T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Gözde ÖZYURT

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ

Mayıs, 2024

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Gözde ÖZYURT tarafından hazırlanan tez çalışması 10.05.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ömer GÖK, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Hülya YILMAZ, Üye
Marmara Üniversitesi _____

Doç. Dr. Bayram Ali İBRAHİMOĞLU, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN, Üye
İstanbul Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Gözde ÖZYURT

İmza

Sevgili aileme

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanması sırasında beni yönlendiren ve destekleyen danışman hocam Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ'e teşekkür ederim.

Gözde ÖZYURT

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

ÖZET viii

ABSTRACT x

1 GİRİŞ 1
- 1.1 Literatür Özeti . . . 1
- 1.2 Tezin Amacı . . . 10
- 1.3 Hipotez . . . 11

2 REEL KUATERNİYONLAR 12
- 2.1 Reel Kuaterniyonlar ve Temel Özellikleri . . . 12
  - 2.1.1 Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi . . . 15
  - 2.1.2 Reel Kuaterniyonlar İçin Euler Formülü . . . 15
  - 2.1.3 Reel Kuaterniyonlar İçin De-Moivre Formülü . . . 17
- 2.2 Reel Kuaterniyonların Matris Temsilleri . . . 18
  - 2.2.1 Kompleks Matris Temsilleri . . . 18
  - 2.2.2 Reel Matris Temsilleri . . . 19

3 GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR 22
- 3.1 Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar ve Temel Özellikleri . . . 22
- 3.2 Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Matris Temsilleri . . . 24

4 HİPER DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR 27
- 4.1 Dual Sayılar . . . 27
- 4.2 Hiper Dual Sayılar . . . 27
  - 4.2.1 Hiper Dual Sayılar Üzerinde Temel İşlemler . . . 28
  - 4.2.2 Hiper Dual Sayıların Matris Temsili . . . 29
- 4.3 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar . . . 30
- 4.4 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyon İçin Matris Temsilleri . . . 37
- 4.5 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyon Matrisleri . . . 49
- 4.6 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar İçin Benzerlik . . . 52

4.7 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar İçin i-Benzerlik 54
4.8 Hiper Dual Katsayılı Kuaterniyon ve Split Kuaterniyondan Oluşan Genelleştirme İçin j-Benzerlik 66
4.9 Hiper Dual Katsayılı Kuaterniyon ve Split Kuaterniyondan Oluşan Genelleştirme İçin k-Benzerlik 75

5 HİPER SAYI KATSAYILI GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR 83
5.1 Hiper Sayılar 84
5.1.1 Hiper Sayıların Matris Temsili 86
5.2 Hiper Sayı Katsayılı Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar 88
5.2.1 Hiper Sayı Katsayılı Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Matris Temsilleri 91

6 $\mathbb{H}_\beta$ ELEMANLI BİR MATRİSİN j-ÖZDEĞERİNİN BULUNMASI 98
6.1 Bir Matrisin j-Özdeğer ve j-Özvektörlerinin Kompleks Matris Temsili ile Bulunması 98
6.2 Bir Matrisin j-Özdeğerinin Reel Matris Temsili ile Bulunması . . . 112

7 SONUÇ 120

KAYNAKÇA 122

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 127

SİMGE LİSTESİ

$\sim$	Benzerlik
$\mathbb{D}$	Dual sayılar kümesi
$\mathbb{H}_{\alpha\beta}$	Genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi
H	Hiperbolik sayılar kümesi
$\mathbb{HD}$	Hiper dual sayılar kümesi
$\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$	Hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$	Hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{HN}$	Hiper sayılar kümesi
$\overset{ic}{\sim}$	i-benzerlik
$\tilde{q}$	i-eşlenik
$\overset{jc}{\sim}$	j-benzerlik
$\hat{q}$	j-eşlenik
$\overset{kc}{\sim}$	k-benzerlik
$\widehat{q}$	k-eşlenik
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$	$m \times n$ tipindeki hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matrislerin kümesi
$M_{m\times n}(\mathbb{H})$	$m \times n$ tipindeki reel kuaterniyon matrislerin kümesi
$M_n(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$	$n \times n$ tipindeki hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matrislerin kümesi
$M_n(\mathbb{H})$	$n \times n$ tipindeki reel kuaterniyon matrislerin kümesi
$\mathbb{H}_0$	Pure kuaterniyonlar kümesi
$\left(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}\right)^0$	Pure hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}$	Reel kuaterniyonlar kümesi

ÖZET

Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

Gözde ÖZYURT

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ

Kompleks sayıları dört boyutlu uzaya genişletmek amacıyla yapılan çalışmalar sırasında ortaya çıkan ve kompleks sayılardan farklı olarak, değişmeli olmayan bir cebir olan kuaterniyonlar hem teorik hem de uygulamalı alanlarda üzerinde çokça çalışma yapılan bir sayı sistemidir. Son zamanlarda, katsayıları reel sayılardan farklı olan kuaterniyon çeşitleri, fizik ve mekanik gibi alanlardaki problemlere çözüm aramak için kullanılmaktadır. Bunun yanı sıra, kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından, teorik matematikte ve özellikle lineer cebirde elemanları kuaterniyonlardan oluşan matrislere ait özdeğer ve özvektörlerin kompleks matrisler yardımıyla araştırılması mümkün hale gelmiştir. 2001 yılında Pottmann ve Wallner tarafından genelleştirilmiş kuaterniyonların tanıtılması hem genelleştirilmiş kuaterniyonlar üzerine birçok çalışmanın gerçekleştirilmesine hem de farklı kuaterniyon çeşitlerine ilginin artmasına katkıda bulunmuştur.

Bu çalışmada, hiper dual sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar tanıtılıp, hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar için benzerlik kavramı verilmiştir. Ayrıca bu benzerlik kavramından farklı olarak, hiper dual sayı katsayılı kuaterniyon, split kuaterniyon, yarı kuaterniyon ve split yarı kuaterniyondan oluşan genelleştirme için i-eşlenik yardımıyla i-benzerlik kavramı; hiper dual sayı katsayılı kuaterniyon ve split kuaterniyon genelleştirmesi için j-eşlenik ve k-eşlenik yardımıyla j-benzerlik ve k-benzerlik kavramları sunulmuş ve incelenmiştir. Ardından, bikompleks, hiper duble, hiper dual sayıların genelleştirmesi olarak hiper sayılar tanıtılmıştır. Bu sayılara ait temel özellikler incelendikten sonra hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi sunulmuş ve bu kümeye ait matris temsilleri hesaplanmıştır. Son olarak, elemanları reel kuaterniyon ve split kuaterniyon genelleştirmesinden

oluşan matrislerin kompleks ve reel matris temsili ile bu temsillere ait özellikler verilmiştir. Sonrasında bu genelleştirmeden oluşan matrislerin, kompleks matris temsili ile j-özdeğer ve j-özvektörleri; reel matris temsili ile de j-özdeğeri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon, hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon, j-benzelik, j-özdeğer, j-özvektör.

ABSTRACT

Generalized Quaternions

Gözde ÖZYURT

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yasemin ALAGÖZ

Quaternions, which are different from complex numbers, were discovered during studies to extend complex numbers to four-dimensional space. Quaternions, a non-commutative algebra, are a number system that has been widely studied in both theoretical and applied fields. Recently, quaternion types with coefficients different from the real numbers have been used to solve problems in fields such as physics and mechanics. Quaternion multiplication is non-commutative. Therefore, the eigenvalues and eigenvectors of matrices whose elements consist of quaternions can be solved with complex matrices, in theoretical mathematics and especially in linear algebra. Definition of generalized quaternions by Pottmann and Wallner in 2001, many studies have been applied on this subject and interest in other types of quaternions has increased.

In this study, after giving the definition of generalized quaternions with hyper dual number coefficients, the concept of similarity for hyper dual generalized quaternions is calculated. Moreover, different from this concept of similarity, by using i-conjugate, the concept of i-similarity has been defined for the generalization consisting of hyper dual number coefficient quaternion, split quaternion, semi quaternion and split semi quaternion. For the generalization of hyper dual coefficient quaternion and split quaternion, by using j-conjugate and k-conjugate, the concepts of j-similarity and k-similarity are investigated, respectively. Then, hyper numbers, which are a generalization of bicomplex, hyper double, hyper dual numbers, are introduced. After investigating the basic properties of these numbers, the set of generalized quaternions with hyper number coefficients is presented and matrix representations of this set is calculated. Finally, complex and real matrix

representations of matrices whose elements consist of the generalization of real quaternion and split quaternion and the properties of these representations are given. Then, for the matrices obtained from this generalization, j-eigenvalues and j-eigenvectors are calculated by using the complex matrix representation. Also, j-eigenvalues are obtained with the real matrix representation.

Keywords: Hyper dual generalized quaternion, hyper number generalized quaternion, j-similarity, j-eigenvalue, j-eigenvector.

1
GİRİŞ

Bu bölümde kuaterniyonlar ve kuaterniyon matrisleri ile ilgili literatür özeti sunulmuştur.

1.1 Literatür Özeti

Kuaterniyonlar (reel kuaterniyonlar) 1843 yılında Hamilton'un kompleks sayıları ($\mathbb{C}$) 3-boyutlu uzaya genelleştirmek amacıyla yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuştur. Bu çalışmalarda ilk olarak $i^2 = j^2 = -1$ özelliğine sahip $a + bi + cj$ şeklindeki sayı sistemi üzerine yoğunlaşan Hamilton, bu sayı sisteminin çarpma işlemine göre kapalılık özelliğini sağlamadığını fark etmiş ve $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ özelliğine sahip üç imajiner birim tanımlamıştır. Kompleks sayıların bir tür genelleştirmesi olan kuaterniyonlar, a, b, c, d reel sayıları ile 4-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^4$ de $1 := (1,0,0,0)$, $i := (0,1,0,0)$, $j := (0,0,1,0)$, $k := (0,0,0,1)$ bazının lineer birleşimi olarak $q = a+bi+cj+dk$ ile ifade edilen hiper-kompleks bir sayı sistemidir. Kuaterniyon kümesi ($\mathbb{H}$) reel sayılar üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır ve $\mathbb{R}^4$ vektör uzayına izomorftur. Burada $1, i, j, k$ bazı

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

çarpım kurallarını sağlar ve yukarıdaki eşitliklerden de görüleceği gibi $ij = k$ iken $ji = -k$ olup $ij \neq ji$ dir. Yani kuaterniyonlar çarpma işlemine göre değişmeli değildir ve kuaterniyon çapımı ile birleşmeli cebirdir. Ayrıca değişmeli olmayan bu kuaterniyon çarpımı ile birlikte iki vektör için bölme işlemi de mümkün hale gelmiştir. Hamilton tarafından $1 := e_0, i := e_1, j := e_2, k := e_3$ olarak da gösterilen, kompleks sayılarla ilişkili baz elemanlarının çarpımı

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu a, b, c, d katsayılarının kompleks sayı ve dual sayı [1] ($\mathbb{D}$) olmasına göre sırasıyla *kompleks kuaterniyon (bikuaterniyon)* ve *dual kuaterniyon* olarak adlandırılır.

Kuaterniyonlar geometri, cebir, analiz gibi matematiğin birçok alanın yanı sıra bilgisayar grafikleri, sinyal işleme, robotik hareketlerin modellenmesi, fizik ve mekanik gibi alanlarda da uygulamalara sahiptir. Kuaterniyonlar 3-boyutlu ve 4-boyutlu uzayda dönme yaptırır. Bu sayede kuaterniyonları günümüzde navigasyon, bilgisayar görselleştirme, animasyon ve filmlerde özel efektler gibi birçok alanda görmek mümkündür. Kuaterniyonlar, uçakları ve roketleri yönlendiren kontrol sistemlerinde de kullanılmakta olup uçuş dinamiği için önemli parametreler olan yatış (roll), yunuslama (pitch) ve dönme (yaw) hareketlerinin kontrolünde büyük bir öneme sahiptir [1–4]. Ayrıca bilgisayar grafikleri, animasyon ve oyunlarda kuaterniyonların grafiksel gösterimi için ışın izleme (ray-tracing) yaklaşımı kullanılmaktadır. Böylece aydınlatma, şeffaflık, yansıma ve kırılma efektleri ile gerçekliği artırmak ve çok gerçekçi görseller üretmek için bilgisayar programlarında fraktallar oluşturulur. İnsan algısı 3-boyutlu olduğundan 4-boyutlu nesnelerin görselleştirilmesinde ve görüntüleme tekniklerinde de kuaterniyonlar kullanılmaktadır [5]. Bunların yanı sıra kuaterniyonların biyolojideki uygulamasına baktığımızda protein yapısının tanımı ile ilgili problemlerde kullanıldığı görülmektedir [6]. Ayrıca göz hareketlerinin geometrisinin incelenmesinde ve bu hareketlerin temsilinde kuaterniyonlardan yararlanılmıştır [7].

Kuaterniyonlar, kuvvet ve kütle kavramlarını kullanmadan cisimlerin zamana bağlı yer değiştirmelerini inceleyen mekaniğin bir alt dalı olan kinematikte de bazı uygulamalara sahiptir. Bu alanda A. T. Yang ve F. Freudenstein [8] uzaysal hareketlerin analizinde dual kuaterniyon cebrinin uygulamalarını incelemiştir. O. Bottema ve B. Roth [9] reel ve dual kuaterniyonların küresel kinematik uygulamaları üzerine çalışmıştır. H. H. Hacısalihoğlu [10] dual kuaterniyonların özelliklerini incelemiş, birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini ifade etmistir. J. C. Chou [11], kuaterniyon uzayı 3-boyutlu vektör uzayını içerdiğinden, açısal yer değiştirme, hız, ivme ve momentum gibi dönme ile ilgili fiziksel büyüklükleri kuaterniyonlarla temsil etmiş ve bunlara ait kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri kuaterniyonları kullanarak sunmuştur.

Kompleks kuaterniyonların, uzaysal dönmelerde ve fizikte uygulamaları bulunmaktadır. Fizikte, özel ve genel rölativite teorilerinde, uzay-zamanda hareket eden noktasal bir parçacığın konumu kompleks kuaterniyon

[1] $\mathbb{D} = \{d = x + \varepsilon y \mid x, y \in \mathbb{R},\ \varepsilon^2 = 0,\ \varepsilon \neq 0\}$

ile ifade edilir. Bu teorilerde 4-boyutlu uzay-zamanın her bir noktası $(q_0 = ct,\ q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z)$ kartezyen koordinatları ile temsil edilebilir. Burada t zaman koordinatını, c ise boşlukta ışık hızını göstermektedir. $e = (i, j, k)$ üçlüsü kuaterniyon bazını, $\vec{q} = (x, y, z)$ vektörü uzay koordinatlarını ve $\mathrm{i}^2 = -1$ olmak üzere i kompleks birimi temsil etsin. Böylece, bu ifadeler yardımıyla, uzay-zamanda hareket eden bir noktasal parçacığın konumu, $q = \mathrm{i}q_0 + e.\vec{q}$ ifadesi ile verilen bir kompleks kuaterniyon ile temsil edilebilir [12]. D. C. Jolly [13] kompleks kuaterniyonlar ve kompleks kuaterniyonlara karşılık gelen reel matris temsili arasındaki izomorfizmayı araştırmıştır. M. Tanışlı ve G. Özgür [14] kompleks kuaterniyonların (bikuaterniyonların) matris temsillerini incelemiştir. Bu temsiller ve bikuaterniyon çarpımı ile açısal momentumu yeniden formüle etmiştir. Ayrıca kuantum mekaniği için önemli bir yere sahip olan Dirac denkleminin yeni bir tanımını ve çözümünü bikuaterniyon baz elemanlarını kullanarak vermiştir.

E. Cho [15] kompleks sayılar ile trigonometriyi birleştiren Euler ve De-Moivre formüllerini kuaterniyonlar için elde etmiştir. H. Kabadayı ve Y. Yaylı [16] bu formüllerin dual kuaterniyonlar için geçerli olduğunu göstermiştir. M. Meral [17] ise De-Moivre formüllünün reel ve dual kuaterniyonlara karşılık gelen matrisler için de sağlandığını göstermiştir. T. A. Ell ve S. J. Sangwine [18] reel kuaterniyonlar için involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerini tanımlamıştır. Bu iki dönüşümün vektörel kısımlarının 3-boyutlu uzayda birer yansımaya karşılık geldiğini göstermiştir. M. Bekar [19] dual kuaterniyonlar için iki involüsyon ve iki anti-involüsyon dönüşümü tanımlamıştır. Bu dönüşümlerin geometrik yorumlarının 3-boyutlu uzayda vida hareketine karşılık geldiğini göstermiştir.

Kompleks sayıların genelleştirmesi olan kuaterniyonların, Cayley-Dickson yapısı olarak da adlandırılan, kompleks sayı çifti yardımı ile yazımı ise değişmeli olmayan bu sayı sisteminin, kompleks sayıların özelliklerinden yararlanılarak incelenmesine olanak sağlar. Yani, herhangi bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu $\alpha_1 = a + bi$ ve $\alpha_2 = c + di$ kompleks sayılar olmak üzere $q = \alpha_1 + \alpha_2 j$ şeklinde ifade edilir. Böylece kuaterniyonların 2-boyutlu kompleks uzaya ($\mathbb{C}^2$) izomorf olduğu görülebilir. q kuaterniyonu $q = \alpha_1 + \alpha_2 j$ ifadesi yardımı ile 2×2 tipinde bir kompleks matris olarak aşağıdaki gibi temsil edilir:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\overline{\alpha_2} & \overline{\alpha_1} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Böylece kuaterniyon kümesi, 2×2 tipindeki kompleks matris halkasının $M_2(\mathbb{C})$ bir alt kümesi olarak ifade edilebilir [20].

Elemanları kuaterniyon olan matrislere *kuaterniyon matrisi* denir. $m \times n$ tipindeki kuaterniyon elemanlı matrislerin kümesi $M_{m\times n}(\mathbb{H})$ ile gösterilir. Standart matris toplamı ve çarpımı ile $M_n(\mathbb{H})$ birimli bir halkadır. Kuaterniyon matrisleri kümesi $M_{m\times n}(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ üzerinde bir modüldür. Kuaterniyon matrislerini incelemedeki temel zorluk kuaterniyon çarpımının değişmeli olmamasından kaynaklanmaktadır. Örneğin, p, q kuaterniyonlar olmak üzere

$$\begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

matrisinin determinantı $pq - qp$ olabilir ve kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından bu ifade sıfırdan farklı olabilir. Bu ise determinant fonksiyonunun temel özelliği olan, iki sütun aynı olduğunda determinant değerinin sıfır olmasıyla çelişir [21]. Bir q kuaterniyonu 2×2 tipinde kompleks bir matrisle ifade edilebildiği gibi $n \times n$ tipinde kuaterniyon matrisi de $2n \times 2n$ tipinde bir kompleks matrisle gösterilebilir. Yani elemanları kuaterniyon olan $n \times n$ tipinde bir Q matrisi Q_1 ve Q_2 kompleks matrisler olmak üzere $Q = Q_1 + Q_2 j$ olarak yazılıp

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -\overline{Q_2} & \overline{Q_1} \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \tag{1.1}$$

$2n \times 2n$ tipindeki kompleks matrisle ifade edilebilir. Elde edilen bu matrise Q matrisinin *kompleks adjoint matrisi* denir ve bu temsil kuaterniyon elemanlı matrislerin kompleks matrisler aracılığıyla incelenmesini sağlar [20]. Bu sayede kuaterniyon matrisleri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. L. A. Wolf [22] reel kuaterniyon elemanlı iki matris için benzerlik kavramını incelemiştir. H. C. Lee [20] $n \times n$ tipindeki reel kuaterniyon elemanlı matrisler ile $2n \times 2n$ tipindeki kompleks matrisler arasında bir izomorfizma tanımlamış ve bu sayede değişmeli olmayan kuaterniyon matrislerinin özdeğerlerini kompleks matrisler aracığıyla araştırmıştır. J. L. Brenner [23] her kuaterniyon matrisin bir karateristik köke sahip olduğunu göstermiştir. N. A. Weigmann [24] kompleks matrisler için sağlanan bazı teoremlerin kuaterniyon matrisleri için de sağlandığını göstermiştir. F. Zhang [25] kuaterniyon matrislerini kompleks matris temsili yardımıyla inceleyip, bilinen bazı sonuçlar için yeni ispatlar göstermiştir. T. S. Jiang ve M. S. Wei [26] reel kuaterniyon elemanlı $n \times n$ tipindeki bir matris için $4n \times 4n$ reel matris temsilini tanımlamıştır ve böylece kuaterniyonik matris denklemlerinin çözümünü araştırmıştır. Ayrıca kuaterniyon matrislerinin kompleks ve reel matris gösterimleri, AX = B şeklindeki kuaterniyon matris denklemi için çözümler içeren bazı çalışmalarda kullanılır. Bu ise renkli görüntü restorasyonu çalışmaları için uygulama alanı sağlar [27, 28]. Özellikle kuaterniyonların matrisler

aracılığıyla ifade edilmesi, hızlı çıktıların ve yüksek veri doğruluğunun önem taşıdığı, bilinmeyen parametreleri içeren lineer denklemlerin cebirsel sistemleri için çözümler elde etmeyi sağlar [1]. Elemanları kuaterniyon olan $n \times n$ tipindeki kuaterniyon matrislerinin $2n \times 2n$ tipindeki kompleks matris ifadesinin özdeğerlerinden yararlanılarak, nükleer fizikte enerji seviyelerinin hesaplanmasında kullanıldığı da bilinmektedir [29].

Split kuaterniyonlar James Cockle tarafından tanıtılmıştır. a, b, c, d reel sayılar olmak üzere bir q split kuaterniyonu $q = a + bi + cj + dk$ biçimindedir ve $1, i, j, k$ bazı

$$i^2 = -1,\ j^2 = k^2 = 1,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = -i,\ ki = -ik = j$$

çarpım kurallarını sağlar. Kuaterniyonlar gibi split kuaterniyonlar da birçok uygulama alanına sahiptir. J. I. Inoguchi [30] split kuaterniyon uzayını $\mathbb{E}_2^4$ yarı Öklid uzayına ve Lie grubunu Lie cebirinin $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayına özdeşlemiştir. Böylece Minkowski 3-uzayında sabit ortalama eğrilikli zamansı (timelike) yüzeyler için temel denklemleri split kuaterniyonlar yardımıyla yeniden formüle etmiştir. L. Kula [31] split kuaterniyonlar yardımıyla Minkowski 3-uzayında uzaysı (spacelike) ve zamansı (timelike) dönme matrislerini elde etmiştir. Dual split kuaterniyonlar için Hamilton operatörleri ile bu operatörlere karşılık gelen Hamilton matrislerinin özelliklerini incelemiştir. Ayrıca Minkowski 3-uzayında vida hareketini tanımlamıştır. M. Özdemir ve A. A. Ergin [32] Minkowski 3-uzayında dönmeyi birim timelike split kuaterniyonlarla göstermiştir. L. Kula ve Y. Yaylı [33] split kuaterniyonlar için $\mathbb{E}_2^4$ yarı Öklid uzayında dönme dönüşümlerini incelemiştir. Y. Alagöz, K. H. Oral ve S. Yüce [34] split kuaterniyon matrislerini ve özelliklerini kompleks matrislerle araştırmıştır. Bu çalışmada $n \times n$ tipindeki bir split kuaterniyon matris için $2n \times 2n$ tipindeki kompleks adjoint matris temsili tanımlanmıştır. Ayrıca split kuaterniyon matrislerin özellikleri ve özdeğerleri, kompleks adjoint matrisi kullanılarak incelenmiştir.

Bir $q = a + bi + cj + dk$ split kuaterniyon a, b, c, d katsayılarının kompleks sayı, dual sayı ve hiperbolik sayı [2] (H) olmasına göre sırasıyla *kompleks split kuaterniyon*, *dual split kuaterniyon* ve *hiperbolik split kuaterniyon* olarak adlandırılır. M. Erdoğdu ve M. Özdemir [35] çalışmasında kompleks split kuaterniyonları tanıtıp, temel özelliklerini, 4×4 kompleks matris temsilini ve elemanları kompleks split kuaterniyon olan $n \times n$ tipindeki matrisleri araştırmıştır. [36] çalışmasında ise kompleks split kuaterniyonların 8×8 reel matris temsillerini sunup, bu temsillere

[2] $\mathrm{H} = \{h = x + \mathrm{j}y \mid x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{j}^2 = 1\}$

ait özellikleri incelemiştir. M. Erdoğdu ve M. Özdemir tarafından yapılan [37, 38] çalışmalarında sırasıyla dual split kuaterniyonlar ve hiperbolik split kuaterniyonlar tanıtılıp, bunlara ait temel özellikler verilmiştir. $n \times n$ tipindeki dual split kuaterniyon ve $n \times n$ tipindeki hiperbolik split kuaterniyon matrisleri ile bu matrislerin özellikleri çalışılmıştır. G. Özyurt ve Y. Alagöz [39] hiperbolik split kuaterniyonlara ait 2×2, 4×4 tipindeki hiperbolik matrisler ile 8×8 tipindeki reel matris temsillerini sunmuş ve bunlara ait özellikleri incelemiştir.

Literatür incelendiğinde *dejenere kuaterniyon* olarak da bilinen bir *yarı kuaterniyon*, $q = a + bi + cj + dk$ şeklinde ifade edilir ve a, b, c, d reel sayılar olup $1, i, j, k$ için

$$i^2 = -1,\ j^2 = k^2 = 0,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = 0,\ ki = -ik = j$$

eşitlikleri sağlanır [40]. B. Rosenfeld [41] "Geometry of Lie Groups" kitabında yarı kuaterniyonlar için temel bilgileri vermiş ve elemanları yarı kuaterniyon olan $n \times n$ tipindeki matrislerin $2n \times 2n$ tipinde kompleks matrislere izomorf olduğunu ifade etmiştir. H. Mortazaasl ve M. Jafari [42] yarı kuaterniyonlar için De-Moivre ve Euler formüllerini sunmuştur. Yarı kuaterniyonların 4×4 tipindeki reel matris temsilleri için De-Moivre ve Euler formülleri ise M. Jafari ve H. Molaei [43] tarafından hesaplanmıştır. Bir yarı kuaterniyon, katsayılarının kompleks sayı ve dual sayı olmasına göre sırasıyla *kompleks yarı kuaterniyon* ve *dual yarı kuaterniyon* olarak adlandırılır. Kompleks ve dual yarı kuaterniyonların temel özellikleri ve De-Moivre formülü M. Jafari tarafından [44, 45] çalışmalarında incelenmiştir. Y. Alagöz ve G. Özyurt [46] $n \times n$ tipindeki kompleks yarı kuaterniyon matrisleri için $2n \times 2n$ tipinde reel yarı kuaterniyonik matris temsili ile $4n \times 4n$ tipinde reel matris temsilini tanımlamış ve böylece lineer denklem sistemlerinin çözümünü araştırmıştır.

Bir *split yarı kuaterniyon (pseudo dejenere kuaterniyon)* a, b, c, d reel sayılar olmak üzere $q = a+bi+cj+dk$ şeklinde temsil edilir ve $1, i, j, k$ baz elemanları aşağıdaki çarpım kurallarını sağlar:

$$i^2 = 1,\ j^2 = k^2 = 0,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = 0,\ ki = -ik = -j.$$

Split yarı kuaterniyonlara ait temel bilgiler B. Rosenfeld [41] tarafından verilmiştir ve $n \times n$ tipindeki split yarı kuaterniyon matrislerinin $2n \times 2n$ tipindeki hiperbolik matrislere izomorf olduğu ifade edilmiştir. Bir split yarı kuaterniyon için De-Moivre ve Euler formülleri [47] çalışmasında ve bir split yarı kuaterniyonun 4×4 tipindeki reel matris temsili için De-Moivre ve Euler formülleri [48]

çalışmasında M. Jafari tarafından hesaplanmıştır. M. Bekar ve Y. Yaylı [49] split yarı kuaterniyonlar için involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerini tanımlamış ve geometrik yorumlarını araştırmıştır. M. Jafari [50] *dual split yarı kuaterniyonları* ve temel özelliklerini sunmuş, dual split yarı kuaterniyonlar için De-Moivre ve Euler formüllerini hesaplamıştır. Y. Alagöz ve G. Özyurt [51] *hiperbolik split yarı kuaterniyonları* tanımlayıp bunlara ait 2×2 ve 4×4 hiperbolik matris temsilleri ile 8×8 reel matris temsillerini ve özelliklerini sunmuştur. Ayrıca $n \times n$ hiperbolik split yarı kuaterniyon matrislerini araştırmıştır.

$\frac{1}{4}$-kuaterniyonlar (duble dejenere kuaterniyonlar) I. M. Yaglom [40] tarafından "Complex Numbers in Geometry" kitabında tanıtılmıştır. Bir $\frac{1}{4}$-kuaterniyon a, b, c, d reel sayılar olmak üzere $q = a + bi + cj + dk$ ile temsil edilir ve $1, i, j, k$ için

$$i^2 = j^2 = k^2 = jk = kj = ki = ik = 0,$$

$$ij = -ji = k$$

sağlanır [40]. B. Rosenfeld [41] tarafından "Geometry of Lie Groups" kitabında $\alpha = a + bi,\ \beta = c + di \in \mathbb{D}$ dual sayılar ve $i^2 = 0$ olmak üzere bir $\frac{1}{4}$-kuaterniyon

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

2×2 tipinde bir dual matris ile ifade edilmiştir. Böylece $\frac{1}{4}$-kuaterniyon kümesinin $M_2(\mathbb{D})$ yani 2×2 tipinde dual matris halkasının bir alt halkası olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $n \times n$ tipinde bir $\frac{1}{4}$-kuaterniyon matrisi, Q_1 ve Q_2 matrisleri $n \times n$ tipinde dual matrisler olmak üzere, $Q = Q_1 + Q_1 j$ olarak ifade edilip

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0_{n\times n} & \overline{Q_1} \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

$2n \times 2n$ tipinde bir dual matris ile temsil edilmiştir [41].

Yukarıda bahsi geçen tüm kuaterniyon çeşitlerini içeren *genelleştirilmiş kuaterniyon* tanımı, H. Pottmann ve J. Wallner [52] tarafından 2009 yılında "Computational Line Geometry" kitabında aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$i^2 = -\alpha,\ j^2 = -\beta,\ k^2 = -\alpha\beta,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = \beta i,\ ki = -ik = \alpha j,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Bu genelleştirmede

- $\alpha = \beta = 1$ ise reel kuaterniyonlar,
- $\alpha = 1,\ \beta = -1$ ise split kuaterniyonlar,
- $\alpha = 1,\ \beta = 0$ ise yarı kuaterniyonlar,
- $\alpha = -1,\ \beta = 0$ ise split yarı kuaterniyonlar,
- $\alpha = 0,\ \beta = 0$ ise $\frac{1}{4}$-kuaterniyonlar

elde edilir. Genelleştirilmiş kuaterniyonların kümesi $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ ile gösterilir. C. Flaut [53] genelleştirilmiş kuaterniyonlar için

$$L : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta},\ L(q) = qx \ \text{ ve } \ R : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta},\ R(q) = xq,\ q, x \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$$

lineer dönüşümlerini tanımlamıştır. Böylece $\phi, \tau : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to M_4(\mathbb{R})$ olmak üzere bu dönüşümlere karşılık gelen matris temsillerini

$$\phi(q) = \begin{pmatrix} a & -\alpha b & -\beta c & -\alpha\beta d \\ b & a & -\beta d & \beta c \\ c & \alpha d & a & -\alpha b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \text{ ve } \tau(q) = \begin{pmatrix} a & -\alpha b & -\beta c & -\alpha\beta d \\ b & a & \beta d & -\beta c \\ c & -\alpha d & a & \alpha b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

olarak sunmuş ve bu matrislerin özelliklerini incelemiştir. Buradaki $L, R : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ lineer dönüşümlerine *Hamilton operatörleri* ve ϕ, τ dönüşümlerine *genelleştirilmiş Hamilton operatörleri* de denmektedir. M. Jafari ve Y. Yaylı [54] çalışmasında genelleştirilmiş kuaterniyonlar için Hamilton operatörlerinin özelliklerini incelemiş ve 4-boyutlu $E^4_{\alpha\beta}$ uzayında dönmeyi ifade etmiştir. [55] çalışmasında birim genelleştirilmiş kuaterniyon kümesinin bir Lie grubu olduğunu göstermiş ve genelleştirilmiş kuaterniyonlar için Euler ve De-Moivre formüllerini vermiştir. [56] çalışmasında ise birim genelleştirilmiş kuaterniyonlarla 3-boyutlu $E^3_{\alpha\beta}$ uzayında dönmeyi göstermiştir. Elemanları genelleştirilmiş kuaterniyon olan $m \times n$ tipindeki bir matrisin $4m \times 4n$ tipindeki reel matris temsili ise C. Yu, X. Liu ve Y. Zhang [57] tarafından sunulmuştur.

H. Mortazaasl, M. Jafari ve Y. Yaylı [58] *dual genelleştirilmiş kuaterniyonları* tanımlamış ve temel özelliklerini incelemiştir. Ayrıca Euler ve De-Moivre formüllerini sunmuştur. M. Jafari [59] lineer dönüşüm aracılığıyla bir dual genelleştirilmiş kuaterniyona karşılık gelen 4×4 tipindeki dual matris temsilini incelemiş ve bu matris için Euler, De-Moivre formüllerini hesaplamıştır.

