Yüksek Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

UYGULAMALAR:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+25y=0$

$y(0)=-3$
$y'(0)=-1$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

3. $4\dfrac{d^2y}{dx^2}-12\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

4. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+3y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

5. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-5\dfrac{d^2y}{dx^2}+7\dfrac{dy}{dx}-3y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

6. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+4\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

7. $\dfrac{d^4y}{dx^4}+y=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

8. $9\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+y=0$

$y(0)=3$
$y'(0)=-1$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

9. $\dfrac{d^3y}{dx^3}-6\dfrac{d^2y}{dx^2}+11\dfrac{dy}{dx}-6y=0$

$y(0)=0$
$y'(0)=0$
$y''(0)=2$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x)\ \left(a_0(x)\neq 0\right)$$

n. mertebeden, değişken katsayılı lineer homojen olmayan adi türevli diferansiyel denklemini ele alalım. Homojen olmayan bu denklemin çözümü, uygun homojen denklemin çözümü ($y_c(x)$) ile özel çözümün ($y_p(x)$) toplamından oluşmaktadır. Yani,

$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$ olur.

Homojen denklem çözümü $y_c(x)$ 'nin karakteristik denklemin kökleri yardımıyla belirlendiği önceki kısımda öğrenildi. Bu kısımda özel çözüm $y_p(x)$ 'lerin belirlenmesi ele alınacaktır. $y_p(x)$ çözümlerin belirlenmesinde kullanılan yöntemlerden biri belirsiz katsayılar yöntemidir.

Bu yöntem yardımıyla bulunacak çözüm (belirsiz katsayı) fonksiyonları:

i) x^n , $n\in Z^+$
ii) e^{ax} , $a\neq 0$ ve $a=sb.$
iii) $\sin\left(bx+c\right)$, $b\neq 0; c\neq 0$ ve $b=sb.; c=sb.$
iv) $\cos\left(bx+c\right)$, $b\neq 0; c\neq 0$ ve $b=sb.; c=sb.$
v) Yukarıda verilen fonksiyonların toplamı veya çarpımı şeklinde belirlenir.

Tanım: Belirsiz katsayı fonksiyonu $f(x)$ olsun. Bu fonksiyon yukarıda verilen fonksiyonlardan seçilir.

.

Örnek 1

$f(x)=x^3$ belirsiz katsayı fonksiyonu olsun.

Bu durumda belirsiz katsayı fonksiyonları kümesi S= $S=\left\{x^3,x^2,x,1\right\}$ olur.

Örnek 2

$f(x)=\sin 2x$ belirsiz katsayı fonksiyonu olsun.

Bu durumda belirsiz katsayı fonksiyonları kümesi $S=\left\{\sin 2x,\cos 2x\right\}$ olur.

Örnek 3

$f(x) = x^2 \sin x$ belirsiz katsayı fonksiyonu olsun.

Bu durumda belirsiz katsayı fonksiyonları kümesi:

$f(x) = x^2 \sin x$

$f'(x) = 2x\sin x + x^2 \cos x$

$f''(x) = 2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - x^2 \sin x = 2\sin x + 4x\cos x - x^2 \sin x$

$f'''(x) = 6\cos x - 6x\sin x - x^2 \cos x$

……..

Yukarıda verilen fonksiyonlardan farklı (lineer bağımsız) olan tüm fonksiyonlar kümesi olarak belirsiz katsayılar kümesi S belirlenir. Dolayısıyla,

$S = \left\{ x^2 \sin x, x^2 \cos x, x\sin x, x\cos x, \sin x, \cos x \right\}$ olur.

Verilen,

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

Diferansiyel denklemi için $y_p(x)$ çözümünü belirsiz katsayılar yöntem ile belirleyelim. Farzedelim ki,

$b(x) = A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + ... + A_m u_m(x)$ dir.

