

Bütünleme Sınavı Soru ve Cevap Kağıdı				1. S	2. S	3. S	4. S	Toplam
Adı Soyadı								
Numarası		Grup no						
Bölümü				Tarih		12.06.2019		
Dersin Adı		MAT1320 LİNEER CEBİR		Süre	80 dk.	Sınıf		
Öğretim Üyesi				İmza				
YÖK'ün 2547 sayılı Kanununun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

$$x - y + 2z = 5$$

S1) $kx + 2y - 3z = -6$ lineer denklem sisteminin hangi k değerleri için
 $3x + y + kz = 3$

a) Çözümü yoktur?

b) Sonsuz çözümü vardır?

c) Tek çözümü vardır? [25 p]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ k & 2 & -3 & -6 \\ 3 & 1 & k & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-kS_1 + S_2 \rightarrow S_2 \\ -3S_1 + S_3 \rightarrow S_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \\ 0 & 4 & k-6 & -12 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & k-6 & -12 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}S_2 \rightarrow S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{k-6}{4} & -3 \\ 0 & k+2 & -2k-3 & -5k-6 \end{array} \right] \xrightarrow{-(k+2)S_2 + S_3 \rightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{k-6}{4} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{-k(k+4)}{4} & -2k \end{array} \right]$$

(a) $k = -4$ için $\text{rank } A = 2 < 3 = \text{rank}(A|B)$ olduğundan, çözüm yoktur.

(b) $k = 0$ için $\text{rank } A = \text{rank}(A|B) = 2 < 3 = \text{değişken sayısı}$, olduğundan sonsuz çözüm vardır.

(c) $k \notin \{-4, 0\}$ için $\text{rank } A = \text{rank}(A|B) = \text{değişken sayısı} = 3$ olduğundan tek çözüm vardır.

S2) $S = \{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$ kümesinin P_2 'yi gerdiğini gösteriniz. [20 p]

P_2 'nin standart taban vektörleri $\{t^2, t, 1\}$ olduğundan $\text{Boy}(P_2) = 3$ dür. S 'nin vektör sayısı $\text{Boy}(P_2)$ 'ye eşit olduğundan S 'nin lineer bağımsız olduğunu göstermek yeterli.

$$c_1(t^2 + 1) + c_2(t^2 + t) + c_3(t + 1) = 0$$

$$(c_1 + c_2)t^2 + (c_2 + c_3)t + c_1 + c_3 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_2 + c_3 = 0$$

$$c_1 + c_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan S lineer bağımsızdır.

$\langle S \rangle = P_2$ dir.

S3) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörleri $A = \begin{bmatrix} a & b & -2 \\ c & -1 & 2 \\ d & 2 & e \end{bmatrix}$ matrisinin aynı öz

değerine karşılık gelen öz vektörleridir.

a) Buna göre, A matrisini ve verilen öz vektörlerin karşılık geldiği öz değeri bulunuz.

b) A matrisinin diğer öz değerini ve bu öz değere karşılık gelen bir öz vektörü bulunuz. ~~35 p~~ [35 p]

(d) \vec{v}_1 ve \vec{v}_2 vektörleri A matrisinin λ_1 öz değerine karşılık gelen öz vektörler olsun. O halde, $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ ve $A\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_2$ olur.

$$\begin{bmatrix} a & b & -2 \\ c & -1 & 2 \\ d & 2 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} b-4 &= 0 \Rightarrow \boxed{b=4} \\ -1+4 &= \lambda_1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=3} \\ 2+2e &= 2\lambda_1=6 \Rightarrow \boxed{e=2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & -2 \\ c & -1 & 2 \\ d & 2 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a+2 &= 3 \Rightarrow \boxed{a=1} \\ c-2 &= 0 \Rightarrow \boxed{c=2} \\ d-e &= -3 \Rightarrow d-2=-3 \Rightarrow \boxed{d=-1} \end{aligned}$$

O halde, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $\lambda_1=3$ bulunur.

(b) $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ -\lambda+3 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & -6 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3) \cdot \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -6 & \lambda \end{vmatrix}$

$= (\lambda-3) \cdot (\lambda^2 + \lambda - 12) = (\lambda-3)^2 \cdot (\lambda+4)$. O halde, A matrisinin diğer öz değeri $\lambda_2 = -4$ 'tür.

$\lambda_2 = -4$ için, $\lambda I - A = 0$ ise $\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ -5 & -4 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 2S_1 + S_2 \rightarrow S_2 \\ 5S_1 + S_3 \rightarrow S_3 \end{array}}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & 0 \\ 0 & -14 & -28 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{1}{7}S_2 \rightarrow S_2 \\ -\frac{1}{14}S_3 \rightarrow S_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{2S_2 + S_3 \rightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \Rightarrow x_1 = 2x_3 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3 \\ x_3 &= r \end{aligned}$

$\begin{bmatrix} 2r \\ -2r \\ r \end{bmatrix}$ vektörü öz vektördür. $r=1$ seçersek, $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü $\lambda_2 = -4$ öz değerine karşılık gelen bir öz vektördür.

S4) P_3 'te $c = 2a - 3b$ olmak üzere $at^2 + bt + c$ biçimindeki tüm vektörlerin W alt uzayı için bir taban bulunuz ve W 'nin boyutunu belirleyiniz. [25p]

W alt uzayının her vektörü

$at^2 + bt + 2a - 3b$ biçiminde olup

$$a(t^2 + 2) + b(t - 3) = 0 \text{ olarak yazılabilir.}$$

$t^2 + 2$ ve $t - 3$ vektörleri, W 'yi gener.

Ayrıca bu iki vektör biri diğerinin kati olmadığından lineer bağımsızdır.

$\{t^2 + 2, t - 3\}$ W 'nin bir tabanıdır.

$$\text{Boy}(W) = 2 \text{ 'dir.}$$

Lineer bağımsızlık için iki tane çözüm

$$c_1(t^2 + 2) + c_2(t - 3) = 0$$

$$c_1 t^2 + c_2 t + 2c_1 - 3c_2 = 0$$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \text{ dir.}$$

$\{t^2 + 2\}$ ve $\{t - 3\}$ lineer bağımsızdır.