Dual sayılar ve kompleks sayılar genelleştirilmiş kompleks sayı [3] türleridir. *Hiper*

[3] Genelleştirilmiş kompleks sayılar $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 + px + q = 0$ denkleminin

dual sayılar [4] ise tıpkı kuaterniyonların kompleks sayıların yüksek boyutlu bir genişlemesi olması gibi, dual sayıların bir genişlemesidir. Hiper dual sayılar, kesme hatası veya eksiltme iptal hatası olmadan ikinci (veya daha yüksek) türev probleminin üstesinden gelmek için J. A. Fike vd. [60] tarafından tanıtılmıştır. 2020 yılında A. Cohen ve M. Shoham [61] *hiper dual kuaterniyonları* tanıtıp, kinematikte uygulamalarını araştırmıştır. S. Aslan, M. Bekar, Y. Yaylı [62] *hiper dual split kuaterniyonları* tanıtmış ve temel cebirsel özelliklerini incelemiştir. Hiper dual sayılara benzer şekilde, kompleks sayıların 4-boyutlu genişlemesi [63] ve [64] çalışmalarında *bikompleks sayılar* [5] olarak sunulmuştur. Hiperbolik sayıların 4-boyutlu genişlemesi ise [63] ve [65] çalışmalarında *hiper duble* [6] sayı olarak tanıtılmıştır.

Literatürde kuaterniyon matrisleriyle ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan birisi benzerlik çalışmaları olup, bir diğeri ise bu tez çalışmasında j*-benzerlik* olarak adlandırılan *consimilarity* çalışmalarıdır. A_1, A_2, A_3, A_4 $m \times n$ tipindeki reel matrisler olmak üzere bir $A = A_1 + A_2 i + A_3 j + A_4 k$ kuaterniyon matrisinin j-eşleniği $\tilde{A} = -jAj = A_1 - A_2 i + A_3 j - A_4 k$ biçiminde tanımlanmıştır. Ayrıca P matrisi $n \times n$ tipinde tersinir bir kuaterniyon matrisi olmak üzere $\tilde{P}^{-1} A P = B$ oluyorsa $n \times n$ tipindeki A ve B kuaterniyon matrislerine j*-benzerdir* denir. j-benzerlik dönüşümü kuaterniyon matrisleri üzerinde bir denklik bağıntısıdır [66].

Bir kuaterniyon matrisi için j*-özdeğer (coneigenvalue)* ve bu j-özdeğere karşılık gelen j*-özvektör (coneigenvector)*, kuaterniyon matrislerinin j-benzerlik gönüşümü için gerçekleştirilen öncelikli uygulamalardan biridir. H. Liping [66] tarafından, bir kuaterniyon matrisinin j-eşleniği yardımıyla, bir $A \in M_n(\mathbb{H})$ matrisi için $A\tilde{X} = X\lambda$ ($\tilde{X}^{-1} A = \lambda \tilde{X}$) olacak şekilde $0 \neq X \in M_{n\times 1}(\mathbb{H})$ matrisi varsa λ skaleri A matrisinin sağ (sol) j-özdeğeri ve X matrisi λ sağ (sol) j-özdeğerine karşılık gelen j-özvektör olarak sunulmuştur.

[67] çalışmasında $A_1 = B_1 + B_2 i$ ve $A_2 = B_3 + B_4 i$ kompleks matrisler olmak üzere $A = B_1 + B_2 i + B_3 j + B_4 k \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$ kuaterniyon matrislerinin kompleks

çözümü olan $a + bI$ şeklindeki sayılardır. Burada $\Delta = p^2 - 4q$ ve $I^2 = -pI - q$ olduğu görülür ve
$\Delta < 0$ durumunda $i^2 = -1$ olup $a + bi$ kompleks sayılar,
$\Delta = 0$ durumunda $\varepsilon^2 = 0$ olup $a + b\varepsilon$ dual sayılar,
$\Delta > 0$ durumunda j$^2 = 1$ olup $a + b$j hiperbolik sayılar elde edilir [40].

[4]Hiper dual sayılar kümesi $\tilde{\mathbb{D}} = \{\tilde{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^* \varepsilon x_4 : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlıdır. Burada ε ve ε^* dual birimleri $\varepsilon^2 = (\varepsilon^*)^2 = (\varepsilon\varepsilon^*)^2 = 0$ ve $\varepsilon \neq \varepsilon^*$, $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon^* \neq 0$, $\varepsilon^* \varepsilon \neq 0$ özelliklerine sahiptir [60].

[5]Bikompleks sayılar kümesi $\{a = a_1 + i_1 a_2 + i_2 a_3 + i_1 i_2 a_4 : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir ve $i_1^2 = -1$, $i_2^2 = -1$, $(i_1 i_2)^2 = 1$, $i_1 i_2 = i_2 i_1$ özellikleri sağlanır [63, 64].

[6]Hiper duble sayılar kümesi $\{a = a_1 + j_1 a_2 + j_2 a_3 + j_1 j_2 a_4 : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$ biçiminde olup $j_1^2 = 1$, $j_2^2 = 1$, $(j_1 j_2)^2 = 1$, $j_1 j_2 = j_2 j_1$ özellikleri sağlanır [63, 65].

matris temsili, (1.1)'de yer alan kompleks adjoint matristen farklı olarak

$$\begin{pmatrix} A_2 & -A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_2} \end{pmatrix}_{2m\times 2n} \tag{1.2}$$

biçiminde sunulmuştur. Bu kompleks matris temsili aracılığıyla kuaterniyon matrislerinin benrzerlik ve j-benzerlik dönüşümleri arasındaki cebirsel ilişkiler verilmiştir. 2015 yılındaki [68] çalışmasında $n \times n$ tipindeki bir kuaterniyon matrisinin (1.2)'de yer alan $2n \times 2n$ kompleks matris temsiliyle j-özdeğerleri ve j-özvektörleri hesaplanmıştır. [69] çalışmasında ise $n \times n$ tipindeki bir kuaterniyon matrisinin $4n \times 4n$ tipindeki reel matris temsili sunulmuştur. Bu matris yardımıyla bir kuaterniyon matrisinin j-özdeğerleri ve j-özvektörleri üzerinde çalışılmıştır. Kuaterniyon matrislerinin yanı sıra $n \times n$ tipindeki split kuaterniyon matrisleri için de j-benzerlik, j-özdeğer ve j-özvektör tanımları [70] çalışmasında sunulmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Literatür özeti incelendiğinde elemanları reel kuaterniyon, split kuaterniyon, yarı kuaterniyon ve split yarı kuaterniyon olan $m \times n$ tipindeki kuaterniyon matrisleri ve bunlara ait özellikler sırasıyla [25, 34, 46, 51] çalışmalarında sunulmuştur. $n \times n$ tipindeki $\frac{1}{4}$-kuaterniyon matrisi için $2n \times 2n$ tipindeki dual matris temsili B. Rosenfeld [41] tarafından "Geometry of Lie Groups" kitabında tanımlanmıştır. Genelleştirilmiş kuaterniyonlar H. Pottmann ve J. Wallner [52] tarafından "Computational Line Geometry" kitabında tanıtılmış olup $m\times n$ tipindeki genelleştirilmiş kuaterniyon matrisleri için ise $4m \times 4n$ tipinde reel matris temsili [57] çalışmasında verilmiştir. Dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar, hiper dual kuaterniyonlar ve hiper dual split kuaterniyonlar sırasıyla [58], [61] ve [62] çalışmalarında tanıtılmış ve temel özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışmanın amacı genelleştirilmiş kuaterniyonları ve bu kuaterniyonlara ait özellikleri araştırmaktır. Literatürde hiper dual kuaterniyonlar ve hiper dual split kuaterniyonlar tanımlanmıştır. Bu çalışmada ilk olarak hiper dual katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar tanıtılacak ve bu genelleştirmeye ait özellikler incelenecektir. Ayrıca $m \times n$ tipindeki hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matrisleri ve özellikleri araştırılacaktır. Böylelikle, hiper dual sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon matrislerinin araştırılmasıyla $m \times n$ tipinde $\frac{1}{4}$-kuaterniyon matrisleri ile ilgili özellikler de elde edilebilecektir.

İkinci olarak hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar için benzerlik kavramı sunulacaktır. Hiper dual sayı katsayılı kuaterniyon, split kuaterniyon, yarı

kuaterniyon ve split yarı kuaterniyondan oluşan genelleştirme ($\mathbb{H}_\alpha^{HD}$) için i-benzerlik tanımı ve özellikleri incelenecektir. Hiper dual sayı katsayılı kuaterniyon ve split kuaterniyondan oluşan genelleştirme ($\mathbb{H}_\beta^{HD}$) için j-benzerlik ve k-benzerlik tanımları ile bunlara ait özellikler araştırılacaktır. i, j, k-eşlenik ve i, j, k-benzerlik kavramları yardımıyla $\mathbb{H}_\alpha^{HD}$ elemanlı matrisler için i-özdeğer, i-özvektör; $\mathbb{H}_\beta^{HD}$ elemanlı matrisler için j, k-özdeğer, j, k-özvektör tanımları ve özellikleri sunulacaktır.

Üçüncü olarak bikompleks, hiper duble ve hiper dual sayıların genelleştirmesi olan hiper sayılar kümesi tanımlanacak ve temel kavramları sunulacaktır. Ardından hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar tanıtılıp cebirsel yapısı incelenecektir. Bu genelleştirme için matris temsilleri ile bu matris temsillerine ait özellikler araştırılacaktır.

Son olarak reel kuaterniyon ve split kuaterniyon matrislerin genelleştirmesi olan $\mathbb{H}_\beta$ elemanlı bir matrisin j-özdeğer ve j-özvektörleri $2n \times 2n$ tipindeki kompleks matris temsili yardımıyla hesaplanacaktır. Sonrasında $\mathbb{H}_\beta$ elemanlı bir matrisin j-özdeğerleri $4n \times 4n$ tipindeki reel matris temsili kullanılarak araştırılacaktır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada öncelikle hiper dual sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi tanıtılacak ve bu genelleştirmenin cebirsel yapısı sunulacaktır. Ardından hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar için benzerlik konusu ele alınacak ve i, j, k-eşlenik tanımları yardımıyla elde edilen i, j, k-benzerlik kavramları üzerinde durulacaktır. Hiper dual sayı katsayılı $\frac{1}{4}$-kuaterniyonlar hariç, söz konusu genelleştirme için i-benzerlik kavramı incelenecektir. Hiper dual sayı katsayılı kuaterniyon ve split kuaterniyondan oluşan genelleştirme için ise j-benzerlik ve k-benzerlik araştırılacaktır. Bikompleks, hiper duble ve hiper dual sayılar genelleştirilecek ve hiper sayı olarak adlandırılacaktır. Buradan hareketle hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon kümesi tanıtılacaktır. Elemanları reel kuaterniyon ve split kuaterniyonların genelleştirilmesinden oluşan matrisler için önce kompleks matris temsili yardımıyla j-özdeğer ve j-özvektörler hesaplanacaktır. Ardından reel matris temsili kullanılarak j-özdeğer üzerinde durulacaktır.

2
REEL KUATERNİYONLAR

Bu bölümde reel kuaterniyonlara ait temel kavramlar, kompleks matris temsilleri ve reel matris temsilleri verilmiştir.

2.1 Reel Kuaterniyonlar ve Temel Özellikleri

Tanım 2.1. q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılar ve $\mathbb{R}^4$ de $1 := (1,0,0,0)$, $i := (0,1,0,0)$, $j := (0,0,1,0)$, $k := (0,0,0,1)$ standart bazlar olmak üzere $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ifadesine *reel kuaterniyon* denir. Burada $1, i, j, k$ bazı

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j \tag{2.1}$$

çarpım kurallarını sağlar. Reel kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{H} = \left\{ q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlanır. Bu kümedeki her bir $q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ sıralı dörtlüsü ile gösterilebilir [2].

Tanım 2.2. Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ reel kuaterniyonunun $S_q = q_0$ *skaler (reel) kısmı*, $V_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ *vektörel kısmı* olarak tanımlanır. Böylece her q reel kuaterniyonu $q = S_q + V_q$ olarak ifade edilebilir. Eğer $S_q = 0$ ise q reel kuaterniyonu *pure reel kuaterniyon* olarak adlandırılır ve pure reel kuaterniyonların kümesi $\mathbb{H}_0$ ile gösterilir [1].

Not 2.1. Reel kuaterniyon kümesi $\mathbb{R}^4$ uzayına, pure kuaterniyon kümesi ise $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorftur [1].

Tanım 2.3. $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{H}$ olmak üzere $t = 0, 1, 2, 3$ için $q_t = p_t$ ise q ve p reel kuaterniyonları *eşittir* denir [2].

Tanım 2.4. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ve $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ reel kuaterniyonları için toplama işlemi

$$q + p = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k$$

olarak tanımlanır. Ayrıca q ve p reel kuaterniyonları $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ olarak yazılabildiğinden

$$q + p = (S_q + S_p) + (V_q + V_p) = S_{q+p} + V_{q+p}$$

olarak ifade edilebilir. Böylece bu toplama işlemi ile $(\mathbb{H}, +)$ ikilisi değişmeli grup olup bu işleme göre $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$ birim elemandır [1].

Tanım 2.5. Bir $q = S_q + V_q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ reel kuaterniyonunun $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile dış çarpımı

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ (\lambda, q) &\to \lambda \odot q = \lambda q \end{aligned}$$

ile tanımlı olup

$$\lambda q = \lambda S_q + \lambda V_q = (\lambda q_0) + (\lambda q_1)i + (\lambda q_2)j + (\lambda q_3)k$$

olarak ifade edilebilir.

Böylece $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $q, p \in \mathbb{H}$ için

- $\lambda(p + q) = \lambda p + \lambda q$,
- $(\lambda_1 + \lambda_2)q = \lambda_1 q + \lambda_2 q$,
- $(\lambda_1 \lambda_2)q = \lambda_1(\lambda_2 q)$,
- $1q = q$

özellikleri sağlandığından reel kuaterniyonlar kümesi reel sayılar üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır [1].

Tanım 2.6. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \in \mathbb{H}$ için iki reel kuaterniyonun çarpımı

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ (q, p) &\to q \times p = qp \end{aligned}$$

ile tanımlı olup

$$\begin{aligned} qp =&(q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) + (q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2)i \\ &+(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_3p_1)j + (q_0p_3 + q_3p_0 + q_1p_2 - q_2p_1)k \end{aligned}$$

ya da

$$qp = S_qS_p - < V_q, V_p > + S_qV_p + S_pV_q + V_q \wedge V_p$$

şeklindedir. Burada $<,>$ ve $\wedge$ sırasıyla $\mathbb{R}^3$ uzayında iç çarpımı ve vektörel çarpımı temsil etmektedir.

Her $p, q, r \in \mathbb{H}$ için

- $(pq)r = p(qr)$,
- $(p+q)r = pr + qr$ ve $p(q+r) = pq + pr$

özellikleri sağlandığından reel kuaterniyonlar bir cebirdir. (2.1)'de yer alan eşitliklerden de görüleceği üzere $ij = k$ ve $ji = -k$ olduğundan $ij \neq ji$ olup reel kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir [1].

Tanım 2.7. Bir $q = S_q + V_q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ reel kuaterniyonunun eşleniği

$$\overline{q} = S_q - V_q = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$$

biçiminde tanımlıdır ve q reel kuaterniyon ile eşleniğinin çarpımından

$$q\overline{q} = \overline{q}q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

elde edilir. Reel kuaterniyonlar için tanımlı bu eşlenik her $q, p \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri için

- $\overline{\overline{q}} = q$,
- $\overline{\lambda q} = \lambda\overline{q}$,
- $q + \overline{q} = 2S_q$,
- $\overline{q+p} = \overline{q} + \overline{p}$,
- $\overline{qp} = \overline{p}\,\overline{q}$

özelliklerine sahiptir [1].

Tanım 2.8. Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ reel kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned} \| \| : \mathbb{H} &\to \mathbb{R} \\ q &\to \|q\| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}q} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $\|q\| = 1$ ise $q \in \mathbb{H}$ *birim reel kuaterniyon* olarak adlandırılır [1].

Tanım 2.9. Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ reel kuaterniyonunun tersi, $\|q\| \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (,)^{-1} : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ q &\to q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2} \end{aligned}$$

biçimindedir [1].

2.1.1 Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ reel kuaterniyonun kutupsal gösterimi

$$q = \|q\| (\cos\theta + \vec{n} \sin\theta)$$

biçimindedir. Burada $q \in \mathbb{H}$ ile reel eksen arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{q_0}{\|q\|} \text{ ve } \sin\theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\|q\|}$$

olup

$$\vec{n} = \left(\frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right)$$

birim kuaterniyondur [15].

2.1.2 Reel Kuaterniyonlar İçin Euler Formülü

Birim kuaterniyonların kümesi S^3 ve birim pure kuaterniyonların kümesi S^2 olmak üzere

$$\begin{aligned} S^3 &= \{q \in \mathbb{H} \,:\, \|q\| = 1\}, \\ S^2 &= \{\omega \in \mathbb{H}_0 : \|\omega\| = 1,\ \overline{\omega} = -\omega\} \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Burada $<,>$ ve $\wedge$ sırasıyla Öklid iç çarpımı ve vektörel çarpımı temsil etmekte olup

$$< \omega,\ \omega >= 1,\ \omega \wedge \omega = 0 \text{ ve } \omega^2 = -1$$

olduğu görülür. Ayrıca $\omega \in S^2$ için $\omega^2 = -1$ olduğundan $\omega^3 = -\omega$ ve $\omega^4 = 1$ elde edilir [15].

Not 2.2. S^3, kuaterniyon çarpımı ile bir gruptur ve determinantı 1 olan 2×2 tipindeki matrislerin grubu olan $SU(2)$ üniter matris grubuna [1] izomorftur. Burada $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in S^3$ olmak üzere S^3 ile $SU(2)$ arasındaki izomorfizma

$$(q_0, q_1, q_2, q_3) \longmapsto \begin{pmatrix} q_0 + q_1 i & -q_2 + q_3 i \\ q_2 + q_3 i & q_0 - q_1 i \end{pmatrix}$$

dönüşümü ile verilir [15].

Herhangi bir θ için sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının seri açılımları [2] yardımıyla

$$\begin{aligned} e^{\omega\theta} &= 1 + \omega\theta + \frac{(\omega\theta)^2}{2!} + \frac{(\omega\theta)^3}{3!} + \frac{(\omega\theta)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + \omega\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \omega\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + \omega\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + \omega \sin\theta \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Böylece kuaterniyonlar için *Euler formülü* genelleştirmesi

$$e^{\omega\theta} = \cos\theta + \omega \sin\theta$$

olarak elde edilir [15].

Lemma 2.1. *[15]* $\omega \in S^2$ *olmak üzere*

$$(\cos\theta + \omega\sin\theta)(\cos\psi + \omega\sin\psi) = \cos(\theta + \psi) + \omega\sin(\theta + \psi)$$

[1] $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi verilsin. $\overline{A}$ ve A^t, A matrisinin sırasıyla *kompleks eşleniği* ve *transpozu* olmak üzere $(\overline{A})^t$ matrisi A^* ile gösterilsin. Eğer $A^*A = I$ ise A matrisine *üniter matris* denir. $SU(n)$ *özel üniter grup*

$$SU(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^*A = I \text{ ve } \det A = 1\}$$

olarak tanımlanır.

[2] Herhangi bir x için $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ ve $sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ şeklindedir.

eşitliği sağlanır.

2.1.3 Reel Kuaterniyonlar İçin De-Moivre Formülü

Teorem 2.1. *[15] (De-Moivre Formülü)* $q \in S^3$ *için* $q = \cos\theta + \omega\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\omega \in S^2$ *ve* $n \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere*

$$q^n = (\cos\theta + \omega\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \omega\sin(n\theta)$$

şeklindedir.

İspat. Teoremin ispatı için tümevarım yöntemini kullanacağız. Lemma 2.1 yardımıyla $n = 2$ için

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \omega\sin\theta)^2 =& (\cos\theta + \omega\sin\theta)(\cos\theta + \omega\sin\theta)\\ =& \cos(\theta+\theta) + \omega\sin(\theta+\theta)\\ =& \cos(2\theta) + \omega\sin(2\theta)\end{aligned}$$

elde edilir.

$(\cos\theta + \omega\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \omega\sin(n\theta)$ olduğunu kabul edelim.

$(\cos\theta + \omega\sin\theta)^{n+1} = \cos\big((n+1)\theta\big) + \omega\sin\big((n+1)\theta\big)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \omega\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + \omega\sin\theta)^n(\cos\theta + \omega\sin\theta)\\ &= \big(\cos(n\theta) + \omega\sin(n\theta)\big)(\cos\theta + \omega\sin\theta)\\ &= \cos(n\theta+\theta) + \omega\sin(n\theta+\theta)\\ &= \cos\big((n+1)\theta\big) + \omega\sin\big((n+1)\theta\big)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

n negatif bir tamsayı olsun.

$$\begin{aligned}q^{-1} &= \cos\theta - \omega\sin\theta\\ q^{-n} &= \cos(n\theta) - \omega\sin(n\theta)\\ &= \cos(-n\theta) + \omega\sin(-n\theta)\end{aligned}$$

olduğundan formülün negatif tamsayılar için de sağlandığı görülür. ■

2.2 Reel Kuaterniyonların Matris Temsilleri

2.2.1 Kompleks Matris Temsilleri

Reel kuaterniyonlar, Cayley-Dickson yapısı olarak da adlandırılan, kompleks sayı çifti yardımıyla yazılabilir. Yani bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ reel kuaterniyonu

$$\begin{aligned} q &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \\ &= (q_0 + q_1 i) + (q_2 + q_3 i) j \\ &= z_1 + z_2 j \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $z_1 = q_0 + q_1 i$ ve $z_2 = q_2 + q_3 i$ kompleks sayılardır.

Reel kuaterniyonların kompleks sayılarla ifade edilişi sayesinde her reel kuaterniyona bir kompleks matris karşılık gelir ve kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından iki farklı kompleks matris temsili elde edilir. Her $q \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} f_q^R : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ p &\to f_q^R(p) = pq \end{aligned}$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Bu lineer dönüşüm bire bir olup

$$\begin{aligned} f_q^R(1) &= 1(z_1 + z_2 j) = z_1 + z_2 j, \\ f_q^R(j) &= j(z_1 + z_2 j) = -\overline{z_2} + \overline{z_1} j \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir ve böylece q reel kuaterniyonuna

$$\begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$$

matrisi karşılık gelir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} f_q^L : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ p &\to f_q^L(p) = qp \end{aligned}$$

bire bir lineer dönüşümü tanımlansın. Böylece

$$\begin{aligned} f_q^L(1) &= (z_1 + z_2 j)1 = z_1 + z_2 j, \\ f_q^L(j) &= (z_1 + z_2 j)j = -z_2 + z_1 j \end{aligned}$$

eşitliklerinden q reel kuaterniyonuna karşılık gelen kompleks matris

$$\begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir [1].

2.2.2 Reel Matris Temsilleri

Reel kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından L_q ve R_q lineer dönüşümleri yardımıyla *sağ çarpım matrisi* ve *sol çarpım matrisi* adı verilen 4x4 tipinde reel matrisler elde edilir.

Her $q \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_q : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ p &\to \mathrm{L}_q(p) = qp \end{aligned}$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Burada $1, i, j, k$ reel kuaterniyon bazı yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_q(1) &= q1 = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \\ \mathrm{L}_q(i) &= qi = -q_1 + q_0 i + q_3 j - q_2 k, \\ \mathrm{L}_q(j) &= qj = -q_2 - q_3 i + q_0 j + q_1 k, \\ \mathrm{L}_q(k) &= qk = -q_3 + q_2 i - q_1 j + q_0 k \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ reel kuaterniyonuna karşılık gelen sol çarpım matrisi

$$A_{\mathrm{L}_q} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_q : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ p &\to \mathrm{R}_q(p) = pq \end{aligned}$$

lineer dönüşümü ile elde edilen

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_q(1) &= 1q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \\
\mathrm{R}_q(i) &= iq = -q_1 + q_0 i - q_3 j + q_2 k, \\
\mathrm{R}_q(j) &= jq = -q_2 + q_3 i + q_0 j - q_1 k, \\
\mathrm{R}_q(k) &= kq = -q_3 - q_2 i + q_1 j + q_0 k
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$A_{\mathrm{R}_q} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

sağ çarpım matrisi elde edilir [2].

Not 2.3. q birim reel kuaterniyon ve $p \in \mathbb{H}$ olsun.

- A_{L_q} ve A_{R_q} matrisleri ortogonaldir. Yani $A_{\mathrm{L}_q} A_{\mathrm{L}_q}^t = I$ ve $A_{\mathrm{R}_q} A_{\mathrm{R}_q}^t = I$ dir.
- $\det(A_{\mathrm{L}_q}) = 1$ ve $\det(A_{\mathrm{R}_q}) = 1$ dir.
- $A_{\mathrm{L}_q} \in SO(4)$[3] ve $A_{\mathrm{R}_q} \in SO(4)$ olup qp ve pq, $\mathbb{R}^4$ uzayında p reel kuaterniyonunun dönmesine karşılık gelir [2].

Teorem 2.2. *[2] Reel kuaterniyon uzayı ile* 4×4 *tipindeki reel matris uzayı* $M_4(\mathbb{R})$ *için*

$$\phi : \mathbb{H} \to M_4(\mathbb{R}, \oplus, \otimes),\ \phi(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \mapsto \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır.

Teorem 2.3. *[2] Reel kuaterniyon uzayı ile* 4×4 *tipindeki reel matris uzayı* $M_4(\mathbb{R})$ *için*

$$\varphi : \mathbb{H} \to M_4(\mathbb{R}, \oplus, \otimes),\ \varphi(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \mapsto \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

[3] *Özel ortogonal grup*

$$SO(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = I \text{ ve } \det A = 1\}$$

ile tanımlanır.

tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır.

3
GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Bu bölümde genelleştirilmiş kuaterniyonlara ait temel kavramlar ve matris temsilleri verilmiştir.

3.1 Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar ve Temel Özellikleri

Tanım 3.1. q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayıları için $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ifadesine *genelleştirilmiş kuaterniyon* denir. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ iken

$$i^2 = -\alpha,\ j^2 = -\beta,\ k^2 = -\alpha\beta,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = \beta i,\ ki = -ik = \alpha j$$

eşitlikleri sağlanır [52]. Genelleştirilmiş kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} = \left\{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \,:\, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

ile tanımlanır [54].

Tanım 3.2. Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyon, $S_q = q_0$ *skaler kısım* ve $V_q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ *vektörel kısım* olmak üzere $q = S_q + V_q$ ile ifade edilebilir [54].

Not 3.1. Genelleştirilmiş kuaterniyonlar için özel durumlar aşağıdaki gibidir:

1. $\alpha = \beta = 1$ ise reel kuaterniyonlar,
2. $\alpha = 1,\ \beta = -1$ ise split kuaterniyonlar,
3. $\alpha = 1,\ \beta = 0$ ise yarı kuaterniyonlar,
4. $\alpha = -1,\ \beta = 0$ ise split yarı kuaterniyonlar,
5. $\alpha = 0,\ \beta = 0$ ise $\frac{1}{4}$-kuaterniyonlar

elde edilir [52].

Genelleştirilmiş kuaterniyonlar için toplama işlemi ve dış çarpım reel kuaterniyonlara benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 3.3. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ve $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyonları için toplama işlemi

$$q + p = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)i + (q_2 + p_2)j + (q_3 + p_3)k$$

şeklinde tanımlıdır [54].

Tanım 3.4. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyonu için dış çarpım

$$\lambda q = (\lambda q_0) + (\lambda q_1)i + (\lambda q_2)j + (\lambda q_3)k$$

olarak tanımlanır [54].

Not 3.2. Toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ kümesi reel sayılar üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır [54].

Tanım 3.5. $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ ve $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} qp =& (q_0p_0 - \alpha q_1p_1 - \beta q_2p_2 - \alpha\beta q_3p_3) + (q_0p_1 + q_1p_0 + \beta q_2p_3 - \beta q_3p_2)i \\ &+ (q_0p_2 + q_2p_0 - \alpha q_1p_3 + \alpha q_3p_1)j + (q_0p_3 + q_3p_0 + q_1p_2 - q_2p_1)k \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca q ve p genelleştirilmiş kuaterniyonları $q = S_q + V_q$ ve $p = S_p + V_p$ olarak ifade edilebildiğinden

$$qp = S_qS_p - g(V_q, V_p) + S_qV_p + S_pV_q + V_q \wedge V_p$$

yazılabilir. Burada

$$g(V_q, V_p) = \alpha q_1p_1 + \beta q_2p_2 + \alpha\beta q_3p_3$$

genelleştirilmiş iç çarpım ve

$$V_q \wedge V_p = \begin{vmatrix} \beta i & \alpha j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \beta(q_2p_3 - q_3p_2)i + \alpha(q_3p_1 - q_1p_3)j + (q_1p_2 - q_2p_1)k$$

genelleştirilmiş vektörel çarpım olarak adlandırılır [55].

Not 3.3. Yukarıda verilen çarpma işlemi birleşme özelliği ve toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahip olup değişmeli olmadığından $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ aykırı cisimdir [54].

Tanım 3.6. Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyonunun eşleniği

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

ile tanımlanır [54].

Tanım 3.7. Bir $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyonunun normu

$$\left\|q\right\| = \sqrt{|q\overline{q}|} = \sqrt{|\overline{q}q|} = \sqrt{|q_0^2 + \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 + \alpha\beta q_3^2|}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\left\|q\right\| = 1$ ise q'ya *birim genelleştirilmiş kuaterniyon* denir [54].

Tanım 3.8. Bir q genelleştirilmiş kuaterniyonun tersi, $\left\|q\right\| \neq 0$ olmak üzere,

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\left\|q\right\|^2}$$

şeklinde tanımlanır [55].

3.2 Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Matris Temsilleri

Her $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ için

$$\begin{aligned} L_q : \mathbb{H}_{\alpha\beta} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta} \\ p &\to L_q(p) = qp \end{aligned}$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm bire birdir ve her $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyonu için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} L_q(1) &= q1 = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \\ L_q(i) &= qi = -\alpha q_1 + q_0 i + \alpha q_3 j - q_2 k, \\ L_q(j) &= qj = -\beta q_2 - \beta q_3 i + q_0 j + q_1 k, \\ L_q(k) &= qk = -\alpha\beta q_3 + \beta q_2 i - \alpha q_1 j + q_0 k. \end{aligned}$$

Böylece q genelleştirilmiş kuaterniyonuna karşılık gelen matris

$$A_{L_q} = \begin{pmatrix} q_0 & -\alpha q_1 & -\beta q_2 & -\alpha\beta q_3 \\ q_1 & q_0 & -\beta q_3 & \beta q_2 \\ q_2 & \alpha q_3 & q_0 & -\alpha q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde her $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ için

$$\begin{aligned} R_q : \mathbb{H}_{\alpha\beta} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta} \\ p &\to R_q(p) = pq \end{aligned}$$

lineer dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} R_q(1) &= 1q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \\ R_q(i) &= iq = -\alpha q_1 + q_0 i - \alpha q_3 j + q_2 k, \\ R_q(j) &= jq = -\beta q_2 + \beta q_3 i + q_0 j - q_1 k, \\ R_q(k) &= kq = -\alpha\beta q_3 - \beta q_2 i + \alpha q_1 j + q_0 k \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylelikle $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ genelleştirilmiş kuaterniyonuna karşılık gelen matris

$$A_{R_q} = \begin{pmatrix} q_0 & -\alpha q_1 & -\beta q_2 & -\alpha\beta q_3 \\ q_1 & q_0 & \beta q_3 & -\beta q_2 \\ q_2 & -\alpha q_3 & q_0 & \alpha q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

bulunur [53].

Not 3.4. $L_q : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta},\ L_q(p) = qp$ ve $R_q : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta},\ R_q(p) = pq$ dönüşümleri *Hamilton operatörleri* olarak da adlandırılır ve sırasıyla $\overset{+}{h}\colon \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ ve $\overset{-}{h}\colon \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ ile gösterilir. Benzer şekilde bu lineer dönüşümlere karşılık gelen A_{L_q} ve A_{R_q} matrisleri *genelleştirilmiş Hamilton matrisleri* olarak adlandırılır ve sırasıyla $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ ile gösterilir [54].

Teorem 3.1. *[54] q ve p genelleştirilmiş kuaterniyon ve λ bir reel sayı olsun. $\overset{+}{H}$ ve $\overset{-}{H}$ operatörleri aşağıdakileri sağlar:*

i. $q = p \Leftrightarrow \overset{+}{H}(q) = \overset{+}{H}(p) \Leftrightarrow \overset{-}{H}(q) = \overset{-}{H}(p)$,

ii. $\overset{+}{H}(q+p) = \overset{+}{H}(q) + \overset{+}{H}(p),\ \overset{-}{H}(q+p) = \overset{-}{H}(q) + \overset{-}{H}(p)$,

iii. $\overset{+}{H}(\lambda q) = \lambda \overset{+}{H}(q),\ \overset{-}{H}(\lambda q) = \lambda \overset{-}{H}(q)$,

iv. $\overset{+}{H}(qp) = \overset{+}{H}(q)\ \overset{+}{H}(p),\ \overset{-}{H}(qp) = \overset{-}{H}(p)\ \overset{-}{H}(q)$,

v. $\det\left[\overset{+}{H}(q)\right] = \|q\|^4,\ \det\left[\overset{-}{H}(q)\right] = \|q\|^4$,

vi. $tr\left[\overset{+}{H}(q)\right] = 4q_0,\ tr\left[\overset{-}{H}(q)\right] = 4q_0$.