Burada $u_1(x), u_2(x), ..., u_m(x)$ fonksiyonları belirsiz katsayı fonksiyonlarının elemanları ve $A_1, A_2, ..., A_m$ bilinen sabitlerdir. Bunlara uygun $S_1, S_2, ..., S_m$ kümeleri için;

i) $u_1(x), u_2(x), ..., u_m(x)$ fonksiyonlarının her biri, $S_1, S_2, ..., S_m$ kümelerinden birinin veya birkaç tanesinin elemandır,
ii) Eğer $S_j = S_k$ veya $S_j \subset S_k$ ise, S_j ihmal edilir (j;k=1,2,…,m).
iii) S_i lerden biri homojen diferansiyel denklemin çözümlerinden bir veya bir kaçını içeriyorsa, bu durumda, homojen çözüm ile örtüşen ve S kümesinde bulunan uygun elemanlar $x^p, p \in Z^+$ tam sayı kuvvetleri ile çarpılır. Burada p sabiti homojen çözümdeki o fonksiyonun tekrar sayısıdır.
Örneğin,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=x^2\sin x$ diferansiyel denklemi verilsin. Bu durumda,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ Homojen diferansiyel denklemin çözümü

$y_c(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$ dir. (p burada, her iki fonksiyon için 1 dir)

Diferansiyel denklemin inhomojen kısmı $b(x)=x^2\sin x$ için belirsiz katsayı fonksiyonları kümesi, $S=\left\{x^2\sin x, x\sin x, \sin x, x^2\cos x, x\cos x, \cos x\right\}$ olur.

Bu durumda homojen çözümde yer alan $\sin x\in S$ ve $\cos x\in S$ olur. Dolayısıyla S kümesinin uygun elemanları x ile çarpılarak revize edilir. Yani,

$S=\left\{x^3\sin x, x^2\sin x, x\sin x, x^3\cos x, x^2\cos x, x\cos x\right\}$

alınır.

iv) S kümesi elemanları belirsiz katsayılar ile çarpılarak elde edilen lineer kombinezonu, $y_p(x)$ çözümünü verir.

v) Bilinmeyen bu sabitlerin değeri, oluşturulan $y_p(x)$ çözümünün homojen olmayan diferansiyel denklemi sağlaması gerekliliğinden belirlenir.

Örnek 4

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=2e^x-10\sin x$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Önce homojen diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur. Yani,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=0$, karateristik denklem $m^2-2m-3=0$ ve kökleri $m_1=3$, $m_2=-1$ için,

$y_c(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$ bulunur.

$b(x)=2e^x-10\sin x$ için $S=\left\{e^x, \sin x, \cos x\right\}$ ve homojen dif denk denklem çözümleri S kümesinde yer almıyor. Bu durumda özel çözüm $y_p(x)$ için,

$y_p(x)=K_1e^x+K_2\sin x+K_3\cos x$ olur. Bu fonksiyondan türev alırsak,

$$\frac{dy_p(x)}{dx}=K_1e^x+K_2\cos x-K_3\sin x$$

$$\frac{d^2y_p(x)}{dx^2}=K_1e^x-K_2\sin x-K_3\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=2e^x-10\sin x$$

$$\left\{K_1e^x-K_2\sin x-K_3\cos x\right\}-2\left\{K_1e^x+K_2\cos x-K_3\sin x\right\}-3\left\{K_1e^x+K_2\sin x+K_3\cos x\right\}=2e^x-10\sin x$$

Eşitliğinden $K_1=-\frac{1}{2}$, $K_2=2$ ve $K_3=-1$ bulunur.

Genel çözüm $y(x)=y_c(x)+y_p(x)$ için

$y(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}e^x+2\sin x-\cos x$ bulunur.

Örnek 5

$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Önce homojen diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur. Yani,

$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$ için $y_c(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$ bulunur.

$b(x)=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$ için $S_1=\left\{x^2,x,1\right\}$, $S_2=\left\{e^x\right\}$, $S_3=\left\{xe^x,e^x\right\}$, $S_4=\left\{e^{3x}\right\}$ ve homojen dif. denk. denklem çözümlerinden $e^x\in S_2$ ve $e^x\in S_3$ olur. Bu durumda S_2 ve S_3 kümesi elemanlar x ile çarpılarak revize edilmelidir. Yani, $\overline{S}_2=\left\{xe^x\right\}$ ve $\overline{S}_3=\left\{x^2e^x,xe^x\right\}$ ile $\overline{S}_2\subset\overline{S}_3$ dolayısıyla $\overline{S}_2$ ihmal edilir ve özel çözüm $y_p(x)$, $S_1,\overline{S}_3$ ve S_4 yardımıyla ,

