklaştırmasında nodlarda bilinmeyen olarak yalnızca yer değiştirmeler seçilecek yani, yer değiştirme tabanlı Sonlu Elemanlar Metodu kullanılacaktır [41]. Ele alınan SDP için Ω çözüm bölgesi olmak üzere,

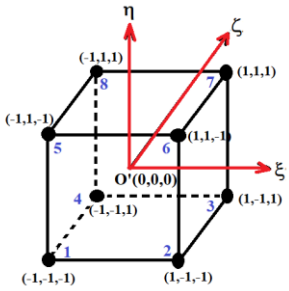
$$\pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \rho\omega^2 u_i u_j \right) d\Omega \tag{2.11}$$

fonksiyoneli ve Ritz metodu yardımıyla SE çözümü oluşturulacaktır. (2.11)'de ρ plak malzemesinin yoğunluğunu, ω dış kuvvetin frekansını, σ_{ij} gerilme tansörü bileşenlerinin genliklerini (amplitüdlerini), u_i yer değiştirme tansörü bileşenlerinin genliklerini (amplitüdlerini) göstermektedir. (2.11) fonksiyonelinin yer değiştirmelere göre birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden alan ve denge denklemleri ve gerilmeler cinsinden verilen sınır koşulları elde edilir [41]. Yani, verilen SDP π fonksiyonelinin Euler denklemleridir [42, 43].

Çözüm bölgesi, sonlu adet alt bölgeye yani, sonlu elemana (Ω_k, k=1,2,…,M) ayrıklaştırılır. Sonlu eleman ayrıklaştırması için 8 nodlu dikdörtgen-prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Sonlu eleman ağına ait bir kesit.



Şekil 2.3 Dikdörtgen prizmatik örnek eleman; seçilen nodlar ve koordinatları.

İncelenen dikdörtgen prizmatik SE'nin (Şekil 2.3) nodlarında tanımlı şekil fonksiyonlarının normalize edilmiş koordinatlardaki ($O'\xi\eta\varsigma$) ifadeleri;

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\varsigma), \qquad N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\varsigma),$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\varsigma), \qquad N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\varsigma),$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\varsigma), \qquad N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\varsigma),$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\varsigma), \qquad N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\varsigma) \qquad (2.12)$$

dir [44]. Şekil 2.1'de verilen $O'\xi\eta\varsigma$ normalize edilmiş koordinat takımı ile $Ox_1x_2x_3$ genel koordinat takımı arasında

$$\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta},\ \ \eta = \frac{x_2 - x_{20}}{\alpha}, \varsigma = \frac{x_3 - x_{30}}{\gamma} \tag{2.13}$$

ilişkileri sağlanmaktadır. $x_{10};\ x_{20};\ x_{30}$ değerleri, $\overrightarrow{OO'}$ vektörünün $Ox_1x_2x_3$ koordinat sisteminde sırasıyla Ox_1, Ox_2 ve Ox_3 koordinat eksenleri üzerindeki bileşenlerini; α, β ve γ SE'lerin sırasıyla Ox_1, Ox_2 ve Ox_3 eksenleri doğrultusundaki uzunluklarını temsil etmektedir.

Çözüm metodu gereği, her bir SE'de aranan yer değiştirme fonksiyonu polinom olarak kabul edilir. Aranan fonksiyonların, nodlarda tanımlanan şekil fonksiyonları ve aynı nodlardaki bilinmeyenler ile ifadesi;

$$u^{(k)} \approx N^{(k)} a^{(k)},\quad k = 1,2,\ldots..,M \tag{2.14}$$

olarak seçilir. Burada, $u^{(k)}, N^{(k)}$ ve $a^{(k)}$ matrisleri;

$$\left(\boldsymbol{u^{(k)}}\right)^{\boldsymbol{T}} = \left\{u_1^{(k)}(x_1,x_2,x_3), u_2^{(k)}(x_1,x_2,x_3), u_3^{(k)}(x_1,x_2,x_3)\right\}$$

$$\left(\boldsymbol{N^{(k)}}\right) = \begin{Bmatrix} N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & 0 & 0 & \ldots & N_8^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & 0 & \ldots & 0 & N_8^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(k)} & 0 & 0 & N_2^{(k)} & \ldots & 0 & 0 & N_8^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$$\left(\boldsymbol{a^{(k)}}\right)^{\boldsymbol{T}} = \left\{u_{11}^{(k)}, u_{21}^{(k)}, u_{31}^{(k)}, u_{12}^{(k)}, u_{22}^{(k)}, u_{32}^{(k)}, \ldots\ldots, u_{18}^{(k)}, u_{28}^{(k)}, u_{38}^{(k)}\right\} \tag{2.15}$$

dır [41, 45]. (2.15)' de k indisi ilgili büyüklüklerin Ω_k SE'ye ait olduğunu, $\boldsymbol{a^{(k)}}$ vektörünün bileşenleri ise Ω_k elemanın nodlarındaki aranan yer değiştirmeleri temsil etmektedir. Ayrıca 8 alt indisi dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar için köşelerde alınan nod sayısını temsil etmektedir (Şekil 2.3).

(2.14) ifadesi (2.11) fonsiyonelinde yerine yazılarak gerekli işlemler yapılırsa; problemin çözümü

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{2.16}$$

homojen cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenir. (2.16) eşitliklerinde $\boldsymbol{a}$ nodlarda bilinmeyenleri içeren vektör, $\boldsymbol{M}$ kütle matrisi, ω özdeğerleri, $\boldsymbol{K}$ ise Rijitlik matrisini temsil etmektedir [41, 45]. k. sonlu eleman (Ω_k) için bu matrislerin elemanları

$$K_{ijk} = \iiint_{\Omega_k} \left(B_j^{(k)}\right)^T D^{(k)} B_i^{(k)} d\Omega_k \qquad i;j = 1,2,\ldots,8,\quad k = 1,2,\ldots.,M \tag{2.17}$$

$$B_j^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$M_{ijk} = \iiint_{\Omega_k} N_j^T N_i d\Omega_k \tag{2.19}$$

den belirlenir.

(2.16) denklem takımının çözümü, diğer bir değişle ele alınan probleme ait özdeğerler, katsayılar matrisinin determinantının sıfırlığından yani, $\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M} = 0$ 'dan belirlenir. Fakat denklem sistemindeki denklem sayısı arttıkça veya sistemdeki nod sayısı arttıkça, belirtilen determinanttan özdeğerlerin bulunması hayli zorlaşır. Bunun yerine, özdeğerler iterasyonlar yardımıyla da belirlenebilir. Bunun için (2.16) denkleminin sağ tarafı sıfırdan farklı örneğin birim vektör seçilerek, bu denklem sistemi bazı ω değerleri için çözülür. Eğer, seçilen ω değeri, denklem sisteminin özdeğerine (yapının kritik doğal frekansına) yaklaşırsa yani, $\omega \rightarrow \omega_{cr.}$ için aranan büyüklükler sonsuza gider. Bu şekilde iterasyonlar yardımıyla (2.16) denklem sisteminin özdeğerleri belirlenmiş olur. Tez kapsamında incelenen yapının kritik doğal frekanslarını gösteren nümerik sonuçlar, belirtilen iterasyonlar yardımıyla elde edilmiştir.

2.3 Sayısal İntegral

(2.16)'da verilen lineer denklem sisteminde **K** matrisinin elemanlarının değerleri (2.17) integrali yardımıyla elde edilecektir. Fakat sonlu eleman sayısı ve her sonlu elemanda belirlenecek değerler çok fazla olduğundan, bu integrallerin elle alınması mümkün değildir. Dolayısıyla sayısal integral kullanılması kaçınılmazdır. Tez kapsamında sayısal integral alma yöntemlerinden Gauss Karelemesi kullanılmıştır [46]. Bu yönteme göre [a,b] bölgesinde verilen bir fonksiyonun belirli integrali;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{+1} f(\xi)J(\xi)d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)J(\xi_i) \tag{2.20}$$

olur. (2.20)'de, n $(1 \leq n \leq 10)$ integralin değerini hesaplamada kullanılan nokta adedi, w_i ağırlık fonksiyonları, ξ_i'ler Gauss noktalarıdır. (2.20)'de verilen Gauss karelemesi ile ($2n-1$). dereceden polinomun integrali kesin bulunabilmektedir.

(2.17) üç katlı integrallerin hesaplanmasında, Şekil 2.2'de verilen dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar için (2.20) sayısal integral formülünün kullanılması

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)dxdydz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta,\zeta)J(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{k=1}^{n_3} w_k f(\xi_j,\eta_i,\zeta_k)J(\xi_j,\eta_i,\zeta_k) \right) w_j \right) w_i \tag{2.21}$$

şeklinde yapılır.

Belirtelim ki, (2.21)'deki $n_1 = n_2 = n_3 = 10$ alınarak, Gauss Karelemesinde kullanılabilecek en çok noktada integrasyon değeri belirlenmiştir. Gauss noktaları ve ağırlık fonksiyonları Tablo 2.1'de verilmiştir.

Tablo 2.1 Gauss noktaları ve ağırlık fonksiyonları [46].

$\mp x_i$		w_i
0	n=1	2.000 000 000 000 000
0.577 350 269 189 626	n=2	1.000 000 000 000 000
0.774 596 669 241 483 0.000 000 000 000 000	n=3	0.555 555 555 555 556 0. 888 888 888 888 889
0.861 136 311 594 953 0.339 981 043 584 856	n=4	0.347 854 845 137 454 0. 652 145 154 862 546
0.906 179 845 938 664 0.538 469 310 105 683 0.000 000 000 000 000	n=5	0.236 926 885 056 189 0.478 628 670 499 366 0.568 888 888 888 889
0.932 469 514 203 152 0.661 209 386 466 265 0.238 619 186 083 197	n=6	0.171 324 492 379 170 0.360 761 573 048 139 0.467 913 934 572 691
0.949 107 912 342 759 0.741 531 185 599 394 0.405 845 151 377 397 0.000 000 000 000 000	n=7	0.129 484 966 168 870 0.279 705 391 489 277 0.381 830 050 505119 0.417 959 183 673 469

Tablo 2.1 Gauss noktaları ve ağırlık fonksiyonları [46] (devamı).

	n=8	
0.960 289 856 497 536		0.101 228 536 290 376
0.796 666 477 413 627		0.222 381 034 453 374
0.525 532 409 916 329		0.313 706 645 877 887
0.183 434 642 495 650		0.362 683 783 378 362
	n=9	
0.968 160 239 507 626		0.081 274 388 361 574
0.836 031 107 326 636		0.180 648 160 694 857
0.613 371 432 700 590		0.260 610 696 402 935
0.324 253 423 403 809		0.312 347 077 040 003
0.000 000 000 000 000		0.330 239 355 001 260
	n=10	
0.973 906 528 517 172		0.066 671 344 308 688
0.865 063 366 688 985		0.149 451 349 150 581
0.679 409 568 299 024		0.219 086 362 515 982
0.433 395 394 129 247		0.269 266 719 309 996
0.148 874 338 981 631		0.295 524 224 714 753

2.4 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

Plak malzemesi, çok katmanlı bir kompozit malzeme olup, birbirini tekrarlayan iki izotrop ve homojen levhadan oluştuğu varsayılır. Bu malzemelerin sırayla Lame sabitleri λ_1, λ_2; kayma modülleri μ_1, μ_2; Young Modülleri E_1, E_2 ve Poisson oranları ν_1, ν_2 ile gösterilmiştir. Belirtelim ki Lame sabitleri ve kayma modülleri için

$$\lambda_i = \frac{\nu_i E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}, \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \tag{2.22}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda (2.5)'de verilen **D** matrisinin elemanları, kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri olan bilinen formüller aracılığıyla elde edilir. η_1, η_2 kompozit içerisindeki hacim oranlarını göstermektedir ve sayısal hesaplamalarda $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ alınmıştır [40, 45].

$$A_{11} = (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \eta_1\eta_2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1}$$

$$A_{12} = \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 - \eta_1\eta_2(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{(\lambda_1+2\mu_1)-(\lambda_2+2\mu_2)}{(\lambda_1+2\mu_1)\eta_2+(\lambda_2+2\mu_2)\eta_1} \tag{2.23}$$

Sayısal sonuçlar tablo ve grafikler şeklinde aşağıda verilmiştir. Ayrıca, tablolarda

boyutsuz büyüklükler verilmiş olup boyutsuz doğal frekans $\varpi^2\left(=\frac{\omega^2\rho\ell_1^2}{A_{22}}\right)$ ile gösterilecektir.

Tablo 2.2'de, homojen izotrop malzemeden yapılmış dikdörtgen plak için farklı $\gamma_{31}(=\ell_3/\ell_1)$ değerleri için birinci doğal frekans $(\varpi_{cr.I}^2)$ (1.mod) değerleri verilmiştir.

Tablodaki veriler incelendiğinde, ℓ_3/ℓ_1 oranının artmasıyla elde edilen doğal frekans değerinin düzlem şekil değiştirme durumunda [45] kaynağındaki uygun değerlere yaklaştığı gözlenmektedir. Bu bulgulara dayanarak, tarafımızdan geliştirilen algoritma ve programlarla elde edilen sonuçlara güven duyulmaktadır.

Tablo 2.2 Dolgu içermeyen homojen izotrop dikdörtgen plak için $\varpi_{cr.I}^2$ parametresinin farklı $\gamma_{31}(=\ell_3/\ell_1)$ için değerleri $(E_2/E_1=1\,,h/\ell_1=0.1)$

γ_{31}	$\varpi_{cr.I}^2$
1	0.23
2	0.09
3	0.08
4	0.07
6	0.06
[45]	0.06

Hesaplamalarda kullanılan bazı metal malzemelerin mekanik sabitleri Tablo 2.3'te verilmiştir.

Tablo 2.3 Seçilmiş bazı metallerin Elastisite modülleri, Poisson oranları ve Yoğunlukları [47].

Metal	**Alüminyum (Al)**	**Çelik (St)**	**Magnezyum (Mg)**
$\boldsymbol{E\,(GPa)}$	70	207	45
$\boldsymbol{\rho\left(Kg/m^2\right)}$	2707	7850	1740
$\boldsymbol{v}$	0.33	0.3	0.29

Belirtelim ki, çözüm bölgesinin sonlu eleman ayrıklaştırması için ilk olarak Tablo 2.4-2.6 da sonlu eleman ağı (mesh) yakınsaması araştırılmıştır. Bunun için tablolarda sırasıyla $Ox_1, Ox_2\ ve\ Ox_3$ eksenleri boyunca dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısı olan N_1, N_2 ve N_3 değişiminin analizi yapılmıştır. Sayısal sonuçlardan, N_1, N_2 ve N_3 parametrelerinin değerleri arttıkça doğal frekans değerleri azalarak bir limit değere yakınsadığı görülmektedir. Bu sonuçlar, sayısal

çözümü belirlemek için kullanılan ağ duyarlılığının güvenilirliğini doğrulamaktadır. Bu nedenle, sayısal hesaplamalar için Ox_1 yönünde 20, Ox_2 yönünde 16, Ox_3 yönünde 20 dikdörtgen prizmatik sonlu eleman olacak şekilde toplam, 6400 dikdörtgen prizmatik sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır (Şekil 2.2). İncelenen durumda SE modellemesi 7497 düğüm noktası (nod) ve 21131 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir.

Tablo 2.4 Ox_1 ekseni boyunca dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_1) Al malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakta $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi ($h/\ell_1 = 0.1$, $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1 = 1$, $N_2 = 16$ ve $N_3 = 20$).

$\mathbf{N_1}$	5	8	10	15	18	20	22	25
$\boldsymbol{\varpi_{cr.I}^2}$	0.2428	0.2287	0.2253	0.2220	0.2211	0.2208	0.2208	0.2208

Tablo 2.5 Ox_2 ekseni boyunca dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_2) Al malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakta $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi ($h/\ell_1 = 0.1$, $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1 = 1$, $N_1 = 20$ ve $N_3 = 20$).

$\mathbf{N_2}$	10	12	14	16	18
$\boldsymbol{\varpi_{cr.I}^2}$	0.2213	0.2210	0.2209	0.2208	0.2208

Tablo 2.6 Ox_3 ekseni boyunca dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_3) Al malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakta $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi ($h/\ell_1 = 0.1$, $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1 = 1$, $N_1 = 20$ ve $N_2 = 16$).

$\boldsymbol{N_3}$	6	8	10	16	18	20	26
$\boldsymbol{\varpi_{cr.I}^2}$	0.2794	0.2512	0.2383	0.2241	0.2215	0.2208	0.2208

Tablo 2.7'de Al malzemeden yapılmış dikdörtgen plak için ilk 3 boyutsuz doğal frekans değerleri (ilk 3 mod) farklı h/ℓ_1 değerleri için hesaplanmıştır. Buna göre h/ℓ_1 oranı arttıkça doğal frekans değerleri her bir mod için artmaktadır.

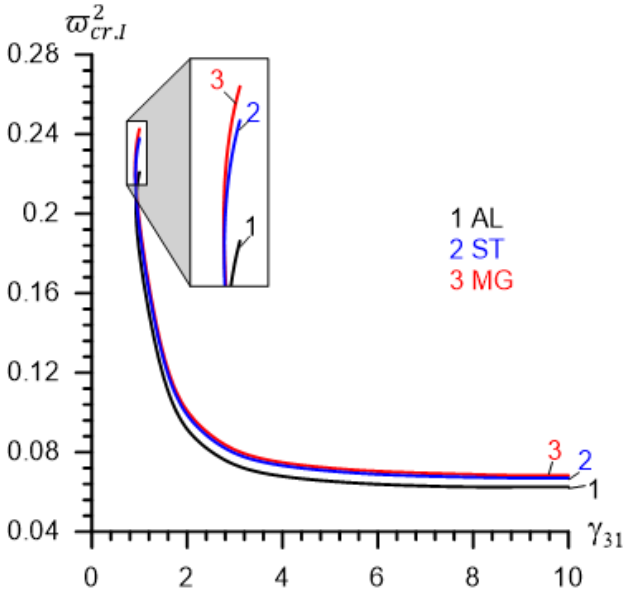
Tablo 2.7 Al malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plak için ilk 3 doğal frekans değerleri

h/ℓ_1	1.mod $(\varpi^2_{cr.I})$	2.mod $(\varpi^2_{cr.II})$	3.mod $(\varpi^2_{cr.III})$
0.1	0.2208	1.3539	4.9818
0.15	0.4405	2.4770	8.3019
0.20	0.6938	3.5949	11.0442

Tablo 2.8'de farklı plak malzemeleri için ℓ_3/ℓ_1 parametre değişiminin 1. boyutsuz doğal frekans değerlerine $(\varpi^2_{cr.I})$ etkisi incelenmiştir. Buna göre her bir plak malzemesi için ℓ_3/ℓ_1 parametre değeri arttıkça boyutsuz doğal frekans değerlerinin azaldığı ve belli bir limit değere yakınsadığı tespit edilmiştir.

Tablo 2.8 Farklı plak malzemeleri için ℓ_3/ℓ_1 parametresinin $\varpi^2_{cr.I}$ doğal frekans değerlerine etkisi $(h/\ell_1 = 0.10)$.