4
HİPER DUAL GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Bu bölümün girişinde dual sayılar ve hiper dual sayılara ait temel kavramlar verilmiştir [40], [60], [65, 71, 72] . Bu bölümün orijinal kısmında hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar tanıtılmış, cebirsel yapısı incelenmiş ve temel özellikleri sunulmuştur. Ardından hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar için matris temsilleri ve bu temsillere ait özellikler araştırılmıştır.

4.1 Dual Sayılar

Dual sayılar kümesi

$$\mathbb{D} = \{d = a + \varepsilon b : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0\}$$

ile tanımlanır. $d_1 = a_1 + \varepsilon b_1$ ve $d_2 = a_2 + \varepsilon b_2$ dual sayılarının toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$d_1 + d_2 = (a_1 + a_2) + \varepsilon(b_1 + b_2)$$

ve

$$d_1 d_2 = a_1 a_2 + \varepsilon(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

olarak tanımlanır.

Dual sayılar, reel sayılar kümesi üzerinde 2-boyutlu değişmeli bir cebirdir [40].

4.2 Hiper Dual Sayılar

Tanım 4.1. x_1, x_2, x_3, x_4 reel sayılar olmak üzere $\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^* \varepsilon x_4$ ifadesine *hiper dual sayı* denir. Burada ε ve ε^* dual birimler olup

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon^*)^2 = (\varepsilon^* \varepsilon)^2 = 0$$

ve

$$\varepsilon \neq 0,\ \varepsilon^* \neq 0,\ \varepsilon^*\varepsilon \neq 0$$

özelliklerine sahiptir [60],[65].

Tanım 4.2. Hiper dual sayılar kümesi $\mathbb{HD}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{HD} = \{\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^*\varepsilon x_4 : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanır.

Bir $\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^*\varepsilon x_4$ hiper dual sayısı $x_1 + \varepsilon x_2$ ve $x_3 + \varepsilon x_4$ dual sayılar olmak üzere

$$\boldsymbol{x} = (x_1 + \varepsilon x_2) + \varepsilon^*(x_3 + \varepsilon x_4)$$

şeklinde ifade edilir ve ε^*, hiper dual birim olarak adlandırılır [71].

4.2.1 Hiper Dual Sayılar Üzerinde Temel İşlemler

Tanım 4.3. $\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^*\varepsilon x_4$ ve $\boldsymbol{y} = y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^* y_3 + \varepsilon^*\varepsilon y_4$ hiper dual sayılarının eşit olması için gerek ve yeter şart $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ ve $x_4 = y_4$ olmasıdır [65].

Tanım 4.4. $\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^*\varepsilon x_4$ ve $\boldsymbol{y} = y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^* y_3 + \varepsilon^*\varepsilon y_4$ hiper dual sayılarının toplamı

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1) + \varepsilon(x_2 + y_2) + \varepsilon^*(x_3 + y_3) + \varepsilon^*\varepsilon(x_4 + y_4)$$

ile tanımlıdır [65].

Tanım 4.5. Bir $\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^*\varepsilon x_4$ hiper dual sayısının $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1) + \varepsilon(\lambda x_2) + \varepsilon^*(\lambda x_3) + \varepsilon^*\varepsilon(\lambda x_4)$$

ile tanımlanır [65].

Sonuç 4.1. *Toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte hiper dual sayılar kümesi reel sayılar üzerinde bir vektör uzayıdır [65].*

Tanım 4.6. $\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^*\varepsilon x_4$ ve $\boldsymbol{y} = y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^* y_3 + \varepsilon^*\varepsilon y_4$ hiper dual sayılarının çarpımı

$$\boldsymbol{xy} = (x_1y_1) + \varepsilon(x_1y_2 + x_2y_1) + \varepsilon^*(x_1y_3 + x_3y_1) + \varepsilon^*\varepsilon(x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1)$$

olarak tanımlanır [65].

Sonuç 4.2. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{HD}$ *için*

- $(\boldsymbol{xy})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{yz})$,
- $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{xz}$,
- $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{xz} + \boldsymbol{yz}$,
- $\boldsymbol{x}1 = 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,
- $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{yx}$

özellikleri sağlandığından hiper dual sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{R}$ *için*

$$(\lambda \boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\lambda \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{xy})$$

sağlandığından hiper dual sayılar kümesi değişmeli, birimli ve birleşmeli bir cebirdir [65].

Tanım 4.7. Bir $\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^* \varepsilon x_4$ hiper dual sayısının eşleniği

$$\overline{\boldsymbol{x}} = x_1 - \varepsilon x_2 - \varepsilon^* x_3 - \varepsilon^* \varepsilon x_4$$

ile tanımlıdır.

Tanım 4.8. $x_1 \neq 0$ olmak üzere $\boldsymbol{x} = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^* + x_4\varepsilon^*\varepsilon$ hiper dual sayısının tersi $\boldsymbol{x}^{-1}$ ile gösterilir ve

$$\boldsymbol{x}^{-1} = \frac{1}{x_1} - \frac{x_2}{x_1^2}\varepsilon - \frac{x_3}{x_1^2}\varepsilon^* + \left(\frac{-x_4}{x_1^2} + \frac{2x_2x_3}{x_1^3}\right)\varepsilon^*\varepsilon$$

olarak tanımlanır [65].

4.2.2 Hiper Dual Sayıların Matris Temsili

$\boldsymbol{x} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^* \varepsilon x_4$ bir hiper dual sayı olsun. Her $\boldsymbol{y} \in \mathbb{HD}$ için

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{HD} &\to \mathbb{HD} \\ \boldsymbol{x} &\to L_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{xy} \end{aligned}$$

lineer dönüşümü tanımlansın. $\mathbb{HD} = Sp\{1, \varepsilon, \varepsilon^*, \varepsilon^*\varepsilon\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{x}}(1) &= x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^*\varepsilon x_4, \\ L_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon) &= 0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^* 0 + \varepsilon^*\varepsilon x_3, \\ L_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon^*) &= 0 + \varepsilon 0 + \varepsilon^* x_1 + \varepsilon^*\varepsilon x_2, \\ L_{\boldsymbol{x}}(\varepsilon^*\varepsilon) &= 0 + \varepsilon 0 + \varepsilon^* 0 + \varepsilon^*\varepsilon x_1 \end{aligned}$$

eşitliklerinden $L_{\boldsymbol{x}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur [72].

4.3 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

Tanım 4.9. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ hiper dual sayılar olmak üzere $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ ifadesine *hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon* denir. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$i^2 = -\alpha,\ j^2 = -\beta,\ k^2 = -\alpha\beta,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = \beta i,\ ki = -ik = \alpha j$$

eşitlikleri sağlanır. Burada ε ve ε^* dual birimleri, kuaterniyonik birimler ile değişmelidir.

$$i\varepsilon = \varepsilon i,\ j\varepsilon = \varepsilon j,\ k\varepsilon = \varepsilon k,\ i\varepsilon^* = \varepsilon^* i,\ j\varepsilon^* = \varepsilon^* j,\ k\varepsilon^* = \varepsilon^* k.$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayılarının 1,-1 ve 0 olmasına göre hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar

1. $\alpha = \beta = 1$ ise hiper dual kuaterniyon,
2. $\alpha = 1,\ \beta = -1$ ise hiper dual split kuaterniyon,
3. $\alpha = 1,\ \beta = 0$ ise hiper dual yarı kuaterniyon,
4. $\alpha = -1,\ \beta = 0$ ise hiper dual split yarı kuaterniyon,
5. $\alpha = 0,\ \beta = 0$ ise hiper dual $\frac{1}{4}$-kuaterniyon

olarak adlandırılır.

Tanım 4.10. Hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonların kümesi $\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} = \left\{ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k : \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{HD} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.11. Bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonunun $S_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a}$ *skaler kısmı*, $V_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ *vektörel kısmı* olarak tanımlanır. Böylece her hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon

$$\boldsymbol{q} = S_{\boldsymbol{q}} + V_{\boldsymbol{q}}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 4.12. Skaler kısmı $S_{\boldsymbol{q}} = 0$ olan, yani sadece vektörel kısımdan oluşan bir hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyona *pure hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon* denir ve pure hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonların kümesi $\left(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}\right)^0$ ile gösterilir ve

$$\left(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}\right)^0 = \left\{ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} : \boldsymbol{a} = 0 \right\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.13. $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının eşit olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$ ve $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2$ olmasıdır.

Tanım 4.14. $\boldsymbol{q}_1 = S_{\boldsymbol{q}_1} + V_{\boldsymbol{q}_1} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{q}_2 = S_{\boldsymbol{q}_2} + V_{\boldsymbol{q}_2} = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} + : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \\ (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) &\to \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 \end{aligned}$$

ile tanımlı olup

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = (S_{\boldsymbol{q}_1} + S_{\boldsymbol{q}_2}) + (V_{\boldsymbol{q}_1} + V_{\boldsymbol{q}_2})$$

ya da

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)i + (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)j + (\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2)k$$

şeklindedir.

Sonuç 4.3. $(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}, +)$ *ikilisi bir Abel gruptur.*

- *Toplama işleminin kapalılık özelliğine sahip olduğu kolaylıkla görülür.*
- *Her* $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *için*

$$(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2) + \boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{q}_1 + (\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3)$$

  olduğundan $\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *kümesi toplama işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir.*
- *Her* $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *için*

$$\boldsymbol{q} + 0 = 0 + \boldsymbol{q}$$

  olacak şekilde $0 = 0 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *etkisiz elemanı vardır.*
- *Her* $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *için*

$$\boldsymbol{q} + (-\boldsymbol{q}) = (-\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q} = 0$$

  olacak şekilde $-\boldsymbol{q}$ *ters elemanı vardır ve* $-\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}i - \boldsymbol{y}j - \boldsymbol{z}k$ *şeklindedir.*
- *Her* $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *için*

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_1$$

  olup $\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *kümesi toplama işlemine göre değişme özelliğine sahiptir.*

Böylece $(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}, +)$ *ikilisi bir Abel gruptur.*

Tanım 4.15. Bir $\boldsymbol{q} = S_{\boldsymbol{q}} + V_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonun $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \\ (\lambda, \boldsymbol{q}) &\to \lambda \odot \boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{q} \end{aligned}$$

ile tanımlı olup

$$\lambda \boldsymbol{q} = \lambda S_{\boldsymbol{q}} + \lambda V_{\boldsymbol{q}}$$

veya

$$\lambda \boldsymbol{q} = (\lambda \boldsymbol{a}) + (\lambda \boldsymbol{x})i + (\lambda \boldsymbol{y})j + (\lambda \boldsymbol{z})k$$

biçimindedir.

Tanım 4.16. $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} . : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \\ (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) &\to \boldsymbol{q}_1 . \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_2 \end{aligned}$$

ile tanımlı olup

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2) + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_2 + \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_2 - \beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{y}_2)i$$
$$+ (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_2)j + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{a}_2)k$$

şeklindedir.

Sonuç 4.4. *$(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}, +, .)$ üçlüsü bir halkadır.*

Her $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ için

- $(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_1)\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)$,
- $(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_1)\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$,
- $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}_2$,
- $1\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}1 = \boldsymbol{q}$ *olup* $1 = 1 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *birim elemandır.*

Yukarıdaki özellikler yardımıyla $(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}, +, .)$ üçlüsünün birimli halka olduğu görülür.

Tanım 4.17. Bir $\boldsymbol{q} = S_{\boldsymbol{q}} + V_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonunun eşleniği

$$\overline{(,)} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$$
$$\boldsymbol{q} \to \overline{\boldsymbol{q}}$$

ile tanımlıdır ve

$$\overline{\boldsymbol{q}} = S_{\boldsymbol{q}} - V_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}i - \boldsymbol{y}j - \boldsymbol{z}k$$

biçimindedir.

Sonuç 4.5. *Bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonu için skaler kısım ve vektörel kısım*

$$S_{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{q} + \overline{\boldsymbol{q}}}{2} \quad \textit{ve} \quad V_{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}}}{2}$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca

- $\boldsymbol{q} + \overline{\boldsymbol{q}} = 2\boldsymbol{a} \in \mathbb{HD}$,
- $\boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}} = 2\boldsymbol{x}i + 2\boldsymbol{y}j + 2\boldsymbol{z}k$,

- $\boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{a}^2 + \alpha\boldsymbol{x}^2 + \beta\boldsymbol{y}^2 + \alpha\beta\boldsymbol{z}^2$

olduğu görülür.

Sonuç 4.6. *$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_1$ ve $\boldsymbol{q}_2$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere yukarıda verilen eşlenik tanımı yardımıyla aşağıdaki özelliklerin sağlandığı kolaylıkla görülür.*

i. $\overline{(\overline{\boldsymbol{q}})} = \boldsymbol{q}$,

ii. $\overline{(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)} = \overline{\boldsymbol{q}_1} + \overline{\boldsymbol{q}_2}$,

iii. $\overline{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2} = \overline{\boldsymbol{q}_2}\,\overline{\boldsymbol{q}_1}$,

iv. $\overline{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{q}}$,

v. $\overline{\lambda\boldsymbol{q}} = \lambda\overline{\boldsymbol{q}}$.

Lemma 4.1. *$\boldsymbol{q}$ bir hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon olsun. $\boldsymbol{q} \in \mathbb{HD}$ olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{q} = \overline{\boldsymbol{q}}$ olmasıdır.*

Lemma 4.2. *$\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ olsun. $\boldsymbol{q}$ elemanının pure hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonun olması için gerek ve yeter koşul $\boldsymbol{q} = -\overline{\boldsymbol{q}}$ olmasıdır.*

Tanım 4.18. Bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonunun *hiper dual sayı eşleniği* $\boldsymbol{q}^{hd}$ ile gösterilir ve

$$\boldsymbol{q}^{hd} = \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{x}}i + \overline{\boldsymbol{y}}j + \overline{\boldsymbol{z}}k$$

ile tanımlanır.

Lemma 4.3. *$\boldsymbol{q}$ bir hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon olsun. Eğer $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{hd}$ ise $\boldsymbol{q}$ bir reel genelleştirilmiş kuaterniyondur.*

İspat. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ olsun.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{hd} &\Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k = \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{x}}i + \overline{\boldsymbol{y}}j + \overline{\boldsymbol{z}}k \\
&\Rightarrow (\boldsymbol{a} - \overline{\boldsymbol{a}}) + (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})i + (\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}})j + (\boldsymbol{z} - \overline{\boldsymbol{z}})k = 0 \\
&\Rightarrow \boldsymbol{a} - \overline{\boldsymbol{a}} = 0,\ \boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}} = 0,\ \boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}} = 0,\ \boldsymbol{z} - \overline{\boldsymbol{z}} = 0 \\
&\Rightarrow a_m = x_m = y_m = z_m = 0\ (m = 2, 3, 4) \\
&\Rightarrow \boldsymbol{a} = a_1 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x} = x_1 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{y} = y_1 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{z} = z_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \boldsymbol{q} = a_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k \\
&\Rightarrow \boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

■

Lemma 4.4. *$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon ve $r = 1, 2, 3, 4$ için $q_r = a_r + x_r i + y_r j + z_r k$ reel genelleştirilmiş kuaterniyon olsun. Eğer $\overline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}^{hd}$ ise*

$$\boldsymbol{q} = S_{q_1} + \varepsilon V_{q_2} + \varepsilon^* V_{q_3} + \varepsilon^* \varepsilon V_{q_4}$$

şeklindedir.

İspat. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}^{hd} &\Rightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}i - \boldsymbol{y}j - \boldsymbol{z}k = \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{x}}i + \overline{\boldsymbol{y}}j + \overline{\boldsymbol{z}}k \\
&\Rightarrow (\overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a}) + (\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x})i + (\overline{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{y})j + (\overline{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{z})k = 0 \\
&\Rightarrow \overline{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a} = 0,\ \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} = 0,\ \overline{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{y} = 0,\ \overline{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{z} = 0 \\
&\Rightarrow a_2 = a_3 = a_4 = 0,\ x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0 \\
&\Rightarrow \boldsymbol{a} = a_1,\ \boldsymbol{x} = \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^* \varepsilon x_4,\ \boldsymbol{y} = \varepsilon y_2 + \varepsilon^* y_3 + \varepsilon^* \varepsilon y_4, \\
&\boldsymbol{z} = \varepsilon z_2 + \varepsilon^* z_3 + \varepsilon^* \varepsilon z_4 \\
&\Rightarrow \boldsymbol{q} = a_1 + (\varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^* \varepsilon x_4)i + (\varepsilon y_2 + \varepsilon^* y_3 + \varepsilon^* \varepsilon y_4)j + (\varepsilon z_2 \\
&+ \varepsilon^* z_3 + \varepsilon^* \varepsilon z_4)k \\
&\Rightarrow \boldsymbol{q} = a_1 + \varepsilon(x_2 i + y_2 j + z_2 k) + \varepsilon^*(x_3 i + y_3 j + z_3 k) + \varepsilon^* \varepsilon(x_4 i \\
&+ y_4 j + z_4 k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $q_r = a_r + x_r i + y_r j + z_r k$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ reel genelleştirilmiş kuaterniyonu için $S_{q_1} = a_1$, $V_{q_2} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, $V_{q_3} = x_3 i + y_3 j + z_3 k$, $V_{q_4} = x_4 i + y_4 j + z_4 k$ olduğundan

$$\boldsymbol{q} = S_{q_1} + \varepsilon V_{q_2} + \varepsilon^* V_{q_3} + \varepsilon^* \varepsilon V_{q_4}$$

yazılır. ■

Tanım 4.19. Bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonunun *total eşleniği* $\boldsymbol{q}^*$ ile gösterilir ve

$$\boldsymbol{q}^* = \overline{(\boldsymbol{q}^{hd})} = (\overline{\boldsymbol{q}})^{hd} = \overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{x}}i - \overline{\boldsymbol{y}}j - \overline{\boldsymbol{z}}k$$

ile tanımlanır.

Lemma 4.5. *$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon ve $r = 1, 2, 3, 4$ için $q_r = a_r + x_r i + y_r j + z_r k$ reel genelleştirilmiş kuaterniyon olsun. Eğer $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^*$ ise*

$$\boldsymbol{q} = S_{q_1} + \varepsilon V_{q_2} + \varepsilon^* V_{q_3} + \varepsilon^* \varepsilon V_{q_4}$$

şeklindedir.

İspat. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon olsun.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^* &\Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k = \overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{x}}i - \overline{\boldsymbol{y}}j - \overline{\boldsymbol{z}}k \\
&\Rightarrow (\boldsymbol{a} - \overline{\boldsymbol{a}}) + (\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}})i + (\boldsymbol{y} + \overline{\boldsymbol{y}})j + (\boldsymbol{z} + \overline{\boldsymbol{z}})k = 0 \\
&\Rightarrow \boldsymbol{a} - \overline{\boldsymbol{a}} = 0,\ \boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}} = 0,\ \boldsymbol{y} + \overline{\boldsymbol{y}} = 0,\ \boldsymbol{z} + \overline{\boldsymbol{z}} = 0 \\
&\Rightarrow a_2 = a_3 = a_4 = 0,\ x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0 \\
&\Rightarrow \boldsymbol{a} = a_1,\ \boldsymbol{x} = \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^* \varepsilon x_4,\ \boldsymbol{y} = \varepsilon y_2 + \varepsilon^* y_3 + \varepsilon^* \varepsilon y_4,\ \boldsymbol{z} = \varepsilon z_2 \\
&+ \varepsilon^* z_3 + \varepsilon^* \varepsilon z_4 \\
&\Rightarrow \boldsymbol{q} = a_1 + (\varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^* \varepsilon x_4)i + (\varepsilon y_2 + \varepsilon^* y_3 + \varepsilon^* \varepsilon y_4)j + (\varepsilon z_2 + \\
&\varepsilon^* z_3 + \varepsilon^* \varepsilon z_4)k \\
&\Rightarrow \boldsymbol{q} = a_1 + \varepsilon(x_2 i + y_2 j + z_2 k) + \varepsilon^*(x_3 i + y_3 j + z_3 k) + \varepsilon^* \varepsilon(x_4 i + y_4 j \\
&+ z_4 k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $q_r = a_r + x_r i + y_r j + z_r k$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ reel genelleştirilmiş kuaterniyonu için $S_{q_1} = a_1$, $V_{q_2} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, $V_{q_3} = x_3 i + y_3 j + z_3 k$, $V_{q_4} = x_4 i + y_4 j + z_4 k$ olduğundan

$$\boldsymbol{q} = S_{q_1} + \varepsilon V_{q_2} + \varepsilon^* V_{q_3} + \varepsilon^* \varepsilon V_{q_4}$$

yazılır. ■

Tanım 4.20. Bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonun normu $\|\boldsymbol{q}\|$ ile gösterilir ve

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{|\boldsymbol{a}^2 + \alpha \boldsymbol{x}^2 + \beta \boldsymbol{y}^2 + \alpha\beta \boldsymbol{z}^2|}$$

ile tanımlıdır.

Hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonların normu yardımı ile

- $\alpha = \beta = 1$ ise hiper dual kuaterniyonun normu

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}$$

- $\alpha = 1,\ \beta = -1$ ise hiper dual split kuaterniyonun normu

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{|\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{z}^2|}$$

- $\alpha = 1,\ \beta = 0$ ise hiper dual yarı kuaterniyonun normu

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{x}^2}$$

- $\alpha = -1,\ \beta = 0$ ise hiper dual split yarı kuaterniyonun normu

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{|\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{x}^2|}$$

- $\alpha = 0,\ \beta = 0$ ise hiper dual $\frac{1}{4}$-kuaterniyonun normu

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.21. $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ olsun. $\|\boldsymbol{q}\| = 1$ ise $\boldsymbol{q}$ elemanına *birim hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon* denir.

Tanım 4.22. $\boldsymbol{q} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ olsun. $\|\boldsymbol{q}\| \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(,)^{-1} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \\ \boldsymbol{q} &\to \boldsymbol{q}^{-1} = \frac{\overline{\boldsymbol{q}}}{\|\boldsymbol{q}\|^2}\end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Lemma 4.6. *$\boldsymbol{q}_1$ ve $\boldsymbol{q}_2$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun. Her $\boldsymbol{q}_2 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ için $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_1$ ise $\boldsymbol{q}_1 \in \mathbb{HD}$ dir.*

4.4 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyon İçin Matris Temsilleri

$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ bir hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon olsun.

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \\ \boldsymbol{p} &\to \mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

lineer dönüşüm olup $\{1, i, j, k\}$ bazı ile bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}(1) &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k)1 \\ &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}(i) &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}i+\boldsymbol{y}j+\boldsymbol{z}k)i \\ &= -\alpha\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}i+\alpha\boldsymbol{z}j-\boldsymbol{y}k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}(j) &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}i+\boldsymbol{y}j+\boldsymbol{z}k)j \\ &= -\beta\boldsymbol{y}-\beta\boldsymbol{z}i+\boldsymbol{a}j+\boldsymbol{x}k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}(k) &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}i+\boldsymbol{y}j+\boldsymbol{z}k)k \\ &= -\alpha\beta\boldsymbol{z}+\beta\boldsymbol{y}i-\alpha\boldsymbol{x}j+\boldsymbol{a}k\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & -\alpha\boldsymbol{x} & -\beta\boldsymbol{y} & -\alpha\beta\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} & -\beta\boldsymbol{z} & \beta\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y} & \alpha\boldsymbol{z} & \boldsymbol{a} & -\alpha\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{z} & -\boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a}\end{pmatrix}$$

olarak elde edilir ve bu matrise *hiper dual matris temsili* denir. Burada $\boldsymbol{a},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ hiper dual sayılar olduğundan $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}$ matrisi

$$\begin{aligned}A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}=&\begin{pmatrix}a_1 & -\alpha x_1 & -\beta y_1 & -\alpha\beta z_1\\ x_1 & a_1 & -\beta z_1 & \beta y_1\\ y_1 & \alpha z_1 & a_1 & -\alpha x_1\\ z_1 & -y_1 & x_1 & a_1\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}a_2 & -\alpha x_2 & -\beta y_2 & -\alpha\beta z_2\\ x_2 & a_2 & -\beta z_2 & \beta y_2\\ y_2 & \alpha z_2 & a_2 & -\alpha x_2\\ z_2 & -y_2 & x_2 & a_2\end{pmatrix}\\ &+\varepsilon^*\begin{pmatrix}a_3 & -\alpha x_3 & -\beta y_3 & -\alpha\beta z_3\\ x_3 & a_3 & -\beta z_3 & \beta y_3\\ y_3 & \alpha z_3 & a_3 & -\alpha x_3\\ z_3 & -y_3 & x_3 & a_3\end{pmatrix}+\varepsilon^*\varepsilon\begin{pmatrix}a_4 & -\alpha x_4 & -\beta y_4 & -\alpha\beta z_4\\ x_4 & a_4 & -\beta z_4 & \beta y_4\\ y_4 & \alpha z_4 & a_4 & -\alpha x_4\\ z_4 & -y_4 & x_4 & a_4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bölüm 3.2'de bir $q=a+xi+yj+zk$ reel genelleştirilmiş kuaterniyonuna karşılık gelen matris temsili

$$A_{L_q}=\begin{pmatrix}a & -\alpha x & -\beta y & -\alpha\beta z\\ x & a & -\beta z & \beta y\\ y & \alpha z & a & -\alpha x\\ z & -y & x & a\end{pmatrix}$$

olarak verilmiştir. Böylece $q_1=a_1+x_1i+y_1j+z_1k$, $q_2=a_2+x_2i+y_2j+z_2k$, $q_3=a_3+x_3i+y_3j+z_3k$ ve $q_4=a_4+x_4i+y_4j+z_4k$ reel genelleştirilmiş kuaterniyonlarına karşılık gelen matris temsilleri sırasıyla $A_{L_{q_1}}, A_{L_{q_2}}, A_{L_{q_3}}$ ve $A_{L_{q_4}}$

olmak üzere $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}$ matrisi

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = A_{L_{q_1}} + \varepsilon A_{L_{q_2}} + \varepsilon^* A_{L_{q_3}} + \varepsilon^* \varepsilon A_{L_{q_4}}$$

olarak ifade edilir.

$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon olmak üzere $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}$ matrisinin determinantı

$$\det(A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}) = \left(\boldsymbol{a}^2 + \alpha \boldsymbol{x}^2 + \beta \boldsymbol{y}^2 + \alpha\beta \boldsymbol{z}^2\right)^2$$

olarak hesaplanır ve

$$\det(A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}) = \|\boldsymbol{q}\|^4$$

elde edilir.

Örnek 4.1. $\boldsymbol{q} = (1+\varepsilon) + (1+\varepsilon^*)i + (\varepsilon^*\varepsilon)k$ olsun. $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}$ matrisini ve bu matrisin determinantını bulalım.

$\boldsymbol{q} = (1+\varepsilon) + (1+\varepsilon^*)i + (\varepsilon^*\varepsilon)k$ için $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}$ matrisi

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\alpha(1+\varepsilon^*) & 0 & -\alpha\beta(\varepsilon^*\varepsilon) \\ 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon & -\beta(\varepsilon^*\varepsilon) & 0 \\ 0 & \alpha(\varepsilon^*\varepsilon) & 1+\varepsilon & -\alpha(1+\varepsilon^*) \\ \varepsilon^*\varepsilon & 0 & 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin determinantı

$$\det(A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}) = \left(1 + \alpha + 2\varepsilon + 2\alpha\varepsilon^*\right)^2$$

olarak bulunur.

- $\alpha = \beta = 1$ için $\boldsymbol{q}$ hiper dual kuaterniyon olarak adlandırılır ve

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -(1+\varepsilon^*) & 0 & -\varepsilon^*\varepsilon \\ 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon & -\varepsilon^*\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^*\varepsilon & 1+\varepsilon & -(1+\varepsilon^*) \\ \varepsilon^*\varepsilon & 0 & 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

ve

$$\det(A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}) = \left(2 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^*\right)^2$$

olarak elde edilir.

- $\alpha = 1,\ \beta = -1$ için $\boldsymbol{q}$ hiper dual split kuaterniyon olarak adlandırılır ve

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -(1+\varepsilon^*) & 0 & \varepsilon^*\varepsilon \\ 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon & \varepsilon^*\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^*\varepsilon & 1+\varepsilon & -(1+\varepsilon^*) \\ \varepsilon^*\varepsilon & 0 & 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

ve

$$\det(A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}) = \left(2 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^*\right)^2$$

olarak elde edilir.

- $\alpha = 1,\ \beta = 0$ için $\boldsymbol{q}$ hiper dual yarı kuaterniyon olarak adlandırılır ve

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -(1+\varepsilon^*) & 0 & 0 \\ 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^*\varepsilon & 1+\varepsilon & -(1+\varepsilon^*) \\ \varepsilon^*\varepsilon & 0 & 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

ve

$$\det(A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}) = \left(2 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^*\right)^2$$

olarak elde edilir.

- $\alpha = -1,\ \beta = 0$ için $\boldsymbol{q}$ hiper dual split yarı kuaterniyon olarak adlandırılır ve

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1+\varepsilon^* & 0 & 0 \\ 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^*\varepsilon & 1+\varepsilon & 1+\varepsilon^* \\ \varepsilon^*\varepsilon & 0 & 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

ve

$$\det(A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}) = \left(2\varepsilon - 2\varepsilon^*\right)^2$$

olarak elde edilir.

- $\alpha = 0,\ \beta = 0$ için $\boldsymbol{q}$ hiper dual $\frac{1}{4}$- kuaterniyon olarak adlandırılır ve

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon & 0 \\ \varepsilon^*\varepsilon & 0 & 1+\varepsilon^* & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

ve

$$\det(A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}) = \left(1 + 2\varepsilon^*\right)^2$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1. *$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \Leftrightarrow A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}}$,

ii. $A_{\mathfrak{L}_{(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})}} = A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} + A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}}$,

iii. $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{qp}}} = A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}}$,

iv. $A_{\mathfrak{L}_1} = I_4$.

İspat. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

i. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$ ise $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$ ve $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2$ dir. Bu eşitlikler yardımı ile

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 & -\beta\boldsymbol{z}_1 & \beta\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 & \alpha\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 & -\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 & -\beta\boldsymbol{z}_2 & \beta\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 & \alpha\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 & -\boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}}$ elde edilir.

ii.

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{L}_{(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})}} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & -\alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) & -\beta(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) & -\alpha\beta(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & -\beta(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) & \beta(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) \\ \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 & \alpha(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & -\alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \\ \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 & -(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) & \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 & -\beta\boldsymbol{z}_1 & \beta\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 & \alpha\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 & -\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 & -\beta\boldsymbol{z}_2 & \beta\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 & \alpha\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 & -\boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} + A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}} \end{aligned}$$

iii. $\boldsymbol{q}$ ve $\boldsymbol{p}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının çarpımı

$$\boldsymbol{qp} = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2) + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_2 + \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_2 - \beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{y}_2)i$$
$$+ (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_2)j + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{a}_2)k$$

olup hiper dual matris temsili

$$A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{qp}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. Burada

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2, \\
a_{12} &= -\alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_2 + \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{y}_2, \\
a_{13} &= -\beta\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_2 + \alpha\beta\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_2 - \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{a}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_2, \\
a_{14} &= -\alpha\beta\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{z}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + \alpha\beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{a}_2, \\
a_{21} &= \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_2 - \beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{y}_2 + \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_2, \\
a_{22} &= -\alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2 - \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2, \\
a_{23} &= -\beta\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 - \beta\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{z}_2 - \beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{a}_2 + \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2, \\
a_{24} &= -\alpha\beta\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_2 + \beta\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_2 + \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_2 + \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{a}_2, \\
a_{31} &= \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_2, \\
a_{32} &= -\alpha\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 + \alpha\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{z}_2 + \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2, \\
a_{33} &= -\beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, \\
a_{34} &= -\alpha\beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_2 + \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_2, \\
a_{41} &= \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{z}_2, \\
a_{42} &= -\alpha\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_2, \\
a_{43} &= -\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{y}_2 + \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_2, \\
a_{44} &= -\alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2 - \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece

$$
\begin{aligned}
A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{qp}}} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 & -\beta\boldsymbol{z}_1 & \beta\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 & \alpha\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 & -\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 & -\beta\boldsymbol{z}_2 & \beta\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 & \alpha\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 & -\boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \\
&= A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}}
\end{aligned}
$$

olup $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{qp}}} = A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}}$ elde edilir.

iv. $1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ için

$$
A_{\mathfrak{L}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4
$$

olup $A_{\mathfrak{L}_1} = I_4$ dir.

