T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENLİK DOYUMLU EYLEYİCİLERE SAHİP SABİT KANATLI HAVA ARAÇLARI İÇİN IQC TABANLI H-SONSUZ KONTROLÖR TASARIMI

Şükrü AYYILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Makine Teorisi ve Kontrol Programı

Danışman
Doç. Dr. Hakan YAZICI

Temmuz, 2022

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENLİK DOYUMLU EYLEYİCİLERE SAHİP SABİT KANATLI HAVA ARAÇLARI İÇİN IQC TABANLI H-SONSUZ KONTROLÖR TASARIMI

Şükrü AYYILDIZ tarafından hazırlanan tez çalışması 21.07.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı Makine Teorisi ve Kontrol Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Hakan YAZICI
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hakan YAZICI, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Muzaffer METİN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üyesi İlker ÜSTOĞLU, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Hakan YAZICI sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Genlik Doyumlu Eyleyicilere Sahip Sabit Kanatlı Hava Araçları için IQC Tabanlı H-sonsuz Kontrolör Tasarımı başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Şükrü AYYILDIZ

İmza

TEŞEKKÜR

Denenmemiş bilgi, doğru ve yanlış arasında bir yerde asılı kalır.
Cezeri

Bilimin bünyesinde barındığı medeniyetleri ileriye taşığı gerçeği tarih boyunca açık bir şekilde ortada olmuştur. Bilimin hayatımızdaki yansımaları incelendiğinde ise görülmektedir ki, insanlığın problemlerine bilim ışığında pratik çözümler üretmek de mühendislik disiplini tarafından üstlenilmiştir.

Çocukluğumdan beri sürekli ilgi duyduğum ve eğitim hayatım boyunca da teknik olarak donanım ve tecrübe kazandığım havacılık ve mühendislikteki uygulamaları, günümüzde halen doygunluğuna tam olarak ulaşmış bir alan değildir. İlk insanlı uçuştan başlayıp geçtiğimiz yüzyılda yaşadığımız havacılık ve uzayın altın çağına, hatta günümüze kadar geliştirilen ve bizlere miras kalan havacılık teknolojilerinin günümüzde dahi oldukça fazla sayıda çözülmeyi bekleyen problemi ve yenilikçi çözümlerin uygulanabileceği birçok uygulama alanı mevcuttur. Bu yüksek lisans tezi çalışması da bu tür bir konuyu ele alınmaktadır.

2017 yılında beni kontrol teorisi ile tanıştıran, hem sahip olduğu bilgi birikimini, hem de bilim insanı ve mühendis vizyonunu cömertçe bana aktararak üzerimde çok fazla emeği olan değerli akademik danışmanım Doç. Dr. Hakan YAZICI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Benimle kapsamlı bir şekilde paylaştığı bilgi birikimi ile bu tez çalışmasının ele aldığı konularda altyapımı oldukça güçlendirmemi sağlayan değerli hocam Prof. Dr. İbrahim Beklan KÜÇÜKDEMİRAL'a çok teşekkür ederim.

Yöneldiğim bu yolda çocukluğumdan beri beni yönlendiren ve bana sürekli destek olan anne ve babama, her zaman yanımda olan sevgili kardeşlerime ve son olarak da bu çalışmayı hazırladığım süreçte yanımda olan arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Şükrü AYYILDIZ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ ix

ŞEKİL LİSTESİ x

TABLO LİSTESİ xii

ÖZET xiii

ABSTRACT xv

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 5

1.2 Tezin Amacı 10

1.3 Hipotez 10

2 UÇUŞ DİNAMİĞİ VE MATEMATİKSEL MODEL 12

2.1 Uçuşun Temel Prensipleri 12

2.1.1 Taşıma Kuvveti 13

2.1.2 Geri Sürüklenme Kuvveti 13

2.1.3 İtki Kuvveti 14

2.1.4 Ağırlık Kuvveti 14

2.1.5 Uçuş Kontrol Yüzeyleri 14

2.2 Rijit Gövde Hareket Denklemleri 15

2.2.1 Referans Sistemleri ve Hareket Değişkenleri 15

2.2.2 Kuvvet ve Moment Eşitlikleri 19

2.2.3 Hava Aracının Konum ve Yönelimi 23

2.2.4 Ağırlık ve İtki Kuvvetleri 25

2.2.5 Rijit Gövde Hareket Denklemlerinin Özeti 27

2.3 Hareket Denklemlerinin Doğrusal Hale Getirilmesi 27

2.4 Aerodinamik Kuvvet ve Momentler 32

2.4.1 u Doğrusal Hızına Bağlı Parametreler 33

2.4.2 w Doğrusal Hızına Bağlı Parametreler 34

2.4.3 q Açısal Hızına Bağlı Parametreler 35
2.5 Atmosferik Bozucuların Hareket Denklemlerine Eklenmesi 36
2.6 Hareket Denklemlerinin Durum Uzay Formunda Gösterimi 37
2.7 Sabit Kanatlı Hava Araçlarında Kararlılık ve Uçuş Kalitesi 37

3 KONTROLÖR SENTEZİ 42
3.1 Dışbükey Optimizasyon 43
3.2 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri 47
3.3 Doğrusal Karesel Düzenleyici Tabanlı Kontrolör Tasarımı 52
3.3.1 Kontrol Edilebilirlik ve Gözlemlenebilirlik 52
3.3.2 Problem Tanımı 53
3.3.3 Yöntem 54
3.3.4 Kontrolör Sentezi 55
3.4 Bir Sistemin H_∞ Normu 56
3.5 Eyleyici Genliği Doyumu 59
3.6 Değişmez Elipsoitler 61
3.7 Değişmez Elipsoit Tabanlı Eyleyici Genliği Doyumlu H_∞ Kontrolör Tasarımı 63
3.7.1 Sistem Yapısı 63
3.7.2 Problem Tanımı 64
3.7.3 Yöntem 64
3.7.4 Kontrolör Sentezi 65
3.8 Tümleşik Karesel Kısıtlar 68
3.9 TKK Tabanlı Eyleyici Genliği Doyumlu H_∞ Kontrolör Tasarımı 77
3.9.1 Sistem Yapısı 77
3.9.2 Problem Tanımı 78
3.9.3 Yöntem 78
3.9.4 Kontrolör Sentezi 79

4 SAYISAL BENZETİM ÇALIŞMALARI 83
4.1 Durum Analizi 1 86
4.2 Durum Analizi 2 91

5 SONUÇ VE ÖNERİLER 95

KAYNAKÇA 96

A RYAN NAVION 100

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 102

SİMGE LİSTESİ

F_L	Taşıma kuvveti
F_D	Geri sürüklenme kuvveti
Q	Dinamik basınç
V_∞	Bağıl hava akış hızı
S	Aerodinamik yüzey alanı
ρ	Akışkan yoğunluğu
x_f, y_f, z_f	Eylemsiz (Dünya merkezli) referans sisteminin eksen takımı
x_b, y_b, z_b	İvmeli (gövde merkezli) referans sisteminin eksen takımı
u	İleri hız
α	Hücum açısı
q	Yunuslama açısal hızı
θ	Yunuslama açısı
h	İrtifa
$\bar{c}$	Ortalama aerodinamik veter
C_L	Taşıma katsayısı
C_D	Geri sürüklenme katsayısı
C_{L_0}	Denge durumunda taşıma katsayısı
C_{D_0}	Denge durumunda geri sürüklenme katsayısı
C_m	Yunuslama momenti katsayısı
$\sum$	Toplam serisi
$\prod$	Çarpım serisi
I	Birim matris
γ	H_∞ normu