Plak Malzemesi	ℓ_3/ℓ_1								
	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
St	0.2378	0.0988	0.0795	0.0733	0.0689	0.0680	0.0674	0.0670	0.0670
Al	0.2208	0.0916	0.0737	0.0679	0.0639	0.0630	0.0625	0.0622	0.0622
Mg	0.2426	0.1008	0.0812	0.0748	0.0704	0.0695	0.0688	0.0683	0.0683



Şekil 2.4 Farklı plak malzemesi için $\gamma_{31}(=\ell_3/\ell_1)$ parametresinin $h/\ell_1 = 0.10$ için $\varpi^2_{cr.I}$ doğal frekans değerlerine etkisi.

Şekil 2.4 ‘de farklı plak malzemelerinde $\varpi_{cr.I}^2$ ve $\gamma_{31}(=\ell_3/\ell_1)$ parametreleri arasındaki ilişki $h/\ell_1 = 0.10$ için incelenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlara göre doğal frekans değerleri ℓ_3/ℓ_1 oranı arttıkça azalmakta ve bir asimptota yaklaşmaktadır. Plak malzemesinin farklı metal malzemeden yapılması doğal frekans değerlerinde fark yaratmaktadır.

Tablo 2.9’da farklı plak malzemeleri için boyutsuz ilk 3 doğal frekans değerleri incelenmiştir. Bu tablodaki verilen sayısal sonuçlardan *Mg* matris malzemesi için tüm boyutsuz doğal frekans değerlerinin, diğer matris malzemeleri için elde edilen uygun değerlerden büyük kaldığı görülmektedir. Tablo 2.9’a dayanarak tüm doğal frekans değerleri için;

$$\varpi^2(Mg) > \varpi^2(St) > \varpi^2(Al)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Tablo 2.9 Farklı plak malzemeleri ilk 3 doğal frekans değerleri $(h/\ell_1 = 0.10)$.

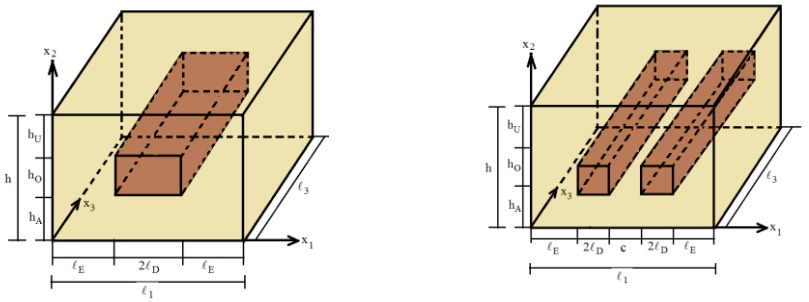
Plak Malzemesi	**1.mod** $(\boldsymbol{\varpi_{cr.I}^2})$	**2.mod** $(\boldsymbol{\varpi_{cr.II}^2})$	**3.mod** $(\boldsymbol{\varpi_{cr.III}^2})$
St	0.2378	1.4655	5.4124
Al	0.2208	1.3539	4.9818
Mg	0.2426	1.4977	5.5386

3
PİEZOELEKTRİK MALZEMEDEN YAPILMIŞ PRİZMATİK DOLGU İÇEREN PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE DOĞAL TİTREŞİM ANALİZİ

Bu kısımda yapısında piezoelektrik (PZT) malzemeden yapılmış dikdörtgen prizmatik dolgu/dolgular içeren basit mesnetli plakların doğal titreşim frekanslarına bazı geometrik ve malzeme parametre değişimlerinin etkisi incelenecektir. Problemlerin matematiksel modellemesi, parçalı-homojen cisim modeli kullanılarak elektro-elastisite teorisinin üç boyutlu kesin hareket denklemleri kapsamında yapılmıştır. Elde edilen matematiksel modellerin çözümü 3B Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla yapılmıştır. PZT dolgu/dolgular ile onu saran elastik malzeme (matris) arasındaki ara yüzeylerde, ideal temas koşullarının sağlandığı varsayılmaktadır.

3.1 Problemin Matematiksel Modeli

Ele alınan dikdörtgen plağın boyutları; Ox_1, Ox_2 ve Ox_3 doğrultularında sırasıyla ℓ_1, h ve ℓ_3'dür. Dikdörtgen plağın yapısındaki dikdörtgen prizmatik dolgunun/dolguların boyutları Ox_1, Ox_2 ve Ox_3 doğrultularında sırasıyla $2\ell_D, h_O$ ve ℓ_3'dür. Yapıdaki PZT dolgunun/dolguların, plağın iç kısmında ve Ox_3 eksenine paralel olarak yerleştiği kabul edilmiştir (Şekil 3.1).



(a) (b)

Şekil 3.1 Dikdörtgen prizmatik formda (a) tek dolgu içeren plak geometrisi (Problem 1) (b) çift dolgu içeren plak geometrisi (Problem 2).

Ele alınan problemlerin çözüm bölgesi

Problem 1 için:

$$\Omega = \Omega' \cup \Omega_I = \{0 \le x_1 \le \ell_1, 0 \le x_2 \le h, 0 \le x_3 \le \ell_3\}$$

$$\Omega_I = \{\ell_E \le x_1 \le \ell_1 - \ell_E, h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\}$$

$$\Omega' = \Omega / \Omega_I \tag{3.1}$$

Problem 2 için:

$$\Omega = \Omega'' \cup \Omega_L \cup \Omega_R = \{0 \le x_1 \le \ell_1, 0 \le x_2 \le h, 0 \le x_3 \le \ell_3\}$$

$$\Omega_L = \{\ell_E \le x_1 \le \ell_1 - \ell_E - 2\ell_D - c, h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\}$$

$$\Omega_R = \{\ell_E + 2\ell_D + c \le x_1 \le \ell_1 - \ell_E, h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\}$$

$$\Omega'' = \Omega / (\Omega_L \cup \Omega_R) \tag{3.2}$$

Burada, Problem 1 (Problem 2) için Ω_I (Ω_L ve Ω_R) dolgunun (dolguların) bulunduğu bölgeyi ve Ω' veya Ω'' dolgu veya dolguların dışındaki bölgeleri (matris) temsil etmektedir. İncelenen plağın tüm yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve elektrik potansiyelin sıfır olduğu varsayılmaktadır. Aynı zamanda, plağın yanal yüzeylerinden ve dolguyla matris ara yüzeylerinden elektriksel ve/veya mekaniksel hiçbir yükün etki etmediği kabul edilmektedir. Plağın içerdiği dolguyla matris ara yüzeyinde ideal temas koşullarını sağladığı ve PZT dolgunun tüm yüzeylerinden topraklanmış olduğu (yani, normal doğrultudaki elektriksel yer değiştirme değişiminin olmadığı) varsayılmaktadır. Burada incelenecek matematiksel modellemede, daha geniş kapsamlı olması amacıyla matris ve dolgu malzemesinin birlikte PZT malzeme olduğu kabul edilerek verilecektir. Fakat, nümerik hesaplamalarda matris malzemesinin elastik malzeme alınması durumu göz önünde bulundurulacaktır. Modellemede matris malzemesi üst indis (1) ile, dolgu malzemesi üst indis (2) ile temsil edilecektir.

Bu kapsamda, ele alınan dikdörtgen plağı oluşturan her bir bileşende ayrı ayrı sağlanan hareket denklemleri;

$$\frac{\partial T_{ji}^{(m)}}{\partial x_j} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_i^{(m)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_j^{(m)}}{\partial x_j} = 0 \tag{3.3}$$

Elektro-mekanik ilgiler,

$$T_{ij}^{(m)} = c_{ijkl}^{(m)} s_{kl}^{(m)} - e_{kij}^{(m)} E_k^{(m)}, D_i^{(m)} = e_{ikl}^{(m)} s_{kl}^{(m)} + \varepsilon_{ik}^{(m)} E_k^{(m)}$$

$$s_{kl}^{(m)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^{(m)}}{\partial x_k}\right), E_k^{(m)} = -\frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_k}, k; l; i; j = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

olur. (3.3) ve (3.4)'de Problem 1 için m=1,2 (burada m=1 matris, m=2 PZT dolguya ait büyüklükleri simgelemektedir), Problem 2 için m=1,2,3 (burada m=1 matris, m=2 soldaki, m=3 sağdaki PZT dolgu ya ait büyüklükleri simgelemektedir). Aynı zamanda ilgili denklemlerde, $T_{ji}^{(m)}$, gerilme tansörü bileşenini; $D_i^{(m)}$, elektriksel yerdeğiştirme vektörü bileşenini; $\rho^{(m)}$, plağın *m.* bileşenine ait malzeme yoğunluğunu; $u_i^{(m)}$, yerdeğiştirme vektörü bileşenini; $e_{kji}^{(m)}$, piezoelektrik sabiti; $s_{kl}^{(m)}$, Green şekildeğiştirme tansörü bileşenini; $\varepsilon_{ik}^{(m)}$, dielektrik sabiti; $E_k^{(m)}$, elektrik alan bileşenini; $c_{ijkl}^{(m)}$, elastik malzeme sabitini ve $\phi^{(m)}$, elektrik potansiyeli göstermektedir.

(3.3)'de verilen ilk denklem, plağın hareketini ve (3.3)'deki ikinci denklem, Maxwell'in elektrodinamikteki denklemlerinin özel bir halini temsil etmektedir. Elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkileşimi $e_{kji}^{(m)}$ *ve* $\varepsilon_{ik}^{(m)}$ yani, piezoelektrik ve dielektrik sabitleri ile temsil edilmektedir [24, 47].

Ele alınan problemlere ait sınır koşulları;

$$u_2^{(m)}\Big|_{x_1=0;\ell_1} = u_2^{(m)}\Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0$$

$$\Phi^{(m)}\Big|_{x_1=0;\ell_1} = \Phi^{(m)}\Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0$$

$$T_{11}^{(m)}\Big|_{x_1=0;\ell_1} = T_{13}^{(m)}\Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0$$

$$T_{31}^{(m)}\Big|_{x_3=0;\ell_3} = T_{33}^{(m)}\Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0 \quad (3.5)$$

Plağın alt ve üst yüzeylerinde sağlanan koşullar;

$$T_{2i}^{(1)}\Big|_{x_2=0;h} = 0, \ D_2^{(1)}\Big|_{x_2=0;h} = 0, \ i = 1,2,3. \quad (3.6)$$

Ara yüzeylerde sağlanan temas koşulları;

$$u_i^{(1)} n_i^{(1)}\Big|_S = u_i^{(k)} n_i^{(k)}\Big|_S$$

$$T_{ij}^{(1)} n_j^{(1)}\Big|_S = T_{ij}^{(k)} n_j^{(k)}\Big|_S$$

$$\Phi^{(1)} \mathrm{n}^{(1)}\Big|_S = \Phi^{(k)} \mathrm{n}^{(k)}\Big|_S$$

$$D_i^{(1)} n_i^{(1)}\Big|_S = D_i^{(k)} n_i^{(k)}\Big|_S \tag{3.7}$$

olarak verilebilir. (3.7)'de yapıda tek (iki) dolgu olduğunda k=2 (k=2,3) değerlerini alır. Burada $n_i^{(k)}$, k bileşeninin yüzeyinin dış birim normal vektörünün bileşenini ve S dikdörtgen prizmatik dolgu ile matris malzemesi ara sınırını temsil etmek üzere Problem 1 için (3.8), Problem 2 için (3.9) şeklindedir.

$$\begin{aligned} S = {} & \{x_1, x_2, x_3 | x_1 = \ell_E, h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | x_1 = \ell - \ell_E, h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | \ell_E \le x_1 \le \ell - \ell_E,\ x_2 = h_A,\ 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | \ell_E \le x_1 \le \ell - \ell_E, x_2 = h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} S = {} & \{x_1, x_2, x_3 | x_1 = \ell_E, h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | x_1 = \ell_E + 2\ell_D, h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | \ell_E \le x_1 \le \ell_E + 2\ell_D, \quad x_2 = h_A, \quad 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | \ell_E \le x_1 \le \ell_E + 2\ell_D, x_2 = h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | x_1 = \ell_1 - (\ell_E + 2\ell_D), h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | x_1 = \ell_1 - \ell_E, \quad h_A \le x_2 \le h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | \ell_1 - (\ell_E + 2\ell_D) \le x_1 \le \ell_1 - \ell_E, x_2 = h_A, 0 \le x_3 \le \ell_3\} \cup \\ & \{x_1, x_2, x_3 | \ell_1 - (\ell_E + 2\ell_D) \le x_1 \le \ell_1 - \ell_E, x_2 = h_A + h_O, 0 \le x_3 \le \ell_3\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Buna göre incelenen SDP'ye ait matematiksel model Problem 1 (Problem 2) için (3.1),(3.3)-(3.8) ((3.2)-(3.7) ve (3.9)) denklem takımı yardımıyla verilebilir.

Kinematik ilgileri matris formunda yazabilmek için kompakt matris notasyonu kullanılır. Bu notasyon (3.4)'de verilen büyüklüklerin alt indislerinde yer alan *ij* veya *kl* indis çiftlerinin sırasıyla, *p* veya *q* gibi tek indis ile temsiline indirgenir [48]. Yani,

$$c_{ijkl} \rightarrow c_{pq}$$

$$e_{ikl} \rightarrow c_{iq}$$

$$T_{ij} \rightarrow T_p$$

ij veya *kl*	11	22	33	23 veya 32	31 veya 13	12 veya 21
p veya *q*	1	2	3	4	5	6

alınır. Mevcut gösterim şekil değiştirme tansörü bileşenleri için;

$$s_1 = s_{11},\ s_2 = s_{22},\ s_3 = s_{33},\ s_4 = s_{23} = s_{32},\ s_5 = s_{13} = s_{31}, s_6 = s_{12} = s_{21}$$

olur. Yeni indis notasyonu çerçevesinde bünye denklemleri düzenlenirse;

$$T_p^{(m)} = c_{pq}^{(m)} s_q^{(m)} - e_{kp}^{(m)} E_k^{(m)},\ D_i^{(m)} = e_{iq}^{(m)} s_q^{(m)} + \varepsilon_{ik}^{(m)} E_k^{(m)} \qquad (3.10)$$

veya matris formunda

$$\begin{Bmatrix} T_1^{(m)} \\ T_2^{(m)} \\ T_3^{(m)} \\ T_4^{(m)} \\ T_5^{(m)} \\ T_6^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(m)} & c_{12}^{(m)} & c_{13}^{(m)} & c_{14}^{(m)} & c_{15}^{(m)} & c_{16}^{(m)} \\ c_{21}^{(m)} & c_{22}^{(m)} & c_{23}^{(m)} & c_{24}^{(m)} & c_{25}^{(m)} & c_{26}^{(m)} \\ c_{31}^{(m)} & c_{32}^{(m)} & c_{33}^{(m)} & c_{34}^{(m)} & c_{35}^{(m)} & c_{36}^{(m)} \\ c_{41}^{(m)} & c_{42}^{(m)} & c_{43}^{(m)} & c_{44}^{(m)} & c_{45}^{(m)} & c_{46}^{(m)} \\ c_{51}^{(m)} & c_{52}^{(m)} & c_{53}^{(m)} & c_{54}^{(m)} & c_{55}^{(m)} & c_{56}^{(m)} \\ c_{61}^{(m)} & c_{62}^{(m)} & c_{63}^{(m)} & c_{64}^{(m)} & c_{65}^{(m)} & c_{66}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1^{(m)} \\ s_2^{(m)} \\ s_3^{(m)} \\ s_4^{(m)} \\ s_5^{(m)} \\ s_6^{(m)} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} e_{11}^{(m)} & e_{21}^{(m)} & e_{31}^{(m)} \\ e_{12}^{(m)} & e_{22}^{(m)} & e_{32}^{(m)} \\ e_{13}^{(m)} & e_{23}^{(m)} & e_{33}^{(m)} \\ e_{14}^{(m)} & e_{24}^{(m)} & e_{34}^{(m)} \\ e_{15}^{(m)} & e_{25}^{(m)} & e_{35}^{(m)} \\ e_{16}^{(m)} & e_{26}^{(m)} & e_{36}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1^{(m)} \\ E_2^{(m)} \\ E_3^{(m)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1^{(m)} \\ D_2^{(m)} \\ D_3^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{11}^{(m)} & e_{12}^{(m)} & e_{13}^{(m)} & e_{14}^{(m)} & e_{15}^{(m)} & e_{16}^{(m)} \\ e_{21}^{(m)} & e_{22}^{(m)} & e_{23}^{(m)} & e_{24}^{(m)} & e_{25}^{(m)} & e_{26}^{(m)} \\ e_{31}^{(m)} & e_{32}^{(m)} & e_{33}^{(m)} & e_{34}^{(m)} & e_{35}^{(m)} & e_{36}^{(m)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1^{(m)} \\ s_2^{(m)} \\ s_3^{(m)} \\ s_4^{(m)} \\ s_5^{(m)} \\ s_6^{(m)} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(m)} & \varepsilon_{12}^{(m)} & \varepsilon_{13}^{(m)} \\ \varepsilon_{21}^{(m)} & \varepsilon_{22}^{(m)} & \varepsilon_{23}^{(m)} \\ \varepsilon_{31}^{(m)} & \varepsilon_{32}^{(m)} & \varepsilon_{33}^{(m)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1^{(m)} \\ E_2^{(m)} \\ E_3^{(m)} \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

elde edilir.

Titreşim probleminde yer alan büyüklükler, 3 koordinat ile zaman değişkenlerine bağlıdırlar. Bu büyüklüklerin zamana göre bağımlılığı, Bölüm 2'de verildiği gibi, seçilirse yani,

$$T_{ij}^{(m)} = \hat{T}_{ij}^{(m)} e^{i\omega t},\ s_{ij}^{(m)} = \hat{s}_{ij}^{(m)} e^{i\omega t},\ u_i^{(m)} = \hat{u}_i^{(m)} e^{i\omega t},\ D_i^{(m)} = \hat{D}_i^{(m)} e^{i\omega t},$$

$$E_i^{(m)} = \hat{E}_i^{(m)} e^{i\omega t},\ \phi_i^{(m)} = \hat{\phi}_i^{(m)} e^{i\omega t} \tag{3.12}$$

alınır. (3.12)'de $\hat{T}_{ij}^{(m)}, \hat{s}_{ij}^{(m)}, \hat{u}_i^{(m)},\ \hat{D}_i^{(m)}, \hat{E}_i^{(m)}, \hat{\phi}_i^{(m)}$ ifadeleri uygun büyüklüklerin genliğini, ω dış kuvvetin frekansını ve $i(i^2 = -1)$ kompleks büyüklüğü göstermektedir [45,49]. (3.12) ifadeleri (3.3)-(3.7)'de yerine yazılır, gerekli matematiksel işlemler sonucunda tüm denklem, bağıntı, sınır ve temas koşulları ilgili büyüklüklerin genlikleri cinsinden elde edilir. Bu denklemlerde basitlik açısından, genlikleri gösteren (3.12)'de verilen ifadelerdeki şapka sembolleri ihmal edilirse, (3.3)'ün ilk denklemi için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial T_{ji}^{(m)}}{\partial x_j} = -\rho^{(m)} \omega^2 u_i^{(m)} \tag{3.13}$$

Benzer şekilde diğer denklem ve bağıntılar, aranan büyüklüklerin genlikleri için aynen sağlanmaktadır. Eğer ele alınan dikdörtgen kalın plakta dolgu olmadığı kabul edilirse buna ait matematiksel model (Bölüm 2), yukarıda verilen Problem 1/Problem 2 'ye ait matematiksel modelde dolgu malzemesi ile onu saran matris malzemesinin aynı alınması ve ara yüzeydeki temas koşullarının ihmal edilmesi ile elde edilebilir.