■

Örnek 4.2. $\boldsymbol{p} = (1+\varepsilon) + (\varepsilon^*)i$ ve $\boldsymbol{q} = (2\varepsilon) + (\varepsilon^*)j$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon olsun. $\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{q}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının matris temsilleri sırasıyla

$$
A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\alpha\varepsilon^* & 0 & 0 \\ \varepsilon^* & 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon & -\alpha\varepsilon^* \\ 0 & 0 & \varepsilon^* & 1+\varepsilon \end{pmatrix}
$$

ve

$$
A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon & 0 & -\beta\varepsilon^* & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & 0 & \beta\varepsilon^* \\ \varepsilon^* & 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^* & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}
$$

şeklindedir.

Ayrıca $\boldsymbol{p}$ ve $\boldsymbol{q}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının çarpımı

$$\boldsymbol{pq} = (2\varepsilon) + (2\varepsilon^*\varepsilon)i + (\varepsilon^* + \varepsilon^*\varepsilon)j$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{p}}} A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}} &= \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\alpha\varepsilon^* & 0 & 0 \\ \varepsilon^* & 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon & -\alpha\varepsilon^* \\ 0 & 0 & \varepsilon^* & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\varepsilon & 0 & -\beta\varepsilon^* & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & 0 & \beta\varepsilon^* \\ \varepsilon^* & 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^* & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\varepsilon & -\alpha(2\varepsilon^*\varepsilon) & -\beta(\varepsilon^* + \varepsilon^*\varepsilon) & 0 \\ 2\varepsilon^*\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & \beta(\varepsilon^* + \varepsilon^*\varepsilon) \\ \varepsilon^* + \varepsilon^*\varepsilon & 0 & 2\varepsilon & -\alpha(2\varepsilon^*\varepsilon) \\ 0 & -(\varepsilon^* + \varepsilon^*\varepsilon) & 2\varepsilon^*\varepsilon & 2\varepsilon \end{pmatrix} \\ &= A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{pq}}} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Her $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \\ \boldsymbol{p} &\to \mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{pq} \end{aligned}$$

lineer dönüşümünün $\{1, i, j, k\}$ bazına karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}(1) &= 1(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k) \\ &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}(i) &= i(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k) \\ &= -\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}i - \alpha\boldsymbol{z}j + \boldsymbol{y}k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}(j) &= j(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k) \\ &= -\beta\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z}i + \boldsymbol{a}j - \boldsymbol{x}k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}(k) &= k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k) \\ &= -\alpha\beta\boldsymbol{z} - \beta\boldsymbol{y}i + \alpha\boldsymbol{x}j + \boldsymbol{a}k \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & -\alpha\boldsymbol{x} & -\beta\boldsymbol{y} & -\alpha\beta\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} & \beta\boldsymbol{z} & -\beta\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} & -\alpha\boldsymbol{z} & \boldsymbol{a} & \alpha\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} & -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ hiper dual sayılar olduğundan $A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}$ matrisi

$$A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} a_1 & -\alpha x_1 & -\beta y_1 & -\alpha\beta z_1 \\ x_1 & a_1 & \beta z_1 & -\beta y_1 \\ y_1 & -\alpha z_1 & a_1 & \alpha x_1 \\ z_1 & y_1 & -x_1 & a_1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} a_2 & -\alpha x_2 & -\beta y_2 & -\alpha\beta z_2 \\ x_2 & a_2 & \beta z_2 & -\beta y_2 \\ y_2 & -\alpha z_2 & a_2 & \alpha x_2 \\ z_2 & y_2 & -x_2 & a_2 \end{pmatrix}$$
$$+ \varepsilon^* \begin{pmatrix} a_3 & -\alpha x_3 & -\beta y_3 & -\alpha\beta z_3 \\ x_3 & a_3 & \beta z_3 & -\beta y_3 \\ y_3 & -\alpha z_3 & a_3 & \alpha x_3 \\ z_3 & y_3 & -x_3 & a_3 \end{pmatrix} + \varepsilon^*\varepsilon \begin{pmatrix} a_4 & -\alpha x_4 & -\beta y_4 & -\alpha\beta z_4 \\ x_4 & a_4 & \beta z_4 & -\beta y_4 \\ y_4 & -\alpha z_4 & a_4 & \alpha x_4 \\ z_4 & y_4 & -x_4 & a_4 \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Bölüm 3.2'de bir $q = a + xi + yj + xk$ reel genelleştirilmiş kuaterniyonuna karşılık gelen matris temsili

$$A_{R_q} = \begin{pmatrix} a & -\alpha x & -\beta y & -\alpha\beta z \\ x & a & \beta z & -\beta y \\ y & -\alpha z & a & \alpha x \\ z & y & -x & a \end{pmatrix}$$

olarak verilmiştir. Böylece $q_1 = a_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $q_2 = a_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$, $q_3 = a_3 + x_3 i + y_3 j + z_3 k$ ve $q_4 = a_4 + x_4 i + y_4 j + z_4 k$ reel genelleştirilmiş kuaterniyonlarına karşılık gelen matris temsilleri sırasıyla $A_{R_{q_1}}, A_{R_{q_2}}, A_{R_{q_3}}, A_{R_{q_4}}$ olmak üzere $A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}$ matrisi

$$A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}} = A_{R_{q_1}} + \varepsilon A_{R_{q_2}} + \varepsilon^* A_{R_{q_3}} + \varepsilon^*\varepsilon A_{R_{q_4}}$$

şeklinde ifade edilir.

$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon olmak üzere $A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}$ matrisinin determinantı

$$\det(A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}) = \left(\boldsymbol{a}^2 + \alpha\boldsymbol{x}^2 + \beta\boldsymbol{y}^2 + \alpha\beta\boldsymbol{z}^2\right)^2$$

olarak hesaplanır ve

$$\det(A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}) = \|\boldsymbol{q}\|^4$$

elde edilir.

Teorem 4.2. *$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \Leftrightarrow A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}} = A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{p}}}$,

ii. $A_{\mathfrak{R}_{(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})}} = A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}} + A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{p}}}$,

iii. $A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{qp}}} = A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{p}}} A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}$,

iv. $A_{\mathfrak{R}_1} = I_4$.

İspat. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

i. $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$ ise $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$ ve $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2$ olup bu eşitliklerden

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \beta\boldsymbol{z}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 & -\alpha\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \alpha\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{y}_1 & -\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \beta\boldsymbol{z}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 & -\alpha\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \alpha\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{y}_2 & -\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{p}}} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}} = A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{p}}}$ elde edilir.

ii.

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{R}_{(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p})}} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & -\alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) & -\beta(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) & -\alpha\beta(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & \beta(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) & -\beta(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) \\ \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 & -\alpha(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & \alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \\ \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 & -\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \beta\boldsymbol{z}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 & -\alpha\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \alpha\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{y}_1 & -\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \beta\boldsymbol{z}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 & -\alpha\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \alpha\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{y}_2 & -\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \\ &= A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}} + A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{p}}} \end{aligned}$$

iii. $\boldsymbol{q}$ ve $\boldsymbol{p}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlarının çarpımı

$$\boldsymbol{qp} = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2) + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_2 + \beta\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_2 - \beta\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{y}_2)i$$
$$+ (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{x}_2)j + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{a}_2)k$$

olup hiper dual matris temsili

$$A_{\Re_{\boldsymbol{qp}}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. Burada

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 - \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1 - \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{y}_1 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{z}_1, \\
b_{12} &= -\alpha\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_1 - \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_1 + \alpha\beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{z}_1 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{y}_1, \\
b_{13} &= -\beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1 - \alpha\beta\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{z}_1 - \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{a}_1 + \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{x}_1, \\
b_{14} &= -\alpha\beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{z}_1 + \alpha\beta\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 - \alpha\beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{a}_1, \\
b_{21} &= \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{y}_1 - \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{z}_1, \\
b_{22} &= -\alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{z}_1 - \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{y}_1, \\
b_{23} &= -\beta\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{z}_1 + \beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1, \\
b_{24} &= -\alpha\beta\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{z}_1 - \beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1 + \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{x}_1 - \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{a}_1, \\
b_{31} &= \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{a}_1 - \alpha\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1 + \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{z}_1, \\
b_{32} &= -\alpha\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1 - \alpha\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{a}_1 - \alpha\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{z}_1 + \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1, \\
b_{33} &= -\beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{y}_1 - \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 - \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1, \\
b_{34} &= -\alpha\beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{z}_1 + \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{y}_1 + \alpha\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_1 + \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_1, \\
b_{41} &= \boldsymbol{z}_2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{z}_1, \\
b_{42} &= -\alpha\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{a}_1 + \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}_1, \\
b_{43} &= -\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{y}_1 + \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x}_1, \\
b_{44} &= -\alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{z}_1 - \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{y}_1 - \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece

$$A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{qp}}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 & -\alpha\boldsymbol{x}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \beta\boldsymbol{z}_2 & -\beta\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_2 & -\alpha\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \alpha\boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{y}_2 & -\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & -\alpha\boldsymbol{x}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 & -\alpha\beta\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \beta\boldsymbol{z}_1 & -\beta\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 & -\alpha\boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \alpha\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{y}_1 & -\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{pmatrix}$$

$$= A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{p}}} A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}$$

olup $A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{qp}}} = A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{p}}} A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}$ elde edilir.

iv. $1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ için

$$A_{\mathfrak{R}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

olup $A_{\mathfrak{R}_1} = I_4$ dir.

■

Bir $\boldsymbol{q}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon yukarıda sunulan $A_{\mathfrak{L}_{\boldsymbol{q}}}$ ve $A_{\mathfrak{R}_{\boldsymbol{q}}}$ hiper dual matris temsillerinin yanı sıra 4×4 tipinde reel genelleştirilmiş kuaterniyon matris temsiline de sahiptir. Öncelikle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ hiper dual sayılar olmak üzere bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= (a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^* a_3 + \varepsilon^*\varepsilon a_4) + (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^* x_3 + \varepsilon^*\varepsilon x_4)i \\ &\quad + (y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^* y_3 + \varepsilon^*\varepsilon y_4)j + (z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^* z_3 + \varepsilon^*\varepsilon z_4)k \end{aligned}$$

şeklinde yazılsın. Böylece $r = 1, 2, 3, 4$ için $q_r = a_r + x_r i + y_r j + z_r k$ reel katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar olmak üzere $\boldsymbol{q}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonu

$$\boldsymbol{q} = q_1 + \varepsilon q_2 + \varepsilon^* q_3 + \varepsilon\varepsilon^* q_4$$

olarak ifade edilir. Burada her $\boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\boldsymbol{q}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \\ \boldsymbol{p} &\to \mathbf{L}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{qp} \end{aligned}$$

lineer dönüşümü verilsin. Böylelikle $\mathbf{L}_{\boldsymbol{q}}$ lineer dönüşümünün $\{1, \varepsilon, \varepsilon^*, \varepsilon^*\varepsilon\}$ bazına karşılık gelen matris

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\boldsymbol{q}}(1) &= q_1 + \varepsilon q_2 + \varepsilon^* q_3 + \varepsilon\varepsilon^* q_4, \\
\mathbf{L}_{\boldsymbol{q}}(\varepsilon) &= 0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^* 0 + \varepsilon\varepsilon^* q_3, \\
\mathbf{L}_{\boldsymbol{q}}(\varepsilon^*) &= 0 + \varepsilon 0 + \varepsilon^* q_1 + \varepsilon\varepsilon^* q_2, \\
\mathbf{L}_{\boldsymbol{q}}(\varepsilon\varepsilon^*) &= 0 + \varepsilon 0 + \varepsilon^* 0 + \varepsilon\varepsilon^* q_1
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$A_{\mathbf{L}_{\boldsymbol{q}}} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & q_1 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & q_1 & 0 \\ q_4 & q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

4.5 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyon Matrisleri

Tanım 4.23. Elemanları hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlardan oluşan $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi $M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ ile gösterilir. Eğer $m = n$ ise $M_n(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ ile gösterilir.

$$M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}) = \left\{ \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{q}_{st}] : \boldsymbol{q}_{st} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD},\ i^2 = -\alpha,\ j^2 = -\beta,\ k^2 = -\alpha\beta \right\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.24. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{q}_{st}]$ ve $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{p}_{st}]$ $m \times n$ tipinde hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matrisleri olsun. Eğer her $s = 1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, n$ için $\boldsymbol{q}_{st} = \boldsymbol{p}_{st}$ ise $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matrisleri *eşittir* denir ve $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ yazılır.

Tanım 4.25. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{q}_{st}], \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{p}_{st}] \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matrislerinin toplamı

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{q}_{st} + \boldsymbol{p}_{st}]$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 4.7. $\left(M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}), +\right)$ *ikilisi bir Abel gruptur.*

Tanım 4.26. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{q}_{st}] \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ olsun. $\boldsymbol{A}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matrisinin $\boldsymbol{\lambda}$ skaleri ile soldan ve sağdan çarpımı

sırasıyla

$$\cdot : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \times M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}) \to M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$$
$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{q}_{st}]$$

ve

$$\cdot : M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}) \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} \to M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$$
$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\lambda}) \to \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{q}_{st}\boldsymbol{\lambda}]$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 4.8. *Her $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ için skalerle soldan çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.*

- $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{B}$,
- $(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{A}$,
- $(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{A})$,
- $(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}, +, .)$ *halkasının ikinci işleme göre birimi* $1 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ *olmak üzere* $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ *biçimindedir.*

Böylece $M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ skalerle sol çarpma işlemine göre $\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ üzerinde bir modüldür. Benzer şekilde $M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ skalerle sağ çarpma işlemine göre $\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$ üzerinde bir modüldür.

Tanım 4.27. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{q}_{st}] \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ ve $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{p}_{tz}] \in M_{n\times r}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matrislerinin çarpımı

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{c}_{sz}] \in M_{m\times r}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$$

ile tanımlanır. Burada $1 \leq s \leq m$ için

$$\boldsymbol{c}_{sz} = \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{q}_{st}\boldsymbol{p}_{tz}$$

ile tanımlıdır.

Sonuç 4.9. *Her $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ için*

- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$,

- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$,
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

özellikleri sağlandığından ve $I_n \in M_n(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$ *olduğundan* $M_n(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$ *birimli halkadır.*

Tanım 4.28. Bir $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{q}_{st}] \in M_{m\times n}(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$ matrisinin eşleniği $\overline{\boldsymbol{A}}$ ile gösterilir ve

$$\overline{\boldsymbol{A}} = [\overline{\boldsymbol{q}_{st}}] \in M_{m\times n}(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.29. Bir $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{q}_{st}] \in M_{m\times n}(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$ matrisinin transpozu $\boldsymbol{A}^t$ ile gösterilir ve

$$\boldsymbol{A}^t = [\boldsymbol{q}_{ts}] \in M_{n\times m}(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.30. Bir $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{q}_{st}] \in M_{m\times n}(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$ matrisinin eşlenik transpozu $\boldsymbol{A}^*$ ile gösterilir ve

$$\boldsymbol{A}^* = \overline{(\boldsymbol{A}^t)} = [\overline{\boldsymbol{q}_{ts}}] \in M_{n\times m}(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.31. Eğer $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}^{HD}_{\alpha\beta})$ için

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = I_n$$

ise $\boldsymbol{B}$ matrisine $\boldsymbol{A}$ matrisinin tersi denir ve $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ ile gösterilir.

$\boldsymbol{A}$ matrisi $n \times n$ tipinde hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyon matris olsun. Eğer

i. $\boldsymbol{A}^t = A$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisine simetrik matris,

ii. $\boldsymbol{A}^t = -A$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisine ters simetrik matris,

iii. $\boldsymbol{A}^2 = A$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisine idempotent matris,

iv. $\boldsymbol{A}^* = A$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisine Hermityan matris,

v. $\boldsymbol{A}^* = -A$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisine ters Hermityan matris,

vi. $\boldsymbol{A}$ matrisi tersinir ve $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1}$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisine üniter matris,

vii. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ ise $\boldsymbol{A}$ matrisine normal matris denir.

4.6 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar İçin Benzerlik

Tanım 4.32. $\boldsymbol{p}_1$ ve $\boldsymbol{p}_2$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun. Eğer sıfırdan farklı $\boldsymbol{r}$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonu için

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}$$

ise $\boldsymbol{p}_1$ ve $\boldsymbol{p}_2$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonları *benzerdir* denir ve $\boldsymbol{p}_1 \sim \boldsymbol{p}_2$ ile gösterilir.

Teorem 4.3. *$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun. Eğer $\boldsymbol{p}_1 \sim \boldsymbol{p}_2$ ise*

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 & \alpha(-\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) & \beta(-\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z}_2) \\ \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 & \beta(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) & \beta(-\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2) \\ \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 & \alpha(-\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2) & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 & \alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \\ \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 & -\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = 0$$

dır.

İspat. $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun. Eğer $\boldsymbol{p}_1 \sim \boldsymbol{p}_2$ ise $\boldsymbol{r} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD} - \{0\}$ olacak şekilde $\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}$ eşitliği geçerlidir. Buradan $\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r} = 0$ yazılabilir. O halde $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}\boldsymbol{p}_1 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k)(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k) \\ &= (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_1 - \alpha\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1 - \beta\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}_1 - \alpha\beta\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}_1) + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}_1 - \beta\boldsymbol{z}\boldsymbol{y}_1)i \\ &+ (\boldsymbol{a}\boldsymbol{y}_1 - \alpha\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{y}\boldsymbol{a}_1 + \alpha\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}_1)j + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{z}\boldsymbol{a}_1)k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k)(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k) \\ &= (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{y} - \alpha\beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{z} - \beta\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{y})i \\ &+ (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y} - \alpha\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{z}_2\boldsymbol{x})j + (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}_2\boldsymbol{a})k \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a} + \alpha(-\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x} + \beta(-\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)\boldsymbol{y} + \alpha\beta(-\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2)\boldsymbol{z} = 0, \\ (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{x} + \beta(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2)\boldsymbol{y} + \beta(-\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)\boldsymbol{z} = 0, \\ (\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)\boldsymbol{a} + \alpha(-\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2)\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{y} + \alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{z} = 0, \\ (\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{z} = 0 \end{aligned}$$

elde edilip

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \alpha(-\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) & \beta(-\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2) \\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \beta(\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2) & \beta(-\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2) \\ \boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2 & \alpha(-\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2) & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) \\ \boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2 & -\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matris eşitliği yazılabilir. Bu sistemin aşikar olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \alpha(-\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) & \beta(-\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2) \\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \beta(\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2) & \beta(-\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2) \\ \boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2 & \alpha(-\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2) & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) \\ \boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2 & -\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = 0$$

olmalıdır. ■

Sonuç 4.10. *$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun. Eğer $\boldsymbol{p}_1 \sim \boldsymbol{p}_2$ ise*

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)^2\big[(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)^2 + 2\alpha(\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2) + 2\beta(\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2) + 2\alpha\beta(\boldsymbol{z}_1^2+\boldsymbol{z}_2^2)\big] \\ +[\alpha(\boldsymbol{x}_2^2-\boldsymbol{x}_1^2) + \beta(\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_1^2) + \alpha\beta(\boldsymbol{z}_2^2-\boldsymbol{z}_1^2)]^2 = 0\end{aligned}$$

dır.

İspat. $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}_1 i + \boldsymbol{y}_1 j + \boldsymbol{z}_1 k$ ve $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{x}_2 i + \boldsymbol{y}_2 j + \boldsymbol{z}_2 k$ hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun. Eğer $\boldsymbol{p}_1 \sim \boldsymbol{p}_2$ ise Teorem 4.3 gereğince

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \alpha(-\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) & \beta(-\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2) \\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \beta(\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2) & \beta(-\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2) \\ \boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2 & \alpha(-\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2) & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 & \alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) \\ \boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2 & -\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = 0$$

olduğundan bu determinant hesaplanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)^2\big[(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)^2 + 2\alpha(\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2) + 2\beta(\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2) + 2\alpha\beta(\boldsymbol{z}_1^2+\boldsymbol{z}_2^2)\big] \\ +[\alpha(\boldsymbol{x}_2^2-\boldsymbol{x}_1^2) + \beta(\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_1^2) + \alpha\beta(\boldsymbol{z}_2^2-\boldsymbol{z}_1^2)]^2 = 0\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 4.33. *$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ olacak şekilde $\boldsymbol{P} \in M_n(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD})$ varsa $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ benzerdir* denir ve $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ ile gösterilir.

4.7 Hiper Dual Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar İçin i-Benzerlik

Bu bölümde hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar için i-benzerlik kavramı araştırılacaktır. Hiper dual $\frac{1}{4}$-kuaterniyonlar için $\alpha = \beta = 0$ olduğundan i-benzerlik yoktur. Bundan dolayı genelleştirme hiper dual kuaterniyon, hiper dual split kuaterniyon, hiper dual yarı kuaterniyon, hiper dual split yarı kuaterniyondan oluşacaktır ve $\mathbb{H}_\alpha^{HD}$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.34. Bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ için *i-eşlenik*

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{\alpha}(-i\boldsymbol{q}i) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i - \boldsymbol{y}j - \boldsymbol{z}k$$

olarak tanımlanır. Her $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ için i-eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\widetilde{(\tilde{\boldsymbol{q}})} = \boldsymbol{q}$,

ii. $\widetilde{(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p})} = \tilde{\boldsymbol{q}} + \tilde{\boldsymbol{p}}$,

iii. $\widetilde{\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}} = \tilde{\boldsymbol{q}}\tilde{\boldsymbol{p}}$,

iv. $\overline{(\tilde{\boldsymbol{q}})} = \widetilde{(\overline{\boldsymbol{q}})}$,

v. $(\tilde{\boldsymbol{p}})^{-1} = \widetilde{(\boldsymbol{p}^{-1})}$.

Bu özellikler i-eşlenik tanımı kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 4.35. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun. Eğer $\tilde{\boldsymbol{p}}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ eşitliğini sağlayan $0 \neq \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ elemanı varsa $\boldsymbol{a}$ ile $\boldsymbol{b}$ elemanları *i-benzerdir* denir ve $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{b}$ ile gösterilir.

Teorem 4.4. *Her $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ için aşağıdakiler sağlanır:*

i. (Yansıma) Her $\boldsymbol{a} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ için $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{a}$ dir.

ii. (Simetri) Eğer $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise $\boldsymbol{b} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{a}$ dir.

iii. (Geçişme) Eğer $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{b} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{c}$ ise $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{c}$ dir.

İspat. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun.

i. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ için $\tilde{1}^{-1}\boldsymbol{a}1 = \boldsymbol{a}$ olup $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{a}$ olduğu görülür.

ii. $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise $\tilde{\boldsymbol{p}}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ olup

$$\tilde{\boldsymbol{p}}\tilde{\boldsymbol{p}}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b}$$

yazılabilir. Buradan

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b}$$

elde edilir. Ayrıca $\boldsymbol{p} \neq 0$ olduğundan

$$\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{p}^{-1}$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{b} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{a}$ olduğu görülür.

iii. $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{b} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{c}$ ise $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \neq 0$ olmak üzere

$$\tilde{\boldsymbol{p}_1}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{b} \tag{4.1}$$

ve

$$\tilde{\boldsymbol{p}_2}^{-1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{c} \tag{4.2}$$

yazılabilir. Burada (4.1) eşitliği (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{p}_2}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{p}_1}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_2 \tag{4.3}$$

elde edilir. Ayrıca $\boldsymbol{p}_1$ ve $\boldsymbol{p}_2$ için

$$\widetilde{(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)} = \tilde{\boldsymbol{p}_1}\tilde{\boldsymbol{p}_2} \quad \text{ve} \quad (\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)^{-1} = \boldsymbol{p}_2^{-1}\boldsymbol{p}_1^{-1}$$

olduğundan (4.3) eşitliği

$$\boldsymbol{c} = \widetilde{(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)^{-1}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)$$

olarak yazılır. Buradan $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{c}$ elde edilir.

Böylece i-benzerlik $\mathbb{H}_\alpha^{HD}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. ■

Sonuç 4.11. *$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 i + \boldsymbol{a}_2 j + \boldsymbol{a}_3 k, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 i + \boldsymbol{b}_2 j + \boldsymbol{b}_3 k \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise*

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) & \beta(-\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} = 0$$

dır.

İspat. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 i + \boldsymbol{a}_2 j + \boldsymbol{a}_3 k, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 i + \boldsymbol{b}_2 j + \boldsymbol{b}_3 k \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{a} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise

$$\tilde{\boldsymbol{p}}^{-1} \boldsymbol{a} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \tag{4.4}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ vardır. Burada (4.4) eşitliği soldan $\tilde{\boldsymbol{p}}$ ile çarpılırsa

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b}$$

elde edilir. Ayrıca $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 i + \boldsymbol{p}_2 j + \boldsymbol{p}_3 k \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ için $\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 i - \boldsymbol{p}_2 j - \boldsymbol{p}_3 k$ olup

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = {} & (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_0 - \alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_1 - \beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_3) + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_0 + \beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_3 - \beta\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_2)i \\ & + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_2 - \alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_0 + \alpha\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_1)j + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_0)k\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b} = {} & (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_0 - \alpha\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_1 + \beta\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_2 + \alpha\beta\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_3) + (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_0 - \beta\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_3 + \beta\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_2)i \\ & + (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_2 - \alpha\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_0 - \alpha\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_1)j + (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_0)k\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} - \tilde{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b} = 0$ için

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0)\boldsymbol{p}_0 + \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{p}_1 + \beta(-\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{p}_2 + \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{p}_3 &= 0 \\ (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{p}_0 + (\boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0)\boldsymbol{p}_1 + \beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{p}_2 + \beta(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{p}_3 &= 0 \\ (\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{p}_0 + \alpha(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{p}_1 + (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0)\boldsymbol{p}_2 + \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{p}_3 &= 0 \\ (\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{p}_0 + (-\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{p}_1 + (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{p}_2 + (\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0)\boldsymbol{p}_3 &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) & \beta(-\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_0 \\ \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matris eşitliği yazılabilir. Bu sistemin aşikar olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) & \beta(-\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} = 0$$

olmalıdır. ■

Tanım 4.36. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 i + \boldsymbol{A}_2 j + \boldsymbol{A}_3 k \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{A}$ matrisinin *i-eşleniği*

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\alpha}(-i\boldsymbol{A}i) = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 i - \boldsymbol{A}_2 j - \boldsymbol{A}_3 k$$

olarak tanımlanır. Her $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ ve $\boldsymbol{C} \in M_{n\times o}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ için i-eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\widetilde{(\tilde{\boldsymbol{A}})} = \boldsymbol{A}$,

ii. $\widetilde{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})} = \tilde{\boldsymbol{A}} + \tilde{\boldsymbol{B}}$,

iii. $\widetilde{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{C}}$,

iv. $\overline{(\tilde{\boldsymbol{A}})} = \widetilde{(\overline{\boldsymbol{A}})}$.

Bu özellikler i-eşlenik tanımı kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 4.37. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. Eğer $\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ eşitliğini sağlayan tersinir bir $\boldsymbol{P}$ matrisi varsa $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ matrisleri *i-benzerdir* denir ve $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B}$ ile gösterilir.

Teorem 4.5. *Her $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ için aşağıdakiler sağlanır:*

i. (Yansıma) Her $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ için $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{A}$ dir.

ii. (Simetri) Eğer $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise $\boldsymbol{B} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{A}$ dir.

iii. (Geçişme) Eğer $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{B} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{C}$ ise $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{C}$ dir.

İspat. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun.

i. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ için $\widetilde{I_n^{-1}}\boldsymbol{A}I_n = \boldsymbol{A}$ olduğundan $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{A}$ elde edilir.

ii. Eğer $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir $\boldsymbol{P}$ tersinir matrisi vardır. Burada (4.5) eşitliği soldan $\tilde{\boldsymbol{P}}$ ile çarpılırsa $\tilde{\boldsymbol{P}}\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1} = I_n$ olduğundan

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{B} \tag{4.6}$$

yazılabilir. $\boldsymbol{P}$ tersinir matris olduğundan (4.6) eşitliği sağdan $\boldsymbol{P}^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{4.7}$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{B} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{A}$ olduğu görülür.

iii. $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{B} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{C}$ ise $\boldsymbol{P}_1$ ve $\boldsymbol{P}_2$ tersinir matrisler olmak üzere sırasıyla

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B} \tag{4.8}$$

ve

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{C} \tag{4.9}$$

yazılabilir. Burada (4.8) eşitliği (4.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_2^{-1}(\tilde{\boldsymbol{P}}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{C} \tag{4.10}$$

elde edilir. Ayrıca $\widetilde{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2} = \tilde{\boldsymbol{P}}_1\tilde{\boldsymbol{P}}_2$ ve $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$ olduğundan (4.10) eşitliği

$$\boldsymbol{C} = \widetilde{(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)$$

olarak yazılabilir. Buradan $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{C}$ elde edilir.

Böylece i-benzerlik $M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. ■

Teorem 4.6. *$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. O halde*

$$\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow i\boldsymbol{A} \sim i\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}i \sim \boldsymbol{B}i \Leftrightarrow i\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}i$$

dır.

İspat. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} \tag{4.11}$$

olacak şekilde $\boldsymbol{P}$ tersinir matrisi vardır. Burada (4.11) eşitliği i-eşlenik tanımından

$$\frac{1}{\alpha}(-i\boldsymbol{P}^{-1}i)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$$

şeklinde yazılıp soldan i ile çarpıldığında

$$\boldsymbol{P}^{-1}i\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = i\boldsymbol{B}$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow i\boldsymbol{A} \sim i\boldsymbol{B}$ olduğu görülür. Ayrıca

$$i^{-1}i\boldsymbol{A}i = \boldsymbol{A}i \quad \text{ve} \quad i^{-1}i\boldsymbol{B}i = \boldsymbol{B}i$$

olduğundan sırasıyla

$$i\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}i \quad \text{ve} \quad i\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{B}i$$

elde edilir ve denklik bağıntısının simetri özelliği yardımı ile

$$\boldsymbol{A}i \sim i\boldsymbol{A} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{B}i \sim i\boldsymbol{B}$$

yazılır. Buradan $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow i\boldsymbol{A} \sim i\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}i \sim \boldsymbol{B}i$ olduğu görülür. Ayrıca $i\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}i$ ve $\boldsymbol{A}i \sim \boldsymbol{B}i$ olduğundan denklik bağıntısının geçişme özelliği yardımı ile $i\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}i$ elde edilir. Böylece $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow i\boldsymbol{A} \sim i\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}i \sim \boldsymbol{B}i \Leftrightarrow i\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}i$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.7. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. O halde $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \tilde{\boldsymbol{A}}$ dır.*

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{A}$ matrisinin i-eşleniği $\tilde{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\alpha}(-i\boldsymbol{A}i)$ olup bu eşitlik soldan i ile çarpılırsa

$$i\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}i$$

yazılabilir. Burada $\boldsymbol{A}i = i\tilde{\boldsymbol{A}}$ eşitliği soldan i^{-1} ile çarpılırsa

$$i^{-1}\boldsymbol{A}i = \tilde{\boldsymbol{A}} \tag{4.12}$$

bulunur. Ayrıca $i^{-1} = \tilde{i}^{-1}$ olup (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{i}^{-1}\boldsymbol{A}i = \tilde{\boldsymbol{A}}$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \tilde{\boldsymbol{A}}$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.8. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. O halde $\boldsymbol{A}$ matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\boldsymbol{A}}$ matrisinin tersinir olmasıdır.*

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun.
$(\Rightarrow)$ $\boldsymbol{A}$ matrisi tersinir olsun. O halde

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = I_n$$

yazılabilir. Bu eşitlik soldan ve sağdan i ile çarpıldığında, $i^2 = -\alpha$ olup

$$i\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}i = -\alpha I_n$$

elde edilir. Ayrıca bu eşitlik

$$i\boldsymbol{A}(ii^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}i = -\alpha I_n$$

olarak yazılabilir ve $i^{-1} = -\frac{i}{\alpha}$ olduğundan

$$i\boldsymbol{A}i\Big(-\frac{i}{\alpha}\boldsymbol{A}^{-1}i\Big) = -\alpha I_n \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece (4.13) eşitliği

$$\Big(-\frac{i}{\alpha}\boldsymbol{A}i\Big)\Big(-\frac{i}{\alpha}\boldsymbol{A}^{-1}i\Big) = I_n$$

olarak yazılabilir. Burada

$$-\frac{i}{\alpha}\boldsymbol{A}i = \tilde{\boldsymbol{A}} \quad \text{ve} \quad -\frac{i}{\alpha}\boldsymbol{A}^{-1}i = \widetilde{(\boldsymbol{A}^{-1})}$$

olup

$$(\tilde{\boldsymbol{A}})^{-1} = \widetilde{(\boldsymbol{A}^{-1})}$$

olduğu görülür.
$(\Leftarrow)$ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ matrisi tersinir olsun. O halde $\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B} = I_n$ olacak şekilde bir $\boldsymbol{B}$ matrisi vardır. Burada

$$\widetilde{(\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B})} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{B}} \quad \text{ve} \quad \widetilde{I_n} = I_n$$

olup

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{B}} = I_n$$

bulunur. Böylece $\boldsymbol{A}$ tersinirdir. ■

Tanım 4.38. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{X\lambda}$ $(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{X}^t)$ olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ matrisi varsa $\boldsymbol{\lambda}$ skalerine $\boldsymbol{A}$ matrisinin *sağ (sol) özdeğeri* ve $\boldsymbol{X}$ matrisine $\boldsymbol{\lambda}$ sağ (sol) özdeğerine karşılık gelen *özvektör* denir.

Tanım 4.39. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun.