λ	Lagrange çarpanı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel vektörler kümesi
$\mathbb{R}^{n\times m}$	$n \times m$ boyutlu reel matrisler kümesi
$\mathbb{S}^n$	n boyutlu simetrik matrisler kümesi, $\mathbb{S}^n = \{P \vert P = P^{\mathrm{T}}, P \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$

KISALTMA LİSTESİ

PID	Proportional, Integral, Derivative
IQC	Integral Quadratic Constraints
TKK	Tümleşik Karesel Kısıtlar
LQR	Linear Quadratic Regulator
DKD	Doğrusal Karesel Denetleyici
LMI	Linear Matrix Inequalities
DME	Doğrusal Matris Eşitsizlikleri
PIO	Pilot Induced Oscillation
MPC	Model Predictive Control
AW	Anti Windup
DLAW	Direct Linear Anti Windup
MRAW	Model Recovery Anti Windup
LPV	Linear Parameter Varying
LTI	Linear Time Invariant
LFR	Linear Fractional Representation
DKG	Doğrusal Kesirli Gösterim
MIMO	Multi Input Multi Output
DE	Değişmez Elipsoit

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 Lawrence Sperry (sağda) tarafından geliştirilen otopilot sisteminin canlı gösterimi [1] 2
Şekil 2.1 Uçuşa etki eden dört temel kuvvet 12
Şekil 2.2 Bir kanat profiline etki eden aerodinamik kuvvetler 14
Şekil 2.3 Soldan sağa: yalpalama, yunuslama ve sapma hareketleri [48] . . . 15
Şekil 2.4 Eylemsiz ve ivmeli referans sistemleri [49] 16
Şekil 2.5 Gövde eksenleri için hareket değişkenlerinin görsel olarak ifadesi [49] 17
Şekil 2.6 Bir uçağın kalkışı sırasındaki aşamalar ve hücum açıları 18
Şekil 2.7 Boylamsal dinamiklerin görsel ifadesi 19
Şekil 2.8 Uçak üzerinde rastgele seçilen bir diferansiyel kütle elemanı δm [49] 20
Şekil 2.9 Euler açı dönüşümleri 24
Şekil 2.10 Ağırlık kuvvetlerinin görsel ifadesi [49] 26
Şekil 2.11 İtki kuvvetleri ve momentlerinin görsel ifadesi [49] 26
Şekil 2.12 Yunuslama hareketinin kinematiği ile ilgili bir görsel ifade [49] . . . 35
Şekil 2.13 Kısa periyot ve uzun periyot modlarının zaman cevapları 38
Şekil 2.14 Sabit kanatlı bir hava aracının boylamsal uçuş dinamiği modlarını ifade eden kutup-sıfır diyagramı 39
Şekil 2.15 Uçuş kalitesi eğrileri [53] 40
Şekil 3.1 Dışbükey (a) ve dışbükey olmayan (b) bir küme 44
Şekil 3.2 Dışbükey (a) ve dışbükey olmayan (b) bir fonksiyon 45
Şekil 3.3 Doyum fonksiyonunun görsel ifadesi 60
Şekil 3.4 Bir elipsoitin görsel ifadesi 61
Şekil 3.5 Durum geri beslemeli kapalı çevrim sistem için genelleştirilmiş yapı 63
Şekil 3.6 Doğrusal kesirli gösterim 68
Şekil 3.7 TKK'nın blok diyagramı ile ifadesi 73
Şekil 3.8 Durum geri beslemeli ve eyleyici genliği doyumlu sistemin blok diyagramı 74
Şekil 3.9 DKG uygulanarak düzenlenmiş sistemin blok diyagramı 74
Şekil 3.10 Ölü bölge fonksiyonunun görsel ifadesi 75
Şekil 3.11 Ölü bölge fonksiyonunu sınırları arasında tutan sektör sınırı 76

Şekil 3.12 Belirsiz eleman Δ'yı DKG ile tanımlayan durum geri beslemeli kapalı çevrim sistemin genel yapısı [42] 77
Şekil 4.1 Bozucu rüzgar girişi 84
Şekil 4.2 Durum analizi 1 için ilk dört durum Δu, $\Delta\alpha$, Δq ve $\Delta\theta$'nın zaman cevapları 87
Şekil 4.3 Durum analizi 1 için irtifa değişimi Δh'ın zaman cevapları 88
Şekil 4.4 Durum analizi 1 için irtifa dümeni kontrol girişi $\Delta\delta_e$ 89
Şekil 4.5 Durum analizi 1 için tüm sistemlerin kısa periyot salınım modlarının uçuş kalitesi eğrisi üzerinde gösterimi 90
Şekil 4.6 Durum analizi 2 için ilk dört durum Δu, $\Delta\alpha$, Δq ve $\Delta\theta$'nın zaman cevapları 92
Şekil 4.7 Durum analizi 2 için irtifa değişimi Δh'ın zaman cevapları 92
Şekil 4.8 Durum analizi 2 için irtifa dümeni kontrol girişi $\Delta\delta_e$ 93
Şekil 4.9 Durum analizi 2 için tüm sistemlerin kısa periyot salınım modlarının uçuş kalitesi eğrisi üzerinde gösterimi 94
Şekil A.1 Amerikan Hava Kuvvetleri'ne ait bir Ryan Navion 100
Şekil A.2 Ryan Navion'un geometrik parameterleri [49] 101

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Gövde eksenleri için hareket değişkenleri 17
Tablo 2.2 Kararlılık türevleri ve matematiksel ifadeleri [49] 36
Tablo 4.1 Tüm sistemlerin durum analizi 1 için H_∞ normu 89
Tablo 4.2 Tüm sistemlerin durum analizi 1 için kısa periyod hareket modu karakteristik özellikleri 90
Tablo 4.3 Tüm sistemlerin durum analizi 2 için H_∞ normu 93
Tablo 4.4 Tüm sistemlerin durum analizi 2 için kısa periyod hareket modu karakteristik özellikleri 94
Tablo A.1 Ryan Navion'un aerodinamik parametreleri [49] 101

ÖZET

Genlik Doyumlu Eyleyicilere Sahip Sabit Kanatlı Hava Araçları için IQC Tabanlı H-sonsuz Kontrolör Tasarımı