3.2 Sonlu Elemanlar Formülasyonu

Matematiksel modeli verilen SDP çözümü 3B SE modellemesi yardımıyla nümerik olarak çözülecektir. Ele alınan dinamik problemin çözümü için Hamilton prensibi kullanılacaktır [24, 48]. $u_k^{(m)}$ yerdeğiştirmeler ve $\phi^{(m)}$ elektrik potansiyele bağlı olan Lagrangian fonksiyonu;

$$L\left(u_k^{(m)}, \dot{u}_k^{(m)}, \phi^{(m)}, \dot{\phi}^{(m)}, t\right) = \sum_m \left[T^{(m)}\left(\dot{u}_k^{(m)}, \dot{\phi}^{(m)}, t\right) - V^{(m)}\left(u_k^{(m)}, \phi^{(m)}, t\right)\right] \tag{3.14}$$

şeklindedir. Burada $V^{(m)}$ m. bileşenin (Problem 1 için m=1,2; Problem 2 için m=1,2,3 alınır) elektro-mekanik şekil değiştirme enerjisi ve $T^{(m)}$ m. bileşenin kinetik enerjisidir [24, 48]. Bunların ifadeleri;

$$T^{(m)}\left(\dot{u}_k^{(m)}, \dot{\phi}^{(m)}, t\right) = \int_{\Omega^{(m)}} \frac{1}{2}\rho^{(m)}\dot{u}_j^{(m)}\dot{u}_j^{(m)} d\Omega^{(m)},$$

$$V^{(m)}\left(u_k^{(m)}, \phi^{(m)}, t\right) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^{(m)}} \left[c_{ijkl}^{(m)} s_{ij}^{(m)} s_{kl}^{(m)} - 2e_{ijk}^{(m)} E_i^{(m)} s_{jk}^{(m)} - \varepsilon_{ij}^{(m)} E_i^{(m)} E_j^{(m)}\right] d\Omega^{(m)} \tag{3.15}$$

şeklindedir. Virtüel iş prensibi yardımıyla, genelleştirilmiş Hamilton prensibi;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \qquad \delta u_i^{(m)}\Big|_{t_1} = \delta u_i^{(m)}\Big|_{t_2} = 0\,, \quad \delta\phi^{(m)}\Big|_{t_1} = \delta\phi^{(m)}\Big|_{t_2} = 0 \tag{3.16}$$

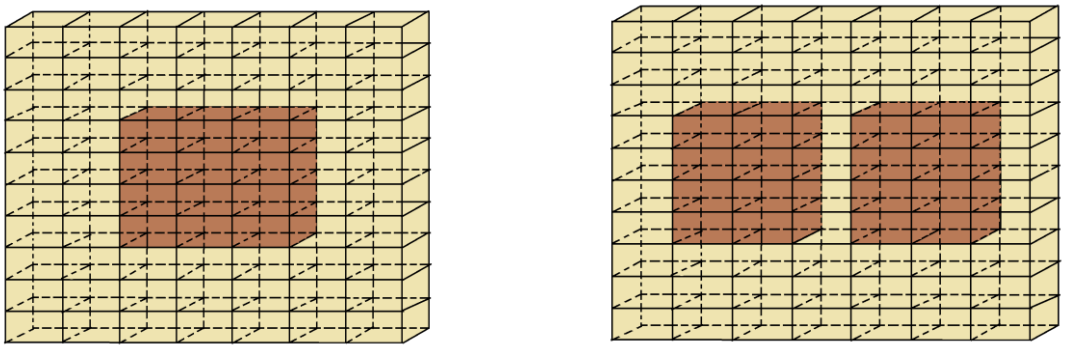
ve

$$\delta_{u_1^{(m)}} L = 0, \delta_{u_2^{(m)}} L = 0, \delta_{u_3^{(m)}} L = 0, \delta_{\Phi^{(m)}} L = 0 \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilebilir. Varyasyonel işlemler neticesinde (3.13) denklemi ve (3.5)-(3.7)'deki gerilmeler ile elektrik potansiyele göre verilen koşullar elde edilir.

Çözüm yöntemi gereği önce bölge geometriye uygun olacak şekilde ve dolgu ve matris için 8'er nodlu dikdörtgen prizmatik SE'lere ayrıklaştırılacaktır.

(Şekil 3.2). Elektrik potansiyel ile tüm eksenler doğrultusundaki yer değiştirmeler nodlarda bilinmeyen olarak alınmıştır.



(a) (b)

Şekil 3.2 (a) Tek dolgu içeren plak için bir kesitte Sonlu Eleman Ağ dizaynı (Problem 1) (b) Çift dolgu içeren plak için bir kesitte Sonlu Eleman Ağ dizaynı (Problem 2).

Çözüm bölgesi Ω sonlu adet sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{M} \Omega_e \tag{3.18}$$

Burada Ω_e, e. sonlu elemanı göstermektedir (Şekil 3.2). Sayısal çözümde, nodlardaki üç eksen yönündeki yer değiştirmeler ve elektrik potansiyelin bilinmediği varsayılır ve sonlu elemanlar çözümüne göre, (3.18)' deki her bir sonlu elemanda bilinmeyen fonksiyonların ifadeleri;

$$\begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ \Phi^{(e)} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{8} \begin{Bmatrix} u_{ij}^{(e)} \\ \Phi_j^{(e)} \end{Bmatrix} N_j^{(e)}, \quad e = 1,2,\ldots,M \tag{3.19}$$

şeklinde seçilmiştir. (3.19)'de M toplam sonlu eleman sayısını ve $N_j^{(e)}$, j. noda ait şekil fonksiyonunu göstermektedir. (3.19) ifadelerini (3.14) Lagrangian fonksiyonunda göz önüne alır ve Ritz tekniği yardımıyla, bilinen işlemler sonucunda, aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\{[\widetilde{\boldsymbol{K}}] - \omega^2[\widetilde{\boldsymbol{M}}]\}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{3.20}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{UU}} & \boldsymbol{K_{UE}^T} \\ \boldsymbol{K_{UE}} & \boldsymbol{K_{EE}} \end{bmatrix} \qquad \widetilde{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Burada $\boldsymbol{K_{UE}}, \boldsymbol{K_{UU}}$ ve $\boldsymbol{K_{EE}}$ sırasıyla elektro-elastik, mekanik ve elektriksel global stiffness matrislerini, $\boldsymbol{M}$ kütle matrisini ve $\boldsymbol{a}$ nodlarda bilinmeyenleri içeren vektörleri temsil etmektedir. Stiffness matrislerinin açık ifadeleri;

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{K_{UU}} \\ \boldsymbol{K_{UE}} \\ \boldsymbol{K_{EE}} \\ \boldsymbol{M} \end{Bmatrix} = \cup_{e=1}^{n} \begin{Bmatrix} (\boldsymbol{K_{UU}})^{(e)} \\ (\boldsymbol{K_{UE}})^{(e)} \\ (\boldsymbol{K_{EE}})^{(e)} \\ (\boldsymbol{M})^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} (\boldsymbol{K_{UU}})^{(e)} \\ (\boldsymbol{K_{UE}})^{(e)} \\ (\boldsymbol{K_{EE}})^{(e)} \\ (\boldsymbol{M})^{(e)} \end{Bmatrix} = \cup_{i,j=1}^{8} \begin{Bmatrix} (\boldsymbol{K_{UU}})_{ij}^{(e)} \\ (\boldsymbol{K_{UE}})_{ij}^{(e)} \\ (\boldsymbol{K_{EE}})_{ij}^{(e)} \\ (\boldsymbol{M})_{ij}^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

ve

$$(\boldsymbol{K_{UU}})_{ij}^{(e)} = \iiint_{\Omega_e} \left(B_j^{(e)}\right)^T D^{(e)} B_i^{(e)} d\Omega_e, \quad (\boldsymbol{K_{UE}})_{ij}^{(e)} = \iiint_{\Omega_e} \tilde{e}^{(e)} B_i^{(e)} C_j^{(e)} d\Omega_e$$

$$(\boldsymbol{K_{EE}})_{ij}^{(e)} = \iiint_{\Omega_e} \tilde{\varepsilon}^{(e)} C_i^{(e)} C_j^{(e)T} d\Omega_e, \quad (\boldsymbol{M})_{ij}^{(e)} = \rho^{(e)} \boldsymbol{I} \iiint_{\Omega_e} N_j^T N_i d\Omega_e,$$

$$B_j^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_3} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_j^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

$D^{(e)}$, $\tilde{e}^{(e)}$ ve $\tilde{\varepsilon}^{(e)}$ matrislerinin elemanları sırasıyla elastik, piezoelektrik ve dielektrik malzeme sabitlerini göstermektedir. Bu malzeme matrislerinin değerleri kutuplanma doğrultularına göre farklılık göstermektedir [47].

Kutuplanma doğrultusu Ox_1 ekseni için;

$$D^{(e)} = \begin{pmatrix} c_{33}^{(e)} & c_{13}^{(e)} & c_{13}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{(e)} & c_{11}^{(e)} & c_{12}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{(e)} & c_{12}^{(e)} & c_{11}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(e)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}^{(e)} = \begin{pmatrix} e_{33}^{(e)} & e_{31}^{(e)} & e_{31}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(e)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(e)} & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\varepsilon}^{(e)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{33}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^{(e)} \end{pmatrix}$$

(3.24)

Kutuplanma doğrultusu Ox_2 ekseni için;

$$D^{(e)} = \begin{pmatrix} c_{11}^{(e)} & c_{13}^{(e)} & c_{12}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{(e)} & c_{33}^{(e)} & c_{13}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{(e)} & c_{13}^{(e)} & c_{11}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(e)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}^{(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(e)} \\ e_{31}^{(e)} & e_{33}^{(e)} & e_{31}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(e)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\varepsilon}^{(e)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^{(e)} \end{pmatrix}$$

(3.25)

Kutuplanma doğrultusu Ox_3 ekseni için;

$$D^{(e)} = \begin{pmatrix} c_{11}^{(e)} & c_{12}^{(e)} & c_{13}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21}^{(e)} & c_{11}^{(e)} & c_{13}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31}^{(e)} & c_{31}^{(e)} & c_{33}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(e)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}^{(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(e)} & 0 & 0 \\ e_{31}^{(e)} & e_{31}^{(e)} & e_{33}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\varepsilon}^{(e)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^{(e)} \end{pmatrix}$$

(3.26)

dir. (3.20) homojen cebirsel denklemi, plağın doğal titreşimine ait özdeğer problemini temsil eder. Bu denklem sisteminin çözümünden elde edilen özdeğerler,

ele alınan plağa ait doğal frekanslar olarak adlandırılır. Dolayısıyla yapısında dikdörtgen PZT dolgu/dolgular içeren, dikdörtgen plağın doğal titreşim frekansları

$$|K - \omega^2 M| = 0 \tag{3.27}$$

denkleminin çözümüyle elde edilir.

3.3 Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

Ele alınan SDP'nin SEY aracılığıyla çözülmesi aşamasında, dolgu malzemesinin PZT malzemeden, matris malzemenin (dolguyu saran malzemenin) ise elastik bir malzemeden oluştuğu varsayılmıştır. Bu nümerik sonuçların elde edilme aşamasında gerekli tüm algoritmalar ve programlar tarafımızdan FORTRAN (FTN77) kodlama dili yardımıyla hesaplanmıştır.

Sayısal hesaplarda boyutsuz frekans değerleri verilmiştir. Bu boyutsuz frekans ifadeleri plağın elastik olması durumunda, $\varpi^2 = \omega^2 \ell_1^2 \rho^{(Elastik)}/A_{22}$ şeklinde iken piezoelektrik malzemeden yapılmış olması durumunda $\varpi^2 = \omega^2 \ell_1^2 \rho^{(PZT)}/c_{44}$ şeklindedir [48]. PZT dolgu içeren elastik plaklarda (kompozit plak) boyutsuz frekans değerleri

$$\varpi^2 \left(= \frac{\omega^2 c_{44} \left(\rho^{(PZT)}/\rho^{(Elastik)} \right)}{A_{22}} \right) \tag{3.28}$$

şeklindedir.

Doğal titreşim analizine elektriksel alanla mekaniksel alanın karşılıklı etkisini inceleyebilmek adına iki durum ele alınmıştır:

Durum 1 (C1) (Elastik Dolgu): $e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ (Plaktaki dolgu malzemesinin piezoelektrik etkilerinin ihmal edilmesi durumu).

Durum 2 (C2) (PZT Dolgu): $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ (Plaktaki dolgu malzemesinin piezoelektrik etkilerinin ihmal edilmemesi durumu).

Durum 1, dikdörtgen plaktaki PZT dolgu malzemesinin piezoelektrik ile dielektrik sabitlerinin sıfır kabul edilerek, PZT dolgunun piezoelektrik ile dielektrik özelliklerinin ihmal edilmesini temsil etmektedir (anizotrop-elastik dolgu). Durum 2 ise dikdörtgen dolgu malzemesinin piezoelektrik ile dielektrik özelliklerinin korunmasına karşı gelmektedir. Bu iki durumun nümerik sonuçları karşılaştırılarak, dikdörtgen kalın plaktaki mekaniksel ve elektriksel alanların birbirleriyle

etkileşiminin verilen yük koşulları için doğal frekans değerlerine etkisi belirlenecektir. PZT dolgu/dolgular, PZT olmayan metal malzemeden yapılmış plak içerisine gömülmüştür. Hesaplamalarda kullanılan metal malzemelin mekanik sabitleri bir önceki bölümde Tablo 2.3'te verilmiştir. Dolgu malzemesini oluşturan piezoelektrik malzeme için sayısal hesaplamalarda kullanılan elektro-elastik malzeme sabitleri Tablo 3.1'de listelenmiştir.

Tablo 3.1 Bazı piezoelektrik malzemelerin elektro-mekanik sabitleri [47].

Özellikler	**PZT-4**	**PZT-5H**	**$BaTiO_3$**
$c_{11}(10^{10}\ N/m^2)$	13.9	12.6	15.0
$c_{12}(10^{10}\ N/m^2)$	7.78	7.91	6.53
$c_{13}(10^{10}\ N/m^2)$	7.40	8.39	6.62
$c_{33}(10^{10}\ N/m^2)$	11.5	11.7	14.6
$c_{44}(10^{10}\ N/m^2)$	2.56	2.30	4.39
$c_{66}(10^{10}\ N/m^2)$	3.06	2.35	4.24
$e_{31}\ (C/m^2)$	-5.2	-6.5	-4.3
$e_{33}\ (C/m^2)$	15.1	23.3	17.5
$e_{15}\ (C/m^2)$	12.7	17.0	11.4
$\varepsilon_{11}\ (10^{-8}\ C/Vm)$	0.646	1.505	0.987
$\varepsilon_{33}\ (10^{-8}\ C/Vm)$	0.562	1.302	1.116
$\rho\ (Kg/m^2)$	7500	7500	5700

Piezoelektrik malzeme sabitlerinin boyutsuz ifadeleri aşağıdaki gibidir [49].

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi e_{15}}{c_{44}^{PZT}\ell_1},\ \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{c_{44}^{PZT}\varepsilon_{ij}}{(e_{15})^2},\ \tilde{E}_i = \frac{E_i e_{15}}{c_{44}^{PZT}} \tag{3.29}$$

3.3.1 Tek Dolgu İçeren Plak İçin Sayısal Sonuçlar

Dolgu içeren dikdörtgen plakta çözüm bölgesinin sonlu eleman ağının hassasiyetini (mesh sensitivity) test etmek için Tablo 3.2-3.4 her iki durum için hesaplanmıştır.

Tablolarda $V_d(v = \ell_1 x\, h\, x \ell_3)$ dolgu hacmini (toplam plak hacmini) göstermektedir. Dolgu hacmi V_d sabit kalmak üzere tablolarda sırasıyla $Ox_1, Ox_2\ ve\ Ox_3$ eksenleri boyunca dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısı olan N_1, N_2 ve N_3 değişiminin analizi $V_d/V = 0.1875\,, h/\ell_1 = 0.1, \gamma_{31} = \ell_3/\ell_1 = 1,$ $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1\ ,\quad h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$ parametre değerlerinde yapılmıştır. Tablo 3.2- Tablo 3.4'teki sayısal sonuçlardan sırasıyla N_1, N_2 ve N_3 parametrelerinin değerleri arttıkça doğal frekans değerlerinin azaldığı ve belirli bir limit değere yakınsadığını görülmektedir. Bu limit değerlere yaklaşım ile dinamik analize ait tarafımızdan yapılan algoritma ve programlardan bulunan sonuçlara güven sağlanmaktadır. Bu sonuçlar, sayısal çözümü belirlemek için kullanılan ağ duyarlılığının güvenilirliğini doğrulamaktadır. Dolgu malzemesi içermeyen plakta elde edilen sonlu eleman hassasiyeti ile dolgu malzemesi içermesi durumunda elde edilen sonlu eleman ağının hassasiyeti aynı çıkmıştır. Bu nedenle, sayısal hesaplamalar için Ox_1 yönünde 20, Ox_2 yönünde 16, Ox_3 yönünde 20 dikdörtgen prizmatik sonlu eleman olacak şekilde toplam, 6400 dikdörtgen prizmatik sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır (Şekil 3.2). Ele alınan durumda sonlu eleman modellemesi 7497 düğüm noktası (nod) ve 27268 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir.

Tablo 3.2 Ox_1 ekseni doğrultusunda dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_1) (PZT-5H Dolgu (Ox_2 Polarizasyon yönü) / Al Matris) için $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi ($N_2 = 16$ ve $N_3 = 20$).

N_1	5	8	10	15	18	20	22	25
Durum 2	0.3438	0.3297	0.3262	0.3228	0.3218	0.3215	0.3215	0.3215
Durum 1	0.3355	0.3215	0.3181	0.3150	0.3143	0.3141	0.3141	0.3141

Tablo 3.3 Ox_2 ekseni doğrultusunda dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_2) (PZT-5H Dolgu (Ox_2 Polarizasyon yönü)/Al Matris) için $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi ($N_1 = 20$ ve $N_3 = 20$).

N_2	10	12	14	16	18
Durum 2	0.3221	0.3218	0.3216	0.3215	0.3215
Durum 1	0.3146	0.3143	0.3142	0.3141	0.3141

Tablo 3.4 Ox_3 ekseni doğrultusunda dikdörtgen prizmatik sonlu eleman sayısının (N_3) (PZT-5H Dolgu (Ox_2 Polarizasyon yönünde) / Al Matris) için $\varpi_{cr.I}^2$ parametresi değerlerine etkisi ($N_1 = 20$ ve $N_2 = 16$).

N_3	**6**	**8**	**10**	**16**	**18**	**20**	**26**
Durum 2	0.3819	0.3533	0.3401	0.3253	0.3225	0.3215	0.3215
Durum 1	0.3732	0.3448	0.3318	0.3174	0.3149	0.3141	0.3141

Aşağıda verilen tablolardaki tüm sayısal sonuçlar rasyonel kesir olarak gösterilmiştir. Durum 2'ye ait sayısal sonuçlar kesrin payında ve Durum 1'e ait sayısal sonuçlar kesrin paydasında gösterilmiştir. Sayısal hesaplamalar 10^{-4} hassasiyetle hesaplanmıştır.