$y_p(x)=K_1x^2e^x+K_2xe^x+K_3e^{3x}+K_4x^2+K_5x+K_6$ olur. Bu fonksiyondan türev alırsak,

$$\frac{dy_p(x)}{dx}=K_1(x^2+2x)e^x+K_2(x+1)e^x+3K_3e^{3x}+2K_4x+K_5$$

$$\frac{d^2y_p(x)}{dx^2}=K_1(x^2+4x+2)e^x+K_2(x+2)e^x+9K_3e^{3x}+2K_4$$

Bu türevler $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$ denkleminde yerine yazılır ve düzenlenirse,

$K_1 = -1$, $K_2 = -3$, $K_3 = 2$, $K_4 = 1$, $K_5 = 3$ ve $K_6 = \frac{7}{2}$ bulunur.

Genel çözüm $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ için

$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ bulunur.

Örnek 6

$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Önce homojen diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur. Yani,

$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ için $y_c(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin x + C_4 \cos x$ bulunur.

$b(x) = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$ için $S_1 = \left\{x^2, x, 1\right\}$, $S_2 = \{\sin x, \cos x\}$ ve $S_3 = \{\cos x, \sin x\}$ olur. Burada $S_2 \equiv S_3$ için S_1 v S_2 kalır ve homojen dif. denk. denklem çözümlerinden $x;1 \in S_1$ ve $\sin x; \cos x \in S_2$ olduğundan S_1 kümesi elemanları x^2 ile, S_2 kümesi elemanları x çarpılarak revize edilir, yani, $\bar{S}_1 = \left\{x^4, x^3, x^2\right\}$, $\bar{S}_2 = \{x\sin x, x\cos x\}$ dolayısıyla özel çözüm $y_p(x)$ için,

$y_p(x) = K_1 x\sin x + K_2 x\cos x + K_3 x^4 + K_4 x^3 + K_5 x^2$ olur. Bu fonksiyondan türev alırsak,

$$\frac{dy_p(x)}{dx} = K_1(\sin x + x\cos x) + K_2(\cos x - x\sin x) + 4K_3 x^3 + 3K_4 x^2 + 2K_5 x$$

$$\frac{d^2 y_p(x)}{dx^2} = K_1(2\cos x - x\sin x) + K_2(-2\sin x - x\cos x) + 12K_3 x^2 + 6K_4 x + 2K_5$$

$$\frac{d^3 y_p(x)}{dx^3} = K_1(-3\sin x - x\cos x) + K_2(-3\cos x + x\sin x) + 24K_3 x + 6K_4$$

$$\frac{d^4 y_p(x)}{dx^4} = K_1(-4\cos x + x\sin x) + K_2(4\sin x + x\cos x) + 24K_3$$

Bu türevler $\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$ denkleminde yerine yazılır ve düzenlenirse,

$K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_3 = \frac{1}{4}$, $K_4 = 0$ ve $K_5 = -3$ bulunur.

Genel çözüm $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ için

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin x + C_4 \cos x + x \sin x + 2x \cos x + \tfrac{1}{4} x^4 - 3x^2$$ bulunur.

Örnek 7

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10 \sin x$$
$$y(0) = 2$$
$$y'(0) = 4$$

başlangıç değer problemini çözünüz.

Daha önce bu problemin genel çözümü,

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^x + 2 \sin x - \cos x$$

olarak elde edilmişti. Şimdi bu çözümde başlangıç koşulları sağlatılırsa yani,

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} - 1 = 2$$

$y'(0) = 3C_1 - C_2 - \dfrac{1}{2} + 2 = 4$ için $C_1 = \tfrac{3}{2}$ ve $C_2 = 2$ için

$$y(x) = \tfrac{3}{2} e^{3x} + 2e^{-x} - \frac{1}{2} e^x + 2 \sin x - \cos x$$

elde edilir.