Şükrü AYYILDIZ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Hakan YAZICI

Bu yüksek lisans tezi, kontrol girişi olarak genlik doyumlu bir eyleyiciye sahip bir uçağın boylamsal uçuş dinamiğinin bozucu bastırma problemi için doğrusal-karesel denetleyici (LQR) tabanlı bir durum-geri beslemeli kontrolör, değişmez elipsoit tabanlı bir durum-geri beslemeli H_∞ kontrolör ve IQC tabanlı bir durum-geri beslemeli H_∞ kontrolör sunmaktadır. Özgün olarak tasarlanan IQC tabanlı durum-geri beslemeli H_∞ kontrolör, eyleyici genliği doyumunu bir norm-sınırlı belirsiz geri besleme elemanı olarak genel sistemden ayıran bir sentez yöntemine dayanmakta olup bu belirsiz elemanın giriş ile çıkış sinyalleri arasındaki ilişki ise bir tümleşik karesel kısıt (IQC) olarak formüle edilmiş sektör-sınırlı bir koşul olarak tanımlanmıştır. Daha sonra, bu norm-sınırlı belirsiz operatör ile bozucu girişlerden performans çıktılarına doğru indüklenmiş $\mathscr{L}_2$ kazancı (H_∞ normu) olarak tanımlanan sistemin performansı arasındaki ilişkiyi elde etmek için S-Prosedürü yardımcı teoremi kullanılmıştır. Bu bozucu bastırma problemini çözmek amacı ile, kapalı çevrim sisteminin H_∞ normunu en aza indiren bir durum geri besleme kazancı elde etmek için bir doğrusal bir matris eşitsizliği (LMI) koşulu elde edilmiştir. Son olarak, önerilen kontrolörün performansı, atmosferik bozuculara maruz kalan bir genel havacılık (GA) uçağının kapsamlı sayısal benzetim çalışmaları ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tümleşik karesel kısıtlar, doğrusal matris eşitsizlikleri, genlik sınırlı sistemler, belirsizlik tanımlamaları, boylamsal uçuş dinamiği

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

IQC-Based H-infinity Controller Design for Fixed Wing Aircraft Having Magnitude Saturated Actuators

Şükrü AYYILDIZ

Department of Mechanical Engineering
Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hakan YAZICI

This MSc thesis proposes a linear-quadratic regulator (LQR) based state-feedback controller, an invariant ellipsoid-based state-feedback H_∞ controller and an IQC-based state-feedback H_∞ controller for disturbance attenuation problem of the longitudinal flight dynamics of an airplane having a magnitude saturated actuator as the control input. The uniquely designed IQC-based state-feedback H_∞ controller relies on a synthesis method that separates the controller saturation from the general plant as a norm-bounded uncertain feedback element and defines the input-output behavior of this element as a sector-bounded condition formulated as an integral quadratic constraint (IQC). Then, S-procedure lemma is used to obtain the relationship between this norm-bounded uncertain operator and the performance of the system defined as induced $\mathscr{L}_2$ gain (H_∞ norm) from the disturbance inputs to the performance outputs. To solve this disturbance attenuation problem, a linear matrix inequality (LMI) condition is derived to obtain a state-feedback gain that minimizes the H_∞ norm of the closed loop system. Finally, performance of the proposed controller is demonstrated by extensive simulations of a general aviation (GA) airplane subjected to atmospheric disturbances.

Keywords: Integral quadratic constraints, linear matrix inequalities, magnitude-bounded systems, uncertainty descriptions, longitudinal flight dynamics

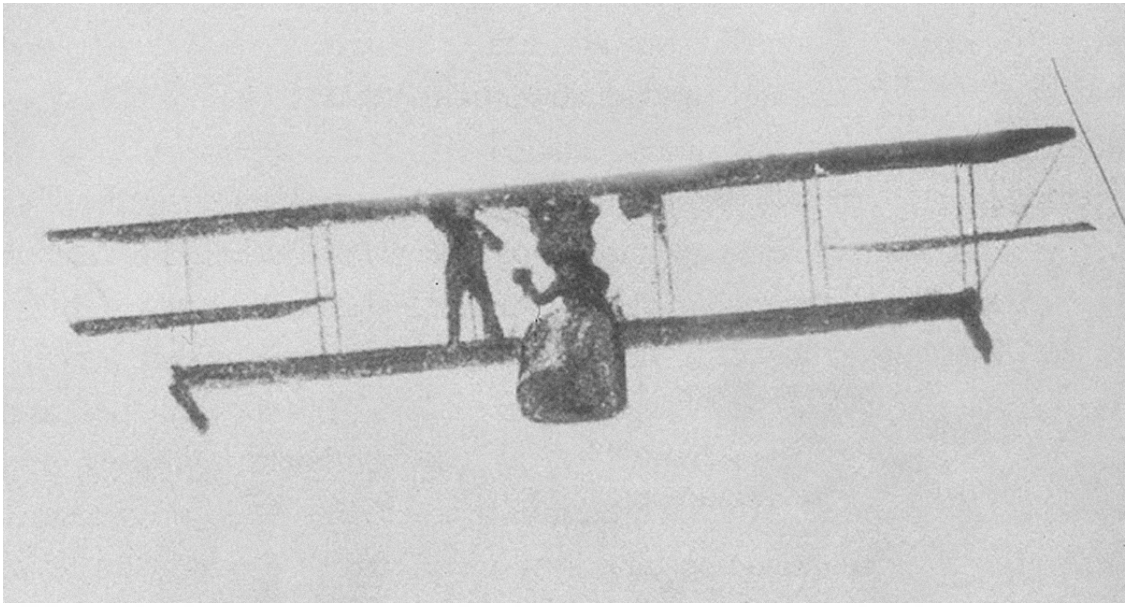
YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

Uçak mühendisliği ve havacılık teknolojilerinin; Wright Kardeşler'in 17 Aralık 1903 tarihinde ilk uçuşunu yaptıkları *Wright Flyer*'dan günümüzün yüksek performanslı askeri ve sivil uçaklarına doğru hızlı ilerleyişi, ileri seviye uçuş kontrol sistemlerinin geliştirilmesini mecbur kılmıştır. Günümüzdeki modern uçaklar ve sabit kanatlı insansız hava araçları mevcut sistemlerini sürekli denetleyip görev ihtiyaçlarını başarılı bir şekilde gerçekleştirmek için aktif olarak uçuş kontrol sistemleri kullanmaktadır. Navigasyon, otomatik iniş-kalkış ve şiddetli atmosferik bozucu etkiler altında kararlılık artırma gibi yetenekleri bulunan bu sistemler pilotların veya diğer uçuş ekiplerinin iş yükünü önemli bir şekilde azaltmasının ve hatta tamamen üstlenmesinin yanı sıra agresif manevra yeteneği kazandırılması amacıyla kasıtlı olarak kararsız halde tasarlanan bazı modern savaş uçaklarında istenmeyen sistem cevaplarının yapay kararlılık sağlanarak bastırılmasında dahi kullanılmaktadır.