Tablo 3.5'te Problem 1 için Al plak içerisinde farklı PZT malzemelerden $(BaTiO_3,\ PZT-5H, PZT-4)$ yapılmış dikdörtgen prizmatik dolgunun hacim değişiminin (V_d/V) tüm polarizasyon yönleri için ilk doğal frekans değerlerine etkisi

$h/\ell_1 = 0.1$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1$, $h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$ para metre değerlerinde incelenmiştir. Tabloda verilen V_d; PZT dolgunun hacmini, V; ise tüm plağın hacmini göstermektedir. V_d/V oranının artması plak içerisindeki PZT dolgunun hacminin artmasını temsil etmektedir. Buna göre V_d/V oranı arttıkça, doğal frekans değerleri artmaktadır. Dolgu malzemesi değiştikçe doğal frekansların değerleri de değişmektedir. Farklı PZT dolgu malzemelerinde tüm polarizasyon yönlerinde her iki durumda doğal frekans değerleri arasında

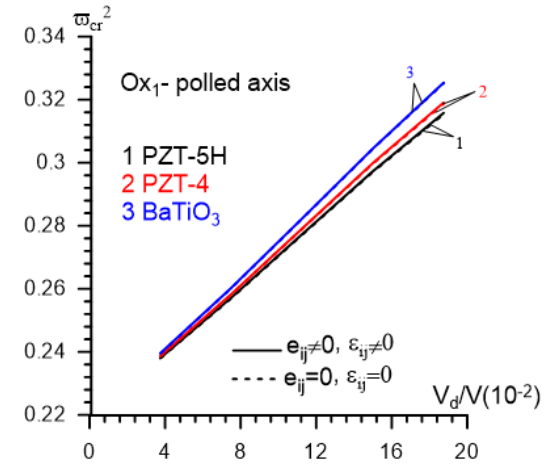
$$\varpi_{cr.I}^2(\mathrm{BaTiO_3}) > \varpi_{cr.I}^2(\mathrm{PZT-4}) > \varpi_{cr.I}^2(\mathrm{PZT-5H})$$

bağıntısı yazılabilir. Durum 2'de elde edilen doğal frekans değerleri Durum 1 için elde edilen doğal frekans değerlerinden büyük kalmaktadır. Bu iki durum arasındaki fark, her bir PZT dolgu malzemesi için Ox_2 polarizasyon yönünde maksimumdur. Herbir polarizasyon yönü için iki durum arasındaki fark dolgu malzemesi $BaTiO_3$ seçildiğinde minimum olmaktadır.

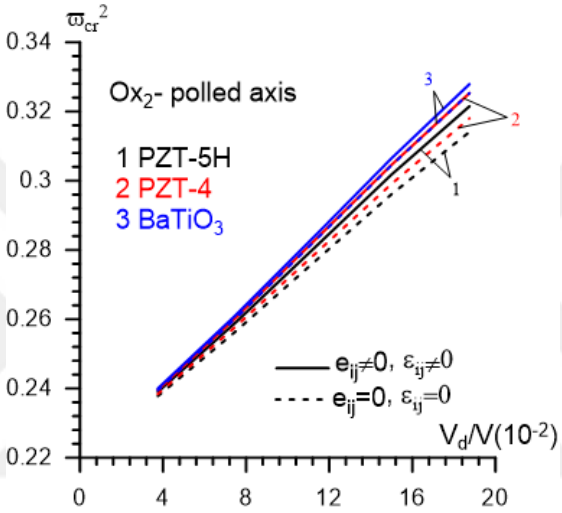
Tablo 3.5 V_d/V değişiminin tek dolgu (farklı PZT Dolgu/Al Matris) içeren plak için farklı polarizasyon yönlerinde 1. doğal frekans değerlerine etkisi [47].

Polarizasyon Yönü	Dolgu Malzemesi	V_d/V (10^{-2})				
		3.75	**7.50**	**11.25**	**15.00**	**18.75**
Ox_1 ekseni	$BaTiO_3$	0.2396 0.2395	0.2603 0.2602	0.2823 0.2822	0.3045 0.3044	0.3254 0.3252
	PZT-4	0.2387 0.2386	0.2583 0.2582	0.2791 0.2790	0.2999 0.2997	0.3191 0.3187
	PZT-5H	0.2381 0.2380	0.2572 0.2570	0.2773 0.2771	0.2973 0.2971	0.3158 0.3154
Ox_2 ekseni	$BaTiO_3$	0.2400 0.2395	0.2612 0.2603	0.2837 0.2823	0.3065 0.3045	0.3279 0.3253
	PZT-4	0.2396 0.2384	0.2604 0.2579	0.2825 0.2785	0.3046 0.2991	0.3253 0.3180
	PZT-5H	0.2390 0.2378	0.2591 0.2565	0.2804 0.2764	0.3018 0.2961	0.3215 0.3141
Ox_3 ekseni	$BaTiO_3$	0.2397 0.2395	0.2605 0.2603	0.2826 0.2823	0.3050 0.3045	0.3259 0.3254
	PZT-4	0.2387 0.2383	0.2585 0.2578	0.2794 0.2783	0.3004 02989.	0.3198 0.3178
	PZT-5H	0.2383 0.2380	0.2577 0.2570	0.2781 0.2770	0.2985 0.2970	0.3172 0.3153

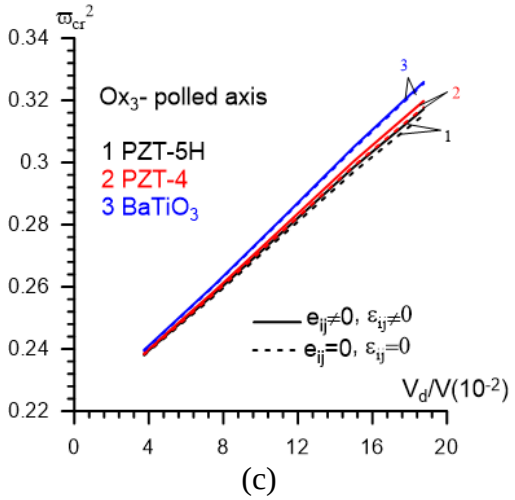
Tablo 3.5'te verilen $\varpi_{cr.I}^2$ ve V_d/V parametreleri arasındaki ilişki Şekil 3.4'te grafik olarak verilmiştir. Şekil 3.4'te Durum 1 (Durum 2)'e karşılık gelen grafikler kesik (düz) çizgi ile gösterilmiştir. Buna göre V_d/V oranı arttıkça doğal frekans değerleri de artmaktadır. İki durum arasındaki farkın, her bir PZT dolgu malzemesi için Ox_2 polarizasyon yönünde maksimum olduğu grafiklerden daha net gözükmektedir. Ox_2 polarizasyon yönü için V_d/V arttıkça iki durum (Durum 1 ($e_{ij} = 0;\ \varepsilon_{ij} = 0$) ile Durum 2 ($e_{ij} \neq 0; \varepsilon_{ij} \neq 0$) (Kısım 3.3)) arasındaki fark da artmaktadır.



(a)



(b)



(c)

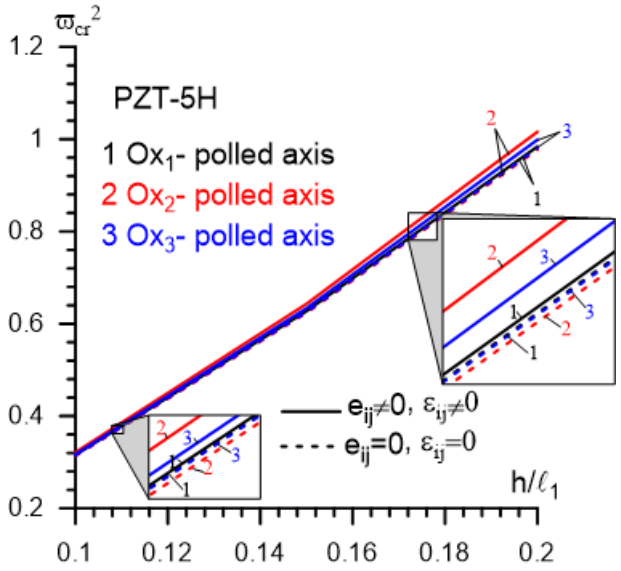
Şekil 3.4 Farklı PZT dolgu malzemeleri için $\varpi_{cr.I}^2$ ve V_d/V parametreleri arasındaki ilişki a) Ox_1 polarizasyon yönü için, b) Ox_2 polarizasyon yönü için, c) Ox_3 polarizasyon yönü için.

Tablo 3.6'da tüm polarizasyon yönlerinde, Al matris ve PZT-5H dolgudan oluşan plakta h/ℓ_1 parametresinin değişiminin $V_d/V = 0.1875$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1$, $h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$ için ilk doğal frekans değerlerine etkisi incelenmiştir. h/ℓ_1 parametresi, ele alınan kalın plağın Ox_2 ekseni doğrultusundaki boyutunu göstermektedir. h/ℓ_1 parametresinin değeri arttıkça plağın belirtilen eksen doğrultusundaki uzunluğu artmaktadır. Tablodaki sonuçlardan h/ℓ_1 parametresi arttıkça doğal frekans değerlerinin önemli ölçüde arttığı gözlemlenmiştir. İki durum arasındaki fark h/ℓ_1 parametresi arttıkça artmaktadır.

Tablo 3.6 h/ℓ_1 değişiminin tek dolgu (PZT-5H Dolgu/Al Matris) içeren plak için tüm polarizasyon yönlerinde $V_d/V = 0.1875$ durumunda 1. doğal frekans değerlerine etkisi.

h/ℓ_1	Polarizasyon Yönü		
	Ox₁	**Ox₂**	**Ox₃**
0.10	0.3158 0.3154	0.3215 0.3141	0.3172 0.3153
0.15	0.6276 0.6262	0.6431 0.6237	0.6335 0.6258
0.20	0.9841 0.9812	1.0160 0.9773	0.9989 0.9804

Tablo 3.6'da verilen $\varpi_{cr.I}^2$ ve h/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki Şekil 3.5'te grafik olarak verilmiştir. Şekil 3.5'te Durum 1 (Durum 2)'e karşılık gelen grafikler kesik (düz) çizgi ile gösterilmiştir. Buna göre h/ℓ_1 oranı arttıkça doğal frekans değerleri de artmaktadır. İki durum arasındaki farkın en fazla olduğu polarizasyon yönü Ox_2 iken, en az olduğu polarizasyon yönü Ox_1'dir.



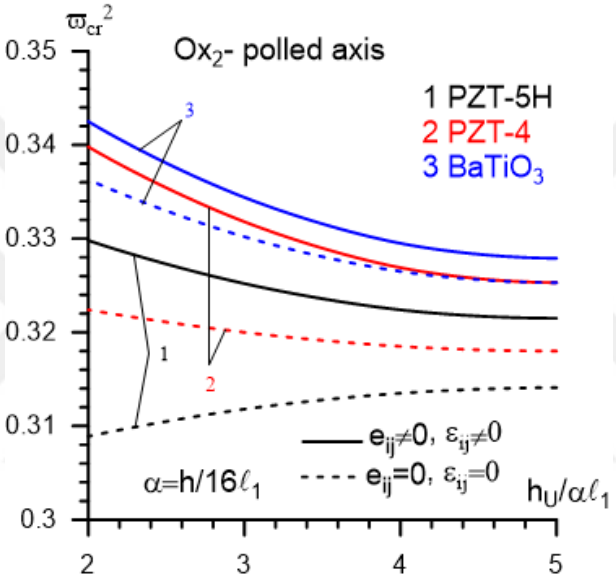
Şekil 3.5 PZT-5H dolgu ve Al matris malzemesi için farklı polarizasyon yönlerinde $\varpi_{cr.I}^2$ ve h/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki.

Tablo 3.7'de farklı malzemelerden yapılmış PZT dolgu içeren Al matris malzemesinden oluşan plakta Ox_2 polarizasyon yönünde, dolgunun konumunun önceki konumuna paralel kalacak şekilde, plağın üst yüzeyine yaklaştırılması durumunda, yani h_U/ℓ_1 değerinin küçülmesi durumunda $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $\ell_3/\ell_1 = 1$ için doğal frekans değerleri incelenmiştir. Tablodaki sonuçlardan dolgu üst yüzeye yaklaştıkça yani, h_U/ℓ_1 parametresi azaldıkça doğal titreşim frekansları PZT-5H dolgu malzemesinde Durum 1 için azalırken, diğer tüm durumlarda artmaktadır. Dolayısıyla h_U/ℓ_1 parametresi azaldıkça, iki durum arasındaki en büyük fark, PZT-5H dolgu malzemesi için oluşmaktadır.

Tablo 3.7 h_U/ℓ_1 değişiminin tek dolgu (PZT Dolgu/Al Matris) içeren plakta Ox_2 polarizasyon yönünde $V_d/V = 0.1875$ durumunda 1. doğal frekans değerlerine etkisi [47].

Dolgu Malzemesi	h_U/ℓ_1			
	$5h/16\ell_1$	$4h/16\ell_1$	$3h/16\ell_1$	$2h/16\ell_1$
$BaTiO_3$	0.3279 0.3253	0.3295 0.3265	0.3344 0.3302	0.3425 0.3363
PZT-4	0.3253 0.3180	0.3269 0.3185	0.3318 0.3200	0.3398 0.3224
PZT-5H	0.3215 0.3141	0.3224 0.3135	0.3252 0.3118	0.3298 0.3089

Tablo 3.7'de verilen $\varpi_{cr.I}^2$ ve h_U/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki Şekil 3.6'da grafik olarak verilmiştir. Şekil 3.6'da Durum 1 (Durum 2)'e karşılık gelen grafikler kesik (düz) çizgi ile gösterilmiştir. Buna göre h_U/ℓ_1 oranı azaldıkça (diğer bir değişle, dolgu, önceki konumuna paralel kalacak şekilde, plağın üst yüzeyine doğru yaklaştırıldıkça) her bir dolgu malzemesi için iki durum arasındaki fark artmakta dolayısıyla, elektriksel alan ile mekaniksel alanların karşılıklı etkileşimi, fundamental frekanslara büyük etki göstermektedir. İki durum arasındaki farkın en fazla olduğu dolgu malzemesi PZT-5H (bağıl değişim oranı %6,7)iken, en az olduğu dolgu malzemesi $BaTiO_3$ (bağıl değişim oranı %1,8) olmaktadır.



Şekil 3.6 Farklı PZT dolgu malzemeleri için Ox_2 polarizasyon yönünde $\varpi_{cr.I}^2$ ve h_U/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki.

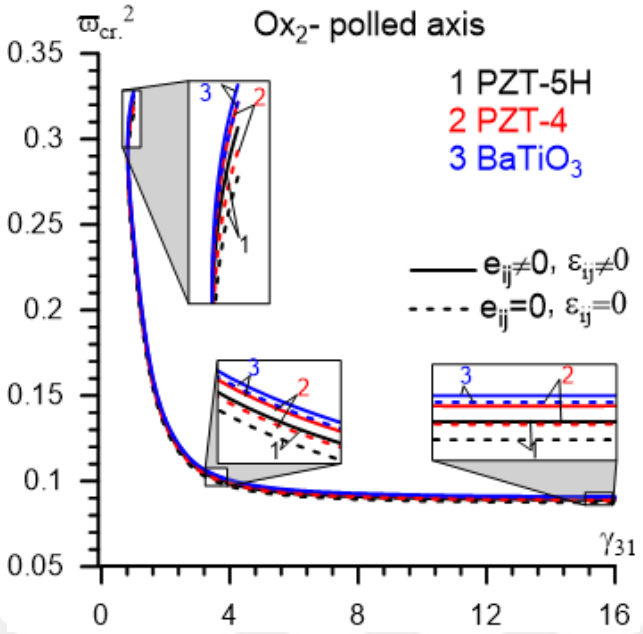
Tablo 3.8'de Ox_2 polarizasyon yönünde, farklı PZT malzemelerden yapılmış dolgu ve Al matris malzemesinden oluşan plakta $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1$, $h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$ için ℓ_3/ℓ_1 parametresi değişiminin doğal frekans değerlerine etkisi incelenmiştir. ℓ_3/ℓ_1 parametresinin değişimi, ele alınan kalın plağın Ox_3 ekseni doğrultusundaki boyutunun değişimini göstermektedir. ℓ_3/ℓ_1 parametresinin değeri arttıkça plağın belirtilen eksen doğrultusundaki uzunluğu artmaktadır. Buna göre bu parametre değişimi sonucunda düzlem şekil değiştirme ($\ell_3/\ell_1 > 1$) durumlarında elde edilebilecek limit değerlere yaklaşım sağlanabilecektir. Her bir durum için ℓ_3/ℓ_1 değerinin artması ile doğal frekans değerleri düşmekte ve belli bir limit değere yaklaşmaktadır. Tablo 3.8'de elde edilen değerlerden 10^{-4} hassasiyette kalın

plağın boyutları arasındaki oranların $\ell_3/\ell_1 \geq 15$ olması durumunda düzlem şekil değiştirme varsayımını gerçeklediği belirlenmiş olur.

Tablo 3.8 ℓ_3/ℓ_1 değişiminin tek dolgu (farklı PZT Dolgu/Al Matris) içeren plakta Ox_2 polarizasyon yönünde $V_d/V = 0.1875$ 1. doğal frekans değerlerine etkisi [47].

Dolgu Malzemesi	$\boldsymbol{\ell_3/\ell_1}$ **(=** γ_{31}**)**									
	1	**2**	**3**	**4**	**6**	**10**	**12**	**14**	**15**	**16**
$BaTiO_3$	0.3279	0.1359	0.1094	0.1008	0.0948	0.0919	0.0913	0.0910	0.0909	0.0909
	0.3253	0.1351	0.1088	0.1002	0.0943	0.0913	0.0908	0.0905	0.0904	0.0904
PZT-4	0.3253	0.1348	0.1085	0.0999	0.0940	0.0910	0.0905	0.0902	0.0901	0.0901
	0.3180	0.1325	0.1067	00983	0.0925	0.0896	0.0891	0.0889	0.0887	0.0887
PZT-5H	0.3215	0.1332	0.1072	0.0987	0.0928	0.0899	0.0894	0.0891	0.0889	0.0889
	0.3141	0.1308	0.1054	0.0970	0.0913	0.0884	0.0879	0.0876	0.0875	0.0875

Tablo 3.8'de verilen $\varpi_{cr.I}^2$ ve ℓ_3/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki Şekil 3.7'de grafik olarak verilmiştir. Şekil 3.7'de Durum 1 (Durum 2)'e karşılık gelen grafikler kesik (düz) çizgi ile gösterilmiştir. Her bir dolgu malzemesi için $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$ parametresi arttıkça sayısal sonuçların belli bir limite yakınsadığı grafikten daha net görülebilmektedir. ℓ_3/ℓ_1 oranı arttıkça herbir dolgu malzemesi için iki durum arasındaki fark azalmaktadır. İki durum arasındaki farkın en fazla olduğu dolgu malzemesi PZT-5H iken, en az olduğu dolgu malzemesi $BaTiO_3$ olmaktadır.



Şekil 3.7 Farklı PZT dolgu ve Al matris malzemeleri için Ox_2 polarizasyon yönünde $\varpi_{cr.I}^2$ ve ℓ_3/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki.