Ödevler

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

1. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 10e^{2x} - 18e^{3x} - 6x - 11$
2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = x \sin x$
3. $\dfrac{d^4 y}{dx^4} + 2\dfrac{d^3 y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 18x^2 + 16xe^x + 4e^{3x} - 9$

Aşağıda verilen başlangıç değer problemlerinin çözümünü bulunuz.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=9x^2+4$$

4. $y(0)=6$

   $y'(0)=8$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=3x^2-4\sin x$$

5. $y(0)=0$

   $y'(0)=1$

Parametrenin Varyasyonu Yöntemi

Homojen olmayan sabit katsayılı diferansiyel denklemin genel çözümlerinin belirlenmesinde kullanılan diğer bir yöntem parametrenin varyasyonu yöntemidir. Bu yöntem

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\tan x$$

Şeklinde verilen $\left(b(x)=\tan x\right)$ diferansiyel denklemlere uygulanabilmektedir. Yöntemin anlaşılabilir olması açısından, 2. mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklem çerçevesinde yöntemin uygulamasını ele alalım.

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=b(x)$$

$y_1(x)$ ve $y_2(x)$

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu durumda homojen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y_c(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

olur. Yöntem gereği, C_1 ve C_2 sabitleri sırasıyla $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonları ile yer değiştirilerek özel çözüm,

$$y_p(x)=v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)$$

yazılır ve bu fonksiyondan türevler alınarak, homojen olmayan diferansiyel denklem sağlatılmaya çalışılır:

$$y'_p(x)=\underbrace{v'_1(x)y_1(x)+v'_2(x)y_2(x)}_{=0\,(\text{kabul})}+v_1(x)y'_1(x)+v_2(x)y'_2(x) \Rightarrow y'_p(x)=v_1(x)y'_1(x)+v_2(x)y'_2(x)$$

$$y_p''(x) = v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) + v_1(x)y_1''(x) + v_2(x)y_2''(x)$$

Bu türevler homojen olmayan diferansiyel denklemde yerine yazılır yani,

$$a_0(x)\left(v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) + v_1(x)y_1''(x) + v_2(x)y_2''(x)\right) + a_1(x)\left(v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x)\right) +$$
$$a_2(x)\left(v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)\right) = b(x)$$

Denklemi düzenlenirse,

$$v_1(x)\left(a_0(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)\right) + v_2(x)\left(a_0(x)y_2''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_2(x)\right) +$$
$$a_0(x)\left(v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x)\right) = b(x)$$

için

$$\left(v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x)\right) = b(x)/a_0(x)$$

$v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0$ (ilk denklemde kabul edilmişti)

Denklem sistemi çözülerek aranan $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonları belirlenir.

$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ olduğundan,

$$v_1'(x) = -\frac{by_2}{a_0(x)W\left(y_1, y_2\right)} \quad \Rightarrow \quad v_1(x) = \int^x -\frac{b(t)y_2(t)}{a_0(t)W\left(y_1(t), y_2(t)\right)}dt$$

$$v_2'(x) = \frac{by_1}{a_0(x)W\left(y_1, y_2\right)} \quad \Rightarrow \quad v_2(x) = \int^x \frac{b(t)y_1(t)}{a_0(t)W\left(y_1(t), y_2(t)\right)}dt$$

için $y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ de yerine yazılarak çözüm bulunur.

Örnek 8

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ için genel çözüm $y_c(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ için

$$W\left(\sin x, \cos x\right) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$$

$$y_p(x) = v_1(x)\sin x + v_2(x)\cos x$$

$$v_1'(x) = -\frac{\tan x \cos x}{1(-1)} = \sin x \quad \Rightarrow \quad v_1(x) = \int^x \sin t dt = -\cos x + C_3$$

$$v_2'(x) = \frac{\tan x \sin x}{1(-1)} = -\tan x \sin x \quad \Rightarrow \quad v_2(x) = \int^x -\tan t \sin t dt = \sin x - \ln|\sec x - \tan x| + C_4$$

$y_p(x) = v_1(x)\sin x + v_2(x)\cos x$ yerine yazılırsa,

$$y_p(x) = (-\cos x + C_3)\sin x + \left(\sin x - \ln|\sec x - \tan x| + C_4\right)\cos x$$

ve genel çözüm

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = \left(C_1 + C_3\right)\sin x + \left(C_2 + C_4\right)\cos x - \cos x \ln|\sec x - \tan x|$$

bulunur.