Kontrol teorisi ve uçuş kontrol sistemlerinin gelişiminin havacılık teknolojilerinin ilerlemesinde her zaman çok önemli bir rolü olmuştur. Uçuş kontrol sistemlerinin gelişimi, bir insan tarafından kumanda edilen ilk motorlu uçağın ortaya çıkışını oldukça yakından takip etmiştir. 18 Haziran 1914 tarihinde Fransa'da düzenlenen bir uçuş yarışmasında havacılık tarihinin ilk otopilot sistemi canlı olarak gösterilmiştir. Lawrence Sperry tarafından geliştirilen bu sistem, üzerinde bulunduğu Curtiss C-2 uçağına mekanik jiroskoplar yardımı ile irtifa, istikamet ve yalpa dümeni kumandası vererek uçuş sırasında mevcut yönelimini koruyabilmesini sağlamıştır [1].

Fransa'da düzenlenen bu yarışma sırasında uçakta bulunan ikinci kişi, teknisyen Emil Cachin, kokpitten ayrılıp sağ kanat üzerinde iki metre ilerleyerek uçağın yalpa dengesini kasıtlı olarak bozmaya çalışmıştır. Anlık olarak sağ tarafa doğru yalpalayan uçak, mekanik jiroskoplardan otomatik olarak gelen yalpa dümeni kumandası ile hızlı bir şekilde denge konumuna dönmüştür. Bu gösteriyi asıl etkileyici kılan ise, aynı zamanda uçağın pilotluğu yapan Lawrence Sperry'nin gösteri sırasında kokpitte ellerini havaya kaldırarak bütün kontrollü bıraktığını izleyicilere göstermesi olmuştur.



Şekil 1.1 Lawrence Sperry (sağda) tarafından geliştirilen otopilot sisteminin canlı gösterimi [1]

Klasik kontrol teknikleri kullanılarak geliştirilen ilk uçuş kontrol sistemleri hız, yönelim ve irtifa sabitleme gibi görevler üstlenmiştir. Sırası ile Evans ve Bode tarafından icat edilen köklerin yer eğrisi ve Bode diyagramları gibi yöntemler, basitlik ve kullanım kolaylığı gibi sebeplerle birçok kontrol uygulamasına oldukça pratik olmasına karşın bu yöntemlerin sağladığı avantajlar, sistemlerin karmaşıklığı arttıkça hızlı bir şekilde kaybolmaktadır.

1947'de icat edilen transistörü takiben çok hızlı bir şekilde ivmelenen yarı iletken teknolojisi ve bilgisayarlar, kontrol sistemlerinde yeni bir yaklaşımın kapısını açmıştır. Bu yeni yaklaşımda karmaşık sistemlerin çözümlerinin gerektirdiği işlem yükünü bilgisayarlar üstlenmekte ve bunu yaparken de çok yüksek hız ve doğruluk sağlamaktadırlar. Klasik kontrol teorisinin yeterli performans gösteremediği birçok mühendislik uygulamasında yaygın olarak başvurulan optimal kontrol yöntemleri, çeşitli fonksiyonlar olarak modellenen sistemler için belirli kısıtlar altında bir en iyileştirme kriteri bulmayı amaçlar [2]. Bilgisayar teknolojilerinin gelişmesi ve hatta daha da önemlisi yaygınlaşıp herkesin erişebileceği bir seviyeye gelmesi ile optimal kontrol problemleri çok daha kolay olarak çözülebilir hale gelmiştir.

Sabit kanatlı hava araçlarında geçtiğimiz yüzyılda PID kontrol gibi basit ve dönemin uçuş kontrol uygulamaları için yeterli teknikler kullanılmıştır. Aslında, bu sistemler günümüzde de hala yaygın olarak kullanılmaktadır fakat bu tür basit kontrol tekniklerinin yetersiz kaldığı uçuş dinamiği ve kontrol problemleri de oldukça artmaya başlamıştır. Bunun sebebi olarak uçuş dinamiği ve kontrol problemlerinde gittikçe

önem kazanan daha hızlı ulaşım, daha iyi isabet, daha iyi yakıt tüketimi, daha yüksek manevra yeteneği ve daha kötü ortam şartlarında görev gerçekleştirme gibi hedeflerin havacılık ve uzay sektöründe yaygın hale gelmesi gösterilebilir.

Açıktır ki, bir önceki paragrafta örnek olarak verilen performans isterlerinin hepsi için çeşitli kısıtlar altında en iyi performansın sağlanması amaçlamaktadır ve bu sebeple uçuş dinamiği ve kontrol problemleri, optimal kontrol teorisinin önemli uygulama alanlarından biri olmaktadır. Bu doğrultuda, uçuş dinamiği ile ilgili kararlılık ve performans kriterleri, ilgili sistemlerin giriş ve çıkışları arasında kurulan ve en iyi hale getirilmesi gereken ilişkiler olarak tanımlanıp modellenebilir. Örneğin, bir uçağa uçuşu sırasında dışarıdan etki eden rüzgarın uçağın hücum açısı, yunuslama açısı ve irtifa gibi sistem çıkışı olarak modellenebilen uçuş parametreleri üzerindeki bozucu etkileri matematiksel olarak bir fonksiyon şeklinde tanımlanır ise bu fonksiyonu en aza indirgeyecek parametreler hesaplanabilir ve ilgili performans kriterlerini sağlaması amacı ile sisteme kontrol girişi olarak verilebilir. Ek olarak, sistemlerin kontrol girişini fiziksel olarak sağlayan bileşenler olan eyleyiciler üzerindeki, örneğin doyum gibi, fiziksel kısıtlar da uygun teknikler ile optimizasyon problemlerine dahil edilebilir.

Bu yüksek lisans tezinde, sabit kanatlı bir hava aracının doğrusal hale getirilmiş boylamsal uçuş dinamiğini ifade eden durum geri beslemeli sistem için üçü de birer optimal kontrol problemi olan LQR, değişmez elipsoit tabanlı eyleyici genliği doyumlu H_∞ ve eyleyici genliği doyumlu **IQC tabanlı $\mathbf{H}_\infty$** kontrolör sentezi gerçekleştirilip bu kontrolörlerin birbirleri ile performansları kıyaslanmıştır. Literatürde mevcut olarak bulunan çalışmalardan farklı olarak özgün bir şekilde tasarlanan eyleyici genliği doyumlu IQC tabanlı H_∞ kontrölörün tasarımında, doyum başta olmak üzere belirsiz veya modellenmesi zor olan sistem parametrelerini modelleyip kontrolör tasarımına dahil etmek amacı ile kullanılan çok güçlü bir araç olan tümleşik karesel kısıtların *(İng: integral quadratic constraints, IQC)* kullanımından faydalanılmıştır. Bu doğrultuda, TKK'ler kullanılarak eyleyici genliği doyumunun *(İng: magnitude saturation)* bir norm koşulu olarak tanımlanması ve bu norm koşulu sağlandığı takdirde genel sistemin bozucu bastırma performansının istenen seviyede elde edilip edilemediği incelenmiştir. Son olarak ise bu kontrolör, önceki iki diğer kontrolör ile kıyaslanılarak sağladığı performans artışı incelenmiştir.