Tablo 3.9 farklı matris malzemesi ve farklı PZT dolgu malzemesi içeren plaklar için Ox_2 polarizasyon yönü ve $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1, h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$ $\ell_3/\ell_1 = 1$ için elde edilen doğal frekans değerlerini göstermektedir. Tablodaki sonuçlardan *Mg* malzemeden oluşan matris malzemesi için boyutsuz doğal frekans değerlerinin diğer matris malzemesi içeren değerlerden büyük kaldığı görülmektedir. Ayrıca diğer matris malzemeleri için aşağıdaki ilişkiler yazılabilir. Eğer piezoelektrik dolgunun malzemesi PZT-5H veya $BaTiO_3$ ise her iki durum için veya PZT-4 ise Durum 1 için;

$$\varpi^2(Mg) > \varpi^2(St) > \varpi^2(Al)$$

Eğer PZT dolgunun malzemesi PZT-4 ise, Durum 2 için;

$$\varpi^2(Mg) > \varpi^2(Al) > \varpi^2(St)$$

ilişkileri yazılabilir.

Tablo 3.9 Farklı PZT Dolgu ve Farklı Matris ve Ox_2 polarizasyon yönü için ele alınan plağın 1. doğal frekans değerleri [47].

Dolgu Malzemesi	**Matris Malzemesi**		
	St	**Al**	**Mg**
$BaTiO_3$	$\frac{0.3332}{0.3307}$	$\frac{0.3279}{0.3253}$	$\frac{0.3746}{0.3709}$
PZT-4	$\frac{0.3113}{0.3236}$	$\frac{0.3253}{0.3180}$	$\frac{0.3706}{0.3605}$
PZT-5H	$\frac{0.3288}{0.3212}$	$\frac{0.3215}{0.3141}$	$\frac{0.3646}{0.3541}$

Tablo 3.10 ve 3.11'de $V_d/V = 0.1875,\ h/\ell_1 = 0.1,\ h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1,$ $h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1\ \ell_3/\ell_1 = 1$ için sırasıyla PZT-5H dolgu ve Al matristen oluşan plakta farklı polarizasyon doğrultuları için (Tablo 3.10), Ox_2 polarizasyon yönünde farklı dolgu malzemeleri için (Tablo 3.11) ilk üç boyutsuz doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Tablo 3.10'dan Ox_2 polarizasyon yönünde tüm doğal frekans değerleri Durum 2 (Durum 1) için diğer polarizasyon yönlerine göre en büyüktür (küçüktür). Dolayısıyla her bir mod değerinde iki durum arasındaki fark, Ox_2 polarizasyon yönünde maksimumdur. Tablo 3.11'den farklı PZT dolgu malzemelerinde Ox_2 polarizasyon yönünde her iki durumda ilk üç boyutsuz doğal frekans değerleri için de

$$\varpi^2(\mathrm{BaTiO_3}) > \varpi^2(\mathrm{PZT-4}) > \varpi^2(\mathrm{PZT-5H})$$

eşitsizliği yazılabilir.

Tablo 3.10 PZT-5H dolgu ve Al matris den oluşan plakta farklı polarizasyon yönlerinde $V_d/V = 0.1875,\ h/\ell_1 = 0.10$ için ilk 3 doğal frekans değerleri [47].

Polarizasyon Yönü	**1.mod** $(\boldsymbol{\varpi^2_{cr.I}})$	**2.mod** $(\boldsymbol{\varpi^2_{cr.II}})$	**3.mod** $(\boldsymbol{\varpi^2_{cr.III}})$
$\boldsymbol{Ox_1}$	$\frac{0.3158}{0.3154}$	$\frac{1.6731}{1.6484}$	$\frac{6.1848}{6.0055}$
$\boldsymbol{Ox_2}$	$\frac{0.3215}{0.3141}$	$\frac{1.6906}{1.6479}$	$\frac{6.2586}{6.0044}$
$\boldsymbol{Ox_3}$	$\frac{0.3172}{0.3153}$	$\frac{1.6575}{1.6531}$	$\frac{6.0384}{6.0271}$

Tablo 3.11 Farklı PZT dolgu ve Al matristen oluşan plakta Ox_2 polarizasyon yönünde $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için ilk 3 doğal frekans değerleri [47].

Dolgu Malzemesi	**1.mod** $(\boldsymbol{\varpi}^2_{cr.I})$	**2.mod** $(\boldsymbol{\varpi}^2_{cr.II})$	**3.mod** $(\boldsymbol{\varpi}^2_{cr.III})$
$BaTiO_3$	0.3279 0.3253	1.7296 1.7157	6.4312 6.3488
PZT-4	0.3253 0.3180	1.7092 1.6661	6.3448 6.0864
PZT-5H	0.3215 0.3141	1.6906 1.6479	6.2586 6.0044

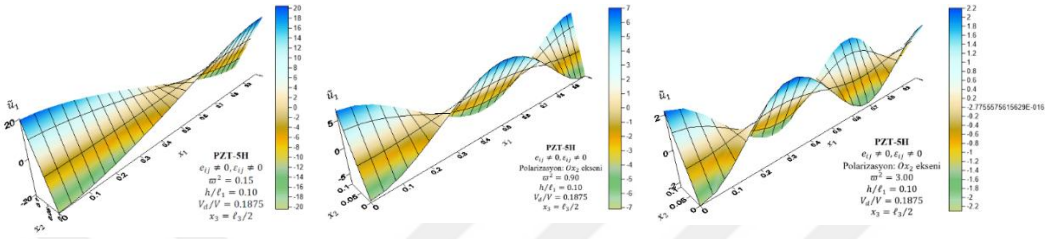
Şekil 3.8- Şekil 3.18'de tek piezoelektrik dolgu içeren plaklarda bilinmeyen yerdeğiştirme ve elektrik potansiyel değerlerinin 3 boyutlu grafikleri, plağın üst yüzeyinde etki eden düzgün yayılı harmonik dış kuvvet altında ele alınan plağın zorlanmış titreşimi için dolgu malzemesinin piezoelektrik etkilerinin ihmal edilmemesi durumunda (Durum 2) incelenmiştir. Elde edilen yerdeğiştirme ve elektrik potansiyel değerlerinin 3 boyutlu grafikleri, titreşim hareketinin başlamasından çok sonra yani, yapının titreşimi kararlı hale geldiği durumda (steady state) incelenmiştir. Alınan dış kuvvet frekans değerleri her bir modda hesaplanan kritik doğal frekans değerlerinin yaklaşık yarısı olacak şekilde belirlenmiştir.

Şekil 3.8- Şekil 3.10'da PZT-5H malzemeden yapılmış tek dolgu içeren Al plakta, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde, Ox_2 polarizasyon yönünde, ilk 3 mod için x_1 ve x_2 eksenlerine göre $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde sırasıyla $\tilde{u}_1$ (Şekil 3.8), $\tilde{u}_2$ (Şekil 3.9) ve $\tilde{u}_3$ (Şekil 3.10) yerdeğiştirmelerinin genel yayılımları incelenmiştir. Ele alınan yapı elemanında u_1, u_2, u_3 sırasıyla Ox_1, Ox_2 ve Ox_3 eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmeler olmak üzere, bu değerlerin boyutsuz ifadeleri olan $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ ve $\tilde{u}_3$ ifadeleri;

$$\tilde{u}_1 = \frac{c_{44}^{PZT} u_i}{p\ell_1}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{c_{44}^{PZT} u_2}{p\ell_1}, \tilde{u}_3 = \frac{c_{44}^{PZT} u_3}{p\gamma_{31}\ell_1}$$

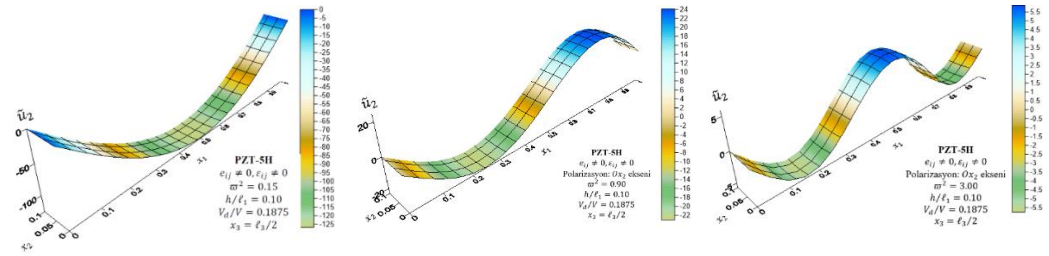
şeklindedir. Burada p plağın üst yüzeyine etki eden yayılı kuvvetin yoğunluğunu, c_{44}^{PZT} PZT dolgu malzemesine ait malzeme sabitini ve ℓ_3 kalın plağın Ox_3 ekseni doğrultusundaki uzunluğu, ℓ_1 kalın plağın Ox_1 ekseni doğrultusundaki uzunluğu olmak üzere $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$ oranını göstermektedir.

Belirtelim ki dış kuvvetin frekansı (a) 1. Modda $\varpi^2 = 0.15$, (b) 2. Modda $\varpi^2 = 0.9$ ve (c) 3. Modda $\varpi^2 = 3$ alınmıştır. Sınır koşulları dikkate alındığında, tüm yer değiştirmelerin mutlak maksimum değerlerinden en az birinin $x_2 = h$'da oluştuğu sonucuna varılabilir. Bu nedenle, ele alınan parametrelerin etkilerini gösteren diğer yer değiştirme grafikleri $x_2 = h$ düzleminde çizilecektir. Her bir mod değeri için elde edilen üç boyutlu yer değiştirme grafiklerinin, incelenen sınır koşullarında bilinen mod şekilleriyle uyuştuğu görülmüştür.



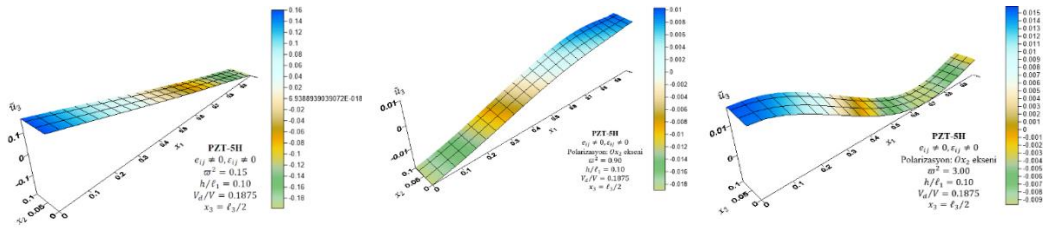
(a) (b) (c)

Şekil 3.8 İlk 3 modda tek PZT-5H Dolgu ve Al Matristen oluşan plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için).



(a) (b) (c)

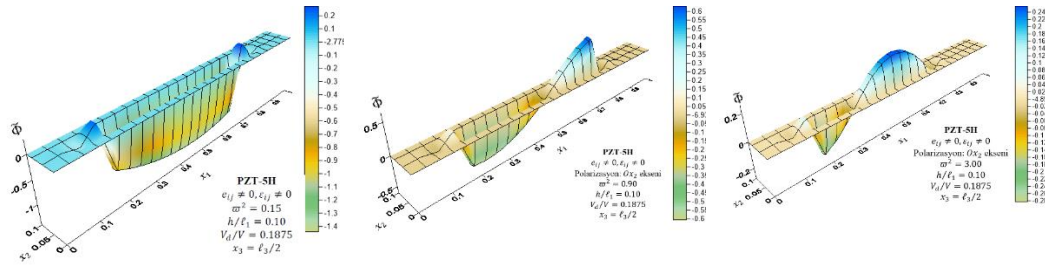
Şekil 3.9 İlk 3 modda tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için).



(a) (b) (c)

Şekil 3.10 İlk 3 modda tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için).

Şekil 3.11'de PZT-5H dolgu ve Al matristen oluşan plakta, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde, Ox_2 polarizasyon yönünde ilk 3 mod için x_1 ve x_2 eksenlerine göre $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel yayılımları incelenmiştir. Belirtelim ki dış kuvvetin frekansı (a) 1. Modda $\varpi^2 = 0.15$, (b) 2. Modda $\varpi^2 = 0.9$ ve (c) 3. Modda $\varpi^2 = 3$ alınmıştır. Sınır koşulları dikkate alındığında, elektrik potansiyel değerlerinin $x_2 = h/2$'de maksimum değere ulaştığı sonucuna varılabilir. Bu nedenle, ele alınan parametrelerin etkilerini gösteren diğer elektrik potansiyel grafikleri $x_2 = h/2$ düzleminde çizilecektir.



(a) (b) (c)

Şekil 3.11 İlk 3 modda tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için).

Şekil 3.12-Şekil 3.15'te farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde ilk mod için x_1 ve x_2 eksenlerine göre $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde $\tilde{u}_1$ (Şekil 3.12), $\tilde{u}_2$ (Şekil 3.13), $\tilde{u}_3$ (Şekil 3.14) yerdeğiştirmelerinin ve $\widetilde{\Phi}$ (Şekil 3.15) elektrik potansiyelinin genel yayılımları, $\varpi^2 = 0.15$ için hesaplanmıştır. Belirtelim ki ele alınan şekillerde birinci sütun dolgu malzemesinin PZT-5H, ikinci sütun dolgu malzemesinin PZT-4 ve üçüncü sütun dolgu malzemesinin $BaTiO_3$ alınması durumunda elde edilen yayılımları göstermektedir. İncelenen tüm grafiklerde farklı dolgu malzemeleri için yerdeğiştirme ve elektrik potansiyel yayılımları aynı olmakla beraber şiddetleri farklılaşabilmektedir. Her bir yerdeğiştirme yayılımı ve elektrik potansiyel değerleri için farklı dolgu malzemelerinde geçerli ilişkiler yazılmıştır.

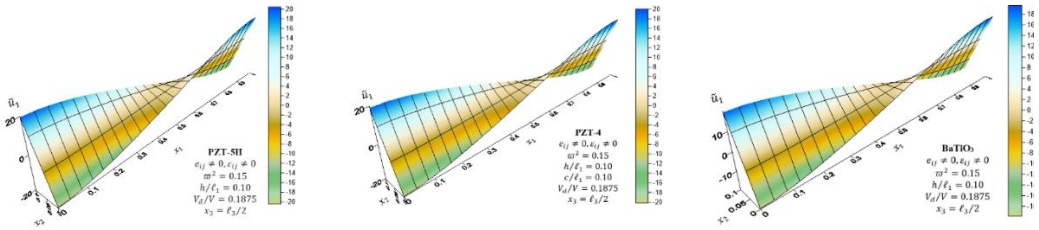
$$\left|(\tilde{u}_1)_{BaTiO_3}\right| < |(\tilde{u}_1)_{PZT-5H}| \approx |(\tilde{u}_1)_{PZT-4}|$$

$$|(\tilde{u}_2)_{PZT-4}| \approx \left|(\tilde{u}_2)_{BaTiO_3}\right| < |(\tilde{u}_2)_{PZT-5H}|$$

$$|(\tilde{u}_3)_{PZT-5H}| < |(\tilde{u}_3)_{PZT-4}| < \left|(\tilde{u}_3)_{BaTiO_3}\right|$$

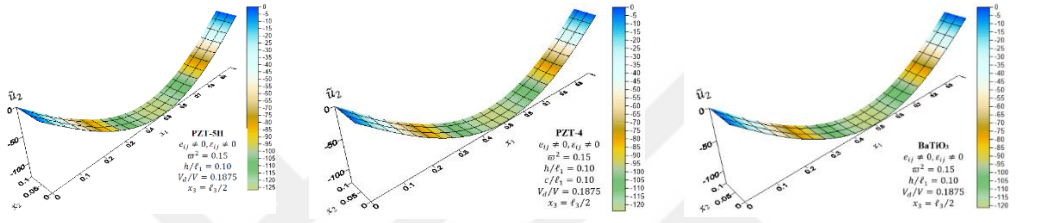
$$\left|(\widetilde{\Phi})_{BaTiO_3}\right| < \left|(\widetilde{\Phi})_{PZT-5H}\right| < \left|(\widetilde{\Phi})_{PZT-4}\right|$$

Dolayısıyla PZT dolgu içeren plaklar vasıtasıyla maksimum elektrik potansiyeli üretimi elde edilmek istenildiğinde incelenen malzemelerden PZT-4 dolgu malzemesi tercih edilmelidir.



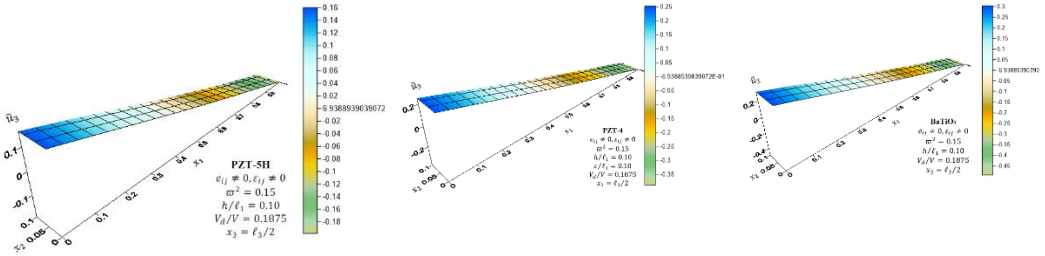
(a) (b) (c)

Şekil 3.12 Farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci mod $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Dolgu malzemesi PZT-5H, (b) Dolgu malzemesi PZT-4, (c) Dolgu malzemesi $BaTiO_3$.



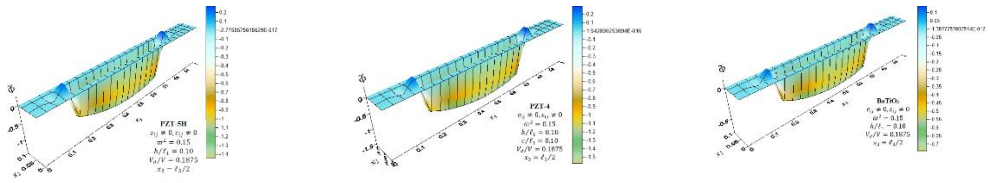
(a) (b) (c)

Şekil 3.13 Farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci mod $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Dolgu malzemesi PZT-5H, (b) Dolgu malzemesi PZT-4, (c) Dolgu malzemesi $BaTiO_3$.



(a) (b) (c)

Şekil 3.14 Farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci mod $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Dolgu malzemesi PZT-5H, (b) Dolgu malzemesi PZT-4, (c) Dolgu malzemesi $BaTiO_3$.



(a) (b) (c)

Şekil 3.15 Farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için (Ox_2 polarizasyon yönünde) tek dolgu içeren Al plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci mod $\widetilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel dağılımları (a) Dolgu malzemesi PZT-5H, (b) Dolgu malzemesi PZT-4, (c) Dolgu malzemesi $BaTiO_3$.

Şekil 3.16-Şekil 3.19'de PZT-5H dolgu malzemesi için tek dolgu içeren Al plakta, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde ilk mod için x_1 ve x_2 eksenlerine göre $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde $\tilde{u}_1$ (Şekil 3.16), $\tilde{u}_2$ (Şekil 3.17), $\tilde{u}_3$ (Şekil 3.18) yerdeğiştirmelerinin ve $\widetilde{\Phi}$ (Şekil 3.19) elektrik potansiyelinin genel yayılımları, $\varpi^2 = 0.15$ için farklı polarizasyon yönlerinde hesaplanmıştır. Belirtelim ki ele alınan şekillerde polarizasyon yönü sırasıyla (a) Ox_1, (b) Ox_2 ve (c) Ox_3 olarak alınmıştır. İncelenen tüm grafiklerde farklı polarizasyon yönleri için yerdeğiştirme yayılımları aynı olmakla birlikte değerleri farklılaşmakta, fakat elektrik potansiyel için yayılımlar da farklılaşmaktadır. $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirme değerleri ve $\widetilde{\Phi}$ elektrik potansiyel değerleri için farklı polarizasyon yönlerinde geçerli ilişkiler aşağıdaki gibidir.