Örnek 9

$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = e^x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$ için genel çözüm $y_c(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ için

$$W\left(e^x, e^{2x}, e^{3x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^xe^{2x}e^{3x} = 2e^{6x}$$

$y_p(x) = v_1(x)e^x + v_2(x)e^{2x} + v_3(x)e^{3x}$ alınır.

$$y_p'(x) = \underbrace{v_1'(x)e^x + v_2'(x)e^{2x} + v_3'(x)e^{3x}}_{=0\,(\text{Kabul})} + v_1(x)e^x + 2v_2(x)e^{2x} + 3v_3(x)e^{3x} = v_1(x)e^x + 2v_2(x)e^{2x} + 3v_3(x)e^{3x}$$

$$y_p''(x) = \underbrace{v_1'(x)e^x + 2v_2'(x)e^{2x} + 3v_3'(x)e^{3x}}_{=0\,(\text{Kabul})} + v_1(x)e^x + 4v_2(x)e^{2x} + 9v_3(x)e^{3x} = v_1(x)e^x + 4v_2(x)e^{2x} + 9v_3(x)e^{3x}$$

$$y_p'''(x) = v_1'(x)e^x + 4v_2'(x)e^{2x} + 9v_3'(x)e^{3x} + v_1(x)e^x + 8v_2(x)e^{2x} + 27v_3(x)e^{3x}$$

türevleri $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = e^x$ yerine yazılırsa,

$$\left\{v_1'(x)e^x+4v_2'(x)e^{2x}+9v_3'(x)e^{3x}+v_1(x)e^x+8v_2(x)e^{2x}+27v_3(x)e^{3x}\right\}-6\left\{v_1(x)e^x+4v_2(x)e^{2x}+9v_3(x)e^{3x}\right\}+$$
$$11\left\{v_1(x)e^x+2v_2(x)e^{2x}+3v_3(x)e^{3x}\right\}=e^x$$

düzenlenirse,

$$v_1'(x)e^x+v_2'(x)e^{2x}+v_3'(x)e^{3x}=0$$

$$v_1'(x)e^x+2v_2'(x)e^{2x}+3v_3'(x)e^{3x}=0$$

$$v_1'(x)e^x+4v_2'(x)e^{2x}+9v_3'(x)e^{3x}=e^x$$

denklem sisteminden

$$v_1'(x)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1(x)=\tfrac{1}{2}x+C_4$$

$$v_2'(x)=-e^{-x} \quad \Rightarrow \quad v_2(x)=e^{-x}+C_5$$

$$v_3'(x)=\tfrac{1}{2}e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad v_3(x)=\tfrac{-1}{4}e^{-2x}+C_6$$

$y_p(x)=v_1(x)e^x+v_2(x)e^{2x}+v_3(x)e^{3x}$ yerine yazılırsa,

$$y_p(x)=\left(\tfrac{1}{2}x+C_4\right)e^x+\left(e^{-x}+C_5\right)e^{2x}+\left(\tfrac{1}{2}e^{-2x}+C_6\right)e^{3x}$$

ve genel çözüm

$$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$$

$$y(x)=\left(C_1+C_4\right)e^x+\left(C_2+C_5\right)e^{2x}+\left(C_3+C_6\right)e^{3x}+\tfrac{1}{2}xe^x+\tfrac{3}{2}e^x$$

bulunur.

Süperpozisyon Prensibi

$L(y)=F(x)$ ve $L(y)=G(x)$ için $L(y)=F(x)+G(x)$ alınabilir. Bunun sonucu olarak

$y_{p_1}(x)$, $L(y)=F(x)$ nin özel çözümü, $y_{p_2}(x)$, $L(y)=G(x)$ nin özel çözümü için

$L(y)=F(x)+G(x)$ nin özel çözümü $y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)$ olur.

Örnek 10

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 3e^x + 5\tan x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 3e^x$ için özel çözüm $y_{p_1}(x)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 5\tan x$ için özel çözüm $y_{p_2}(x)$ ise,

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 3e^x + 5\tan x$ özel çözümü $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ bulunur.

Ödev

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümleri parametrenin değişimi yöntemi ile bulunuz.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cot x$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x\ln x$, x>0
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^x / \sin x$
4. $y_1(x) = x$ ve $y_2(x) = 1/(x+1)$ fonksiyonları $(2x+1)(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$ homojen diferansiyel denkleminin çözümleridir. O halde,

   $(2x+1)(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 2y = (2x+1)^2$

   Homojen olmayan diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.