Bu yüksek lisans tezi 5 bölüm ve 1 ekten oluşmaktadır. Giriş bölümü olan Bölüm 1'de ilk olarak sabit kanatlı hava araçlarında uçuş kontrol sistemlerinin ve optimal kontrol teorisinin temel olarak tanıtılması ardından yüksek lisans tezinde ele alınan konu ile ilgili literatürde mevcut olan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir ve bu doğrultuda tezin amacı ile hipotezi ortaya konulmuştur.

Bölüm 2'de sabit kanatlı bir hava aracının boylamsal uçuş dinamiğini tanımlayan matematiksel model elde edilip doğrusal hale getirilmiştir. Matematiksel modeli oluşturan aerodinamik parametreler ile kararlılık türevleri de detayları ile açıklanmıştır. Son olarak, boylamsal uçuş dinamiğinin modal analizi hakkında temel bilgiler verilmiş olup çeşitli salınım parametreleri ile uçuş kalitesi arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

Bölüm 3'te ilk olarak kontrolör tasarımında kullanılmak üzere altyapı sağlamak amacı ile dışbükey optimizasyon, doğrusal matris eşitsizlikleri ve optimal kontrol problemlerinde kullanımı ve bir sistemin H_∞ normu gibi kavramlar açıklanmıştır. Bu kavramları takiben, ilk olarak bir cebirsel Riccati eşitsizliği şeklinde tanımlanan doğrusal karesel denetleyici *(İng: linear quadratic regulator, LQR)* problemi ele alınıp bu doğrultuda bir kontorlör sentezi gerçekleştirilmiştir. İkinci olarak, eyleyici genliği doyumunun değişmez elipsoitler kullanılarak tanımlandığı ve performans çıkışının ise sistemin bozucu girişlerinden performans çıkışlarına olan H_∞ normu olarak tanımlandığı iki kontrol kısıtı doğrusal matris eşitsizlikleri *(İng: linear matrix inequalities, LMI)* formunda modellenip değişmez elipsoit tabanlı eyleyici genliği doyumlu bir H_∞ kontrolör sentezi elde edilmiştir. Üçüncü ve son olarak ise performans çıkışının yine sistemin bozucu girişlerinden performans çıkışlarına olan H_∞ normu olarak tanımlandığı fakat kontrol sinyali üzerindeki eyleyici doyumu şartının TKK'ler kullanılarak tanımlandığı ve bu iki koşulun ortak bir DME olarak modellendiği, TKK tabanlı bir eyleyici genliği doyumlu H_∞ kontrolör sentezi elde edilmiştir.

Bölüm 4'te, sayısal benzetim çalışmaları için sabit kanatlı hava aracının fiziksel parametreleri ve performans matrislerinin sayısal değerleri ile benzetimin zaman adımının ve eyleyici genliği doyumunun sayısal değerleri tanımlanarak bir önceki bölümde sentezlenen kontrolörlerin performansları, sayısal benzetim çalışmaları sonuçları incelenerek kıyaslanmıştır. Bu doğrultuda, performans ölçütü olarak H_∞ normu ve sistem cevapları grafiklerinden yararlanılmıştır. Son olarak ise kontrol edilen sistemlerin salınım karakteristikleri incelenerek uçuş kalitesi hakkında da yorumlar yapılmıştır.

Bölüm 5'te bu yüksek lisans tezi çalışmasının sonuçları genel bir özet halinde değerlendirilmiş ve ilerleyen aşamalarda potansiyel olarak yapılabilecek iyileştirme ve yeni özelliklerin eklenmesi gibi konulara değinilmiştir.

En son olarak, Ek A'da bu yüksek lisans tezinde ele alınan sabit kanatlı hava aracı Ryan Navion'un bu çalışmada gerekli olan tüm fiziksel parametreleri paylaşılmıştır.

1.1 Literatür Özeti

İdeal sistemlerin aksine neredeyse bütün mühendislik sistemleri, istenen kontrol girişinin uygulanmasının fiziksel olarak her zaman mümkün olmamasına yol açan fiziksel sınırlara tabidir. Bu fiziksel sınırlardan biri *eyleyici genliği doyumu* olarak adlandırılır ve kontrol sinyalinin genliği belirli bir aralığın dışında çıktığına, kontrol girişini fiziksel olarak sistem üzerinde uygulayan eyleyicinin sabit bir üst değerden daha fazla fiziksel kontrol girişi uygulayamaması olarak tanımlanır. Doğrusal sistemler için kontrolör tasarımının temelini oluşturan matematiksel yöntemler günümüzde oldukça gelişmiş olmasına rağmen eyleyici genliği doyumu doğrusal olmayan bir durumu ifade etmekte olup bu sebeple çoğu mühendislik sisteminin kontorlör tasarımı sürecinde göz ardı edilebilmektedir. Bu şekilde tasarlanan kontrolörler ise istenen performans kriterlerini her zaman sağlayamamakla birlikte kötü bir geçici sistem cevabı performansı ve integral yığılması gibi sorunlara yol açabilmektedir.

Havacılık tarihi boyunca eyleyici doyumunun yol açtığı çeşitli kazalar ve olaylar göz önünde alındığında, eyleyici girişi üzerinde doyum etkisinin tarihi boyunca ve hatta günümüzde de büyük bir risk teşkil etmekte olduğu görülmektedir. Bu tür kazalar incelendiğinde eyleyici doyumu göz ardı edilerek veya yanlış değerlendirilerek tasarlanan kontrolörlerin, hava araçları üzerinde pilot tarafından indüklenmiş osilasyon *(İng: pilot induced oscillation, PIO)* gibi problemlere yol açtığı görülmektedir [3]. Bu kazalara örnek olarak, bir YF-22 prototipinin 1992 yılında iniş sürecini iptal edip pisti pas geçmek istediği sırada maruz kaldığı kategori 3 PIO [4] ve 1994 yılında pilot kumandası yüzünden kararsız hale gelen bir V-22 [5] verilebilir.

Sonuç olarak, eyleyici doyumunu dikkate alarak kontrolör tasarımı süreçlerine dahil eden uçuş kontrolörleri tasarlamak, bir çok uçuş dinamiği ve kontrol probleminde mühendisler ve araştırmacılar için önemli bir hedef haline gelmiştir [6].