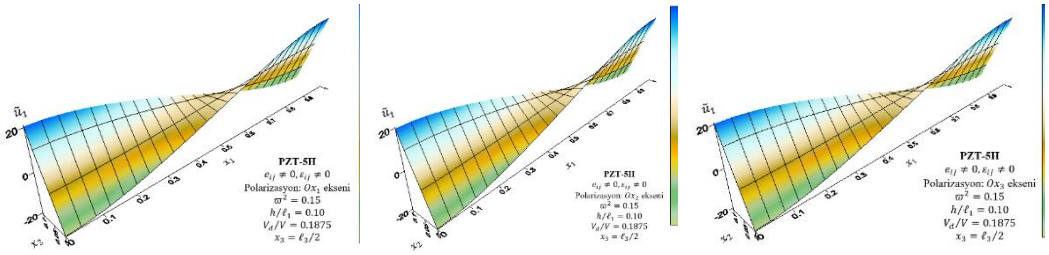
$$\left|(\tilde{u}_1)_{Ox_1}\right| \approx \left|(\tilde{u}_1)_{Ox_2}\right| \approx \left|(\tilde{u}_1)_{Ox_3}\right|$$

$$\left|(\tilde{u}_2)_{Ox_2}\right| < \left|(\tilde{u}_2)_{Ox_1}\right| \approx \left|(\tilde{u}_2)_{Ox_3}\right|$$

$$\left|(\tilde{u}_3)_{Ox_3}\right| \approx \left|(\tilde{u}_3)_{Ox_1}\right| < \left|(\tilde{u}_3)_{Ox_2}\right|$$

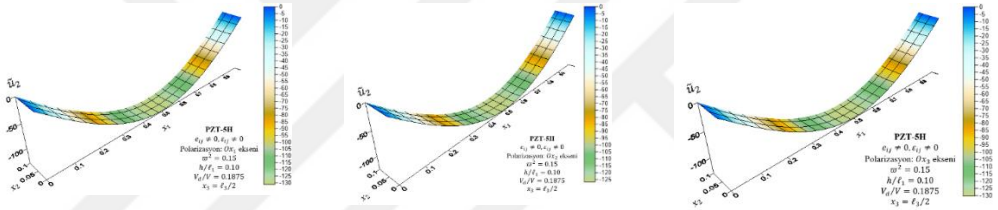
$$\left|(\widetilde{\Phi})_{Ox_3}\right| < \left|(\widetilde{\Phi})_{Ox_1}\right| < \left|(\widetilde{\Phi})_{Ox_2}\right|$$

Dolayısıyla PZT dolgu içeren plaklar vasıtasıyla maksimum elektrik potansiyeli üretimi elde edilmek istenildiğinde Ox_2 polarizasyon yönü tercih edilmelidir.



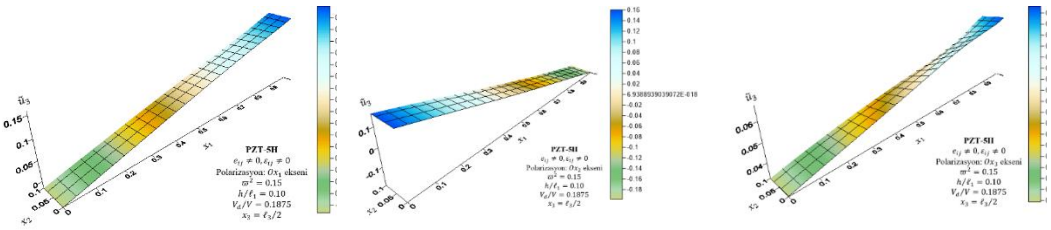
(a) (b) (c)

Şekil 3.16 Farklı polarizasyon yönlerinde, tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci modda $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Polarizasyon yönü Ox_1 (b) Polarizasyon yönü Ox_2 (c) Polarizasyon yönü Ox_3.



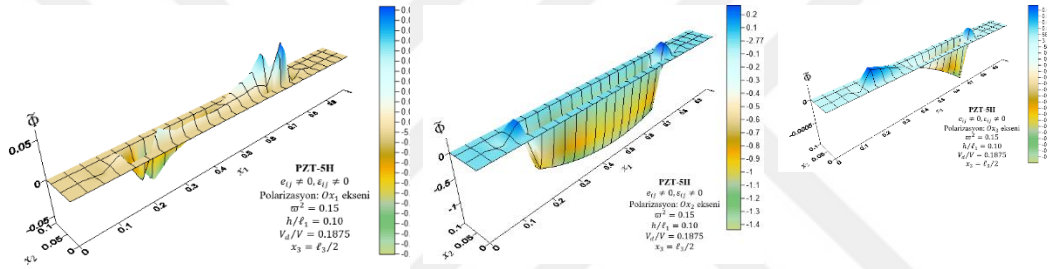
(a) (b) (c)

Şekil 3.17 Farklı polarizasyon yönlerinde, tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci modda $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Polarizasyon yönü Ox_1 (b) Polarizasyon yönü Ox_2 (c) Polarizasyon yönü Ox_3.



(a) (b) (c)

Şekil 3.18 Farklı polarizasyon yönlerinde, tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci modda $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Polarizasyon yönü Ox_1 (b) Polarizasyon yönü Ox_2 (c) Polarizasyon yönü Ox_3.

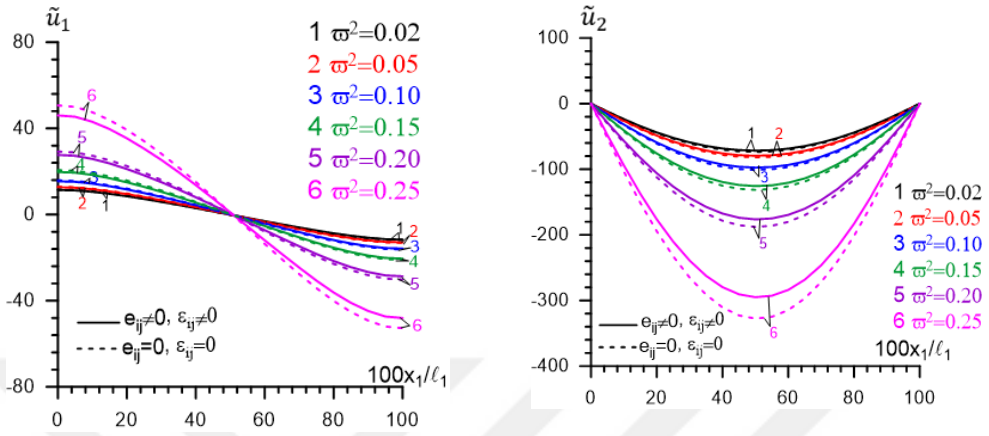


(a) (b) (c)

Şekil 3.19 Farklı polarizasyon yönlerinde, tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta Durum 2 için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\varpi^2 = 0.15$ durumunda birinci modda $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel dağılımları (a) Polarizasyon yönü Ox_1 (b) Polarizasyon yönü Ox_2 (c) Polarizasyon yönü Ox_3.

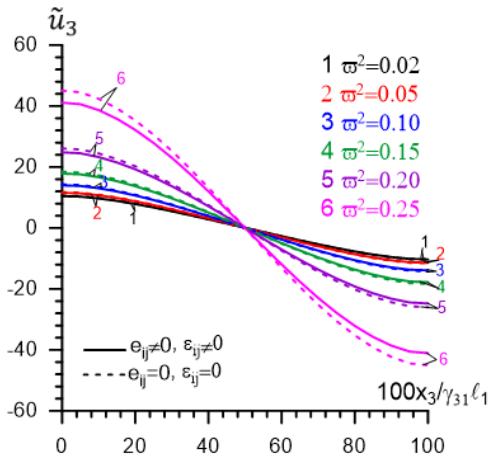
Şekil 3.20'de PZT-5H dolgu ve Al matristen oluşan plakta Ox_2 polarizasyon yönü için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde $x_2 = h$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde Ox_1 ekseni boyunca dış kuvvetin frekansının (ϖ^2) değişiminin (a) $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirme yayılımına (b) $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirme yayılımına etkisi her iki durum için verilmektedir. Şekilde verilen grafiklerde Durum 1 $(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)$'e karşılık gelen grafikler kesik ve Durum 2 $(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)$'ye karşılık gelen grafikler düz çizgi ile gösterilmiştir. Her iki yerdeğiştirme yayılımı için de Durum 2'de elde edilen değerler Durum 1'de elde edilen değerlerden mutlak değerce küçük

kalmaktadır. Dış kuvvetin frekans değeri arttıkça yerdeğiştirme yayılımları her iki durum için de mutlak değerce artmakta ve her iki durum arasındaki fark da artmaktadır.



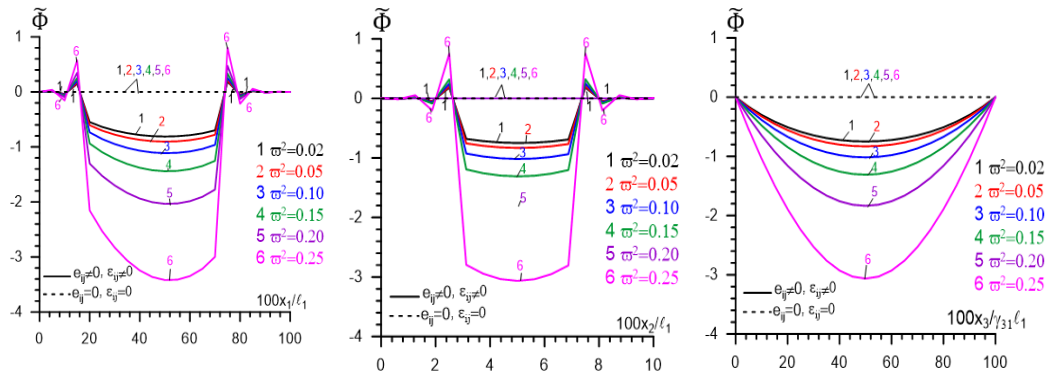
Şekil 3.20 Tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için $x_2 = h$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde Ox_1 ekseni boyunca ϖ^2 değişiminin (a) $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesine (b) $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesine etkisi.

Şekil 3.21'de PZT-5H malzemeden yapılmış tek dolgu içeren Al plakta Ox_2 polarizasyon yönü için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell_1/3$ kesitlerinde Ox_3 ekseni boyunca dış kuvvetin frekansının (ϖ^2) değişiminin $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirme yayılımına etkisi her iki durum için verilmektedir. Şekilde verilen grafiklerde Durum 1 $(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)$'e karşılık gelen grafikler kesik ve Durum 2 $(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)$'ye karşılık gelen grafikler düz çizgi ile gösterilmiştir. Ox_3 ekseni boyunca $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirme yayılımı, Ox_1 ekseni boyunca $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirme yayılımı ile benzerlik göstermektedir. $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirme yayılımı için de Durum 2'de elde edilen değerler Durum 1'de elde edilen değerlerden mutlak değerce küçük kalmaktadır. Dış kuvvetin frekans değeri arttıkça yerdeğiştirme yayılımları mutlak değerce artmakta ve her iki durum arasındaki fark da artmaktadır.



Şekil 3.21 Tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell_1/3$ kesitlerinde Ox_3 ekseni boyunca ϖ^2 değişiminin $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesine etkisi.

Şekil 3.22'de PZT-5H malzemeden yapılmış tek dolgu içeren Al plakta Ox_2 polarizasyon yönü için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde sırasıyla (a) Ox_1 ekseni, (a) Ox_2 ekseni, (a) Ox_3 ekseni boyunca dış kuvvetin frekansının (ϖ^2) değişiminin $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyeline etkisi incelenmektedir. Grafikler Ox_1 ekseni boyunca $x_2 = h/2$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde, Ox_2 ekseni boyunca $x_1 = \ell_1/3$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde ve Ox_3 ekseni boyunca $x_1 = \ell_1/3$ ve $x_2 = h/2$ kesitlerinde çizilmiştir. Belirtelim ki, bu kesitler yayılımın en büyük olduğu kesitlerdir. Plaktaki dolgu malzemesinin piezoelektrik etkilerinin ihmal edilmesi durumu (Durum 1) için elektrik potansiyeli oluşmamaktadır. Dış kuvvetin frekans değeri arttıkça tüm eksenler boyunca elektrik potansiyel yayılımları mutlak değerce artmaktadır.



(a) (b) ©

Şekil 3.22 Tek PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde)

$V_d/V = 0.1875, h/\ell_1 = 0.10$ için

(a) Ox_1 ekseni boyunca $x_2 = h/2$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde,

(b) Ox_2 ekseni boyunca $x_1 = \ell_1/3$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde,

(c) Ox_3 ekseni boyunca $x_1 = \ell_1/3$ ve $x_2 = h/2$ kesitlerinde,

ϖ^2 değişiminin $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyeline etkisi.

3.3.2 Çift (İkiz) Dolgu İçeren Plak İçin Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda ele alınan dikdörtgen kalın plağın birbirlerine paralel özdeş ikiz dikdörtgen prizmatik dolgu içermesi durumunda (Şekil 3.1b) plağın doğal titreşim problemine (Problem 2) ait sayısal sonuçlar verilecektir. Öncelikle ele alınan plağın içerdiği çift (ikiz) dolgunun karşılıklı etkileşimlerinin, plağın doğal frekans değerlerine etkisi araştırılmıştır.

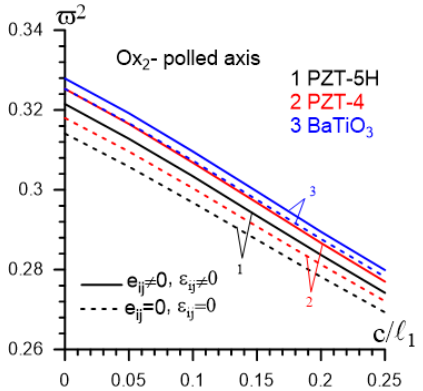
Tablo 3.12'de iki dolgu içeren dikdörtgen plakta $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1$, $h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$, $\ell_3/\ell_1 = 1$ parametre değerlerinde farklı piezoelektrik dolgu malzemeleri için Ox_2 polarizasyon yönünde ilk doğal frekans değerleri verilmiştir. Tabloda verilen c/ℓ_1 parametresi, dolgular arasındaki yatay açıklığı göstermektedir (Şekil 3.1b). Bu parametre değerinin azalması dolguların birbirine yaklaşması anlamına gelmektedir. $c/\ell_1 = 0$ plak içerisinde tek dolgu olması durumuna karşılık gelmektedir. Belirtelim ki iki dolgu veya tek dolgu olması durumları için plak içerisindeki toplam piezoelektrik dolgu hacmi (V_d)/ plak hacmi (V) oranı aynı alınmıştır, yani $V_d/V = 0.1875$. Tablo

3.12'den herbir dolgu malzemesi için dolgular birbirine yaklaşıkça doğal frekans değerlerinin artarak tek dolgu durumunda elde edilen doğal frekans değerlerine yaklaştığı gözlemlenmiştir. Dolgu malzemesi $BaTiO_3$ (PZT-5H) seçildiğinde elde edilen kritik doğal frekans değerleri diğer dolgu malzemelerine göre büyük (küçük) kalmaktadır.

Tablo 3.12 İkiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta farklı piezoelektrik dolgu (Ox_2 polarizasyon yönü) için c/ℓ_1 parametresi değişiminin 1. doğal frekans değerlerine ($\varpi_{cr.I}^2$) etkisi.

Dolgu Malzemesi	c/ℓ_1					
	0.25	**0.2**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0**
$BaTiO_3$	0.2799 0.2782	0.2895 0.2877	0.2996 0.2975	0.3096 0.3073	0.3192 0.3167	0.3279 0.3253
PZT-4	0.2770 0.2721	0.2867 0.2813	0.2968 0.2908	0.3068 0.3004	0.3165 0.3096	0.3253 0.3180
PZT-5H	0.2742 0.2693	0.2837 0.2782	0.2935 0.2875	0.3034 0.2968	0.3128 0.3058	0.3215 0.3141

Tablo 3.12'de verilen $\varpi_{cr.I}^2$ ve c/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki Şekil 3.22'de grafik olarak verilmiştir. Şekil 3.23'te Durum 1 (Durum 2)'e karşılık gelen grafikler kesik (düz) çizgi ile gösterilmiştir. Buna göre c/ℓ_1 oranı arttıkça doğal frekans değerleri azalmaktadır. İki durum arasındaki fark dolgu malzemeleri $BaTiO_3$ alındığında en küçük olmaktadır.



Şekil 3.23 Farklı PZT dolgu malzemeleri için Ox_2 polarizasyon yönünde $\varpi_{cr.I}^2$ ve c/ℓ_1 parametreleri arasındaki ilişki.

Tablo 3.13'te $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $\ell_3/\ell_1 = 1$, $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1$, $h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$ parametre değerlerinde Ox_2 polarizasyon yönünde farklı dolgu malzemeleri için ilk üç doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Tüm dolgu malzemeleri için her iki durumda birinci $(\varpi^2_{cr.I})$ ve üçüncü $(\varpi^2_{cr.III})$ doğal frekans değerleri için ikiz dolgu olması durumunda elde edilen sayısal değerler, tek dolgu olması durumunda elde edilen uygun sayısal değerlerden küçük bulunurken, ikinci $(\varpi^2_{cr.II})$ doğal frekans değerleri için ikiz dolgu olması durumunda elde edilen sayısal değerler, tek dolgu olması durumunda elde edilen uygun sayısal değerlerden büyük kalmaktadır (Tablo 3.11).

Tablo 3.13. İkiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta farklı dolgu malzemelerinde $\boldsymbol{Ox_2}$ polarizasyon yönü için ilk 3 doğal frekans değerleri.

$\boldsymbol{\varpi^2}$	**Dolgu Malzemeleri**		
	PZT-5H	**PZT-4**	**$BaTiO_3$**
$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.I}}$	$\frac{0.3034}{0.2968}$	$\frac{0.3068}{0.3004}$	$\frac{0.3096}{0.3073}$
$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.II}}$	$\frac{1.8345}{1.7905}$	$\frac{1.8563}{1.8119}$	$\frac{1.8798}{1.8647}$
$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.III}}$	$\frac{5.9076}{5.6375}$	$\frac{5.9894}{5.7156}$	$\frac{6.0658}{5.9805}$

Tablo 3.14'te Ox_2 polarizasyon yönünde, Al matris içerisindeki PZT-5H dolguların konumunun önceki konumlarına paralel kalacak şekilde, plağın üst yüzeyine yaklaştırılması durumunda, yani h_U/ℓ_1 parametre değerinin küçülmesi durumunda, $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $\ell_3/\ell_1 = 1$ için ilk üç doğal titreşim frekansları verilmiştir. Tek dolgu içeren plakta farklı dolgu malzemeleri için h_U/ℓ_1 parametresi değişiminin ilk doğal frekanslarına etkisinin incelendiği Tablo 3.7'ye göre iki durum arasındaki en büyük fark, PZT-5H dolgu malzemesi için oluştuğundan, ikiz dolguların malzemesi olarak PZT-5H seçilmiştir. Tablodaki sonuçlardan dolgu üst yüzeye yaklaştıkça yani h_U/ℓ_1 azaldıkça tüm doğal frekans değerleri Durum 1 için azalırken, Durum 2 için artmaktadır. İki durum arasındaki fark h_U/ℓ_1 parametresi azaldıkça ve mod değerleri arttıkça artmaktadır.