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X\lambda} \quad (\widetilde{\boldsymbol{X}^t}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{X}^t)$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ matrisi varsa $\boldsymbol{\lambda}$ skalerine $\boldsymbol{A}$ matrisinin *sağ (sol) i-özdeğeri* ve $\boldsymbol{X}$ matrisine $\boldsymbol{\lambda}$ sağ (sol) i-özdeğerine karşılık gelen *i-özvektör* denir.

Teorem 4.9. *$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrisleri aynı sağ (sol) i-özdeğerlere sahiptir.*

İspat. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{A} \overset{ic}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} \tag{4.14}$$

olacak şekilde tersinir bir $\boldsymbol{P}$ matrisi vardır. Ayrıca $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ skaleri $\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ i-özdeğeri olsun. Böylece

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}$ olsun. (4.14) eşitliği $\boldsymbol{Y}$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} &= (\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y} \\
&= \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})\tilde{\boldsymbol{X}} \\
&= \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}}) \\
&= \tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}) \\
&= (\tilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{X})\boldsymbol{\lambda} \\
&= \tilde{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{B}$ matrisinin sağ i-özdeğeri olur.

Benzer şekilde, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ skaleri $\boldsymbol{A}$ matrisinin sol i-özdeğeri olsun. O halde

$$\widetilde{\boldsymbol{X}^t}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{X}^t$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. $\boldsymbol{Y} = \widetilde{\boldsymbol{X}}^t\tilde{\boldsymbol{P}}$ olsun. (4.14) eşitliği $\boldsymbol{Y}$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{Y}(\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) \\
&= \widetilde{\boldsymbol{X}^t}(\tilde{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1})\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \\
&= (\widetilde{\boldsymbol{X}^t}\boldsymbol{A})\boldsymbol{P} \\
&= \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{P}) \\
&= \boldsymbol{\lambda}\tilde{\boldsymbol{Y}}
\end{aligned}$$

olup $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{B}$ matrisinin sol i-özdeğeridir. ■

Lemma 4.7. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. Bir $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ elemanının A matrisinin sağ i-özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $0 \neq \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ için $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}$ nın $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ i-özdeğeri olmasıdır.*

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun.

$(\Rightarrow)$ $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ skaleri $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ i-özdeğeri olsun. O halde

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda} \tag{4.15}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. (4.15) eşitliği $0 \neq \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ ile çarpılsın. Böylece

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{\gamma} &= (\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\gamma} \\ &= \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1})\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma} \\ &= (\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\gamma}})(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma})\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\gamma}})(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma})$$

olduğundan $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{A}$ matrisi için bir sağ i-özdeğerdir.

$(\Leftarrow)$ $0 \neq \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olmak üzere $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ i-özdeğeri olsun. O halde

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}) \tag{4.16}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. $\boldsymbol{\gamma}$ sıfırdan farklı olduğundan $\boldsymbol{\gamma}^{-1}$ vardır. (4.16) eşitliği $\boldsymbol{\gamma}^{-1}$ ile çarpıldığında

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\gamma}^{-1} = \boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}$$

bulunur ve buradan

$$\boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\gamma}^{-1}) = (\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1})\boldsymbol{\lambda}$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{A}$ matrisi için bir sağ i-özdeğerdir. ■

Lemma 4.8. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ olsun. Bir $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ elemanının $\boldsymbol{A}$ matrisinin sol i-özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $0 \neq \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ için $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}$ nın $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol i-özdeğeri olmasıdır.*

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun.

$(\Rightarrow)$ $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol i-özdeğeri olsun. O halde

$$\widetilde{\boldsymbol{X}^t}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{X}^t \tag{4.17}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. $0 \neq \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olmak üzere (4.17)

eşitliği $\tilde{\gamma}^{-1}$ ile çarpılsın. Buradan

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{X}^t}\boldsymbol{A}) &= \tilde{\gamma}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{X}^t)\\ &= \tilde{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{-1})\boldsymbol{X}^t\\ &= (\tilde{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{X}^t)\end{aligned}$$

olup

$$(\tilde{\gamma}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{X}^t})\boldsymbol{A} = (\tilde{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{X}^t)$$

olduğundan $\tilde{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{A}$ matrisi için bir sol i-özdeğerdir.

$(\Leftarrow)$ $0 \neq \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olmak üzere $\tilde{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{A}$ matrisi için bir sol i-özdeğer olsun. O halde

$$\widetilde{\boldsymbol{X}^t}\boldsymbol{A} = (\tilde{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{X}^t \tag{4.18}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. Buradan (4.18) eşitliği $\tilde{\gamma}$ ile çarpıldığında

$$(\tilde{\gamma}\widetilde{\boldsymbol{X}^t})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{X}^t)$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{A}$ matrisi için bir sol i-özdeğerdir. ■

Teorem 4.10. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:*

(1) $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ i-özdeğeridir.

(2) $i\boldsymbol{\lambda}_0$, $i\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ özdeğeridir.

(3) $\boldsymbol{\lambda}_0 i$, $\boldsymbol{A}i$ matrisinin sağ özdeğeridir.

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun.

$(1) \Rightarrow (2)$ $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ i-özdeğeri olsun. O halde

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0 \tag{4.19}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. (4.19) eşitliği soldan i ile çarpılırsa

$$i\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = i\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0$$

elde edilir. Buradan

$$i\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = i\boldsymbol{X}(i^{-1}i)\boldsymbol{\lambda}_0$$

ve

$$i\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = \left(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}i\right)(i\boldsymbol{\lambda}_0)$$

yazılabilir. Böylece

$$(i\boldsymbol{A})\tilde{\boldsymbol{X}} = \tilde{\boldsymbol{X}}(i\boldsymbol{\lambda}_0)$$

olup $i\boldsymbol{\lambda_0}$, $i\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ özdeğeridir.

$(2) \Rightarrow (3)$ $i\boldsymbol{\lambda}_0$, $i\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ özdeğeri olsun. O halde

$$(i\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(i\boldsymbol{\lambda}_0) \tag{4.20}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. Buradan (4.20) eşitliği soldan i ile çarpılırsa

$$i^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = i\boldsymbol{X}i\boldsymbol{\lambda}_0$$

ve $i^2 = -\alpha$ olduğundan

$$-\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = i\boldsymbol{X}i\boldsymbol{\lambda}_0$$

bulunur. Ayrıca

$$-\alpha\boldsymbol{A}(ii^{-1})\boldsymbol{X} = i\boldsymbol{X}i\boldsymbol{\lambda}_0$$

yazılabilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\boldsymbol{A}i)\left(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}\right) = \left(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}i\right)\boldsymbol{\lambda}_0$$

elde edilir. Bu eşitlik sağdan i ile çarpıldığında

$$(\boldsymbol{A}i)\left(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}i\right) = \left(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}i\right)(\boldsymbol{\lambda}_0 i)$$

bulunur ve

$$(\boldsymbol{A}i)\tilde{\boldsymbol{X}} = \tilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\lambda}_0 i)$$

olarak yazılabilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0 i$, $\boldsymbol{A}i$ matrisi için bir sağ özdeğerdir.

$(3) \Rightarrow (1)$ $\boldsymbol{\lambda}_0 i$, $\boldsymbol{A}i$ matrisi için bir sağ özdeğer olsun. O halde

$$(\boldsymbol{A}i)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\lambda}_0 i) \tag{4.21}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. Buradan (4.21) eşitliği sağdan i ile çarpılırsa

$$(\boldsymbol{A}i)\boldsymbol{X}i = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0 i^2$$

elde edilir. $i^2 = -\alpha$ olduğundan

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}i\right) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0$$

olup

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0$$

olarak yazılabilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ i-özdeğeridir. ■

Teorem 4.11. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:*

(1) $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin sol i-özdeğeridir.

(2) $i\boldsymbol{\lambda}_0$, $i\boldsymbol{A}$ matrisinin sol özdeğeridir.

(3) $\boldsymbol{\lambda}_0 i$, $\boldsymbol{A}i$ matrisinin sol özdeğeridir.

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\alpha^{HD}$ olsun.

$(1) \Rightarrow (2)$ $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol i-özdeğeri olsun. O halde

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}^t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0 \boldsymbol{X}^t \tag{4.22}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. Burada (4.22) eşitliği soldan i ile çarpıldığında

$$i(\widetilde{\boldsymbol{X}}^t)\boldsymbol{A} = (i\boldsymbol{\lambda}_0)X^t$$

elde edilir. Buradan

$$i\left(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}^t i\right)\boldsymbol{A} = (i\lambda_0)\boldsymbol{X}^t$$

yazılabilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\boldsymbol{X}^t(i\boldsymbol{A}) = (i\lambda_0)\boldsymbol{X}^t$$

bulunur. Böylece $i\boldsymbol{\lambda}_0$, $i\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol özdeğeri olur.

$(2) \Rightarrow (3)$ $i\boldsymbol{\lambda}_0$, $i\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol özdeğeri olsun. Yani

$$\boldsymbol{X}^t(i\boldsymbol{A}) = (i\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{X}^t \tag{4.23}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. (4.23) eşitliği soldan i ile çarpılırsa

$$\left(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}^t i\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0\boldsymbol{X}^t$$

elde edilir. Buradan

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}^t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0(ii^{-1})\boldsymbol{X}^t \tag{4.24}$$

olarak yazılır ve sağdan i ile çarpılırsa

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}^t(\boldsymbol{A}i) = (\boldsymbol{\lambda}_0 i)\Big(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}^t\Big)i$$

olup

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}^t(\boldsymbol{A}i) = (\boldsymbol{\lambda}_0 i)\widetilde{\boldsymbol{X}}^t$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0 i$, $\boldsymbol{A}i$ matrisinin bir sol özdeğeri olur.

$(3) \Rightarrow (1)$ $\boldsymbol{\lambda}_0 i$, $\boldsymbol{A}i$ matrisinin bir sol özdeğeri olsun. Yani

$$\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{A}i) = (\boldsymbol{\lambda}_0 i)\boldsymbol{X}^t$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\alpha^{HD})$ vardır. Yukarıdaki eşitlik sağdan i ile çarpıldığında

$$\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A}i^2 = (\lambda_0 i\boldsymbol{X}^t)i$$

elde edilir. Buradan $i^2 = -\alpha$ olduğundan

$$\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A}(-\alpha) = \boldsymbol{\lambda}_0(i\boldsymbol{X}^t i)$$

ve

$$\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0\Big(\frac{-i}{\alpha}\boldsymbol{X}^t i\Big)$$

yazılabilir. Böylece

$$\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0\widetilde{\boldsymbol{X}}^t$$

elde edilir. O halde $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol i-özdeğeri olur. ■

4.8 Hiper Dual Katsayılı Kuaterniyon ve Split Kuaterniyondan Oluşan Genelleştirme İçin j-Benzerlik

Hiper dual katsayılı kuaterniyon ve split kuaterniyondan oluşan genelleştirme $\mathbb{H}_\beta^{HD}$ ile gösterilsin.

Tanım 4.40. Bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için *j-eşlenik*

$$\hat{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{\beta}(-j\boldsymbol{q}j) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j - \boldsymbol{z}k$$

şeklinde tanımlanır. Her $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için j-eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\widehat{(\hat{\boldsymbol{q}})} = \boldsymbol{q}$,

ii. $\widehat{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}} = \hat{\boldsymbol{q}} + \hat{\boldsymbol{p}}$,

iii. $\widehat{\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}} = \hat{\boldsymbol{q}}\hat{\boldsymbol{p}}$,

iv. $\overline{(\hat{\boldsymbol{q}})} = \widehat{(\overline{\boldsymbol{q}})}$,

v. $(\hat{\boldsymbol{p}})^{-1} = \widehat{(\boldsymbol{p}^{-1})}$.

Bu özellikler j-eşlenik tanımı kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 4.41. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. Eğer $\hat{\boldsymbol{p}}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ eşitliğini sağlayan $0 \neq \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ varsa $\boldsymbol{a}$ ile $\boldsymbol{b}$ elemanları *j-benzerdir* denir ve $\boldsymbol{a} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ile gösterilir.

Teorem 4.12. *Her $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için aşağıdakiler sağlanır:*

i. (Yansıma) Her $\boldsymbol{a} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için $\boldsymbol{a} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{a}$ dir.

ii. (Simetri) Eğer $\boldsymbol{a} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise $\boldsymbol{b} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{a}$ dir.

iii. (Geçişme) Eğer $\boldsymbol{a} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{b} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{c}$ ise $\boldsymbol{a} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{c}$ dir.

İspat. j-benzerlik kullanılarak Teorem 4.4'ün ispatına benzer şekilde yapılır. ■

Sonuç 4.12. *$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 i + \boldsymbol{a}_2 j + \boldsymbol{a}_3 k, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 i + \boldsymbol{b}_2 j + \boldsymbol{b}_3 k \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{a} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) & \beta(-\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} = 0$$

dır.

İspat. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 i + \boldsymbol{a}_2 j + \boldsymbol{a}_3 k, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 i + \boldsymbol{b}_2 j + \boldsymbol{b}_3 k \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{a} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise

$$\hat{\boldsymbol{p}}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \tag{4.25}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ vardır. (4.25) eşitliği soldan $\hat{\boldsymbol{p}}$ ile çarpıldığında

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} - \hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b} = 0$$

yazılabilir. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 i + \boldsymbol{p}_2 j + \boldsymbol{p}_3 k \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için $\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_1 i + \boldsymbol{p}_2 j - \boldsymbol{p}_3 k$ olup

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ap} = &(\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_0 - \alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_1 - \beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_3) + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_0 + \beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_3 - \beta\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_2)i \\ &+ (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_2 - \alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_0 + \alpha\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_1)j + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_0)k\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b} = &(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_0 + \alpha\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_1 - \beta\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_2 + \alpha\beta\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_3) + (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_0 + \beta\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_3 + \beta\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_2)i \\ &+ (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_2 + \alpha\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_0 - \alpha\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_1)j + (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_0)k\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $\boldsymbol{ap} - \hat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b} = 0$ için

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1) & \beta(-\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_0 \\ \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matris eşitliği yazılabilir. Bu sistemin aşikar olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1) & \beta(-\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} = 0$$

olmalıdır. ■

Tanım 4.42. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 i + \boldsymbol{A}_2 j + \boldsymbol{A}_3 k \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{A}$ matrisinin *j-eşleniği*

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\beta}(-j\boldsymbol{A}j) = \boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{A}_1 i + \boldsymbol{A}_2 j - \boldsymbol{A}_3 k$$

olarak tanımlanır. Her $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{C} \in M_{n\times o}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ için j-eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\widehat{(\hat{\boldsymbol{A}})} = \boldsymbol{A}$,

ii. $\widehat{(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})} = \hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$,

iii. $\widehat{\boldsymbol{AC}} = \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{C}}$,

iv. $\overline{(\hat{\boldsymbol{A}})} = \widehat{(\overline{\boldsymbol{A}})}$.

Bu özellikler j-eşlenik tanımı kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 4.43. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. Eğer $\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ eşitliğini sağlayan tersinir bir $\boldsymbol{P}$ matrisi varsa $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ matrisleri j*-benzerdir* denir ve $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{B}$ ile gösterilir.

Teorem 4.13. *Her* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ *için aşağıdakiler sağlanır:*

i. (Yansıma) Her $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ *için* $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{A}$ *dir.*

ii. (Simetri) Eğer $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{B}$ *ise* $\boldsymbol{B} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{A}$ *dir.*

iii. (Geçişme) Eğer $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{B}$ *ve* $\boldsymbol{B} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{C}$ *ise* $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{C}$ *dir.*

İspat. j-benzerlik kullanılarak Teorem 4.5'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.14. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ *olsun. O halde*

$$\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow j\boldsymbol{A} \sim j\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}j \sim \boldsymbol{B}j \Leftrightarrow j\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}j$$

dir.

İspat. $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise

$$\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} \tag{4.26}$$

olacak şekilde bir $\boldsymbol{P}$ tersinir matrisi vardır. Buradan (4.26) eşitliği

$$\left(\frac{-j}{\beta}\boldsymbol{P}^{-1}j\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$$

olarak yazılabilir ve bu eşitlik soldan j ile çarpılırsa

$$\boldsymbol{P}^{-1}j\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = j\boldsymbol{B}$$

elde edilir. Böylece $j\boldsymbol{A} \sim j\boldsymbol{B}$ bulunur. Ayrıca

$$j^{-1}j\boldsymbol{A}j = \boldsymbol{A}j \quad \text{ve} \quad j^{-1}j\boldsymbol{B}j = \boldsymbol{B}j$$

olduğundan sırasıyla

$$j\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}j \quad \text{ve} \quad j\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{B}j$$

bulunur. j-benzerlik denklik bağıntısının simetri özelliği yardımı ile

$$\boldsymbol{A}j \sim j\boldsymbol{A} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{B}j \sim j\boldsymbol{B}$$

yazılabilir. Böylece $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow j\boldsymbol{A} \sim j\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}j \sim \boldsymbol{B}j$ olduğu görülür. Ayrıca $j\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}j$ ve $\boldsymbol{A}j \sim \boldsymbol{B}j$ olup denklik bağıntısının geçişme özelliğiden $j\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}j$ elde edilir. O halde $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow j\boldsymbol{A} \sim j\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}j \sim \boldsymbol{B}j \Leftrightarrow j\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}j$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.15. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. O halde $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \hat{\boldsymbol{A}}$ dır.*

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{A}$ matrisinin j-eşleniği

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\beta}(-j\boldsymbol{A}j) \tag{4.27}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada (4.27) eşitliği soldan j ile çarpıldığında

$$j\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}j \tag{4.28}$$

bulunur. Ayrıca (4.28) eşitliği j^{-1} ile çarpılırsa

$$\hat{\boldsymbol{A}} = j^{-1}\boldsymbol{A}j \tag{4.29}$$

elde edilir. $j^{-1} = \hat{j}^{-1}$ olduğundan

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \hat{j}^{-1}\boldsymbol{A}j \tag{4.30}$$

yazılabilir. Böylece $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \hat{\boldsymbol{A}}$ elde edilir. ■

Teorem 4.16. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. O halde $\boldsymbol{A}$ matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart $\hat{\boldsymbol{A}}$ matrisinin tersinir olmasıdır.*

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi tersinir olsun. O halde

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = I_n$$

yazılabilir. Bu eşitlik soldan ve sağdan j ile çarpılırsa

$$j\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}j = -\beta I_n \tag{4.31}$$

elde edilir. Ayrıca (4.31) eşitliği

$$j\boldsymbol{A}(jj^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}j = -\beta I_n \tag{4.32}$$

olarak yazıldığında, $j^{-1} = -\frac{j}{\beta}$ olduğundan (4.32) eşitliği

$$\Big(-\frac{j}{\beta}\boldsymbol{A}j\Big)\Big(-\frac{j}{\beta}\boldsymbol{A}^{-1}j\Big) = I_n$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{-j}{\beta}\boldsymbol{A}j \quad \text{ve} \quad \widehat{(\boldsymbol{A}^{-1})} = \frac{-j}{\beta}\boldsymbol{A}^{-1}j$$

olup

$$\hat{\boldsymbol{A}}\widehat{(\boldsymbol{A}^{-1})} = I_n$$

elde edilir. Böylece $\hat{\boldsymbol{A}}$ tersinirdir ve

$$(\hat{\boldsymbol{A}})^{-1} = \widehat{(\boldsymbol{A}^{-1})}$$

olduğu görülür. ■

Tanım 4.44. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{X\lambda}$ $(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{X}^t)$ olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi varsa $\boldsymbol{\lambda}$ skalerine $\boldsymbol{A}$ matrisinin *sağ (sol) özdeğeri* ve $\boldsymbol{X}$ matrisine $\boldsymbol{\lambda}$ sağ (sol) özdeğerine karşılık gelen *özvektör* denir.

Tanım 4.45. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun.

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X\lambda} \quad (\widehat{\boldsymbol{X}^t}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{X}^t)$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi varsa $\boldsymbol{\lambda}$ skalerine $\boldsymbol{A}$ matrisinin *sağ (sol) j-özdeğeri* ve $\boldsymbol{X}$ matrisine $\boldsymbol{\lambda}$ sağ (sol) j-özdeğerine karşılık gelen *j-özvektör* denir.

Teorem 4.17. *$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{A} \overset{jc}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrisleri aynı sağ (sol) j-özdeğerlere sahiptir.*

İspat. j-benzerlik ve j-özdeğer tanımları kullanılarak Teorem 4.9'un ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Lemma 4.9. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. Bir $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ elemanının $\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ (sol) j-özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $0 \neq \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}$ nın $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ (sol) j-özdeğeri olmasıdır.*

İspat. j-özdeğer tanımı kullanılarak Lemma 4.7 ve Lemma 4.8'in ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.18. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:*

(1) $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ j-özdeğeridir.

(2) $j\boldsymbol{\lambda}_0$, $j\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ özdeğeridir.

(3) $\boldsymbol{\lambda}_0 j$, $\boldsymbol{A}j$ matrisinin sağ özdeğeridir.

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun.

$(1) \Rightarrow (2)$ $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ j-özdeğeri olsun. O halde

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0 \tag{4.33}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ vardır. (4.33) eşitliği soldan j ile çarpılırsa

$$j(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}) = j(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0)$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$j\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = j\boldsymbol{X}(j^{-1}j)\boldsymbol{\lambda}_0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $j^{-1} = \frac{-j}{\beta}$ olduğundan

$$(j\boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{X}} = \left(\frac{-j}{\beta}\boldsymbol{X}j\right)(j\boldsymbol{\lambda}_0)$$

elde edilir ve

$$(j\boldsymbol{A})\hat{\boldsymbol{X}} = \hat{\boldsymbol{X}}(j\boldsymbol{\lambda}_0)$$

bulunur. Böylece $j\boldsymbol{\lambda}_0$, $j\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ özdeğeri olur.

$(2) \Rightarrow (3)$ $j\boldsymbol{\lambda}_0$, $j\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ özdeğeri olsun. Yani

$$(j\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(j\boldsymbol{\lambda}_0)$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ vardır. Yukarıdaki eşitlik soldan j ile çarpıldığında

$$j^2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = (j\boldsymbol{X}j)\boldsymbol{\lambda}_0$$

elde edilir ve $j^2 = -\beta$ olduğundan

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\lambda}_0 \tag{4.34}$$

bulunur. Ayrıca $jj^{-1} = 1$ olduğundan (4.34) eşitliği

$$\boldsymbol{A}(jj^{-1})\boldsymbol{X} = \hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\lambda}_0$$

olarak yazılabilir. Burada $j^{-1} = \frac{-j}{\beta}$ olup

$$\boldsymbol{A}j\Big(\frac{-j}{\beta}\Big)\boldsymbol{X} = \hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\lambda}_0$$

elde edilir. Bu eşitlik sağdan j ile çarpıldığında

$$(\boldsymbol{A}j)\Big(\frac{-j}{\beta}\boldsymbol{X}j\Big) = \hat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\lambda}_0 j)$$

olup

$$(\boldsymbol{A}j)\hat{\boldsymbol{X}} = \hat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\lambda}_0 j)$$

bulunur. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0 j$, $\boldsymbol{A}j$ matrisinin bir sağ özdeğerdir.

$(3) \Rightarrow (1)$ $\boldsymbol{\lambda}_0 j$, $\boldsymbol{A}j$ matrisinin bir sağ özdeğeri olsun. O halde

$$(\boldsymbol{A}j)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\lambda}_0 j)$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ vardır. Yukarıdaki eşitlik sağdan j ile çarpılırsa

$$(\boldsymbol{A}j)\boldsymbol{X}j = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0 j^2$$

elde edilir. $j^2 = -\beta$ olduğundan

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0$$

bulunur. O halde $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ j-özdeğeridir. ■

Teorem 4.19. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:*

(1) $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin sol j-özdeğeridir.

(2) $j\boldsymbol{\lambda}_0$, $j\boldsymbol{A}$ matrisinin sol özdeğeridir.

(3) $\boldsymbol{\lambda}_0 j$, $\boldsymbol{A}j$ matrisinin sol özdeğeridir.

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun.

$(1) \Rightarrow (2)$ $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol j-özdeğeri olsun. O halde

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0 \boldsymbol{X}^t$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ vardır. Burada j-eşlenik tanımından

$$\left(\frac{-j}{\beta}\boldsymbol{X}^t j\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0 \boldsymbol{X}^t$$

yazılabilir. Bu eşitlik soldan j ile çarpılırsa

$$\boldsymbol{X}^t(j\boldsymbol{A}) = (j\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{X}^t$$

elde edilir. Böylece $j\boldsymbol{\lambda}_0$, $j\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol özdeğeridir.

$(2) \Rightarrow (3)$ $j\boldsymbol{\lambda}_0$, $j\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol özdeğeri olsun. O halde

$$\boldsymbol{X}^t(j\boldsymbol{A}) = (j\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{X}^t$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi vardır. Bu eşitlik soldan j ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\frac{-j}{\beta}\boldsymbol{X}^t j\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0 \boldsymbol{X}^t$$

bulunur ve

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0(jj^{-1})\boldsymbol{X}^t \tag{4.35}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik sağdan j ile çarpıldığında

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^t(\boldsymbol{A}j) = (\boldsymbol{\lambda}_0 j)\widehat{\boldsymbol{X}}^t$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0 j$, $\boldsymbol{A}j$ matrisinin bir sol özdeğeridir.

$(3) \Rightarrow (1)$ $\boldsymbol{\lambda}_0 j$, $\boldsymbol{A}j$ matrisi için bir sol özdeğer olsun. O halde

$$\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{A}j) = (\boldsymbol{\lambda}_0 j)\boldsymbol{X}^t$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ vardır. Yukarıdaki eşitlik sağdan j ile çarpılıp düzenlenirse

$$\boldsymbol{X}^t \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0 \widehat{\boldsymbol{X}}^t$$

bulunur. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol j-özdeğeri olur. ■

4.9 Hiper Dual Katsayılı Kuaterniyon ve Split Kuaterniyondan Oluşan Genelleştirme İçin k-Benzerlik

Tanım 4.46. Bir $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x}i + \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için k-eşlenik

$$\widehat{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{\alpha\beta}(-k\boldsymbol{q}k) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}i - \boldsymbol{y}j + \boldsymbol{z}k$$

şeklinde tanımlanır. Her $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için k-eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\widehat{\widehat{\boldsymbol{q}}} = \boldsymbol{q}$,

ii. $\widehat{\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}} = \widehat{\boldsymbol{q}} + \widehat{\boldsymbol{p}}$,

iii. $\widehat{\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}} = \widehat{\boldsymbol{q}}\,\widehat{\boldsymbol{p}}$,

iv. $\overline{(\widehat{\boldsymbol{q}})} = \widehat{(\overline{\boldsymbol{q}})}$,

v. $(\widehat{\boldsymbol{p}})^{-1} = \widehat{(\boldsymbol{p}^{-1})}$.

Bu özellikler k-eşlenik tanımı kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 4.47. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. Eğer $\widehat{\boldsymbol{p}}^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ eşitliğini sağlayan $0 \neq \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ varsa $\boldsymbol{a}$ ile $\boldsymbol{b}$ elemanları *k-benzerdir* denir ve $\boldsymbol{a} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ile gösterilir.

Teorem 4.20. *Her $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için aşağıdakiler sağlanır:*

i. (Yansıma) Her $\boldsymbol{a} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için $\boldsymbol{a} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{a}$ dir.

ii. (Simetri) Eğer $\boldsymbol{a} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise $\boldsymbol{b} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{a}$ dir.

iii. (Geçişme) Eğer $\boldsymbol{a} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{b} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{c}$ ise $\boldsymbol{a} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{c}$ dir.

İspat. k-benzerlik kullanılarak Teorem 4.4'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Sonuç 4.13. *$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 i + \boldsymbol{a}_2 j + \boldsymbol{a}_3 k, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 i + \boldsymbol{b}_2 j + \boldsymbol{b}_3 k \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{a} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise*

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1) & \beta(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} = 0$$

dır.

İspat. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 i + \boldsymbol{a}_2 j + \boldsymbol{a}_3 k, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 i + \boldsymbol{b}_2 j + \boldsymbol{b}_3 k \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{a} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{b}$ ise

$$\widehat{\boldsymbol{p}}^{-1} \boldsymbol{a} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} \tag{4.36}$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ vardır. (4.36) eşitliği soldan $\widehat{\boldsymbol{p}}$ ile çarpılıp

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} - \widehat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b} = 0$$

yazılabilir. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + \boldsymbol{p}_1 i + \boldsymbol{p}_2 j + \boldsymbol{p}_3 k \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için $\widehat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_1 i - \boldsymbol{p}_2 j + \boldsymbol{p}_3 k$ olup

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_0 - \alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_1 - \beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_3) + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_0 + \beta\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_3 - \beta\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_2)i \\ + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_2 - \alpha\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_0 + \alpha\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_1)j + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}_0)k\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_0 + \alpha\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_1 + \beta\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_2 - \alpha\beta\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_3) + (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_0 - \beta\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_3 - \beta\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_2)i \\ + (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_2 + \alpha\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_0 + \alpha\boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_1)j + (\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{p}_3\boldsymbol{b}_0)k\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} - \widehat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{b} = 0$ için

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1) & \beta(-\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_0 \\ \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matris eşitliği yazılabilir. Bu sistemin aşikar olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1) & \beta(-\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2) & \alpha\beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) \\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \beta(-\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{b}_3) & \beta(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) \\ \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_2 & \alpha(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3) & \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{b}_0 & \alpha(-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1) \\ \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{b}_3 & -\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_0 - \boldsymbol{b}_0 \end{pmatrix} = 0$$

olmalıdır. ■

Tanım 4.48. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 i + \boldsymbol{A}_2 j + \boldsymbol{A}_3 k \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{A}$ matrisinin *k-eşleniği*

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\alpha\beta}(-k\boldsymbol{A}k) = \boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{A}_1 i - \boldsymbol{A}_2 j + \boldsymbol{A}_3 k$$

olarak tanımlanır. Her $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{C} \in M_{n\times o}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ için k-eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\widehat{\widehat{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$,

ii. $\widehat{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})} = \widehat{\boldsymbol{A}} + \widehat{\boldsymbol{B}}$,

iii. $\widehat{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}} = \widehat{\boldsymbol{A}}\,\widehat{\boldsymbol{C}}$,

iv. $\overline{(\widehat{\boldsymbol{A}})} = (\widehat{\overline{\boldsymbol{A}}})$.

Bu özellikler k-eşlenik tanımı kullanılarak kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 4.49. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. Eğer $\widehat{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ eşitliğini sağlayan tersinir bir $\boldsymbol{P}$ matrisi varsa $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ matrisleri *k-benzerdir* denir ve $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{B}$ ile gösterilir.

Teorem 4.21. *Her $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ için aşağıdakiler sağlanır:*

i. (Yansıma) Her $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ için $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{A}$ dir.

ii. (Simetri) Eğer $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise $\boldsymbol{B} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{A}$ dir.

iii. (Geçişme) Eğer $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{B} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{C}$ ise $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{C}$ dir.

İspat. k-benzerlik kullanılarak Teorem 4.5'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.22. *$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. O halde*

$$\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow k\boldsymbol{A} \sim k\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}k \sim \boldsymbol{B}k \Leftrightarrow k\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}k$$

dir.

İspat. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise

$$\widehat{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} \tag{4.37}$$

olacak şekilde $\boldsymbol{P}$ tersinir matrisi vardır. (4.37) eşitliği k-eşlenik tanımından

$$\left(\frac{-k}{\alpha\beta}\boldsymbol{P}^{-1}k\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik soldan k ile çarpıldığında

$$\boldsymbol{P}^{-1}k\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = k\boldsymbol{B}$$

elde edilir. Böylece $k\boldsymbol{A} \sim k\boldsymbol{B}$ olduğu görülür. Ayrıca

$$k^{-1}k\boldsymbol{A}k = \boldsymbol{A}k \quad \text{ve} \quad k^{-1}k\boldsymbol{B}k = \boldsymbol{B}k$$

olduğundan sırasıyla

$$k\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}k \quad \text{ve} \quad k\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{B}k$$

bulunur. Denklik bağıntısının simetri özelliği yardımı ile

$$\boldsymbol{A}k \sim k\boldsymbol{A} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{B}k \sim k\boldsymbol{B}$$

yazılabilir. Böylece $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow k\boldsymbol{A} \sim k\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}k \sim \boldsymbol{B}k$ olduğu görülür. Ayrıca $k\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}k$ ve $\boldsymbol{A}k \sim \boldsymbol{B}k$ için denklik bağıntısının geçişme özelliğinden $k\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}k$ bulunur. Buradan $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow k\boldsymbol{A} \sim k\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}k \sim \boldsymbol{B}k \Leftrightarrow k\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}k$ elde edilir. ■

Teorem 4.23. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. O halde $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \widehat{\boldsymbol{A}}$ dır.*

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{A}$ matrisinin k-eşleniği

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{\alpha\beta}(-k\boldsymbol{A}k)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu eşitlik soldan k ile çarpıldığında

$$k\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}k \tag{4.38}$$

yazılabilir. Ayrıca (4.38) eşitliği soldan k^{-1} ile çarpıldığında

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = k^{-1}\boldsymbol{A}k \tag{4.39}$$

bulunur. Burada $k^{-1} = \widehat{k}^{-1}$ olduğundan

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \widehat{k}^{-1}\boldsymbol{A}k$$

yazılabilir. Böylece $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \widehat{\boldsymbol{A}}$ elde edilir. ■

Teorem 4.24. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. O halde $\boldsymbol{A}$ matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart $\widehat{\boldsymbol{A}}$ matrisinin tersinir olmasıdır.*

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ tersinir bir matris olsun. O halde

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = I_n$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik soldan ve sağdan k ile çarpıldığında

$$k\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}k = -\alpha\beta I_n$$

ve

$$k\boldsymbol{A}(kk^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}k = -\alpha\beta I_n \tag{4.40}$$

yazılabilir. Burada $k^{-1} = -\frac{k}{\alpha\beta}$ olduğundan (4.40) eşitliği

$$\Big(-\frac{k}{\alpha\beta}\boldsymbol{A}k\Big)\Big(-\frac{k}{\alpha\beta}\boldsymbol{A}^{-1}k\Big) = I_n$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{(\boldsymbol{A}^{-1})} = I_n$$

ve

$$(\widehat{\boldsymbol{A}})^{-1} = \widehat{(\boldsymbol{A}^{-1})}$$

olup $\widehat{\boldsymbol{A}}$ matrisi tersinirdir. ■

Tanım 4.50. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}$ $(\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{X}^t)$ olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi varsa $\boldsymbol{\lambda}$ skalerine $\boldsymbol{A}$ matrisinin *sağ (sol) özdeğeri* ve $\boldsymbol{X}$ matrisine $\boldsymbol{\lambda}$ sağ (sol) özdeğerine karşılık gelen *özvektör* denir.