Literatür incelendiğinde uçuş kontrolü üzerinde yapılan çeşitli farklı çalışmalarda eyleyici doyumunun direkt olarak göz ardı edildiği görülmektedir. Örneğin, Ayyıldız ve Yazıcı [7], mikropatlama *(İng: microburst)* formundaki bir fırtına sisteminin içinden geçen sabit kanatlı bir hava aracının boylamsal uçuş dinamiği problemi için bozucu bastıran DKD tabanlı bir kontrolör elde etmişlerdir, fakat bu çalışmada sistem cevapları DKD'de kullanılan ağırlık matrislerine bağlı olmakla birlikte net bir şekilde belirlenen bir performans kriteri matematiksel olarak garanti edilmemektedir ve ayrıca eyleyici doyumu da göz ardı edilmiştir. Sistem performansının net matematiksel koşullar ile ifade edildiği çeşitli temel uçuş dinamiği ve kontrol çalışmaları da literatürde mevcuttur. Örneğin, Kouvaritakis v.d. [8], kapalı çevrim sistemin performansını direkt olarak sistemin frekans cevapları üzerinden belirleyerek bu doğrultuda köklerin

yer eğrisi *(İng: root locus)* yöntemi kullanarak kontrolör tasarımı gerçekleştirmekle birlikte, eyleyici doyumunu ele almamışlardır. Tamkaya v.d. [9], sabit kanatlı bir hava aracınının otonom olarak inişini gerçekleştiren doğrusal matris eşitsizliği tabanlı bir H_∞ kontrolör sunmuşlardır. Bu çalışmada sistemin performans kriteri H_∞ normu ile net bir şekilde tanımlanmış olup, model takip etme yöntemi ile H_∞ optimal kontrol probleminin birleşimi sonucu oldukça başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu çalışma sistem performansını bir önceki çalışmaya kıyasla çok daha gelişmiş bir şekilde tanımlayıp kontrolör tasarımını bu performans kısıtına bağlı olarak gerçekleştirmekle birlikte, yine eyleyici doyumunu ele almamaktadır.

Literatürdeki eyleyici doyumunu göz ardı etmeyen kontorlör tasarımı çalışmaları incelendiğinde ise, model öngörülü kontrol *(model predictive control, MPC)*, uyarlamalı kontrol *(İng: adaptive control)* ve integral yığılması önleyici *(İng: anti-windup, AW)* tasarımı gibi yöntemler uygulandığı görülmektedir. Örneğin, Lu [10] çalışmasında belirlediği eyleyici doyumu kısıtlarını garanti olarak sağlayan bir kontrolör tasarımı için model öngörülü kontrol yöntemi kullanmıştır. Tohidi ve Yıldız [11], eyleyici doyumu altındaki belirsiz sistemler için bir projeksiyon algoritması geliştirerek ele aldıkları sistemi uyarlamalı kontrol yöntemi ile kontrol eden bir kontrolör tasarımı gerçekleştirmişlerdir. Ek olarak, Wang v.d. [12], eyleyici doyumu altındaki belirsiz sistemler için kayan kipli kontrol *(İng: sliding mode control)* tekniğini uygulamışlardır.

Literatür incelendiğinde, eyleyici doyumu problemi için büyük çoğunlukla AW sistemlerinin kullanılıp geliştirildiği görülmektedir [13]. AW tabanlı yöntemlerdeki genel mantık, eyleyici kısıtlarının kontrolör tasarımı süreçlerine direkt olarak dahil edilmemesi, bunun yerine bu kısıtların sebep olabileceği zararlı etkilerin azaltılması olarak açıklanabilir. Bu doğrultuda, ilk olarak eyleyici doyumunu direkt olarak ele almayan doğrusal bir kontrolör tasarlanır ve sonrasında ise sistemin kontrol yapısına ilgili eyleyici kısıtlarının etkilerini azaltmaya çalışan AW sistemleri eklenir [14]. Cui v.d. [15], bir nano-eyleyicinin referans takibi probleminde eyleyici doyumu ile başa çıkmak için sistemin ana kontrol yapısından ayrılmış *(İng: decoupled)* olarak modellenen bir AW sistemi geliştirip, bu AW sisteminin parametrelerini elde etmek amacıyla gerekli DME'leri tanımlanmışlardır. Liu v.d.[16] de benzer bir şekilde bir nano-eyleyicinin referans takibi probleminde ilgili eyleyicinin doyuma ulaşması problemi için birbirleri ile paralel çalışan bir iç kontrol yapısı ve AW sisteminden oluşan, referans takip eden ve AW tabanlı dayanıklı bir kontrol yapısı geliştirmişlerdir. Cao v.d. [17], eyleyici doyumu ve integral yığılmasına maruz kalan sistemlerin çıkış geri beslemeli kontrolü için optimizasyon tabanlı bir algoritma geliştirip ilgili kontrolörün AW parametrelerinin hesaplandığı bir yöntem sunmuşlardır. Barbu v.d. [18], eyleyici doyuma maruz değilken sistemin normal ve önceden tanımlanan bir kontrolör, eyleyici doyuma ulaştığında ise de sistemin kararlılığını koruyarak sıkı bir

şekilde referans takibi yapılmasını sağlayan bir AW algoritması geliştirmişlerdir. Arya ve Rao [19], bir dizi DME'nin çözümü ile asimptotik kararlı bölgelerin hesaplanarak, eyleyici genliği doyumlu sabit kanatlı bir hava aracının istenen yol açısını takip ettiği bir durum geri beslemeli kontrolör tasarlamışlardır. Wada ve Saeki [20], eyleyici doyumuna sahip sabit kanatlı hava araçları için statik bir AW sistemi tasarım yöntemi sunmuşlardır. Bu çalışmada, eyleyici doyumuna maruz kalan kapalı çevrim sistemlerin kararlılığını garanti eden AW sistemi tasarımı probleminin bir DME olarak tanımlanabileceğini göstermişlerdir. Reineh v.d. [21], sınırlı genlikte bozuculara maruz eyleyici doyumlu sistemler için yeni bir AW yapısı geliştirmişlerdir. Bu çalışmada, farklı seviyelerde doyum değerleri için farklı AW kazançları hesaplanmakta olup bu şekilde genel yapının tutuculuğu azaltılmaktadır. Galeani v.d. [22], çalışmalarında direkt-doğrusal AW (DLAW) ve model kurtarmalı AW (MRAW) isminde iki AW tekniğini ve bu tekniklerin ana özellikleri, uygulanabilirliği, performansı ve kararlılıklarını incelemişlerdir. Tarbouriech v.d. [23], hazırladıkları kitap bölümünde AW sistemlerinin tasarım ve optimizasyonu üzerinde çalışmalar yapmış olup bu çalışmalarını agresif manevralar yapan bir yolcu uçağının yanal uçuş dinamiği problemi üzerinde uygulamışlardır. Ayrıca, AW sistemlerin detaylı tasarımı ve analizi, Hu ve Lin [24], Kapila ve Grigoriadis [25], Tarbouriech v.d. [26] ve Hippe [13] tarafından hazırlanan kitaplarda ayrıntılı olarak işlenmektedir.