Tablo 3.14. İkiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta PZT-5H dolgu malzemesi için Ox_2 polarizasyon yönünde h_U/ℓ_1 parametre değişiminin ilk 3 doğal frekans değerlerine etkisi.

ϖ^2	h_U/ℓ_1			
	$5h/16\ell_1$	$4h/16\ell_1$	$3h/16\ell_1$	$2h/16\ell_1$
$\varpi^2_{cr.I}$	$\frac{0.3034}{0.2968}$	$\frac{0.3041}{0.2963}$	$\frac{0.3063}{0.2949}$	$\frac{0.3101}{0.2924}$
$\varpi^2_{cr.II}$	$\frac{1.8345}{1.7905}$	$\frac{1.8377}{1.7880}$	$\frac{1.8473}{1.7807}$	$\frac{1.8636}{1.7682}$
$\varpi^2_{cr.III}$	$\frac{5.9076}{5.6375}$	$\frac{5.9138}{5.6368}$	$\frac{6.0034}{5.6280}$	$\frac{6.0392}{5.6131}$

Tablo 3.15'te $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1, h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$ $\ell_3/\ell_1 = 1$ için PZT-5H dolgular içeren Al plakta tüm polarizasyon yönleri için ilk üç doğal frekans değerleri verilmiştir. Bu tabloda verilen sayısal sonuçlardan, Ox_2 polarizasyon yönünde tüm doğal frekans değerleri Durum 2 (Durum 1) için diğer polarizasyon yönlerine göre en büyüktür (küçüktür). Dolayısıyla her bir mod değerinde iki durum arasındaki fark, Ox_2 polarizasyon yönünde maksimumdur.

Tablo 3.15 İkiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta PZT-5H dolgu malzemesi için farklı polarizasyon yönleri için ilk 3 doğal frekans değerleri.

ϖ^2	**Polarizasyon Yönü**		
	Ox_1	Ox_2	Ox_3
$\varpi^2_{cr.I}$	$\frac{0.2987}{0.2978}$	$\frac{0.3034}{0.2968}$	$\frac{0.2994}{0.2978}$
$\varpi^2_{cr.II}$	$\frac{1.8070}{1.7912}$	$\frac{1.8345}{1.7905}$	$\frac{1.8047}{1.7975}$
$\varpi^2_{cr.III}$	$\frac{5.8762}{5.6380}$	$\frac{5.9076}{5.6375}$	$\frac{5.6650}{5.6574}$

Tablo 3.16'da farklı matris malzemeleri ve PZT-5H ikiz dolgu içeren plaklarda Ox_2 polarizasyon yönü ve $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $h_U/\ell_1 = h_A/\ell_1 = 5h/16\ell_1$, $h_O/\ell_1 = 6h/16\ell_1$ $\ell_3/\ell_1 = 1$ için ilk üç doğal frekans değerleri verilmiştir. Bu tablodaki verilen sayısal sonuçlardan *MG* matris malzemesi için boyutsuz doğal frekans değerlerinin, diğer matris malzemeleri için elde edilen uygun değerlerden büyük kaldığı görülmektedir. Tablo 3.16'ya dayanarak ilk iki doğal frekans değerleri için;

$$\varpi^2(Mg) > \varpi^2(St) > \varpi^2(Al)$$

Ve üçüncü doğal frekans değeri için;

$$\varpi^2(Mg) > \varpi^2(Al) > \varpi^2(St)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Tablo 3.16 PZT-5H ikiz dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta farklı matris malzemeleri için ilk 3 doğal frekans değerleri.

$\boldsymbol{\varpi^2}$	**Matris Malzemesi**		
	St	**Al**	**Mg**
$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.I}}$	$\frac{0.3101}{0.3032}$	$\frac{0.3034}{0.2968}$	$\frac{0.3434}{0.3345}$
$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.II}}$	$\frac{1.8667}{1.8086}$	$\frac{1.8345}{1.7905}$	$\frac{2.0905}{2.0371}$
$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.III}}$	$\frac{5.7557}{5.2565}$	$\frac{5.9076}{5.6375}$	$\frac{6.7625}{6.5260}$

Tablo 3.17'de Ox_2 polarizasyon yönü için, PZT-5H ikiz dolgu ve Al matris malzemesinden oluşan plakta h/ℓ_1 parametresinin değişiminin $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.1$, $\ell_3/\ell_1 = 1$ için ilk üç doğal frekans değerleri verilmiştir. h/ℓ_1 parametresinin değişimi ele alınan kalın plağın Ox_2 ekseni doğrultusundaki boyutunun değişimini göstermektedir. h/ℓ_1 parametresinin değeri arttıkça plağın belirtilen eksen doğrultusundaki uzunluğu artmaktadır. Tablodaki sonuçlardan h/ℓ_1 parametresi arttıkça doğal frekans değerlerinin önemli ölçüde

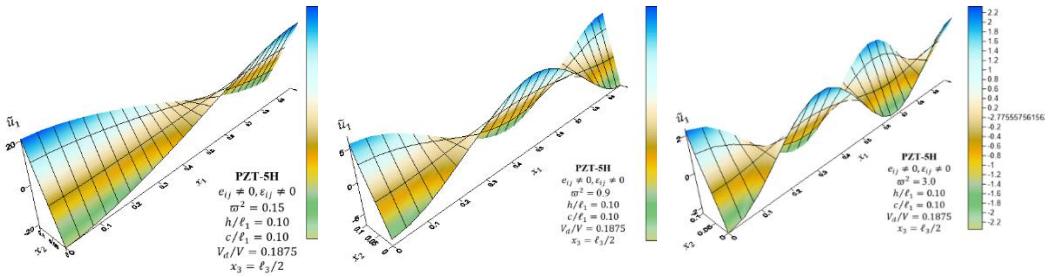
arttığı gözlemlenmiştir. Durum 1 ve Durum 2'ye ait sayısal sonuçlar arasındaki fark, h/ℓ_1 parametresi arttıkça ve büyük mod değerleri için artmaktadır.

Tablo 3.17 $\boldsymbol{h/\ell_1}$ değişiminin ikiz dolgu (PZT-5H Dolgu/Al Matris) içeren plak için ilk 3 doğal frekans değerlerine etkisi.

$\boldsymbol{h/\ell_1}$	$\boldsymbol{\varpi^2}$		
	$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.I}}$	$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.II}}$	$\boldsymbol{\varpi^2_{cr.III}}$
0.1	0.3034 0.2968	1.8345 1.7905	5.9076 5.6375
0.15	0.6078 0.5898	3.3701 3.2551	9.9999 9.2914
0.20	0.9618 0.9250	4.9176 4.7041	13.5988 12.3526

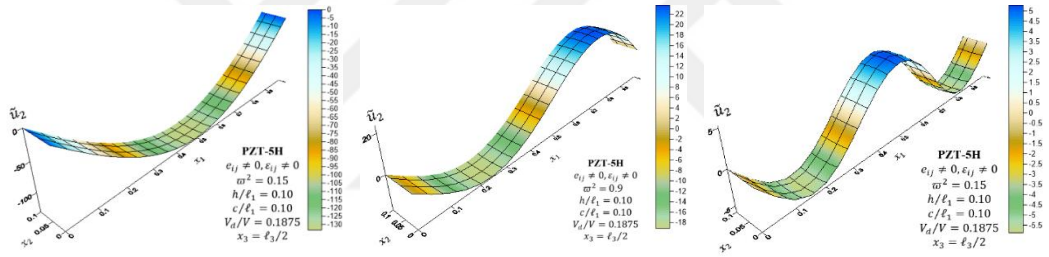
Şekil 3.24- Şekil 3.27'de ikiz piezoelektrik dolgu içeren dikdörtgen kalın plakların, üst yüzeyinden etki eden düzgün yayılı harmonik dış kuvvet etkisinde zorlanmış titreşim problemine ait yerdeğiştirme ve elektrik potansiyel fonksiyonlarının Durum 2 için 3 boyutlu grafikleri verilmiştir. Alınan dış kuvvet frekans değerleri her bir modda hesaplanan uygun kritik doğal frekans değerlerinin yaklaşık yarısı olacak şekilde seçilmiştir.

Şekil 3.24- Şekil 3.26'de PZT-5H malzemeden yapılmış ikiz dolgu içeren Al plakta, $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde, Ox_2 polarizasyon yönünde, ilk 3 mod için x_1 ve x_2 eksenlerine göre $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde sırasıyla $\tilde{u}_1$ (Şekil 3.24), $\tilde{u}_2$ (Şekil 3.26) ve $\tilde{u}_3$ (Şekil 3.25) yerdeğiştirmelerinin genel yayılımları incelenmiştir. Belirtelim ki dış kuvvetin frekansı tek dolgu probleminde olduğu gibi (a) 1. Modda $\varpi^2 = 0.15$, (b) 2. Modda $\varpi^2 = 0.9$ ve (c) 3. Modda $\varpi^2 = 3$ alınmıştır. İkiz dolgu içeren plakta yerdeğiştirme grafiklerinin yayılımları tek dolgu içeren plaktaki yerdeğiştirme yayılımlarına benzemekle beraber, ilk mod değerleri için ikiz dolgu içermesi durumunda aynı ya da mutlak değerce daha büyük değerler elde edilirken, 2. ve 3. mod değerleri için aynı ya da daha küçük değerler elde edilmiştir.



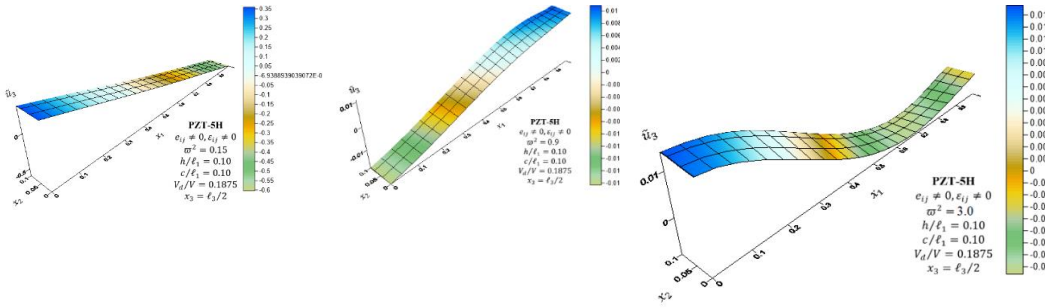
(a) (b) (c)

Şekil 3.24 İlk 3 modda ikiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için).



(a) (b) (c)

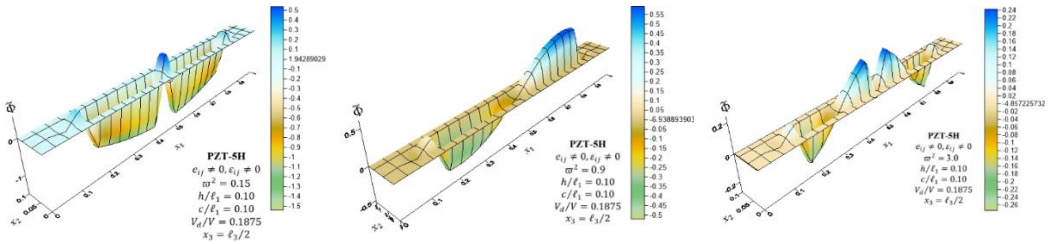
Şekil 3.25 İlk 3 modda ikiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için).



(a) (b) (c)

Şekil 3.26 İlk 3 modda ikiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için).

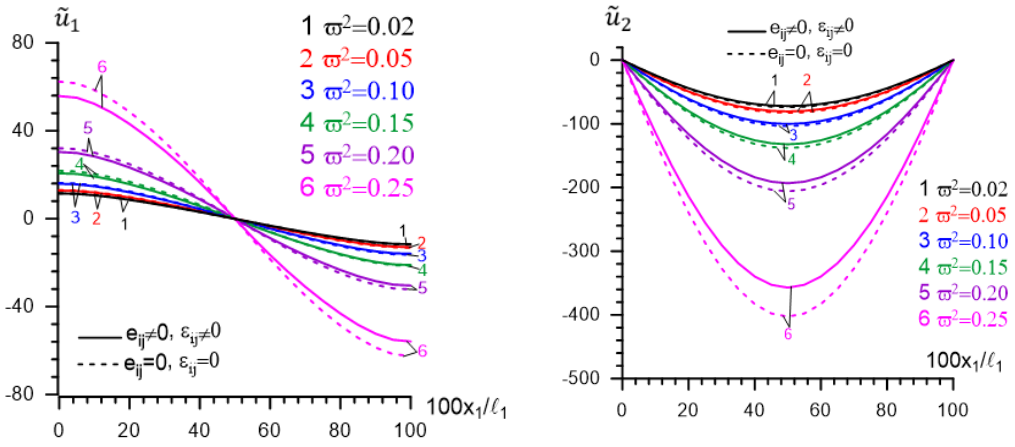
Şekil 3.27'de PZT-5H malzemeden yapılmış ikiz dolgu içeren Al plakta, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde, Ox_2 polarizasyon yönünde ilk 3 mod için x_1 ve x_2 eksenlerine göre $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel yayılımları incelenmiştir. Belirtelim ki dış kuvvetin frekansı (a) 1. Modda $\varpi^2 = 0.15$, (b) 2. Modda $\varpi^2 = 0.9$ ve (c) 3. Modda $\varpi^2 = 3$ alınmıştır. İkiz dolgu içeren plakta elektrik potansiyel grafiklerinin yayılımları 2. mod için aynı olmakla birlikte, tek mod değerlerinde yayılım farklılık göstermektedir. Fakat elde edilen elektrik potansiyel değerleri, yerdeğiştirme değerlerinde olduğu gibi ilk mod için ikiz dolgu içermesi durumunda tek dolgu içermesi durumuna göre aynı ya da mutlak değerce daha büyük kalırken, 2. ve 3. mod değerleri için aynı ya da daha küçük kalmaktadır.



(a) (b) (c)

Şekil 3.27 İlk 3 modda ikiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) Durum 2 için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$ kesitinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre, $\widetilde{\Phi}$ elektrik potansiyelinin genel dağılımları (a) Birinci mod ($\varpi^2 = 0.15$ için) (b) İkinci mod ($\varpi^2 = 0.9$ için) (c) Üçüncü mod ($\varpi^2 = 3$ için).

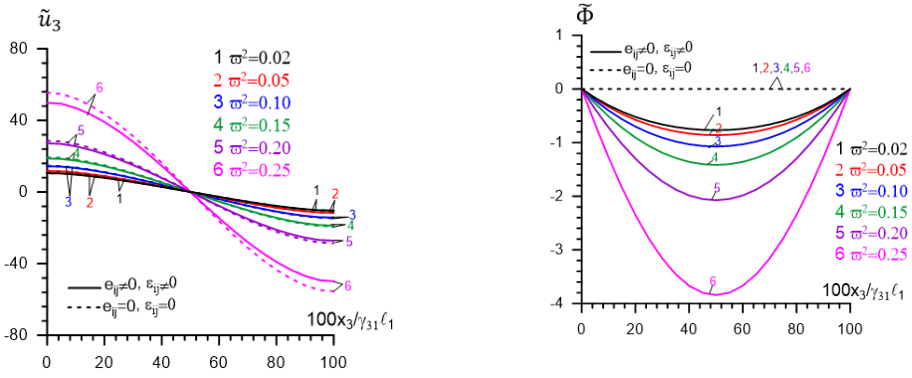
Şekil 3.28'de PZT-5H malzemeden yapılmış ikiz dolgu içeren Al plakta Ox_2 polarizasyon yönü için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde $x_2 = h$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde Ox_1 ekseni boyunca dış kuvvetin frekansının (ϖ^2) değişiminin (a) $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirme yayılımına (b) $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirme yayılımına etkisi her iki durum için verilmektedir. Şekilde verilen grafiklerde Durum 1 $(e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0)$'e karşılık gelen grafikler kesik ve Durum 2 $(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)$'ye karşılık gelen grafikler düz çizgi ile gösterilmiştir. Her iki yerdeğiştirme yayılımı için de Durum 2'de elde edilen değerler Durum 1'de elde edilen değerlerden mutlak değerce küçük kalmaktadır. Dış kuvvetin frekans değeri arttıkça yerdeğiştirme yayılımları mutlak değerce artmakta ve her iki durum arasındaki fark da artmaktadır. Dış kuvvetin frekansı arttıkça ikiz dolgu içeren plakta elde edilen $\tilde{u}_1$ ve $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirme değerleri tek dolgu içeren plakta elde edilen değerlerden büyük kalmaktadır (Bkz. Şekil 3.20).



(a) (b)

Şekil 3.28 İkiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için $x_2 = h$ ve $x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde Ox_1 ekseni boyunca ϖ^2 değişiminin (a) $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesine (b) $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesine etkisi.

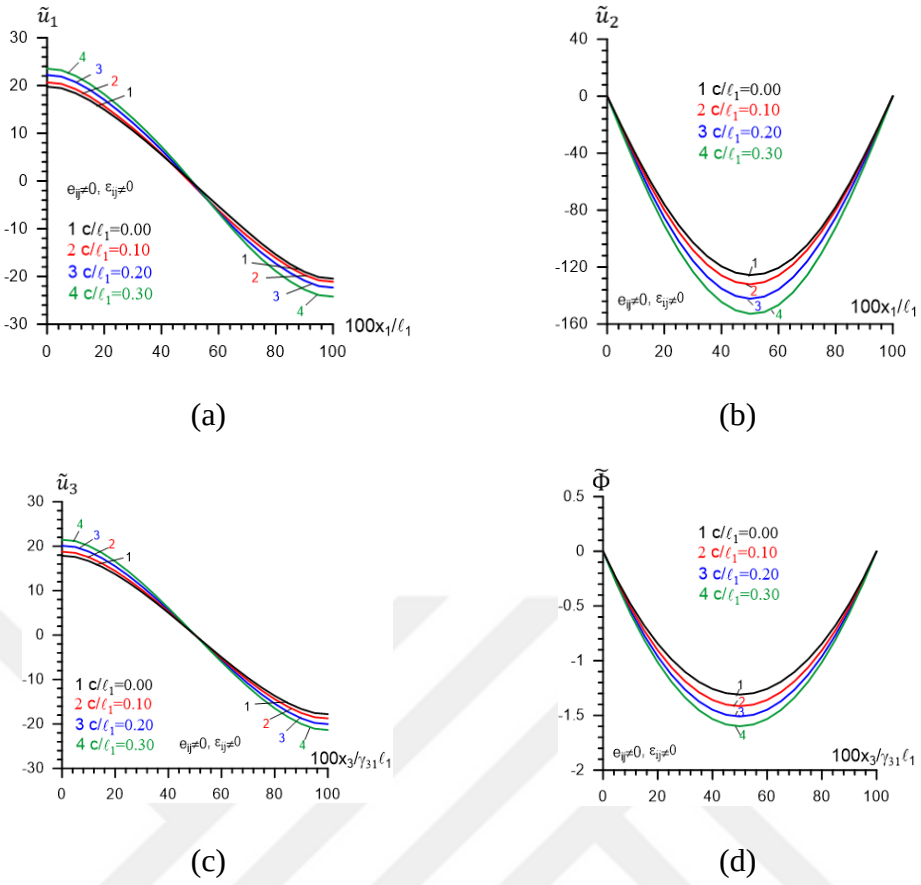
Şekil 3.29'da PZT-5H malzemeden yapılmış ikiz dolgu içeren Al plakta Ox_2 polarizasyon yönü için $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ parametre değerlerinde $x_2 = h$ ve $x_1 = \ell_1/3$ kesitlerinde Ox_3 ekseni boyunca dış kuvvetin frekansının (ϖ^2) değişiminin (a) $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirme yayılımına (b) $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyeli yayılımına etkisi her iki durum için verilmektedir. $\tilde{u}_1$ ve $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirme yayılımlarında olduğu gibi $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirme yayılımında ve $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyeli yayılımında da dış kuvvetin frekansı arttıkça ikiz dolgu içeren plakta elde edilen değerleri tek dolgu içeren plakta elde edilen değerlerden büyük kalmaktadır (Bkz. Şekil 3.21, Şekil 3.22).