Tanım 4.51. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun.

$$\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda} \quad (\widehat{\boldsymbol{X}^t}\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{X}^t)$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi varsa $\boldsymbol{\lambda}$ skalerine $\boldsymbol{A}$ matrisinin *sağ (sol) k-özdeğeri* ve $\boldsymbol{X}$ matrisine $\boldsymbol{\lambda}$ sağ (sol) k-özdeğerine karşılık gelen *k-özvektör* denir.

Teorem 4.25. *$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{A} \overset{kc}{\sim} \boldsymbol{B}$ ise $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ matrisleri aynı sağ (sol) k-özdeğerlere sahiptir.*

İspat. k-benzerlik ve k-özdeğer tanımları kullanılarak Teorem 4.9'in ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Lemma 4.10. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olsun. Bir $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ elemanının $\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ (sol) k-özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $0 \neq \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ için $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\gamma}$ nın $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ (sol) k-özdeğeri olmasıdır.*

İspat. k-özdeğer tanımı kullanılarak Lemma 4.7 ve Lemma 4.8'in ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.26. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:*

(1) $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ k-özdeğeridir.

(2) $k\boldsymbol{\lambda}_0$, $k\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ özdeğeridir.

(3) $\boldsymbol{\lambda}_0 k$, $\boldsymbol{A}k$ matrisinin sağ özdeğeridir.

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun.

$(1) \Rightarrow (2)$ $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ k-özdeğeri olsun. O halde

$$\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi vardır. Yukarıdaki eşitlik soldan k ile çarpıldığında

$$k(\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}}) = k(\boldsymbol{X}\lambda_0)$$

ve

$$(k\boldsymbol{A})\widehat{\boldsymbol{X}} = k\boldsymbol{X}(k^{-1}k)\boldsymbol{\lambda}_0$$

yazılabilir. Burada $k^{-1} = \frac{-k}{\alpha\beta}$ olduğundan

$$(k\boldsymbol{A})\widehat{\boldsymbol{X}} = \left(\frac{-k}{\alpha\beta}\boldsymbol{X}k\right)(k\boldsymbol{\lambda}_0)$$

bulunur. Buradan

$$(k\boldsymbol{A})\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{X}}(k\boldsymbol{\lambda}_0)$$

elde edilir. Böylece $k\boldsymbol{\lambda}_0$, $k\boldsymbol{A}$ matrisi için bir sağ özdeğerdir.

$(2) \Rightarrow (3)$ $k\boldsymbol{\lambda}_0$, $k\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ özdeğeri olsun. O halde

$$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(k\boldsymbol{\lambda}_0)$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ vardır. Bu eşitlik soldan k ile çarpılırsa

$$k^2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = (k\boldsymbol{X}k)\boldsymbol{\lambda}_0$$

elde edilir ve $k^2 = -\alpha\beta$ olduğundan

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\lambda}_0$$

bulunur. Ayrıca bu eşitlik

$$\boldsymbol{A}(kk^{-1})\boldsymbol{X} = \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\lambda}_0$$

şeklinde yazılabilir ve $k^{-1} = \frac{-k}{\alpha\beta}$ olduğundan

$$\boldsymbol{A}k\left(\frac{-k}{\alpha\beta}\right)\boldsymbol{X} = \widehat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\lambda}_0$$

yazılabilir. Bu eşitlik sağdan k ile çarpılırsa

$$(\boldsymbol{A}k)\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\lambda}_0 k)$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0 k$, $\boldsymbol{A}k$ matrisi için bir sağ özdeğerdir.

$(3) \Rightarrow (1)$ $\boldsymbol{\lambda}_0 k$, $\boldsymbol{A}k$ matrisinin bir sağ özdeğeri olsun. O halde

$$(\boldsymbol{A}k)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\lambda}_0 k)$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi vardır. Bu eşitlik sağdan k ile çarpıldığında

$$(\boldsymbol{A}k)\boldsymbol{X}k = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0 k^2$$

yazılabilir ve $k^2 = -\alpha\beta$ olduğundan

$$\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}_0$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sağ k-özdeğeridir. ■

Teorem 4.27. *$\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:*

(1) $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin sol k-özdeğeridir.

(2) $k\boldsymbol{\lambda}_0$, $k\boldsymbol{A}$ matrisinin sol özdeğeridir.

(3) $\boldsymbol{\lambda}_0 k$, $\boldsymbol{A}k$ matrisinin sol özdeğeridir.

İspat. $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ ve $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{H}_\beta^{HD}$ olsun.

$(1) \Rightarrow (2)$ $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol k-özdeğeri olsun. O halde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olacak şekilde

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0\boldsymbol{X}^t$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik k-eşlenik tanımından

$$\left(\frac{-k}{\alpha\beta}\boldsymbol{X}^t k\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0\boldsymbol{X}^t$$

şeklinde yazılabilir ve soldan k ile çarpılırsa

$$\boldsymbol{X}^t(k\boldsymbol{A}) = (k\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{X}^t$$

bulunur. Böylece $k\boldsymbol{\lambda}_0$, $k\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol özdeğeri olur.

$(2) \Rightarrow (3)$ $k\boldsymbol{\lambda}_0$, $k\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol özdeğeri olsun. O halde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ olacak şekilde

$$\boldsymbol{X}^t(k\boldsymbol{A}) = (k\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{X}^t$$

yazılabilir. Bu eşitlik soldan k ile çarpılırsa

$$\left(\frac{-k}{\alpha\beta}\boldsymbol{X}^t k\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0\boldsymbol{X}^t$$

ve

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0(kk^{-1})\boldsymbol{X}^t \tag{4.41}$$

yazılabilir. (4.41) eşitliği sağdan k ile çarpılıp düzenlendiğinde

$$\widehat{\boldsymbol{X}}^t(\boldsymbol{A}k) = (\boldsymbol{\lambda}_0 k)\widehat{\boldsymbol{X}}^t$$

elde edilir. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0 k$, $\boldsymbol{A}k$ matrisinin bir sol özdeğeridir.

$(3) \Rightarrow (1)$ $\boldsymbol{\lambda}_0 k$, $\boldsymbol{A}k$ matrisi için bir sol özdeğer olsun. O halde

$$\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{A}k) = (\boldsymbol{\lambda}_0 k)\boldsymbol{X}^t$$

olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ vardır. Yukarıdaki eşitlik sağdan k ile çarpılıp düzenlenirse

$$\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}_0\widehat{\boldsymbol{X}}^t$$

bulunur. Böylece $\boldsymbol{\lambda}_0$, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bir sol k-özdeğeri olur. ■

5
HİPER SAYI KATSAYILI GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Bu bölümün giriş kısmında bikompleks, hiper duble, hiper dual sayı tanımları verilmiştir [60, 63, 64]. Bu bölümün orijinal kısmında ise hiper sayılar tanıtılmış ve hiper sayılara ait temel kavramlar verilmiştir. Ardından hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar tanıtılmış, cebirsel yapısı incelenmiş ve temel özellikleri sunulmuştur. Hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar için matris temsilleri ve bu temsillere ait özellikler araştırılmıştır.

[60] çalışmasında $E_1E_2 = E_2E_1$ olmak üzere, reel olmayan E_1, E_2, E_1E_2 terimli bir sayı için, E_1 ile E_2 değişmeli olduğundan

$$(E_1E_2)^2 = E_1E_2E_1E_2 = E_1E_1E_2E_2 = E_1^2E_2^2$$

şeklinde verilmiştir. E_1 ve E_2'ye göre üç farklı durum elde edilir:

1. $E_1^2 = E_2^2 = -1$ olması durumunda $(E_1E_2)^2 = 1$ olur. Böylece bikompleks sayı (multicomplex, fourcomplex) elde edilir. a_1, a_2, a_3, a_4 reel sayılar ve

   $$i_1^2 = -1,\ i_2^2 = -1,\ (i_1i_2)^2 = 1,\ i_1i_2 = i_2i_1$$

   olmak üzere bir bikompleks sayı $a = a_1 + i_1a_2 + i_2a_3 + i_1i_2a_4$ formundadır [63, 64].

2. $E_1^2 = E_2^2 = (E_1E_2)^2 = 1$ olması durumunda hiper duble sayı (hyper double, hyperbolic fourcomplex) elde edilir [60, 63]. a_1, a_2, a_3, a_4 reel sayılar ve

   $$j_1^2 = 1,\ j_2^2 = 1,\ (j_1j_2)^2 = 1,\ j_1j_2 = j_2j_1$$

   olmak üzere bir hiper duble sayı $a = a_1 + j_1a_2 + j_2a_3 + j_1j_2a_4$ formundadır.

3. $E_1^2 = E_2^2 = (E_1E_2)^2 = 0$ olması durumunda hiper dual sayılar elde edilir

[60].

5.1 Hiper Sayılar

Tanım 5.1. a_1, a_2, a_3, a_4 reel sayılar olmak üzere $\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2$ ifadesine bir *hiper sayı* denir. E_1, E_2, E_1E_2 reel sayılardan farklıdır ve $E_1E_2 = E_2E_1$ olup değişme özelliğine sahiptir. Böylece

$$(E_1E_2)^2 = E_1E_2E_1E_2 = E_1E_1E_2E_2 = E_1^2E_2^2$$

biçimindedir. Burada $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$E_1^2 = \eta,\ E_2^2 = \xi,\ (E_1E_2)^2 = \eta\xi$$

şeklindedir. Böylece bu genelleştirme ile farklı sayı sistemleri elde edilir. Eğer

1. $\eta = \xi = -1$ ise bikompleks sayı sistemi,
2. $\eta = \xi = 1$ ise hiper duble sayı sistemi,
3. $\eta = \xi = 0$ ise hiper dual sayı sistemi bulunur.

Tanım 5.2. Hiper sayılar kümesi $\mathbb{HN}$ ile gösterilir ve $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ için

$$\mathbb{HN} = \{\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2 : E_1^2 = \eta, E_2^2 = \xi, (E_1E_2)^2 = \eta\xi, a_i \in \mathbb{R}_{(1\leq i\leq 4)}\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 5.3. $\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2$ ve $\mathfrak{b} = b_1 + b_2E_1 + b_3E_2 + b_4E_1E_2$ hiper sayıları için $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3,\ a_4 = b_4$ ise $\mathfrak{a}$ ve $\mathfrak{b}$ hiper sayıları *eşittir* denir.

Tanım 5.4. $\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2$ ve $\mathfrak{b} = b_1 + b_2E_1 + b_3E_2 + b_4E_1E_2$ hiper sayılarının toplamı

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)E_1 + (a_3 + b_3)E_2 + (a_4 + b_4)E_1E_2$$

ile tanımlanır.

Sonuç 5.1. $(\mathbb{HN}, +)$ *ikilisi bir Abel gruptur.*

Tanım 5.5. $\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2 \in \mathbb{HN}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathfrak{a}$ hiper sayısının λ skaleri ile çarpımı

$$\lambda\mathfrak{a} = (\lambda a_1) + (\lambda a_2)E_1 + (\lambda a_3)E_2 + (\lambda a_4)E_1E_2$$

biçiminde tanımlanır.

Sonuç 5.2. *Her* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{HN}$ *ve* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *için*

- $\lambda(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \lambda\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}$,
- $(\lambda + \mu)\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{a}$,
- $(\lambda\mu)\mathfrak{a} = \lambda(\mu\mathfrak{a})$,
- $(\mathbb{R}, +, .)$ *cisminin ikinci işleme göre birim elemanı* 1 *olmak üzere her* $\mathfrak{a} \in \mathbb{HN}$ *için* $1a = a$ *dır.*

Böylece hiper sayılar kümesi reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 5.6. $\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2$ ve $\mathfrak{b} = b_1 + b_2E_1 + b_3E_2 + b_4E_1E_2$ hiper sayılarının çarpımı

$$\begin{aligned}\mathfrak{ab} = {} & a_1b_1 + \eta a_2b_2 + \xi a_3b_3 + \eta\xi a_4b_4 + (a_1b_2 + a_2b_1 + \xi a_3b_4 + \xi a_4b_3)E_1 \\ & + (a_1b_3 + \eta a_2b_4 + a_3b_1 + \eta a_4b_2)E_2 + (a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1)E_1E_2\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonuç 5.3. *Her* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathbb{HN}$ *için*

- $\mathfrak{a}(\mathfrak{bc}) = (\mathfrak{ab})\mathfrak{c}$,
- $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{ab} + \mathfrak{ac}$,
- $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{ab} + \mathfrak{bc}$,
- $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$

özellikleri sağlandığından ve $1 = 1 + 0E_1 + 0E_2 + 0E_1E_2 \in \mathbb{HN}$ *olduğundan hiper sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır. Ayrıca her* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için*

$$\lambda(\mathfrak{ab}) = (\lambda\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(\lambda\mathfrak{b})$$

özelliği de sağlandığından hiper sayılar kümesi birimli, değişmeli ve birleşmeli bir cebirdir.

5.1.1 Hiper Sayıların Matris Temsili

$\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2$ bir hiper sayı olsun. Her $\mathfrak{a} \in \mathbb{HN}$ için

$$\begin{aligned} \upsilon_{\mathfrak{a}} : \mathbb{HN} &\to \mathbb{HN} \\ \mathfrak{a} &\to \upsilon_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \end{aligned}$$

lineer dönüşümü tanımlansın. $\mathbb{HN} = Sp\{1, E_1, E_2, E_1E_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \upsilon_{\mathfrak{a}}(1) &= a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2, \\ \upsilon_{\mathfrak{a}}(E_1) &= \eta a_2 + a_1E_1 + \eta a_4E_2 + a_3E_1E_2, \\ \upsilon_{\mathfrak{a}}(E_2) &= \xi a_3 + \xi a_4E_1 + a_1E_2 + a_2E_1E_2, \\ \upsilon_{\mathfrak{a}}(E_1E_2) &= \eta\xi a_4 + \xi a_3E_1 + \eta a_2E_2 + a_1E_1E_2 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla $\upsilon_{\mathfrak{a}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\Upsilon(\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} a_1 & \eta a_2 & \xi a_3 & \eta\xi a_4 \\ a_2 & a_1 & \xi a_4 & \xi a_3 \\ a_3 & \eta a_4 & a_1 & \eta a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2$ hiper sayı olmak üzere $\Upsilon(\mathfrak{a})$ matrisinin determinantı

$$\det \Upsilon(\mathfrak{a}) = (a_1^2 + \eta a_2^2 - \xi a_3^2 - \eta\xi a_4^2)^2 - 4\eta(a_1a_2 - \xi a_3a_4)^2$$

olarak hesaplanır.

Teorem 5.1. *$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{HN}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i. $\Upsilon(\mathfrak{a}) = \Upsilon(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$,

ii. $\Upsilon(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \Upsilon(\mathfrak{a}) + \Upsilon(\mathfrak{b})$,

iii. $\Upsilon(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \Upsilon(\mathfrak{a})\Upsilon(\mathfrak{b})$,

iv. $\Upsilon(\lambda\mathfrak{a}) = \lambda\Upsilon(\mathfrak{a})$,

v. I_4 birim matris olmak üzere $\Upsilon(1) = I_4$ şeklindedir.

İspat. $i, ii, \ldots, v$ özellikleri (5.1) eşitliğinden yararlanarak gösterilebilir. ■

Tanım 5.7. $\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2$ bir hiper sayı olsun. $\mathfrak{a}$ hiper sayısının vektör temsili

$$\vec{\mathfrak{a}} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^t \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Lemma 5.1. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{HN}$ *olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i. $\overrightarrow{\mathfrak{ab}} = \Upsilon(\mathfrak{a})\vec{\mathfrak{b}}$,

ii. $\overrightarrow{\mathfrak{ab}} = \Upsilon(\mathfrak{b})\vec{\mathfrak{a}}$.

İspat. $\mathfrak{a} = a_1 + a_2E_1 + a_3E_2 + a_4E_1E_2$ ve $\mathfrak{b} = b_1 + b_2E_1 + b_3E_2 + b_4E_1E_2$ hiper sayılar olsun.

i. $\mathfrak{a}$ ve $\mathfrak{b}$ hiper sayılarının çarpımı

$$\begin{aligned}\mathfrak{ab} &= a_1b_1 + \eta a_2b_2 + \xi a_3b_3 + \eta\xi a_4b_4 + (a_1b_2 + a_2b_1 + \xi a_3b_4 + \xi a_4b_3)E_1 \\ &\quad + (a_1b_3 + \eta a_2b_4 + a_3b_1 + \eta a_4b_2)E_2 + (a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1)E_1E_2\end{aligned}$$

olup $\mathfrak{ab}$ çarpımının vektör temsili

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathfrak{ab}} = (&a_1b_1 + \eta a_2b_2 + \xi a_3b_3 + \eta\xi a_4b_4, a_1b_2 + a_2b_1 + \xi a_3b_4 + \xi a_4b_3, \\ &a_1b_3 + \eta a_2b_4 + a_3b_1 + \eta a_4b_2, a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1)\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$\overrightarrow{\mathfrak{ab}} = \begin{pmatrix} a_1 & \eta a_2 & \xi a_3 & \eta\xi a_4 \\ a_2 & a_1 & \xi a_4 & \xi a_3 \\ a_3 & \eta a_4 & a_1 & \eta a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Böylece

$$\overrightarrow{\mathfrak{ab}} = \Upsilon(\mathfrak{a})\vec{\mathfrak{b}}$$

elde edilir.

ii özelliği (5.1) eşitliği kullanılarak benzer şekilde gösterilebilir. ■

5.2 Hiper Sayı Katsayılı Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

Tanım 5.8. $\mathfrak{a}^1, \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4$ hiper sayılar olmak üzere $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ ifadesine *hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon* denir ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$i^2 = -\alpha,\ j^2 = -\beta,\ k^2 = -\alpha\beta,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = \beta i,\ ki = -ik = \alpha j$$

eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca $r = 1, 2, 3, 4$ için $\mathfrak{a}^r = a_1^r + a_2^r E_1 + a_3^r E_2 + a_4^r E_1 E_2$ bir hiper sayı ve

$$E_1^2 = \eta,\ E_2^2 = \xi,\ (E_1 E_2)^2 = \eta\xi \tag{5.2}$$

olmak üzere bir $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonu

$$\begin{aligned}\mathfrak{q} = {} & a_1^1 + a_2^1 E_1 + a_3^1 E_2 + a_4^1 E_1 E_2 + (a_1^2 + a_2^2 E_1 + a_3^2 E_2 + a_4^2 E_1 E_2) i \\ & + (a_1^3 + a_2^3 E_1 + a_3^3 E_2 + a_4^3 E_1 E_2) j + (a_1^4 + a_2^4 E_1 + a_3^4 E_2 + a_4^4 E_1 E_2) k\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 5.9. Hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonların kümesi $\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ ile gösterilir ve

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} = \left\{ \mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k : \mathfrak{a}^1, \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4 \in \mathbb{HN} \right\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 5.10. Bir $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonunun $S_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{a}^1$ *skaler kısmı*, $V_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ *vektörel kısmı* olarak tanımlanır. Böylece bir $\mathfrak{q}$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon $\mathfrak{q} = S_{\mathfrak{q}} + V_{\mathfrak{q}}$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 5.11. $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ ve $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}^1 + \mathfrak{b}^2 i + \mathfrak{b}^3 j + \mathfrak{b}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlarının eşit olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{a}^3 = \mathfrak{b}^3$ ve $\mathfrak{a}^4 = \mathfrak{b}^4$ olmasıdır.

Tanım 5.12. $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ ve $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}^1 + \mathfrak{b}^2 i + \mathfrak{b}^3 j + \mathfrak{b}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlarının toplamı

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{p} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{b}^1 + (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2) i + (\mathfrak{a}^3 + \mathfrak{b}^3) j + (\mathfrak{a}^4 + \mathfrak{b}^4) k$$

ile tanımlıdır.

Sonuç 5.4. $(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}, +)$ *ikilisi bir Abel gruptur.*

Tanım 5.13. Bir $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonun $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} \\ (\lambda, \mathfrak{q}) &\to \lambda \bullet \mathfrak{q} = \lambda\mathfrak{q} \end{aligned}$$

ile tanımlı olup

$$\lambda\mathfrak{q} = (\lambda\mathfrak{a}^1) + (\lambda\mathfrak{a}^2)i + (\lambda\mathfrak{a}^3)j + (\lambda\mathfrak{a}^4)k$$

biçimindedir.

Sonuç 5.5. $\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$*, reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.*

Tanım 5.14. $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ ve $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}^1 + \mathfrak{b}^2 i + \mathfrak{b}^3 j + \mathfrak{b}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} \otimes : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} \times \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} \\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) &\to \mathfrak{q} \otimes \mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathfrak{p} \end{aligned}$$

ile tanımlıdır ve

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1 - \alpha\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - \beta\mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^3 - \alpha\beta\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^4) + (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^1 + \beta\mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^4 - \beta\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^3)i \\ + (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^3 - \alpha\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^4 + \mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^1 + \alpha\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^2)j + (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^4 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^3 - \mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^1)k \end{aligned}$$

şeklindedir.

Sonuç 5.6. $(\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}, +, \otimes)$ *üçlüsü birimli bir halkadır.*

Tanım 5.15. Bir $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonun eşleniği

$$\overline{\mathfrak{q}} = \mathfrak{a}^1 - \mathfrak{a}^2 i - \mathfrak{a}^3 j - \mathfrak{a}^4 k$$

ile tanımlanır.

Tanım 5.16. Bir $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonun normu $\|\mathfrak{q}\|$ ile gösterilir ve

$$\|\mathfrak{q}\|^2 = |(\mathfrak{a}^1)^2 + \alpha(\mathfrak{a}^2)^2 + \beta(\mathfrak{a}^3)^2 + \alpha\beta(\mathfrak{a}^4)^2|$$

şeklindedir.

Tanım 5.17. $\mathfrak{q} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ olsun. $\|\mathfrak{q}\| \neq 0$ olmak üzere $\mathfrak{q}$ hiper sayı katsayılı

genelleştirilmiş kuaterniyonun tersi

$$\mathfrak{q}^{-1} = \frac{\overline{\mathfrak{q}}}{\|\mathfrak{q}\|^2}$$

ile tanımlanır.

Not 5.1. $s = 1, 2, 3, 4$ için $q_s = a_s^1 + a_s^2 i + a_s^3 j + a_s^4 k$ ile reel genelleştirilmiş kuaterniyonlar gösterilsin. Bir $\mathfrak{q}$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonu reel genelleştirilmiş kuaterniyonlar ile hiper sayı baz elemanlarının lineer birleşimi olarak

$$\mathfrak{q} = q_1 + q_2 E_1 + q_3 E_2 + q_4 E_1 E_2$$

şeklinde ifade edilebilir. Bir hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonun bu ifadesi ve hiper sayı bazının

$$E_1^2 = \eta,\ E_2^2 = \xi,\ (E_1 E_2)^2 = \eta\xi$$

özellikleri aracılığıyla farklı genelleştirmeler elde edilir. Eğer

1. $\eta = \xi = -1$ ise bikompleks genelleştirilmiş kuaterniyonlar,
2. $\eta = \xi = 1$ ise hiper duble genelleştirilmiş kuaterniyonlar,
3. $\eta = \xi = 0$ ise hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar elde edilir.

Ayrıca $\mathfrak{q} = q_1 + q_2 E_1 + q_3 E_2 + q_4 E_1 E_2$ ve $\mathfrak{p} = p_1 + p_2 E_1 + p_3 E_2 + p_4 E_1 E_2$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlarının toplamı ve çarpımı sırasıyla

$$\mathfrak{q} + \mathfrak{p} = q_1 + p_1 + (q_2 + p_2)E_1 + (q_3 + p_3)E_2 + (q_4 + p_4)E_1 E_2$$

ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}\mathfrak{p} = {} & q_1 p_1 + \eta q_2 p_2 + \xi q_3 p_3 + \eta\xi q_4 p_4 + (q_1 p_2 + q_2 p_1 + \xi q_3 p_4 + \xi q_4 p_3)E_1 \\ & + (q_1 p_3 + \eta q_2 p_4 + q_3 p_1 + \eta q_4 p_2)E_2 + (q_1 p_4 + q_2 p_3 + q_3 p_2 + q_4 p_1)E_1 E_2\end{aligned}$$

ile tanımlanır.

5.2.1 Hiper Sayı Katsayılı Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Matris Temsilleri

q_1, q_2, q_3, q_4 reel genelleştirilmiş kuaterniyonlar olmak üzere $\mathfrak{q} = q_1 + q_2E_1 + q_3E_2 + q_4E_1E_2 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\mathfrak{q}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} \\ \mathfrak{p} &\to \mathfrak{L}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\mathfrak{p} \end{aligned}$$

lineer dönüşümüne $\{1, E_1, E_2, E_1E_2\}$ bazına karşılık gelen matris

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} q_1 & \eta q_2 & \xi q_3 & \eta\xi q_4 \\ q_2 & q_1 & \xi q_4 & \xi q_3 \\ q_3 & \eta q_4 & q_1 & \eta q_2 \\ q_4 & q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

4×4 tipinde bir reel genelleştirilmiş kuaterniyon matristir.

5.2.1.1 Hiper Sayı Katsayılı Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Hiper Sayı Matris Temsilleri

$\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ bir hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon olsun.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathfrak{q}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} \\ \mathfrak{p} &\to \mathscr{L}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\mathfrak{p} \end{aligned}$$

lineer dönüşümü verilsin. Bu lineer dönüşümün $\{1, i, j, k\}$ bazına karşılık gelen 4×4 tipinde hiper sayı matris temsili

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{HN}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^1 & -\alpha\mathfrak{a}^2 & -\beta\mathfrak{a}^3 & -\alpha\beta\mathfrak{a}^4 \\ \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}^1 & -\beta\mathfrak{a}^4 & \beta\mathfrak{a}^3 \\ \mathfrak{a}^3 & \alpha\mathfrak{a}^4 & \mathfrak{a}^1 & -\alpha\mathfrak{a}^2 \\ \mathfrak{a}^4 & -\mathfrak{a}^3 & \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}^1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde bir $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ için

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_{\mathfrak{q}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} \\ \mathfrak{p} &\to R_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\mathfrak{q} \end{aligned}$$

lineer dönüşümün $\{1, i, j, k\}$ bazına karşılık gelen 4×4 tipinde hiper sayı matris

temsili

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{HN}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^1 & -\alpha\mathfrak{a}^2 & -\beta\mathfrak{a}^3 & -\alpha\beta\mathfrak{a}^4 \\ \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}^1 & \beta\mathfrak{a}^4 & -\beta\mathfrak{a}^3 \\ \mathfrak{a}^3 & -\alpha\mathfrak{a}^4 & \mathfrak{a}^1 & \alpha\mathfrak{a}^2 \\ \mathfrak{a}^4 & \mathfrak{a}^3 & -\mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}^1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{HN})$ ve $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{HN})$ matrisleri, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $r = 1, 2, 3, 4$ için

$$\mathfrak{a}^r = a_1^r + a_2^r E_1 + a_3^r E_2 + a_4^r E_1 E_2$$

formundaki hiper sayılardan oluşmaktadır. Ayrıca $s = 1, 2, 3, 4$ için

$$q_s = a_s^1 + a_s^2 i + a_s^3 j + a_s^4 k$$

reel genelleştirilmiş kuaterniyonlar olmak üzere, herhangi bir $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonu

$$\mathfrak{a} = q_1 + q_2 E_1 + q_3 E_2 + q_4 E_1 E_2$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{HN})$ ve $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{HN})$ matrisleri bir q reel genelleştirilmiş kuaterniyonuna karşılık gelen A_{L_q} ve A_{R_q} matris temsilleri yardımıyla sırasıyla

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{HN}) = A_{L_{q_1}} + A_{L_{q_2}} E_1 + A_{L_{q_3}} E_2 + A_{L_{q_4}} E_1 E_2$$

ve

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{HN}) = A_{R_{q_1}} + A_{R_{q_2}} E_1 + A_{R_{q_3}} E_2 + A_{R_{q_4}} E_1 E_2$$

şeklinde yazılabilir.

5.2.1.2 Hiper Sayı Katsayılı Genelleştirilmiş Kuaterniyonların Reel Matris Temsilleri

$\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ bir hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon olsun. $r = 1, 2, 3, 4$ için

$$\mathfrak{a}^r = a_1^r + a_2^r E_1 + a_3^r E_2 + a_4^r E_1 E_2$$

formunda olduğundan $\mathfrak{q}$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon

$$\begin{aligned} \mathfrak{q} = {} & a_1^1 + a_2^1 E_1 + a_3^1 E_2 + a_4^1 E_1 E_2 + (a_1^2 + a_2^2 E_1 + a_3^2 E_2 + a_4^2 E_1 E_2) i \\ & + (a_1^3 + a_2^3 E_1 + a_3^3 E_2 + a_4^3 E_1 E_2) j + (a_1^4 + a_2^4 E_1 + a_3^4 E_2 + a_4^4 E_1 E_2) k \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathfrak{q}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} \\ \mathfrak{p} &\to \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\mathfrak{p}\end{aligned}$$

lineer dönüşümünün

$$\{1, E_1, E_2, E_1E_2, i, iE_1, iE_2, iE_1E_2, j, jE_1, jE_2, jE_1E_2, k, kE_1, kE_2, kE_1E_2\}$$

bazına karşılık gelen matris

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} \Upsilon(\mathfrak{a}^1) & -\alpha\Upsilon(\mathfrak{a}^2) & -\beta\Upsilon(\mathfrak{a}^3) & -\alpha\beta\Upsilon(\mathfrak{a}^4) \\ \Upsilon(\mathfrak{a}^2) & \Upsilon(\mathfrak{a}^1) & -\beta\Upsilon(\mathfrak{a}^4) & \beta\Upsilon(\mathfrak{a}^3) \\ \Upsilon(\mathfrak{a}^3) & \alpha\Upsilon(\mathfrak{a}^4) & \Upsilon(\mathfrak{a}^1) & -\alpha\Upsilon(\mathfrak{a}^2) \\ \Upsilon(\mathfrak{a}^4) & -\Upsilon(\mathfrak{a}^3) & \Upsilon(\mathfrak{a}^2) & \Upsilon(\mathfrak{a}^1) \end{pmatrix}$$

olarak ifade edilir. Burada $\Upsilon(\mathfrak{a}^r)$, $r = 1, 2, 3, 4$ için $\mathfrak{a}^r$ hiper sayısına karşılık gelen 4×4 tipinde reel matris temsilidir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathfrak{q}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} &\to \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN} \\ \mathfrak{p} &\to \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\end{aligned}$$

lineer dönüşümünün

$$\{1, E_1, E_2, E_1E_2, i, iE_1, iE_2, iE_1E_2, j, jE_1, jE_2, jE_1E_2, k, kE_1, kE_2, kE_1E_2\}$$

bazına karşılık gelen matris

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} \Upsilon(\mathfrak{a}^1) & -\alpha\Upsilon(\mathfrak{a}^2) & -\beta\Upsilon(\mathfrak{a}^3) & -\alpha\beta\Upsilon(\mathfrak{a}^4) \\ \Upsilon(\mathfrak{a}^2) & \Upsilon(\mathfrak{a}^1) & \beta\Upsilon(\mathfrak{a}^4) & -\beta\Upsilon(\mathfrak{a}^3) \\ \Upsilon(\mathfrak{a}^3) & -\alpha\Upsilon(\mathfrak{a}^4) & \Upsilon(\mathfrak{a}^1) & \alpha\Upsilon(\mathfrak{a}^2) \\ \Upsilon(\mathfrak{a}^4) & \Upsilon(\mathfrak{a}^3) & -\Upsilon(\mathfrak{a}^2) & \Upsilon(\mathfrak{a}^1) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

$\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ için $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{HN})$ ve $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{R})$ matrisleri tek bir

matrisle,

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(A^t)=\begin{pmatrix} A^1 & -\alpha A^2 & -\beta A^3 & -\alpha\beta A^4 \\ A^2 & A^1 & -\beta A^4 & \beta A^3 \\ A^3 & \alpha A^4 & A^1 & -\alpha A^2 \\ A^4 & -A^3 & A^2 & A^1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

matrisi ile temsil edilir. Benzer şekilde, $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{HN})$ ve $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{R})$ matrisleri tek bir matrisle,

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(A^t)=\begin{pmatrix} A^1 & -\alpha A^2 & -\beta A^3 & -\alpha\beta A^4 \\ A^2 & A^1 & \beta A^4 & -\beta A^3 \\ A^3 & -\alpha A^4 & A^1 & \alpha A^2 \\ A^4 & A^3 & -A^2 & A^1 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

matrisi ile temsil edilir.