AW sistemleri detaylı olarak incelendiğinde çeşitli eksikler ve problemleri beraberinde getirdikleri görülmektedir. İlk olarak, açıklandığı üzere AW sistemleri eyleyici kısıtlarını direkt olarak kontrolör tasarımı sürecine katmayıp sonrasında eyleyici kısıtlarının istenmeyen etkilerini azaltmak için sisteme dahil etmektedirler. Bu durum, eyleyici doyumunun sistem performansı ile matematiksel olarak bir ilişki kurulamadan ele alınmasına, örneğin eyleyici doyumu kısıtlarının sağlanması durumunda sistem için belirlenen performans kriterlerinin de sağlanıp sağlanmadığının net bir şekilde ifade edilememesine yol açmaktadır. Ek olarak, AW sistemleri yapılarından dolayı sistemin referans noktası etrafında salınım yapar halde kalması *(İng: ringing)* gibi problemlere yol açmaktadır. Açıktır ki, eyleyici kısıtlarının sağlanması durumunda belirlenen sistem performansının da sağlandığının matematiksel olarak kesin bir şekilde garanti edilebilmesi gerekmektedir. Literatür incelendiğinde, bu koşulun sağlanması için ilgili kontrol problemlerinin çok amaçlı dışbükey optimizasyon problemleri olarak DME formunda modellenebileceği görülmektedir.

Lyapunov [27], 1890 yılında yayınladığı çalışmasında doğrusal dinamik sistemlerin asimptotik kararlılığını tanımlayan Lyapunov Kararlılık Teorisi'ni sunmuştur. Bu teoriye göre, DME formunda ifade edilebilen Lyapunov eşitsizliğinin geçerli olması ancak ve ancak uygun bir simetrik matrisin hesaplanabilmesi durumunda mümkün olup bu durumda eşitsizlikteki sistem matrisinin özdeğerlerinin tamamının reel

bileşenleri negatif olması, yani bu sistem matrisinin ifade ettiği doğrusal dinamik sistemin kararlı olması sağlanır. Bu şekilde, Lyapunov Kararlılık Teorisi bir sistemin kararlılığını DME formunda analiz edilmesini mümkün kılıp DME tabanlı kontrolör tasarımının temelini atmıştır. Karman [28], 1963 yılında yayınladığı çalışmasında Lur'e probleminin çözümü için Lyapunov Kararlılık Teorisi'nin kullanımını incelemiştir. Pyatnitskiy ve Skorodinskiy [29], Lyapunov Kararlılık Teoremi'ni bir dışbükey optimizasyon problemi olarak tanımlayıp bu problemin çözümü için sayısal yöntemler içeren bir algoritma sunmuşlardır. Francis [30] ve Doyle v.d. [31], çalışmalarında H_∞ optimal kontrol problemini cebirsel Riccati denklemleri olarak modelleyip çözmüşlerdir. Gahinet ve Apkarian [32] ile Chilai ve Gahinet [33], sırası ile 1994 ve 1996 yılında yayınlandıkları çalışmalarında ise H_∞ optimal kontrol problemini DME'ler ile bir dışbükey optimizasyon problemi olarak tanımlanıp çözülmüşlerdir. DME'lerin bilgisayar ortamında dışbükey optimizasyon problemleri olarak modellenmesinde literatüre önemli katkılardan biri geliştirdiği YALMIP isimli derleyici ile Löfberg [34] tarafından yapılmıştır. YALMIP kullanılarak DME'ler, MATLAB gibi yüksek seviyeli bir programlama dili ile çok hızlı bir şekilde modellenebilmektedir. YALMIP gibi derleyiciler, DME'leri modellemekle birlikte, optimizasyon probleminin çözümü için kendisi ile entegre olarak çalışabilen çözücülere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu doğrultuda Koh v.d. [35] tarafından MATLAB için geliştirilen yarı tanımlı programlama yazılımı paketi SDPT^3, Sturm [36] tarafından geliştirilen ve simetrik koniler üzerinde optimizasyon problemleri çözebilen SeDuMi ve iç nokta algoritmaları ile optimizasyon problemlerini çözen MOSEK [37] gibi çözücüler DME'lerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu doğrultuda, literatürde eyleyici doyumuna AW sistemleri kullanmadan yaklaşan DME tabanlı çeşitli diğer çalışmalardan da bahsedilebilir. Bateman ve Lin [38], eyleyici doyumu altındaki bir doğrusal sistemdeki doyum yapısını iç içe geçmiş elipsoitler olarak tanımlamış ve bu elipsoitlerin değişmez olup olmadığını koşuluna göre kontrolör kazancının elde edildiği bir sentez üretmişlerdir. Bu şekilde elde ettikleri koşul bir DME olarak modellenebilmektedir. Benzer şekilde, Zhou [39] da eyleyici doyumu yapısını iç içe geçmiş elipsoitler olarak tanımlamış olup, ele aldığı sistem ise ayrık bir sistemdir *(İng: discrete)*. Palmeira v.d. [40], çalışmalarında eyleyici doyumu altındaki örneklenmiş veri temelli sistemlerin kararlılık analizi ve kararlı kılınabilirliği üzerindeki çeşitli problemleri ele almış olup, karesel Lyapunov fonksiyonu kullanılarak ilgili sistemlerin kararlılığı ve durum geri beslemeli kontrol kazançlarının hesaplanması için DME koşulları tanımlamışlardır. Bu çalışmalar incelendiğinde ise görülmektedir ki ilgili çalışmalarda ele alınan sistemler için fizisel olarak karşılığı bulunan performans kriterleri (örneğin sistemin girişinden çıkışına tanımlı H_∞ normu) tanımlanmamıştır.

Bu doğrultuda, literatür incelendiğinde hem eyleyici kısıtları, hem de ele alınan sistemin performansı konusunda çeşitli kısıtların belirlenip bunların birbirlerini sağlayacak şekilde bir optimizasyon problemi olarak tanımlanmasında tümleşik karesel kısıtların kullanımının güçlü bir araç olabileceği anlaşılmıştır. Megretski ve Rantzer [41], Yakubovich'in çalışmalarını temel alarak bir sistemdeki eyleyici doyumu, zaman gecikmesi ve belirsiz parametreler gibi doğrusallığı bozan bileşenlerin TKK'ler kullanılarak nasıl tanımlandığı açıklamışlar, TKK'ler kullanılarak modellenen bu sistemlerin kararlılığı hakkında genelleştirilmiş bir teori geliştirmişler ve Nyquist grafikleri yardımı ile bu teoriyi göstermişlerdir. Bu çalışma, TKK'ların geniş bir yelpazede çeşitli belirsiz sistem elemanları için kullanımının temelini atan oldukça önemli bir çalışmadır. Seiler [42], çalışmasında durum uzay formunda modellenen bir sistemde mevcut olan belirsiz elemanların TKK formunda modellenmesi sonucu bu sistemlerinin kararlılığı ve dayanıklılığını hem frekans düzleminde hem de bir enerji kaybı *(İng: dissipation)* eşitsizliği olarak zaman düzleminde incelemiştir. Bir diğer çalışmada, Pfifer ve Seiler [43] tarafından oldukça benzer bir analiz doğrusal ve parametre değişimli *(İng: linear parameter varying, LPV)* sistemler için yapılmıştır. Veenman ve Scherer [44], çalışmalarında TKK tabanlı sistemler için benzer şekilde sistemin dayanıklılığını enerji kaybı eşitsizliği *(İng: dissipation inequality)* tabanlı bir ispat geliştirerek incelemişlerdir. Veenman v.d. [45], TKK kullanılarak modellenen sistemler için sistematik bir genelleştirilmiş analiz çerçevesi sunmuşlardır.