(a) (b)

Şekil 3.29 İkiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $c/\ell_1 = 0.10$, $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$ için a) $\tilde{u}_3$ $(x_2 = h)$ b) $\tilde{\Phi}$ $(x_2 = h/2)$ ve $x_1 = \ell_1/3$ kesitlerinde Ox_3 ekseni boyunca ϖ^2 değişiminin etkisi.

Şekil 3.30'da PZT-5H malzemeden yapılmış ikiz dolgu içeren Al plakta Ox_2 polarizasyon yönü için $V_d/V = 0.1875$, $h/\ell_1 = 0.10$, $\varpi^2 = 0.15$ parametre değerlerinde yerdeğiştirme yayılımlarına ve elektrik potansiyel değerine c/ℓ_1 parametresinin etkisi ilk mod değerleri Durum 2 için incelenmiştir. c/ℓ_1 parametresinin azalması dolguların birbirine yaklaşmasını temsil etmektedir. $\tilde{u}_1$ ve $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirme grafikleri $x_2 = h, x_3 = \ell_3/2$ kesitlerinde Ox_1 ekseni boyunca, $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirme ve $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyel grafikleri $x_1 = \ell_1/3\,, x_2 = h/2$ kesitlerinde Ox_3 ekseni boyunca çizilmiştir. Buna göre dolgular birbirinden uzaklaştıkça belirtilen kesitlerde tüm yerdeğiştirme ve elektrik potansiyel değerlerinin mutlak değerce arttığı gözlenmiştir. Dolayısıyla piezoelektrik dolgu içeren plaklarda daha fazla elektrik potansiyel üretimi amaçlandığında aynı hacme sahip ikiz dolgu kullanımı tek dolgu kullanımına göre tercih edilmelidir.



Şekil 3.30 İkiz PZT-5H Dolgu/Al Matris içeren plakta (Ox_2 polarizasyon yönünde) $V_d/V = 0.1875, h/\ell_1 = 0.10, \varpi^2 = 0.15$ için

a) $\tilde{u}_1$ yerdeğiştirmesine $(x_2 = h, x_3 = \ell_3/2)$ Ox_1 ekseni boyunca

b) $\tilde{u}_2$ yerdeğiştirmesine $(x_2 = h, x_3 = \ell_3/2)$ Ox_1 ekseni boyunca

c) $\tilde{u}_3$ yerdeğiştirmesinin $(x_1 = \ell_1/3\,, x_2 = h)$ Ox_3 ekseni boyunca

d) $\tilde{\Phi}$ elektrik potansiyeline $(x_1 = \ell_1/3\,, x_2 = h/2)$ Ox_3 ekseni boyunca

c/ℓ_1 parametresi değişiminin etkisi.

4
SONUÇ

Tez kapsamında, yapısında piezoelektrik malzemeden yapılmış prizmatik dolgu/dolgular içeren dikdörtgen kalın plağın doğal titreşim problemi ele alınmış olup elektroelastisite teorisinin 3B kesin hareket denklemleri kapsamında formüle edilmiştir. Dikdörtgen kalın plağın yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve elektrik potansiyelin sıfır olduğu, ayrıca PZT dolgu ile onu saran matris malzemesi arasındaki ara yüzeyde ideal temas koşullarının sağlandığı kabul edilmiştir.

İncelenen piezoelektrik malzemeli dolgu/dolgular içeren dikdörtgen kalın plağın çeşitli parametrelere göre etkileri üzerinde durulmuştur. Tez kapsamındaki araştırmalar ve araştırmalardan ulaşılan neticeler aşağıda maddeler halinde verilmiştir:

- Tarafımızdan oluşturulan algoritma ve programların doğrulunu ispatlamak için öncelikle homojen izotrop malzemeden yapılmış dikdörtgen plağa ait doğal frekans değerleri incelenmiş, ℓ_3/ℓ_1 oranı arttıkça incelenen doğal frekans değerlerinin düzlem şekil değiştirme durumunda elde edilen [45] kaynağındaki uygun değerlere yakınsadığı görülmüştür.
- Çözüm bölgesinin sonlu eleman ayrıklaştırması hem homojen dikdörtgen plak hem de PZT dolgu malzemesi içeren dikdörtgen plak için yapılmış olup yakınsamanın elde edildiği Ox_1 yönünde 20, Ox_2 yönünde 16, Ox_3 yönünde 20 dikdörtgen prizmatik sonlu eleman olacak şekilde toplam 6400 dikdörtgen prizmatik sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır.
- Dolgu malzemesinin dielektrik ve piezoelektrik özelliklerinin korunması durumunda (Durum 2) elde edilen doğal frekans değerleri, dolgunun piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin ihmal edilmesi durumunda (Durum 1) elde edilen uygun doğal frekans değerlerinden her zaman büyük kalmaktadır.
- Polarizasyon yönündeki değişim doğal frekans değerlerini etkilemektedir. Dolgu malzemesinin piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin korunması durumu ile ihmal edilmesi durumunda en büyük fark Ox_2 polarizasyon yönünde oluşmaktadır.

- Plak içerisinde PZT dolgunun hacim oranı arttıkça, doğal frekans değerleri artmaktadır.
- Dolgu malzemesinin farklı PZT malzeme alınması ve farklı matris malzemesi kullanılması doğal frekans değerlerini etkilemektedir.
- Tüm polarizasyon yönlerinde dolgu malzemesinin BaTiO3 (PZT-5H) olması durumunda hesaplanan tüm doğal frekans değerleri en büyük (en küçük) olmaktadır.
- Araştırmalar sırasında aynı malzemenin üç polarizasyon yönündeki doğal frekans değerleri göz önüne alınmış, h/ℓ_1 oranının artmasının doğal frekans değerini tüm polarizasyon yönleri için artırdığı tespit edilmiştir. İki durum arasındaki fark h/ℓ_1 parametresi arttıkça ve büyük mod değerleri için artmaktadır. İki durum arasındaki farkın en fazla olduğu polarizasyon yönü Ox_2 iken, en az olduğu polarizasyon yönünün Ox_1 olduğu görülmüştür.
- Prizmatik dolgunun plağın üst kısmına yaklaştığında verdiği tepkiler de incelenmiş olup elektriksel alan ile mekaniksel alan arasındaki etkileşim ve bağıl değişim oranları hesaplanmıştır. Dolayısıyla h_U/ℓ_1 parametresi azaldıkça, iki durum arasındaki farkın en fazla olduğu dolgu malzemesi PZT-5H (bağıl değişim oranı %6,7) iken, en az olduğu dolgu malzemesi $BaTiO_3$ (bağıl değişim oranı %1,8) olmaktadır.
- İki durum arasındaki fark h_U/ℓ_1 parametresi azaldıkça ve mod değerleri arttıkça tüm dolgu malzemeleri için artmaktadır.
- Elde edilen sayısal sonuçlara göre doğal frekans değerleri ℓ_3/ℓ_1 oranı arttıkça azalmakta ve bir asimptota yaklaşmaktadır.
- Süreksizlik içermeyen dikdörtgen kalın plakta $\ell_3/\ell_1 \geq 9$ için düzlem şekil değiştirme varsayımı sağlanırken; PZT dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta $\ell_3/\ell_1 \geq 15$ sağlanması durumunda düzlem şekil değiştirme varsayımı gerçekleşmektedir (10^{-4} hassasiyetle çalışıldığında).
- Plak matris malzemesinin Mg olması durumunda elde edilen doğal frekans değerlerinin diğer matris malzemesi içeren değerlerden daha büyük kaldığı görülmektedir. Matris malzemesi değişse bile en yüksek doğal frekans değerleri $BaTiO_3$'te meydana gelmektedir.

- Her bir mod değeri için elde edilen üç boyutlu yer değiştirme grafiklerinin, incelenen sınır koşullarında bilinen mod şekilleriyle uyuştuğu görülmüştür.
- Dış kuvvetin frekans değeri arttıkça elektrik potansiyel ve yer değiştirme yayılımları mutlak değerce artmakta ve her iki durum arasındaki fark da artmaktadır.
- Yer değiştirme ve elektrik potansiyelin değerleri, dolgular birbirine yaklaştıkça azalmaktadır.
- PZT dolgu içeren plaklar vasıtasıyla maksimum elektrik potansiyeli üretimi elde edilmek istenildiğinde Ox_2 polarizasyon yönü tercih edilmelidir.
- PZT dolgu içeren plaklar vasıtasıyla maksimum elektrik potansiyeli üretimi elde edilmek istenildiğinde incelenen malzemelerden PZT-4 dolgu malzemesi tercih edilmelidir.
- Her bir dolgu malzemesi için dolgular birbirine yaklaşıkça doğal frekans değerlerinin artarak tek dolgu durumunda elde edilen doğal frekans değerlerine yaklaştığı gözlemlenmiştir.
- Piezoelektrik dolgu içeren plaklarda daha fazla elektrik potansiyel üretimi amaçlandığında aynı hacme sahip ikiz dolgu kullanımı tek dolgu kullanımına göre tercih edilmelidir.

KAYNAKÇA

[1] Gautschi G. Piezoelectric Sensorics: Force, Strain, Pressure, Acceleration and Acoustic Emission sensors Materials and Amplifiers. Springer, 2002.

[2] Eugene Pak Y. Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity. Int J Solids Struct 1992; 29-19: 2403-2419.

[3] Wang B. Three-dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material. Int J Solids Struct 1992; 29(3):293-308.

[4] Lu P and Williams FW. Green functions of piezoelectric material with an elliptic hole or inclusion. Int J Solids Struct 1997; 35(7-8):651-664.

[5] Qin H. Green function and its application for a piezoelectric plate with various openings. Arch Appl Mech 1999; 69:134-144.

[6] Dai L, Guo W and Wang X. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids. Int J Solids Struct 2006; 43:1818-1831.

[7] Eugene Pak Y. Elliptical Inclusion problem in antiplane piezoelectricity: Implications for fracture mechanics. International Journal of Engineering Science 2010; 48:209-222.

[8] Dai M and Gao CF. Perturbation solution of two arbitrarily-shaped holes in a piezoelectric solid. Int J Mech Sci 2014; 88:37-45.

[9] Sosa H. Plane problems in piezoelectric media with defects. Int J Solids Struct 1991; 28: 491–505.

[10] Yang BH, Gao CF. Plane problems of multiple piezoelectric inclusions in a non-piezoelectric matrix. International Journal of Engineering Science 2010; 48:518-528.

[11] Yanliang D, Shuhong L, Shijie D, et al. Electro-elastic fields of piezoelectric materials with an elliptical hole under uniform internal shearing forces. Chin J Mech Eng 2013; 26(3):454-461.

[12] Jerome R and Ganesan N. New generalized plane strain FE formulation for the buckling analysis of piezocomposite beam. Finite Elem Anal Des 2010; 46:896-904.

[13] Fesharaki JJ and Golabi S. Optimum pattern of piezoelectric actuator placement for stress concentration reduction in a plate with a hole using particle swarm optimization algorithm. Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci 2015; 229(4):614-628.

[14] Fesharaki JJ, Golabi S (2017) Effect of stiffness ratio of piezoelectric patches and plate on stress concentration reduction in a plate with a hole. Mech Adv Mater Struct 24(3):253-259.

[15] Qi H, Fang D and Yao Z. FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezoelectric materials. Comput Mater Sci 1997; 8:283-290.

[16] Wang X, Zhou Y and Zhou W. A novel hybrid finite element with a hole for analysis of plane piezoelectric medium with defects. Int J Solids Struct 2004; 41:7111-7128.

[17] Zhou ZD, Zhao SX and Kuang ZB. Stress and electric displacements analyses in piezoelectric media with an elliptic hole and a small crack. Int J Solids Struct 2005; 42:2803-2822.

[18] Kapuria, S., 2001. An efficient coupled theory for multilayered beams with embedded piezoelectric sensory and active layers. International Journal of Solids and Structures 38 (50–51), 9179–9199.

[19] Ray, M.C., Bhattacharya, R., Samanta, B., 1993. Exact solutions for static analysis of intelligent structures. AIAA Journal 31 (9), 1684–1691.

[20] Tzou, H.S., Tiersten, H.F., 1994. Elastic analysis of laminated composite plates in cylindrical bending due to piezoelectric actuators. Smart Materials and Structures 3 (3), 255–265.

[21] Bisegna, P., Maceri, F., 1996. An exact three-dimensional solution for simply supported rectangular piezoelectric plate. ASME Journal of Applied Mechanics 63, 628–638.

[22] Babuscu Yesil U, Yahnioglu N and Ucan Y. Piezoelektrik prizmatik dolgu içeren dikdörtgen kalın plağın FEM ile elektro-statik analizi (in Turkish), Nigde Omer Halisdemir University Journal of Engineering Sciences 2019; 8:3, 69-81.

[23] Zheng Gong, Yinxiao Zhang, Ernian Pan, Chao Zhang, Field concentration and distribution in three-dimensional magneto-electro-elastic plates with open holes, 2023, European Journal of Mechanics, A/Solids, 2023; 99:104914.

[24] Tiersten HF. Linear Piezoelectric Plate Vibrations. Plenum, New York, 1969.

[25] Heyliger P and Saravanos DA. Exact free-vibration analysis of laminated plates with embedded piezolecetric layers. J Acoust Soc Am 1995; 98(3):1547-1557.

[26] Pan E and Heyliger PR. Free vibrations of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates. J Sound Vib 2002; 252(3):429-442.

[27] Askari Farsangi MA, Saidi AR and Batra RC. Analytical solution for free vibration of moderately thick hybrid piezoelectric laminated plates. J Sound Vib 2013; 332(22):5981-5998.

[28] Dasdemir A. A finite element model for a bi-layered piezolelectric plate-strip with initial stresses under a time-harmonic force. J Braz Soc Mech Sci Eng 2022; 44:362.

[29] Pietrzakowski M. Piezoelectric control of composite plate vibration: Effect of electric potential distribution. Compos Struct 2008; 86(9):948-954.

[30] Shokrgozar A, Safarpour H and Habibi M. Influence of system parameters on buckling and frequency analysis of a spinning cantilever cylindrical 3D shell coupled with piezoelectric actuator. Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci 2019; 234:512-529.

[31] Lee YY and Ng CF. Vibration control of composite plates under random loading using piezoelectric material. Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci 2000; 214:9-25.

[32] Mateescu D, Han Y and Misra A. Dynamics and vibrations of structures with bonded piezoelectric strips subjected to mechanical and unsteady aerodynamic loads. Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci 2010; 225: 625-638.

[33] Carrera E and Boscolo M. Classical and mixed finite elements for static and dynamic analysis of piezoelectric plates. Int J Numer Methods Eng 2007; 70: 1135-1181.

[34] Qing G, Xu J, Li P, et al. A new efficient numerical method and the dynamic analysis of composite laminates with piezoelectric layers. Compos Struct 2007; 78: 457-467.

[35] Della CN and Shu D. Vibration of beams with piezoelectric inclusions. Int J Solids Struct 2007; 44: 2509–2522.

[36] R.C. Batra, X.Q. Liang, and J.S. Yang, The vibration of simply supported rectangular elastic plate due to piezoelectric actuators, International Journal of Solids and Structures 33 (11) (1996) 1597–1618.

[37] J.N. Reddy, On laminated composite plates with integrated sensors and actuators, Engineering Structures 21 (1999) 568–593.

[38] Kamali MT and Shodja HM. Three-dimensional free vibration analysis of multiphase piezocomposite structures. J Eng Mech 2006; 132(8):871-881.

[39] Babuscu Yesil U and Yahnioglu N. Free Vibration of simply supported piezoelectric plates containing a cylindrical cavity. Arch Appl Mech 2022; 92:2665-2678.

[40] Christensen, R.M., (1979). Mechanics of composite Materials, John Willey & Sons, Inc., New York.

[41] Formulation and Linear Problems, Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, 1989.

[42] Yücel, A.M., (2003). Dikdörtgen Delik içeren kompozit kiriş-plakların eğilmesindeki gerilme dağılımı problemleri, Doktora Tezi, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[43] Yahnioğlu, N., (1996), Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış yapı elemanlarının statiğe uygun sınırdeğer probleminin fem ile incelenmesi, Doktora Tezi, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[44] Demiriz, I. G., (2003). Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemeler Mekaniğinin Bazı Üç Boyutlu Titreşim ve Stabilite Problemlerinin SEY ile İncelenmesi, Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[45] Akbarov SD and Guz AN. Mechanics of Curved Composites, Dordrecht, Kluwer, 2000.

[46] Yeşil, Ü. B., (2005). Tek veya Çift Dairesel Delik İçeren Şerit-Levhada Gerilme Yığılmalarının Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[47] Yazici G., Yeşil Ü. Piezoelektrik prizmatik dolgu içeren plakların sonlu elemanlar yöntemi ile elektro-dinamik doğal titreşim analizi, 4th International Eurasian Conference On Science, Engineering and Technology, Ankara, Türkiye, 14 - 16 Aralık 2022, ss.665-673.

[48] Yang J. An Introduction to the Theory of Piezoelectricty, Springer, 2005.

[49] Aylikci F, Akbarov SD and Yahnioglu N. Buckling delamination of a PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate containing interface inner band cracks. Compos Struct (2018) 202:9-16.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. Yazici G., Babuşcu Yeşil Ü., 'Piezoelektrik prizmatik dolgu içeren plakların sonlu elemanlar yöntemi ile elektro-dinamik doğal titreşim analizi', 4th International Eurasian Conference On Science, Engineering and Technology, Ankara, Türkiye, 14 - 16 Aralık 2022, ss.665-673.

Makaleler

1. Babuscu Yeşil U., Yazici G., 'Free Vibration Analysis of Twin Piezoelectric Inclusions Embedded In Elastic Medium', Proceedings of the Institution of mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science (İncelemede)

Projeler

1. Yazici G., Babuşcu Yeşil Ü., 'Piezoelektrik Malzemeden Yapılmış Prizmatik Dolgu İçeren Plakların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Doğal Titreşim Analizi', FYL-2021-4621, YTÜ BAP Projesi.