$\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(A^t)$ ve $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(A^t)$ matrislerinde $t=1,2,3,4$ için eğer $A^t=\mathfrak{a}^t$ alınırsa hiper sayı matris temsilleri olan $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{HN})$ ve $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{HN})$ matrisleri bulunur. Eğer $A^t=\Upsilon(\mathfrak{a}^t)$ olarak alınırsa reel matris temsilleri olan $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{R})$ ve $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(\mathbb{R})$ matrisleri elde edilir.

Lemma 5.2. *$\mathfrak{q},\mathfrak{p}\in\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ ve λ skaler olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:*

i. $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\Leftrightarrow\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(A^t)=\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}^{+}(A^t)\Leftrightarrow\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(A^t)=\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}^{-}(A^t)$,

ii. $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}+\mathfrak{p}}^{+}(A^t)=\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(A^t)+\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}^{+}(A^t),\ \mathcal{M}_{\mathfrak{q}+\mathfrak{p}}^{-}(A^t)=\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(A^t)+\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}^{-}(A^t)$,

iii. $\mathcal{M}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}}^{+}(A^t)=\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(A^t)\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}^{+}(A^t),\ \mathcal{M}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}}^{-}(A^t)=\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}^{-}(A^t)\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(A^t)$,

iv. $\mathcal{M}_{\lambda\mathfrak{q}}^{+}(A^t)=\lambda\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(A^t),\ \mathcal{M}_{\lambda\mathfrak{q}}^{-}(A^t)=\lambda\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{-}(A^t)$,

v. *I birim matris olmak üzere;* $\mathcal{M}_{1}^{+}(A^t)=I,\ \mathcal{M}_{1}^{-}(A^t)=I$ *dir.*

İspat. Yukarıda sunulan özellikler (5.3) ve (5.4) eşitliklerinden yararlanarak kolaylıkla gösterilebilir. ■

Tanım 5.18. $\mathfrak{q}=q_1+q_2E_1+q_3E_2+q_4E_1E_2\in\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ olsun. $\mathfrak{q}$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonun vektör temsili

$$\vec{\mathfrak{q}}=(q_1,q_2,q_3,q_4)^t\in M_{4\times1}(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$$

ile gösterilir.

Lemma 5.3. $\mathfrak{q}=q_1+q_2E_1+q_3E_2+q_4E_1E_2$ *ve* $\mathfrak{p}=p_1+p_2E_1+p_3E_2+p_4E_1E_2$ *hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun. O halde*

$$\overrightarrow{\mathfrak{q}\mathfrak{p}}=\mathcal{M}_{\mathfrak{q}}(\mathbb{H}_{\alpha\beta})\vec{\mathfrak{p}}$$

sağlanır.

İspat. Lemma 5.1'in ispatına benzer şekilde gösterilebilir. ■

Tanım 5.19. $\mathfrak{a}^1, \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4$ hiper sayılar olmak üzere $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ olsun. $\mathfrak{q}$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonun vektör temsili

$$\vec{\mathfrak{q}} = (\mathfrak{a}^1, \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4)^t \in M_{4\times 1}(\mathbb{HN})$$

ile gösterilir.

Lemma 5.4. *$\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ ve $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}^1 + \mathfrak{b}^2 i + \mathfrak{b}^3 j + \mathfrak{b}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun. O halde her $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$ için aşağıdakiler sağlanır:*

i. $\overrightarrow{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{HN})\vec{\mathfrak{p}}$,

ii. $\overrightarrow{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}^{-}(\mathbb{HN})\vec{\mathfrak{q}}$.

İspat. $r = 1, 2, 3, 4$ için $\mathfrak{a}^r, \mathfrak{b}^r$ hiper sayılar olmak üzere $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ ve $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}^1 + \mathfrak{b}^2 i + \mathfrak{b}^3 j + \mathfrak{b}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar olsun.

i. $\mathfrak{q}$ ve $\mathfrak{q}$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}\mathfrak{p} = {} & (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1 - \alpha\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - \beta\mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^3 - \alpha\beta\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^4) + (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^1 + \beta\mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^4 - \beta\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^3)i \\ & + (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^3 - \alpha\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^4 + \mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^1 + \alpha\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^2)j + (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^4 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^3 - \mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^1)k\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} = {} & (\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1 - \alpha\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - \beta\mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^3 - \alpha\beta\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^4, \mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^1 + \beta\mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^4 - \beta\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^3, \\ & \mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^3 - \alpha\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^4 + \mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^1 + \alpha\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^2, \mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^4 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^3 - \mathfrak{a}^3\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{a}^4\mathfrak{b}^1)\end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir. Buradan

$$\overrightarrow{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^1 & -\alpha\mathfrak{a}^2 & -\beta\mathfrak{a}^3 & -\alpha\beta\mathfrak{a}^4 \\ \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}^1 & -\beta\mathfrak{a}^4 & \beta\mathfrak{a}^3 \\ \mathfrak{a}^3 & \alpha\mathfrak{a}^4 & \mathfrak{a}^1 & -\alpha\mathfrak{a}^2 \\ \mathfrak{a}^4 & -\mathfrak{a}^3 & \mathfrak{a}^2 & \mathfrak{a}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{b}^1 \\ \mathfrak{b}^2 \\ \mathfrak{b}^3 \\ \mathfrak{b}^4 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Böylece

$$\overrightarrow{\mathfrak{q}\mathfrak{p}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{q}}^{+}(\mathbb{HN})\vec{\mathfrak{p}}$$

elde edilir.

ii özelliği benzer şekilde gösterilebilir. ■

Not 5.2. Bölüm 5.1'de $\mathfrak{a}^r$ hiper sayısı, $r = 1, 2, 3, 4$ için $a_1^r, a_2^r, a_3^r, a_4^r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathfrak{a}^r = a_1^r + a_2^r E_1 + a_3^r E_2 + a_4^r E_1 E_2$$

formunda ve

$$E_1^2 = \eta,\ E_2^2 = \xi,\ (E_1 E_2)^2 = \eta\xi$$

özellikleri ile verilmiştir. Bölüm 5.2'de $\mathfrak{a}^1, \mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}^3, \mathfrak{a}^4$ hiper sayılar olmak üzere $\mathfrak{q} = \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{a}^2 i + \mathfrak{a}^3 j + \mathfrak{a}^4 k$ hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$i^2 = -\alpha,\ j^2 = -\beta,\ k^2 = -\alpha\beta,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = \beta i,\ ki = -ik = \alpha j$$

özellikleri ile sunulmuştur. Ayrıca her hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyon E_1, E_2 ve $E_1 E_2$ hiper sayı elemanları ile de ifade edilmiştir.

Bu genelleştirme sayesinde farklı kuaterniyon çeşitlerine ulaşılabilir. Örneğin; $\eta = \xi = 0$ olmak üzere, eğer $\alpha = \beta = 1$ ise [61] çalışmasındaki hiper dual kuaterniyonlar, eğer $\alpha = 1, \beta = -1$ ise [62] çalışmasındaki hiper dual split kuaterniyonlar bulunur.

Ayrıca bu genelleştirme kullanılarak literatürde bilinen kompleks, hiperbolik ve dual katsayılı farklı kuaterniyon çeşitleri de elde edilebilir. Örneğin;

- $a_3^r = a_4^r = 0$ (ya da $a_2^r = a_4^r = 0$) ve $\eta = -1$ (ya da $\xi = -1$) ise kompleks sayılar bulunur. Bununla birlikte eğer $\alpha = \beta = 1$ ise [2] çalışmasında tanımlı kompleks kuaterniyonlar (bikuaterniyonlar) elde edilir.
- $a_3^r = a_4^r = 0$ (ya da $a_2^r = a_4^r = 0$) ve $\eta = 1$ (ya da $\xi = 1$) ise hiperbolik (duble) sayılar bulunur. Bununla birlikte eğer $\alpha = 1, \beta = -1$ ise [38] çalışmasında tanımlı hiperbolik split kuaterniyonlar elde edilir. Burada eğer $\alpha = -1, \beta = 0$ ise [51] çalışmasında tanımlı hiperbolik split semi kuaterniyonlar elde edilir.
- $a_3^r = a_4^r = 0$ (ya da $a_2^r = a_4^r = 0$) ve $\eta = 0$ (ya da $\xi = 0$) ise dual sayılar elde edilir. Böylece hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar [59] çalışmasındaki dual genelleştirilmiş kuaterniyonlara indirgenir.

Not 5.3. Hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar için hiper sayı elemanlar $E_1, E_2, E_1 E_2$ ile genelleştirilmiş kuaterniyon baz elemanları $1, i, j, k$ değişmelidir.

[35] çalışmasında $a = a_1 + \mathbf{i}a_2$, $b = b_1 + \mathbf{i}b_2$, $c = c_1 + \mathbf{i}c_2$ and $d = d_1 + \mathbf{i}d_2$ kompleks sayılar olmak üzere bir $q = a + bi + cj + dk$ kompleks split kuaterniyonu için kompleks birim $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}j \neq j\mathbf{i}$ olacak şekilde split kuaterniyon baz elemanları ile değişmeli değildir. Bu sebeple literatürde [35] çalışmasında tanımlı kompleks split kuaterniyonlar bu genelleştirmeye dahil değildir.

6
$\mathbb{H}_\beta$ ELEMANLI BİR MATRİSİN j-ÖZDEĞERİNİN BULUNMASI

Çalışmanın orijinal kısımlarından birisini oluşturan bu bölümde, reel kuaterniyon ve split kuaterniyon matrislerin genelleştirmesi olan $\mathbb{H}_\beta$ elemanlı matrisler üzerinde çalışılmıştır. Burada, $\mathbb{H}_\beta$ elemanlı $n \times n$ tipinde bir matrisin j-özdeğer ve j-özvektörlerinin $2n \times 2n$ tipindeki kompleks matris temsili ile bulunması araştırılmıştır. Ardından $\mathbb{H}_\beta$ elemanlı bir matrisin j-özdeğerinin $4n \times 4n$ tipindeki reel matris temsili yardımıyla elde edilmesi incelenmiştir.

6.1 Bir Matrisin j-Özdeğer ve j-Özvektörlerinin Kompleks Matris Temsili ile Bulunması

Tanım 6.1. $B_1, B_2, B_3, B_4 \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ve $A_1 = B_1 + B_2 i$, $A_2 = B_3 + B_4 i \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = B_1 + B_2 i + B_3 j + B_4 k = A_1 + A_2 j \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. $2m \times 2n$ tipindeki

$$G(A) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\beta\overline{A}_2 & \overline{A}_1 \end{pmatrix}$$

kompleks matrisine A matrisinin *kompleks adjoint matrisi* denir ve bu matris $G(A)$ ile gösterilir.

Teorem 6.1. *Her $A, B \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i. $G(I_n) = I_{2n}$,

ii. $G(A + B) = G(A) + G(B)$,

iii. $G(AB) = G(A)G(B)$,

iv. Eğer A matrisi tersinir ise $\big(G(A)\big)^{-1} = G(A^{-1})$.

İspat. A_1, A_2, B_1, B_2 matrisleri $n \times n$ tipinde kompleks matrisler olmak üzere $A = A_1 + A_2 j,\ B = B_1 + B_2 j \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun.

i. Bir I_n birim matrisi $I_n = I_n + 0_n j$ biçiminde yazılabilir. Böylece I_n birim matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$G(I_n) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

olarak bulunur.

ii. $A + B = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2)j$ olup kompleks adjoint matris tanımı gereğince

$$\begin{aligned} G(A+B) &= \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ -\beta(\overline{A_2 + B_2}) & \overline{A_1 + B_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\beta\overline{A}_2 & \overline{A}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\beta\overline{B}_2 & \overline{B}_1 \end{pmatrix} \\ &= G(A) + G(B) \end{aligned}$$

bulunur.

iii. $AB = A_1B_1 - \beta A_2\overline{B_2} + (A_1B_2 + A_2\overline{B_1})j$ olduğundan AB matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$\begin{aligned} G(AB) &= \begin{pmatrix} A_1B_1 - \beta A_2\overline{B_2} & A_1B_2 + A_2\overline{B_1} \\ -\beta(\overline{A_1B_2 + A_2\overline{B_1}}) & \overline{A_1B_1 - \beta A_2\overline{B_2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1B_1 - \beta A_2\overline{B_2} & A_1B_2 + A_2\overline{B_1} \\ -\beta(\overline{A_1}\,\overline{B_2} + \overline{A_2}B_1) & \overline{A_1}\,\overline{B_1} - \beta\overline{A_2}B_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\beta\overline{A}_2 & \overline{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\beta\overline{B}_2 & \overline{B}_1 \end{pmatrix} \\ &= G(A)G(B) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

iv. A matrisi tersinir olsun. O halde $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ olup i ve iii özellikleri yardımıyla

$$I_{2n} = G(I_n) = G(AA^{-1}) = G(A)G(A^{-1})$$

ve

$$I_{2n} = G(I_n) = G(A^{-1}A) = G(A^{-1})G(A)$$

yazılabilir. Böylece yukarıdaki eşitliklerden

$$(G(A))^{-1} = G(A^{-1})$$

elde edilir.

■

Tanım 6.2. Bir $A = B_1 + B_2 i + B_3 j + B_4 k \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisinin j-eşleniği

$$\hat{A} = \frac{1}{\beta}(-jAj) = B_1 - B_2 i + B_3 j - B_4 k$$

biçiminde tanımlanır.

Bir $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisinin j-eşleniği ve Tanım 6.1'deki kompleks adjoint matris temsili kullanılarak aşağıdaki matrisler elde edilir.

- $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j$ matrisinin j-eşleniği $\hat{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 j$ şeklinde yazılır ve $\hat{A}$ matrisinin kompleks adjoint matrisi $2n \times 2n$ tipindeki
$$G(\hat{A}) = \begin{pmatrix} \overline{A}_1 & \overline{A}_2 \\ -\beta A_2 & A_1 \end{pmatrix}$$
bir kompleks matristir.

- $jI_n \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisi için $j^{-1} I_n = 0_n + (-\frac{1}{\beta}) I_n j$ olup
$$G(j^{-1} I_n) = \begin{pmatrix} 0_n & -\frac{1}{\beta} I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$
bulunur. $2n \times 2n$ tipindeki bu matris M_n ile gösterilsin.

- $j \in \mathbb{H}_\beta$ için
$$G(jI_n) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -\beta I_n & 0_n \end{pmatrix}$$
bulunur. $\mathbb{H}_\beta$ genelleştirmesinde reel kuaterniyon için $\beta = 1$ ve split kuaterniyon için $\beta = -1$ olduğundan $\frac{1}{\beta}$ yerine β yazılabilir ve $G(jI_n) = M_n^t$ olduğu görülür.

Tanım 6.3. $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ için

$$Aj^{-1} = A_2 - \frac{1}{\beta} A_1 j$$

biçimindedir.

Yukarıda tanımlanan $Aj^{-1} = A_2 - \frac{1}{\beta}A_1 j$ matrisinin kompleks adjoint matrisi

$$\begin{pmatrix} A_2 & -\frac{1}{\beta}A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_2} \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır ve bu matris A^g ile gösterilir.

Teorem 6.2. *Her $A, B \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ ve $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i. $M_n^t A^g M_n = \overline{A^g} = (\hat{A})^g$,

ii. $(A+B)^g = A^g + B^g$,

iii. $(AB)^g = A^g M_n^t B^g = A^g (\hat{B})^g M_n^t = M_n^t (\hat{A})^g B^g$,

iv. $(aA)^g = aA^g$,

v. $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ *olsun.* A *matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul* A^g *matrisinin tersinir olmasıdır.*

İspat. i. $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. A matrisinin A^g kompleks matris temsili

$$A^g = \begin{pmatrix} A_2 & -\frac{1}{\beta}A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_2} \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca A matrisinin j-eşleniği $\hat{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 j$ olarak yazılabildiğinden $\hat{A}$ matrisinin kompleks matris temsili

$$(\hat{A})^g = \begin{pmatrix} \overline{A}_2 & -\frac{1}{\beta}\overline{A}_1 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Böylece

$$M_n = \begin{pmatrix} 0_n & -\frac{1}{\beta}I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$M_n^t A^g M_n = \overline{A^g} = (\hat{A})^g$$

olduğu görülür.

ii. $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j$, $B = B_1 + B_2 j \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. $A + B = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2)j$ olduğundan

$$\begin{aligned}(A+B)^g &= \begin{pmatrix} A_2 + B_2 & -\frac{1}{\beta}(A_1 + B_1) \\ \overline{(A_1 + B_1)} & \overline{(A_2 + B_2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_2 & -\frac{1}{\beta}A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2 & -\frac{1}{\beta}B_1 \\ \overline{B_1} & \overline{B_2} \end{pmatrix} \\ &= A^g + B^g\end{aligned}$$

şeklindedir.

iii. $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j$, $B = B_1 + B_2 j \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. $A, B \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrislerinin AB çarpımı

$$AB = A_1B_1 - \beta A_2\overline{B_2} + (A_1B_2 + A_2\overline{B_1})j$$

olduğundan bu matrisin kompleks matris temsili

$$(AB)^g = \begin{pmatrix} A_1B_2 + A_2\overline{B_1} & -\frac{1}{\beta}(A_1B_1 - \beta A_2\overline{B_2}) \\ \overline{A_1}\,\overline{B_1} - \beta\overline{A_2}B_2 & \overline{A_1}\,\overline{B_2} + \overline{A_2}B_1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. A ve B matrislerinin j-eşlenikleri ve Tanım 6.3 kullanılarak

$$(AB)^g = A^g M_n^t B^g = A^g(\hat{B})^g M_n^t = M_n^t(\hat{A})^g B^g$$

olduğu kolaylıkla görülür.

iv. $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ ve $a \in \mathbb{R}$ için Tanım 6.3 yardımıyla

$$(aA)^g = aA^g$$

olduğu kolaylıkla görülür.

v. $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisi tersinir olsun. O halde $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ yazılabilir.

i ve iii özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(AA^{-1})^g &= A^g M_n^t (A^{-1})^g \\ &= A^g [\widehat{(A^{-1})}]^g M_n^t \\ &= M_n^t (\hat{A})^g (A^{-1})^g \\ &= M_n^t (M_n^t A^g M_n)(A^{-1})^g \\ &= (M_n^t)^2 A^g M_n (A^{-1})^g \\ &= -\beta A^g M_n (A^{-1})^g\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(I_n)^g = M_n$ olduğundan

$$-\beta A^g M_n (A^{-1})^g = M_n$$

yazılır. Bu eşitlik sağdan M_n ile çarpıldığında

$$\beta^2 A^g M_n (A^{-1})^g M_n = I_n$$

elde edilir. $\beta^2 = 1$ olduğundan bu eşitlik

$$A^g \big(M_n (A^{-1})^g M_n\big) = I_n$$

olarak bulunur. Böylece A^g matrisinin tersinir olduğu görülür.

■

Tanım 6.4. $a_1, a_2 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ olmak üzere $a = (a_1^t, a_2^t)^t \in M_{2n\times 1}(\mathbb{C})$ olsun. $a^c = (-\beta\overline{a_2}^t, \overline{a_1}^t)^t \in M_{2n\times 1}(\mathbb{C})$ vektörüne a vektörünün *kompanion vektörü* denir.

Teorem 6.3. *$a, b \in M_{2n\times 1}(\mathbb{C})$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i. $(a+b)^c = a^c + b^c$,

ii. $(a^c)^c = -\beta a$,

iii. $(A^g a)^c = A^g a^c$,

iv. $(a\lambda)^c = a^c\overline{\lambda},\ (\lambda a)^c = \overline{\lambda} a^c$.

İspat. i, ii ve iv özellikleri Tanım 6.4 yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

iii. $a_1, a_2 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ olmak üzere $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in M_{2n\times 1}(\mathbb{C})$ ve $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j$ matrisinin $2n \times 2n$

tipindeki kompleks matris temsili

$$A^g = \begin{pmatrix} A_2 & -\frac{1}{\beta}A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_2} \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. Buradan

$$\begin{aligned} A^g a &= \begin{pmatrix} A_2 & -\frac{1}{\beta}A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_2 a_1 - \frac{1}{\beta}A_1 a_2 \\ \overline{A_1} a_1 + \overline{A_2} a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup

$$(A^g a)^c = \begin{pmatrix} -\beta(A_1\overline{a_1} + A_2\overline{a_2}) \\ \overline{A_2}\overline{a_1} - \frac{1}{\beta}\overline{A_1}\overline{a_2} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} A^g a^c &= \begin{pmatrix} A_2 & -\frac{1}{\beta}A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta\overline{a_2} \\ \overline{a_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta A_2\overline{a_2} - \frac{1}{\beta}A_1\overline{a_1} \\ -\beta\overline{A_1}\overline{a_2} + \overline{A_2}\overline{a_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\beta = \pm 1$ ve $\beta^2 = 1$ olduğundan yukarıda elde edilen $A^g a^c$ matrisi

$$\begin{pmatrix} -\beta(A_2\overline{a_2} + A_1\overline{a_1}) \\ \overline{A_2}\overline{a_1} - \frac{1}{\beta}\overline{A_1}a_2 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Böylece (6.1) ve (6.2) eşitliklerinden

$$(A^g a)^c = A^g a^c$$

olduğu görülür.

■

Tanım 4.45'te bir $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi için $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\lambda}$ olacak şekilde $0 \neq \boldsymbol{X} \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta^{HD})$ matrisi varsa $\boldsymbol{\lambda}$ skaleri $\boldsymbol{A}$ matrisinin sağ j-özdeğeri ve $\boldsymbol{X}$ matrisi $\boldsymbol{\lambda}$ sağ j-özdeğerine karşılık gelen j-özvektör olarak tanımlanmıştır. Bu tanım λ skaler ve $0 \neq X \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta)$ olmak üzere bir $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisi için de geçerlidir ve burada $A\hat{X} = X\lambda$ veya $AX = \hat{X}\lambda$ eşitlikleri yazılabilir.

Tanım 6.5. Bir $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisinin sağ j-özdeğerlerinin kümesi

$$\{\lambda \in \mathbb{H}_\beta : A\hat{X} = X\lambda,\ 0 \neq X\}$$

şeklindedir ve $\hat{\sigma}_r(A)$ ile gösterilir. A matrisinin sol j-özdeğerlerinin kümesi benzer şekilde tanımlanır ve $\hat{\sigma}_l(A)$ ile gösterilir.

Teorem 6.4. *$A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. O halde $\hat{\sigma}\big(G(A)\big)$, $G(A)$ matrisinin j-özdeğerlerinin kümesi olmak üzere*

$$\hat{\sigma}_r(A) \cap \mathbb{C} = \hat{\sigma}\big(G(A)\big)$$

şeklindedir.

İspat. $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 j \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun ve λ kompleks sayısı ise A matrisinin bir sağ j-özdeğeri olsun. O halde $A\hat{X} = X\lambda$ olacak şekilde $0 \neq X \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta)$ mevcuttur. Böylece $X_1, X_2 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$(A_1 + A_2 j)(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 j) = (X_1 + X_2 j)\lambda$$

yazılabilir. Buradan

$$A_1\bar{X}_1 - \beta A_2 X_2 = X_1\lambda$$

ve

$$A_1\bar{X}_2 + A_2 X_1 = X_2\bar{\lambda}$$

elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\beta\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ -\beta X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ -\beta\bar{X}_2 \end{pmatrix}\lambda \tag{6.3}$$

matris eşitliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte yer alan $\begin{pmatrix} X_1 \\ -\beta\bar{X}_2 \end{pmatrix}$ matrisi Y ile gösterilsin. Herhangi bir Y kompleks matrisi için $\hat{Y} = \bar{Y}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $G(A)$, A matrisinin kompleks adjoint matrisi olup (6.3) eşitliği

$$G(A)\hat{Y} = Y\lambda$$

biçiminde ifade edilir. Böylece A matrisinin sağ j-özdeğerinin $G(A)$ matrisinin sağ j-özdeğeriyle denk olduğu görülür. Böylelikle

$$\hat{\sigma}_r(A) \cap \mathbb{C} = \hat{\sigma}\big(G(A)\big)$$

elde edilir. ■

$A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. A^g, A matrisinin kompleks adjoint matrisi yardımıyla elde edilen matris temsili olup λ kompleks sayısı A^g matrisinin bir özdeğeri olsun. O halde $0 \neq \gamma \in M_{2n\times 1}(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$A^g\gamma = \lambda\gamma \tag{6.4}$$

eşitliği yazılabilir. Teorem 6.3 yardımıyla

$$A^g\gamma^c = \overline{\lambda}\gamma^c \tag{6.5}$$

elde edilir. Böylece $\overline{\lambda}$ kompleks sayısının A^g matrisinin bir özdeğeri ve γ^c kompleks sayısının bu özdeğere karşılık gelen özvektör olduğu görülür. Ayrıca (6.4) eşitliğinin eşleniği

$$\overline{A^g}\overline{\gamma} = \overline{\lambda}\overline{\gamma}$$

biçimindedir. Teorem 6.2 yardımıyla

$$A^g(M_n\overline{\gamma}) = \overline{\lambda}(M_n\overline{\gamma}) \tag{6.6}$$

elde edilir. Böylece (6.4) ve (6.6) eşitliklerinden γ ile $M_n\overline{\gamma}$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğu kolaylıkla görülür.

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 6.5. *$A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. A^g kompleks matrisinin özdeğerleri λ ve $\overline{\lambda}$ şeklindedir.*

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisinin j-özdeğeri $\lambda = a + bj$ olsun. O halde $0 \neq X \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta)$ olmak üzere

$$AX = \hat{X}\lambda \tag{6.7}$$

denklemi sağlanır. Burada bir $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisinin A^g kompleks matris temsili ve Teorem 6.2'deki iii özelliği kullanılarak

$$(AX = \hat{X}\lambda)^g \Leftrightarrow A^g M_n^t X^g = M_n^t X^g \lambda^g$$

olduğu görülür.

Ardından λ^g matrisinin özdeğerleri için

$$\mid \mu I_2 - \lambda^g \mid = \begin{vmatrix} \mu - b & \frac{a}{\beta} \\ -a & \mu - b \end{vmatrix} = 0$$

eşitliğinden

$$(\mu - b)^2 + \frac{a^2}{\beta} = 0$$

elde edilir. Böylece λ^g matrisinin özdeğerleri

$$\mu_1 = b + \frac{a}{\sqrt{\beta}}i \quad \text{ve} \quad \mu_2 = b - \frac{a}{\sqrt{\beta}}i$$

olarak bulunur. Bu özdeğerler için $\mu_1 = \mu$ olarak alınırsa $\mu_2 = \overline{\mu}$ olduğu kolaylıkla görülür.

$x, y \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\chi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ olsun. O halde $\mu_1 = b + \frac{a}{\sqrt{\beta}}i$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\lambda^g \chi = \chi \mu_1$$

yani

$$\begin{pmatrix} b & -\frac{a}{\beta} \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left(b + \frac{a}{\sqrt{\beta}}i \right)$$

matris eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\beta}i \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, $\mu_2 = b - \frac{a}{\sqrt{\beta}}i$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\lambda^g \chi = \chi \mu_2$$

eşitliğinden ve

$$\begin{pmatrix} b & -\frac{a}{\beta} \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left(b - \frac{a}{\sqrt{\beta}}i \right)$$

matris eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\beta}i \\ \beta \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. Böylece $P^{-1}\lambda^g P = diag(\mu_1, \mu_2)$ olacak şekilde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\beta}i \\ -\sqrt{\beta}i & \beta \end{pmatrix}$$

tersinir matrisi elde edilir. Buradan P matrisinin determinantı $\det P = 2\beta$ olarak hesaplanır ve P matrisinin tersi

$$P^{-1} = \frac{1}{2\beta}\begin{pmatrix} \beta & \sqrt{\beta}i \\ \sqrt{\beta}i & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece λ^g matrisi

$$\lambda^g = Pdiag(\mu_1, \mu_2)P^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak

$$\lambda^g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 & \frac{1}{\sqrt{\beta}}(\mu_1 - \mu_2)i \\ \sqrt{\beta}(-\mu_1 + \mu_2)i & \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece A matrisinin j-özdeğeri olan λ, A^g kompleks matris temsilinin özdeğerleri olan μ_1 ve μ_2 kullanılarak

$$\lambda = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{\beta}i(-\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 + \mu_2)j\Big)$$

elde edilir.

A matrisinin λ j-özdeğerine karşılık gelen j-özvektör, $AX = \hat{X}\lambda$ eşitliğinin kompleks matris temsili ile bulunur. Teorem 6.2'deki iii özelliği ve $\lambda^g = Pdiag(\mu_1, \mu_2)P^{-1}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} (AX = \hat{X}\lambda)^g &\Rightarrow (AX)^g = (\hat{X}\lambda)^g \\ &\Rightarrow A^g M_n^t X^g = M_n^t X^g \lambda^g \\ &\Rightarrow A^g M_n^t X^g P = M_n^t X^g P diag(\mu_1, \mu_2) \end{aligned} \tag{6.8}$$

bulunur.

Burada $\xi_1, \xi_2 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ için $X = \xi_1 + \xi_2 j$ olsun. Böylece

$$\nu = \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} \\ -\beta\xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \nu^c = \begin{pmatrix} \overline{\xi_2} \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$M_n^t X^g P = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -\beta I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 & -\frac{1}{\beta}\xi_1 \\ \overline{\xi_1} & \overline{\xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\beta}i \\ -\sqrt{\beta}i & \beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} - \sqrt{\beta}\,\overline{\xi_2}i & \beta\overline{\xi_2} - \sqrt{\beta}\,\overline{\xi_1}i \\ -\beta\xi_2 - \sqrt{\beta}\xi_1 i & \beta\xi_1 + \beta\sqrt{\beta}\xi_2 i \end{pmatrix}$$
$$= (\nu - i\sqrt{\beta}\nu^c, \beta\nu^c - i\sqrt{\beta}\nu)$$

bulunur.

$\theta = \nu - i\sqrt{\beta}\nu^c$ ve $\varphi = \beta\nu^c - i\sqrt{\beta}\nu$ olsun. (6.8) eşitliğinden

$$A^g(\theta, \varphi) = (\theta, \varphi) \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

yazılır. Böylece

$$A^g\theta = \theta\mu_1$$

ve

$$A^g\varphi = \varphi\mu_1$$

eşitlikleri bulunur. Böylelikle

$$M_n^t X^g P = (\nu - i\sqrt{\beta}\nu^c, \beta\nu^c - i\sqrt{\beta}\nu) = (\theta, \varphi)$$

için

$$\nu = \frac{i\varphi + \sqrt{\beta}\theta}{2\sqrt{\beta}}$$

ve

$$\nu^c = \frac{i\sqrt{\beta}\theta + \varphi}{2\beta}$$

olarak hesaplanır. A matrisinin λ j-özdeğerine karşılık gelen j-özvektör

$$X = (I_n, 0)\overline{\nu} + (0, I_n)\big(-\frac{1}{\beta}\big)\nu j$$

olarak elde edilir.

Not 6.1. Özel olarak $\beta = 1$ için bir reel kuaterniyon matrisin j-özdeğer ve j-özvektörü elde edilir.

- λ^g matrisinin özdeğerleri $\mu_1 = \mu = b + ai$ ve $\mu_2 = \overline{\mu} = b - ai$ şeklindedir.
- μ_1 ve μ_2 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerden oluşan tersinir bir P

matrisi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve burada $P^{-1}\lambda^g P = diag(\mu_1, \mu_2)$ eşitliği geçerlidir.

- A matrisinin λ j-özdeğeri

$$\lambda = \frac{1}{2i}(\mu - \overline{\mu}) + \frac{1}{2}(\mu + \overline{\mu})j$$

biçimindedir.

- $\nu = \frac{i\varphi+\theta}{2}$ ve $\nu^c = \frac{i\theta+\varphi}{2}$ olmak üzere A matrisinin λ j-özdeğerine karşılık gelen X j-özvektörü

$$X = (I_n, 0)\overline{\nu} - (0, I_n)\nu j$$

şeklindedir.

Benzer şekilde, $\beta = -1$ için bir split kuaterniyon matrisin j-özdeğer ve j-özvektörü elde edilir.

- λ^g matrisinin özdeğerleri $\mu_1 = b + a$ ve $\mu_2 = b - a$ şeklindedir.

- μ_1 ve μ_2 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerden oluşan tersinir bir P matrisi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve burada $P^{-1}\lambda^g P = diag(\mu_1, \mu_2)$ eşitliği geçerlidir.

- A matrisinin λ j-özdeğeri

$$\lambda = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2) + \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)j \tag{6.9}$$

biçimindedir.

- $\nu = \frac{\theta+\varphi}{2}$ ve $\nu^c = \frac{\theta-\varphi}{2}$ olmak üzere A matrisinin λ j-özdeğerine karşılık gelen X j-özvektörü

$$X = (I_n, 0)\overline{\nu} + (0, I_n)\nu j \tag{6.10}$$

şeklindedir.

Örnek 6.1.

$$A = \begin{pmatrix} i + j & j \\ j & 1 + k \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H}_\beta)$$

matrisinin j-özdeğer ve j-özvektörleri $\beta = -1$ alınarak split kuaterniyonlar için hesaplanabilir.

A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} i+j & j \\ j & 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} j$$

kompleks matrisler aracılığıyla yukarıdaki şekilde ifade edilebilir. Böylece Tanım 6.3 gereği A matrisinin A^g kompleks matrisi temsili

$$A^g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. 4×4 tipindeki A^g kompleks matrisinin özdeğerleri

$$\mu_1 = \sqrt{2}+1,\ \mu_2 = -\sqrt{2}+1,\ \mu_3 = 1,\ \mu_4 = -1$$

şeklindedir. $0 \neq t_1, t_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\theta_1 = t_1 \begin{pmatrix} i\sqrt{2}+i \\ i \\ \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = t_2 \begin{pmatrix} -i\sqrt{2}+i \\ i \\ -\sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_3 = r_1 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_4 = r_2 \begin{pmatrix} \frac{2-i}{5} \\ \frac{-3+4i}{5} \\ \frac{-2+i}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Burada $\mu_1 = \sqrt{2}+1$ özdeğeri için (6.9) eşitliğinden A split kuaterniyon matrisinin j-özdeğeri

$$\lambda = \sqrt{2}+j$$

olarak bulunur. A matrisinin $\mu_1 = \sqrt{2}+1$ özdeğerine karşılık gelen θ_1 özvektörü için

$$\varphi_1 = \theta_1^c = t_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \\ -i\sqrt{2}-i \\ -i \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\nu = \frac{\theta_1+\varphi_1}{2}$ olduğundan

$$\nu = \frac{t_1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}+i+i\sqrt{2} \\ 1+i \\ 1+\sqrt{2}-i-i\sqrt{2} \\ 1-i \end{pmatrix}$$

ve

$$\overline{\nu} = \frac{t_1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}-i-i\sqrt{2} \\ 1-i \\ 1+\sqrt{2}+i+i\sqrt{2} \\ 1+i \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (6.10) eşitliğinden λ_1 j-özdeğerine karşılık gelen X_1 j-özvektörü

$$X_1 = \frac{t_1}{2}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})(1-i+j-k) \\ (1-i+j-k) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

A matrisinin μ_2, μ_3 ve μ_4 özdeğerleri için de benzer işlemler yapılarak A matrisinin j-özdeğerleri ve bu j-özdeğerlere karşılık gelen j-özvektörler hesaplanır.

6.2 Bir Matrisin j-Özdeğerinin Reel Matris Temsili ile Bulunması

$\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ genelleştirmesinde $\alpha = \beta = 1$ ise reel kuaterniyon, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ ise split kuaterniyon elde edilir. Her iki kuaterniyon için de $\alpha = 1$ olduğundan reel ve split kuaterniyondan oluşan $\mathbb{H}_\beta$ genelleştirmesi

$$i^2 = -1,\ j^2 = k^2 = -\beta,$$

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = \beta i,\ ki = -ik = j$$

biçiminde yazılabilir.

A_1, A_2, A_3, A_4 $m\times n$ tipinde reel matrisler olmak üzere $A = A_1+A_2i+A_3j+A_4k \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. $1, i, j, k$ baz elemanları yardımıyla A matrisine $4m \times 4n$ tipinde

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 & -\beta A_3 & -\beta A_4 \\ A_2 & A_1 & \beta A_4 & -\beta A_3 \\ A_3 & -A_4 & A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 & -A_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

reel matris karşılık gelir ve bu matris $R(A)$ ile gösterilir [73].

Tanım 6.6. $A_1, A_2, A_3, A_4 \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ olmak üzere $A = A_1 + A_2 i + A_3 j + A_4 k \in M_{m\times n}(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. $1, -i, j, -k$ baz elemanları yardımıyla elde edilen $4m \times 4n$ tipindeki

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & -\beta A_3 & \beta A_4 \\ A_2 & -A_1 & -\beta A_4 & -\beta A_3 \\ A_3 & -A_4 & A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 & A_2 & -A_1 \end{pmatrix}$$

reel matrise A matrisinin *reel matris temsili* denir ve A^ρ ile gösterilir.

Bir $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisinin A^ρ reel matris temsili yardımıyla P_n matrisi, $R(A)$ matris temsili yardımıyla Q_n, S_n, R_n matrisleri

$$P_n = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_n \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

$$Q_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

$$R_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\beta I_n \\ 0 & 0 & \beta I_n & 0 \\ 0 & -I_n & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

$$S_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta I_n \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

biçiminde elde edilir. P_n, Q_n, R_n, S_n matrisleri için

$$P_n^2 = I_{4n},\ Q_n^2 = -I_{4n},\ R_n^2 = S_n^2 = -\beta I_{4n}$$

ve

$$P_n P_n^t = Q_n Q_n^t = R_n R_n^t = S_n S_n^t = I_{4n} \tag{6.15}$$

özellikleri sağlanır. Buradan P_n, Q_n, R_n, S_n matrislerinin ortogonal olduğu açıktır.

Teorem 6.6. *$A, B \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ ve $\sigma \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

i. $(A+B)^\rho = A^\rho + B^\rho$,

ii. $(\sigma A)^\rho = \sigma A^\rho$,

iii. $Q_n^t A^\rho Q_n = -A^\rho,\ R_n^t A^\rho R_n = -A^\rho,\ S_n^t A^\rho S_n = A^\rho$,

iv. $(AB)^\rho = A^\rho P_n B^\rho = A^\rho (\hat{B})^\rho P_n = P_n (\hat{A})^\rho B^\rho$.

İspat. i, ii ve iii özellikleri Tanım 6.6 yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

iv. $r = 1, 2, 3, 4$ için A_r ve B_r $n \times n$ tipinde reel matrisler olmak üzere $A = A_1 + A_2 i + A_3 j + A_4 k$, $B = B_1 + B_2 i + B_3 j + B_4 k \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. Burada

$$\begin{aligned} AB = {} & (A_1B_1 - A_2B_2 - \beta A_3B_3 - \beta A_4B_4) + (A_1B_2 + A_2B_1 + \beta A_3B_4 - \beta A_4B_3)i \\ & + (A_1B_3 - A_2B_4 + A_3B_1 + A_4B_2)j + (A_1B_4 + A_2B_3 - A_3B_2 + A_4B_1)k \end{aligned}$$

olarak elde edilir. AB matrisinin reel matris temsili

$$(AB)^\rho = [C_{rs}] \in M_{4n}(\mathbb{R}) \quad (1 \leq r, s \leq 4)$$

ile gösterilsin. Burada

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= A_1B_1 - A_2B_2 - \beta A_3B_3 - \beta A_4B_4,\\
C_{12} &= A_1B_2 + A_2B_1 + \beta A_3B_4 - \beta A_4B_3,\\
C_{13} &= -\beta A_1B_3 + \beta A_2B_4 - \beta A_3B_1 - \beta A_4B_2,\\
C_{14} &= \beta A_1B_4 + \beta A_2B_3 - \beta A_3B_2 + \beta A_4B_1,\\
C_{21} &= A_1B_2 + A_2B_1 + \beta A_3B_4 - \beta A_4B_3,\\
C_{22} &= -A_1B_1 + A_2B_2 + \beta A_3B_3 + \beta A_4B_4,\\
C_{23} &= -\beta A_1B_4 - \beta A_2B_3 + \beta A_3B_2 - \beta A_4B_1,\\
C_{24} &= -\beta A_1B_3 + \beta A_2B_4 - \beta A_3B_1 - \beta A_4B_2,\\
C_{31} &= A_1B_3 - A_2B_4 + A_3B_1 + A_4B_2,\\
C_{32} &= -A_1B_4 - A_2B_3 + A_3B_2 - A_4B_1,\\
C_{33} &= A_1B_1 - A_2B_2 - \beta A_3B_3 - \beta A_4B_4,\\
C_{34} &= A_1B_2 + A_2B_1 + \beta A_3B_4 - \beta A_4B_3,\\
C_{41} &= A_1B_4 + A_2B_3 - A_3B_2 + A_4B_1,\\
C_{42} &= A_1B_3 - A_2B_4 + A_3B_1 + A_4B_2,\\
C_{43} &= A_1B_2 + A_2B_1 + \beta A_3B_4 - \beta A_4B_3,\\
C_{44} &= -A_1B_1 + A_2B_2 + \beta A_3B_3 + \beta A_4B_4
\end{aligned}
$$

şeklindedir. A ve B matrislerinin reel matris temsilleri

$$
A^\rho = \begin{pmatrix}
A_1 & A_2 & -\beta A_3 & \beta A_4 \\
A_2 & -A_1 & -\beta A_4 & -\beta A_3 \\
A_3 & -A_4 & A_1 & A_2 \\
A_4 & A_3 & A_2 & -A_1
\end{pmatrix}
$$

ve

$$
B^\rho = \begin{pmatrix}
B_1 & B_2 & -\beta B_3 & \beta B_4 \\
B_2 & -B_1 & -\beta B_4 & -\beta B_3 \\
B_3 & -B_4 & B_1 & B_2 \\
B_4 & B_3 & B_2 & -B_1
\end{pmatrix}
$$

biçimindedir. Burada (6.11)'de yer alan P_n matrisi yardımıyla

$$
A^\rho P_n B^\rho = (AB)^\rho \tag{6.16}
$$

olduğu görülür.

B matrisinin j-eşleniği $\hat{B} = B_1 - B_2 i + B_3 j - B_4 k$ biçiminde tanımlıdır ve $\hat{B}$

matrisinin reel matris temsili

$$(\hat{B})^{\rho} = \begin{pmatrix} B_1 & -B_2 & -\beta B_3 & -\beta B_4 \\ -B_2 & -B_1 & \beta B_4 & -\beta B_3 \\ B_3 & B_4 & B_1 & -B_2 \\ -B_4 & B_3 & -B_2 & -B_1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece

$$A^{\rho}(\hat{B})^{\rho} P_n = (AB)^{\rho} \tag{6.17}$$

eşitliği yazılabilir.

Benzer şekilde A matrisinin j-eşleniği $\hat{A} = A_1 - A_2 i + A_3 j - A_4 k$ olup reel matris temsili

$$(\hat{A})^{\rho} = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 & -\beta A_3 & -\beta A_4 \\ -A_2 & -A_1 & \beta A_4 & -\beta A_3 \\ A_3 & A_4 & A_1 & -A_2 \\ -A_4 & A_3 & -A_2 & -A_1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Buradan

$$P_n(\hat{A})^{\rho} B^{\rho} = (AB)^{\rho} \tag{6.18}$$

bulunur. Böylece (6.16),(6.17) ve (6.18) eşitliklerinden

$$(AB)^{\rho} = A^{\rho} P_n B^{\rho} = A^{\rho}(\hat{B})^{\rho} P_n = P_n(\hat{A})^{\rho} B^{\rho}$$

elde edilir. ■

Teorem 6.7. *$A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ ve $0 \neq \gamma \in M_{4n\times 1}(\mathbb{C})$ olmak üzere $A^{\rho}\gamma = \lambda\gamma$ olsun. O halde*

$$A^{\rho}\big(S_n^t\gamma\big) = \lambda\big(S_n^t\gamma\big),\ A^{\rho}(Q_n^t\gamma) = -\lambda\big(Q_n^t\gamma\big),\ A^{\rho}\big(R_n^t\gamma\big) = -\lambda\big(R_n^t\gamma\big)$$

ve

$$A^{\rho}\big(S_n^t\overline{\gamma}\big) = \overline{\lambda}\big(S_n^t\overline{\gamma}\big),\ A^{\rho}\big(Q_n^t\overline{\gamma}\big) = -\overline{\lambda}\big(Q_n^t\overline{\gamma}\big),\ A^{\rho}\big(R_n^t\overline{\gamma}\big) = -\overline{\lambda}\big(R_n^t\overline{\gamma}\big)$$

biçimindedir.

İspat. $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ ve $0 \neq \gamma \in M_{4n\times 1}(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$A^{\rho}\gamma = \lambda\gamma \tag{6.19}$$

olsun. Teorem 6.6'deki iii özelliğinden

$$A^{\rho} = S_n A^{\rho} S_n^t \tag{6.20}$$

yazılabilir. Böylece (6.19) eşitliği

$$S_n A^{\rho} S_n^t \gamma = \lambda\gamma$$

olacak şekilde tekrar yazılabilir ve (6.15) eşitliği yardımıyla

$$A^{\rho}\big(S_n^t\gamma\big) = \lambda\big(S_n^t\gamma\big)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$A^{\rho} = -R_n A^{\rho} R_n^t \tag{6.21}$$
$$A^{\rho} = -Q_n A^{\rho} Q_n^t \tag{6.22}$$

ve $R_n R_n^t = Q_n Q_n^t = I_{4n}$ olduğundan

$$A^{\rho}(Q_n^t\gamma) = -\lambda\big(Q_n^t\gamma\big)$$

ve

$$A^{\rho}\big(R_n^t\gamma\big) = -\lambda\big(R_n^t\gamma\big)$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (6.19) eşitliğinin eşleniğinden

$$A^{\rho}\overline{\gamma} = \overline{\lambda}\overline{\gamma}$$

yazılabilir. Burada (6.20), (6.21) ve (6.22) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} A^{\rho}\big(S_n^t\overline{\gamma}\big) &= \overline{\lambda}\big(S_n^t\overline{\gamma}\big), \\ A^{\rho}\big(Q_n^t\overline{\gamma}\big) &= -\overline{\lambda}\big(Q_n^t\overline{\gamma}\big), \\ A^{\rho}\big(R_n^t\overline{\gamma}\big) &= -\overline{\lambda}\big(R_n^t\overline{\gamma}\big) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

■

Sonuç 6.1. *$A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ olsun. A^{ρ} reel matrisinin özdeğerleri*

$$\lambda_1, \overline{\lambda_1}, -\lambda_1, -\overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, -\lambda_2, -\overline{\lambda_2}, \cdots, \lambda_n, \overline{\lambda_n}, -\lambda_n, -\overline{\lambda_n}$$

formundadır.

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A \in M_n(\mathbb{H}_\beta)$ matrisinin j-özdeğeri $\lambda = a + bj$ olsun. O halde $0 \neq \alpha \in M_{n\times 1}(\mathbb{H}_\beta)$ olmak üzere

$$A\alpha = \hat{\alpha}\lambda$$

eşitliği sağlanır. Tanım 6.6 ve Teorem 6.6 yardımıyla

$$(A\alpha = \hat{\alpha}\lambda)^\rho \Leftrightarrow A^\rho P_n \alpha^\rho = P_n \alpha^\rho \lambda^\rho$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte $\lambda = a + bj$ j-özdeğerinin reel matris temsili olan λ^ρ matrisi, Tanım 6.6 gereği

$$\lambda^\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & -\beta b & 0 \\ 0 & -a & 0 & -\beta b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & -a \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. λ^ρ matrisinin karakteristik denklemi

$$\det(\lambda^\rho - \mu I_4) = \begin{vmatrix} a-\mu & 0 & -\beta b & 0 \\ 0 & -a-\mu & 0 & -\beta b \\ b & 0 & a-\mu & 0 \\ 0 & b & 0 & -a-\mu \end{vmatrix} = 0$$

eşitliğinden

$$\mu^4 - (2a^2 - 2\beta b^2)\mu^2 + (a^4 + \beta^2 b^4 + 2\beta a^2 b^2) = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklem yardımıyla λ^ρ matrisinin özdeğerleri

$$\mu_1 = a + i\sqrt{\beta}b,\ \mu_2 = a - i\sqrt{\beta}b,\ \mu_3 = -a - i\sqrt{\beta}b,\ \mu_4 = -a + i\sqrt{\beta}b$$

olarak bulunur ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\begin{pmatrix} i\sqrt{\beta} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i\sqrt{\beta} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sqrt{\beta} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\sqrt{\beta} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Böylece

$$P^{-1}\lambda^\rho P = diag(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \tag{6.23}$$

ya da

$$P^{-1}\lambda^{\rho}P=\begin{pmatrix} a+i\sqrt{\beta}b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-i\sqrt{\beta}b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a-i\sqrt{\beta}b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+i\sqrt{\beta}b \end{pmatrix}$$

olacak şekilde

$$P=\begin{pmatrix} i\sqrt{\beta} & -i\sqrt{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\beta} & i\sqrt{\beta} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tersinir matrisi elde edilir. P matrisi için $\det P=-4\beta$ olup P matrisinin tersi

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{\beta}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{\beta}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{\beta}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{\beta}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır. (6.23) eşitliğinden

$$\lambda^{\rho}=Pdiag(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)P^{-1}$$

yazılabilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda^{\rho}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mu_1+\mu_2 & 0 & i\sqrt{\beta}\mu_1-i\sqrt{\beta}\mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_3+\mu_4 & 0 & i\sqrt{\beta}\mu_4-i\sqrt{\beta}\mu_3 \\ \frac{-i\mu_1+i\mu_2}{\sqrt{\beta}} & 0 & \mu_1+\mu_2 & 0 \\ 0 & \frac{-i\mu_4+i\mu_3}{\sqrt{\beta}} & 0 & \mu_3+\mu_4 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece A^{ρ} matrisinin μ_1,μ_2,μ_3,μ_4 özdeğerleri yardımıyla A matrisinin j-özdeğeri

$$\lambda=\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)+\frac{1}{2\sqrt{\beta}}(-i\mu_1+i\mu_2)j$$

olarak elde edilir. Ayrıca $\mu_1=\mu$ olarak alınırsa ve $\mu_2=\overline{\mu_1}$ olduğundan λ j-özdeğeri

$$\lambda=\frac{1}{2}(\mu+\overline{\mu})+\frac{1}{2\sqrt{\beta}i}(\mu-\overline{\mu})j$$

şeklinde ifade edilebilir.

7
SONUÇ

Bu çalışmada, öncelikle hiper dual sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi ($\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HD}$) tanıtılıp, temel cebirsel özellikleri verildikten sonra hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar için 4×4 tipinde iki farklı hiper dual matris temsili ve 4×4 tipinde reel genelleştirilmiş kuaterniyon matris temsili olmak üzere üç farklı matris temsili elde edilmiştir. Ardından herhangi iki hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonun benzerliği verilmiştir. Sonrasında, hiper dual sayı katsayılı kuaterniyon, split kuaterniyon, yarı kuaterniyon, split yarı kuaterniyonlardan oluşan genelleştirme $\mathbb{H}_{\alpha}^{HD}$ ile gösterilmiş ve bu genelleştirme için i-eşlenik, i-benzerlik, i-özdeğer ve i-özvektör kavramları tanıtılıp, detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca hiper dual sayı katsayılı kuaterniyon ve split kuaterniyondan oluşan genelleştirme $\mathbb{H}_{\beta}^{HD}$ ile gösterilmiş ve bu genelleştirme için ise j-eşlenik, k-eşlenik, j-benzerlik, k-benzerlik, j-özdeğer, k-özdeğer, j-özvektör ve k-özvektör kavramları araştırılmıştır. Bu araştırmalar sonucunda, herhangi iki hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonun benzerliğinden farklı olarak üç farklı benzerlik kavramı incelenmiştir. Hiper dual genelleştirilmiş kuaterniyonlar için yapılan bu çalışmalardan sonra bikompleks, hiper duble, hiper dual sayıların genelleştirmesi olan hiper sayılar kümesi ($\mathbb{HN}$) tanıtılmış ve ilk olarak bir hiper sayıya karşılık gelen 4×4 tipindeki reel matris temsili ile cebirsel yapısı sunulmuştur. Ardından hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar kümesi ($\mathbb{H}_{\alpha\beta}^{HN}$) tanımlanmış ve bu hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonlar için; reel genelleştirilmiş kuaterniyon matris temsili, iki farklı hiper sayı matris temsili ve iki farklı reel matris temsili olmak üzere beş farklı matris temsili elde edilmiştir. Son kısımda, öncelikle elemanları reel kuaterniyon ve split kuaterniyon genelleştirmesinden ($\mathbb{H}_{\beta}$) oluşan $n \times n$ tipindeki bir matrisin $2n \times 2n$ tipindeki kompleks matris temsili ile bu temsilden elde edilen özellikler incelenmiştir. Bu matris temsili ve j-eşlenik tanımı yardımıyla j-özdeğer ve j-özvektörlerin hesaplanması üzerinde durulmuştur. Ardından, $n \times n$ tipindeki $\mathbb{H}_{\beta}$ elemanlı bir matris için $4n \times 4n$ tipinde reel matris temsili hesaplanıp, bu temsile ait özellikler incelenmiştir. Elde edilen bu matris temsili kullanılarak, bir $A \in M_n(\mathbb{H}_{\beta})$ matrisi

için j-özdeğer kavramı ele alınmıştır.

Yapılan bu çalışmalara ek olarak, hiper sayı katsayılı genelleştirilmiş kuaterniyonların cebirsel yapısının sunulmasıyla bu genelleştirmeye ait $n \times n$ tipindeki matrislerin araştırılması mümkün hale gelmiştir. Ayrıca $\mathbb{H}_\beta$ elemanlı $n \times n$ tipindeki matrislerin, $4n \times 4n$ tipindeki reel matris temsili kullanılarak, j-özdeğerlerinin incelenmesiyle söz konusu genelleştirmeye ait matrislerin j-özvektörlerinin elde edilebileceği öngörülmektedir.

KAYNAKÇA

[1] J. P. Morais, S. Georgiev, W. Sprößig, *Real quaternionic calculus handbook*. Springer Basel, 2014.

[2] J. P. Ward, *Quaternions and Cayley numbers: algebra and applications*. Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[3] K. I. Kou, X. Yong-Hui, "Linear quaternion differential equations: Basic theory and fundamental results," *Studies in Applied Mathematics*, vol. 141, no. 1, pp. 3–45, 2018.

[4] Q. Tan, J. G. Balchen, "General quaternion transformation representation for robotic application," *Proceedings of IEEE Systems Man and Cybernetics Conference-SMC, Le Touquet, France*, vol. 3, pp. 319–324, 1993.

[5] A. Katunin, *A concise introduction to hypercomplex fractals*. CRC Press, 2017.

[6] J. Prošková, "Description of protein secondary structure using dual quaternions," *Journal of Molecular Structure*, vol. 1076, pp. 89–93, 2014.

[7] A. Çay, *Göz hareketlerinin geometrisi*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2016.

[8] A. T. Yang, F. Freudenstein, "Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, no. 2, pp. 300–308, 1964.

[9] O. Bottema, B. Roth, *Theoretical kinematics*. Courier Corporation, 1990.

[10] H. H. Hacısalihoğlu, *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.

[11] J. C. Chou, "Quaternion kinematic and dynamic differential equations," *IEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, no. 1, pp. 53–64, 1992.

[12] M. Soydaş, *Bikuaterniyonların modern fiziğe uygulanması*. Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2003.

[13] D. C. Jolly, "Isomorphic matrix representation of quaternion field theories," *Lettere al Nuovo Cimento*, vol. 39, no. 9, pp. 185–188, 1984.

[14] M. Tanışlı, G. Özgür, "Biquaternionic representations of angular momentum and dirac equation," *Acta Physica Slovaca*, vol. 53, no. 3, pp. 243–252, 2003.

[15] E. Cho, "De moivre's formula for quaternions," *Applied Mathematics Letters*, vol. 11, no. 6, pp. 33–35, 1998.

[16] H. Kabadayı, Y. Yaylı, "De moivre's formula for dual quaternions," *Kuwait Journal of Science and Engineering*, vol. 38, no. 1, pp. 15–23, 2011.

[17] M. Meral, *Kuaterniyonlara ait matrisler için De'Moivre ve Euler formülleri*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2009.

[18] T. A. Ell, S. J. Sangwine, "Quaternion involutions and anti-involutions," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 53, no. 1, pp. 137–143, 2007.

[19] M. Bekar, *Kuaterniyonların involüsyonları ve anti-involüsyonları*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2014.

[20] H.-C. Lee, "Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients," *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. 52, pp. 253–260, 1948.

[21] H. Aslaksen, "Quaternionic determinants," *Mathematical Intelligencer*, vol. 18, no. 3, pp. 57–65, 1996.

[22] L. A. Wolf, "Similarity of matrices in which the elements are real quaternions," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 42, no. 10, pp. 737–743, 1936.

[23] J. L. Brenner, "Matrices of quaternions," *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 3, pp. 329–335, 1951.

[24] N. A. Wiegmann, "Some theorems on matrices with real quaternion elements," *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 7, pp. 191–201, 1955.

[25] F. Zhang, "Quaternions and quaternion matrices," *Linear Algebra and Its Application*, vol. 251, pp. 21–57, 1997.

[26] T. S. Jiang, M. S. Wei, "On a solution of the quaternion matrix equation $X - A\tilde{X}B = C$ and its application," *Acta Mathematica Sinica*, vol. 21, no. 3, pp. 483–490, 2005.

[27] F. Zhang, M. Wei, Y. Li, J. Zhaoa, "Special least squares solutions of the quaternion matrix equation AX=B with applications," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 270, pp. 425–433, 2015.

[28] S.-F. Yuan, W. Qing-Wen, D. Xue-Feng, "On solutions of the quaternion matrix equation AX= B and their applications in color image restoration," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 221, pp. 10–20, 2013.

[29] Y. Yin, B. Zhidong, J. Hu, "On the limit of extreme eigenvalues of large dimensional random quaternion matrices," *Physics Letters A*, vol. 378, pp. 1049–1058, 2014.

[30] J.-I. Inoguchi, "Timelike surfaces of constant mean curvature in Minkowski 3-space," *Tokyo Journal of Mathematics*, vol. 21, no. 1, pp. 141–152, 1998.

[31] L. Kula, *Bölünmüş kuaterniyonlar ve geometrik uygulamaları*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2003.

[32] M. Özdemir, A. A. Ergin, "Rotations with unit timelike quaternions in Minkowski 3-space," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 56, no. 2, pp. 322–336, 2006.

[33] L. Kula, Y. Yaylı, "Split quaternions and rotations in semi Euclidean space E_2^4," *Journal of the Korean Mathematical Society*, vol. 44, no. 6, pp. 1313–1327, 2007.

[34] Y. Alagöz, K. H. Oral, S. Yüce, "Split quaternion matrices," *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 13, no. 2, pp. 223–232, 2012.

[35] M. Erdoğdu, M. Özdemir, "On complex split quaternion matrices," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 23, no. 3, pp. 625–638, 2013.

[36] M. Erdoğdu, M. Ozdemir, "Real matrix representations of complex split quaternions with applications," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 43, no. 12, pp. 7227–7238, 2020.

[37] M. Erdoğdu, M. Özdemir, "Split quaternion matrix representation of dual split quaternions and their matrices," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 25, no. 4, pp. 787–798, 2015.

[38] M. Erdoğdu, M. Ozdemir, "Matrices over hyperbolic split quaternions," *Filomat*, vol. 30, no. 4, pp. 913–920, 2016.

[39] G. Özyurt, Y. Alagöz, "On hyperbolic split quaternions and hyperbolic split quaternion matrices," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 28, no. 5, pp. 1–11, 2018.

[40] I. M. Yaglom, *Complex numbers in geometry*. Academic Press, 1968.

[41] B. Rosenfeld, *Geometry of Lie groups*. Kluwer Academic Publishers, Dordrect, 1997.

[42] H. Mortazaasl, M. Jafari, "A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space," *Mathematical Science and Applications E-Notes*, vol. 1, no. 2, pp. 20–27, 2013.

[43] M. Jafari, H. Molaei, "Some properties of matrix algebra of semi-quaternions," *Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi*, vol. 36, no. 5, pp. 103–112, 2015.

[44] *Complex semi-quaternions and their algebraic properties*. [Online]. Available: `https://www.researchgate.net/publication/308784164_Complex_Semi-quaternions_and_Their_Algebraic_Properties` (visited on 03/22/2021).

[45] M. Jafari, "The algebraic structure of dual semi-quaternions," *Journal of Selçuk University Natural and Applied Science*, vol. 5, no. 3, pp. 15–24, 2016.

[46] Y. Alagöz, G. Özyurt, "Linear equations systems of real and complex semi-quaternions," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, vol. 44, no. 5, pp. 1483–1493, 2020.

[47] M. Jafari, "Split semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space," *Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi*, vol. 36, no. 1, pp. 70–77, 2015.

[48] *Some results on the split semi-quaternion matrices*. [Online]. Available: `https://www.researchgate.net/publication/305700658_Some_results_on_the_Split_semi-quaternion_matrices` (visited on 03/22/2021).

[49] M. Bekar, Y. Yayli, "Involutions in split semi-quaternions," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 41, no. 12, pp. 4491–4505, 2018.

[50] M. Jafari, "A note on the representation and definition of dual split semi-quaternions algebra," *Global Journal of Science Frontier Research*, 2017.

[51] Y. Alagöz, G. Özyurt, "Real and hyperbolic matrices of split semi quaternions," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 29, no. 3, pp. 1–20, 2019.

[52] H. Pottmann, J. Wallner, *Computational line geometry*. Springer Science & Business Media, 2009.

[53] C. Flaut, "Some equations in algebras obtained by the Cayley-Dickson process," *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, vol. 9, no. 2, pp. 45–68, 2001.

[54] M. Jafari, Y. Yaylı, "Rotation in four dimensions via generalized Hamilton operators," *Kuwait Journal of Science*, vol. 40, no. 1, pp. 67–79, 2013.

[55] M. Jafari, Y. Yayli, "Generalized quaternions and their algebraic properties," *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, vol. 64, no. 1, pp. 15–27, 2015.

[56] M. Jafari, Y. Yaylı, "Generalized quaternions and rotation in 3-space $E^3_{\alpha\beta}$," *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 6, no. 2, pp. 224–232, 2015.

[57] C. Yu, X. Liu, Y. Zhang, "The generalized quaternion matrix equation $AXB + CX^*D = E$," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 43, no. 15, pp. 8506–8517, 2020.

[58] H. Mortazaasl, M. Jafari, Y. Yaylı, "Some algebraic properties of dual generalized quaternions algebra," *Far East Journal of Mathematical Science*, vol. 69, no. 2, pp. 307–318, 2012.

[59] M. Jafari, "Matrices of generalized dual quaternions," *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 2, pp. 110–121, 2015.

[60] J. A. Fike, S. Jongsma, J. J. Alonso, E. Van Der Weide, "Optimization with gradient and hessian information calculated using hyper-dual numbers," *9th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 2011.

[61] A. Cohen, M. Shoham, "Hyper dual quaternions representation of rigid bodies kinematics," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 150, no. 103861, 2020.

[62] S. Aslan, M. Bekar, Y. Yaylı, "Hyper-dual split quaternions and rigid body motion," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 158, no. 103876, 2020.

[63] S. Olariu, *Complex numbers in n dimensions*. Elsevier, 2002.

[64] G. B. Price, *An introduction to multicomplex spaces and functions*. M. Dekker, New York, 1991.

[65] J. A. Fike, J. Alonso, "The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations," *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2011.

[66] H. Liping, "Consimilarity of quaternion matrices and complex matrices," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 331, no. 1-3, pp. 21–30, 2001.

[67] T. Jiang, X. Cheng, S. Ling, "An algebraic relation between consimilarity and similarity of quaternion matrices and applications," *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2014, Article ID 795203, 2014.

[68] S. Ling, X. Cheng, T. Jiang, "An algorithm for coneigenvalues and coneigenvectors of quaternion matrices," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 25, no. 2, pp. 377–384, 2015.

[69] S.-T. Ling, T.-s. Jiang, X.-h. Cheng, "Consimilarity of quaternions and coneigenvalues of quaternion matrices," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 270, pp. 984–992, 2015.

[70] H. H. Kösal, M. Akyiğit, M. Tosun, "On the consimilarity of split quaternions and split quaternion matrices," *Analele ştiinţifice ale Universităţii" Ovidius" Constanţa. Seria Matematică*, vol. 24, no. 3, pp. 189–207, 2016.

[71] A. Cohen, M. Shoham, "Application of hyper-dual numbers to multibody kinematics," *Journal of Mechanisms and Robotics*, vol. 8, no. 1, 2016.

[72] J. A. Fike, "Derivative calculations using hyper-dual numbers," *Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States)*, 2016.

[73] G. Wang, Z. Guo, D. Zhang, T. Jiang, "Algebraic techniques for linear equations over quaternions and split quaternions: A unified approach in quaternionic and split quaternionic mechanics," *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 7, no. 8, 2019.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. Y. Alagöz, G. Özyurt, "Hyper-number generalized quaternions", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 64, no. 5, pp. 908-917, 2024. (Basımda)

Konferans Bildirisi

1. Y. Alagöz, G. Özyurt, “Coneigenvalues and coneigenvectors of quaternion and split quaternion matrices”, *7th International Conference of Mathematical Sciences*, Istanbul, Türkiye, 5-9 July 2023, pp. 82.