Knoblach v.d. [46]'nin çalışmasında sabit kanatlı hava araçlarının kanat ve kuyruk gibi kontrol yüzeylerinde uçuş sırasında oluşan gerilmeleri azaltmak için kullanılan aeroelastik servo sistemlerdeki eyleyicilerin genlik doyumu problemini ele alınmıştır. Bu doğrultuda ele alınan eyleyicinin doyumunu sektör sınırlı bir belirsiz parametre olarak modelleyip bir TKK elde etmişlerdir ve bu doğrultuda LPV bir sistem için durum-geri beslemeli bir kontrolör tasarımı gerçekleştirmişlerdir.

Son olarak, Wang w.d. [47]'nin çalışmasında yazarlar belirsiz bir eleman içeren bir LPV sistemi ele alıp bu belirsiz elemanın giriş-çıkış ilişkini TKK kullanarak tanımlamıştır. Bu çalışma da benzer şekilde ilgili sistem için bir çıkış-geri beslemeli LPV kontrolör sentezi de içermektedir. Çalışmada sunulan çıkış geri beslemeli LPV kontrolör sentezi incelendiğinde görülmektedir ki bu sentez dışbükey olmayan *(İng: non-convex)* bir yapıda olup LPV kontrolör sentezi ile TKK analizi arasında gidip gelen, DK-iterasyonu benzeri bir algoritma ile çözülmüştür. Basit bir sayısal örnek ile etkinliği gösterilen bu kontrolör sentezi, sistemin uygun bir frekans cevabının bilinip yorumlanamamasından dolayı doğrusal ve zamanla değişmeyen *(İng: linear time invariant, LTI)* sistemlere kıyasla daha az belirgin bir yapıdadır.

Literatür taraması sonucunda, genel olarak genlik doyumlu eyleyicilere sahip sabit kanatlı hava araçlarının boylamsal veya yanal uçuş dinamiği için hem eyleyici genliği doyumunu hem de genel sistemin giriş-çıkış ilişkisini performans kriterleri olarak tanımlandığı ve bu kriterlerin birbirlerini sağladığının matematiksel olarak ilişkilendirilip ifade edildiği, LTI sistemler için gerçekleştirilen durum geri beslemeli kontrolör sentezi çalışmalarının mevcut olmadığı görülmektedir. Özellikle önceki iki paragraftaki iki çalışma incelendiğinde ele alınan sistemlerin LPV olarak modellendiği de dikkat çekmektedir. Bu eksiklik, bu yüksek lisans tezi çalışmanının ana motivasyonu olmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu yüksek lisans tezinde özgün olarak tasarlanıp sunulacak olan eyleyici genliği doyumlu TKK tabanlı H_∞ kontrolör ile, sabit kanatlı bir hava aracının boylamsal uçuş dinamiğinin kontrol probleminde aşağıda belirtilen amaçlara ulaşmak hedeflenmiştir:

- Durum geri beslemeli kapalı çevrim sistemi kararlı kılmak.
- Durum geri beslemeli kapalı çevrim sistemin bozucu girişlerinden performans çıkışlarına tanımlanan H_∞ normunu en aza indirgemek.
- Kontrol giriş sinyali üzerindeki eyleyici genliği doyumu şartını TKK'ler kullanarak sektör-sınırlı bir parametrik belirsizlik olarak modelleyerek kontrolör tasarımına dahil etmek.
- Çalışmada paylaşılan diğer kontrolörlerden daha iyi performans elde etmek. Daha detaylı açıklamak gerekir ise; kontrol girişini maksimum fiziksel eyleyici genliği sınırında tutarken diğer kontrolörlerden daha az kontrol girişi uygulamak ve daha az kontrol girişi uygularken de sistemin bozucu girişlerinden performans çıkışlarına tanımlanan H_∞ normunu diğer kontrolörler ile kontrol edilen sistemlerden daha düşük, sistem cevaplarını ise daha iyi veya minimum olarak benzer seviyede elde etmek. Son olarak, paylaşılan uçuş kalitesi eğrilerine göre diğer kontrolörlere göre iyileştirme sağlayacak şekilde daha iyi salınım karakteristiği elde etmek.

1.3 Hipotez

Eyleyici doyumu, parametrik belirsizlikler ve zaman gecikmesi gibi doğrusal olmayan sistem parametreleri, doğrusal sistemlerin modellenmesi ve kontrolünde çeşitli zorluklar ve problemlere yol açmaktadır. Bu sebeple, bu tür doğrusal olmayan sistem

parametrelerinin çeşitli yöntemler kullanılarak doğrusal sistemler için gerçekleştirilen kontrolör tasarımlarına dahil edilebilmesi gerekmektedir.

Bu amaçla, doğrusallığı bozan ve belirsizlik içeren bu tür sistem parametreleri, sistemin doğrusal ve iyi bilinen temel bir modeline bir döngü ile bağlanarak sistemden ayrılabilir. Bu yöntem, doğrusal kesirli gösterim *(İng: linear fractional representation, LFR)* olarak adlandırılmaktadır. Bu şekilde, sistemin iyi bilinen ve kolay modellenen bölümü doğrusal kontrol teorisi yöntemleri ile kolaylıkla analiz ve kontrol edilebilmekte olup, belirsiz parametre için ise çeşitli teknikler kullanılarak yapılan tanımlamalar ile kısıt şartları belirlenebilmekte ve bu kısıt şartları da doğrusal kontrol problemine dahil edilebilmektedir.

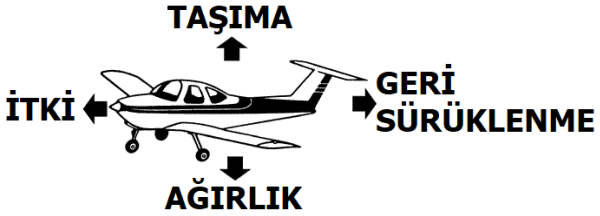
Bu çalışmada eyleyici genliği doyumu, DKG tekniği kullanılarak ana sistemden bir döngü olarak ayrılan bir ölü bölge *(İng: deadzone)* fonksiyonu ifade eden belirsiz eleman şeklinde modellenmiş olup bu belirsiz elemanın giriş-çıkış ilişkisi bir sektör sınırı olarak TKK'ler ile tanımlanmıştır. Bu sektör sınırlı norm koşulu ile genel sistemin bozucu girişinden performans çıkışına H_∞ normu olarak tanımlanan performans koşulunun birlikte sağlanacağı bir optimizasyon problemi, S-Prosedürü yardımcı teoremi kullanılarak DME formunda bir dışbükey optimizasyon problemi olarak modellenmiştir. Elde edilen DME'nin çözümü ile, ilgili sektörü sınırı koşulunu sağlayıp sistemin bozucu girişinden performans çıkışına tanımlanan H_∞ normunu en aza indirgeyen kontrolör kazancı hesaplanmıştır. Bu yaklaşım ile bu yüksek tezi çalışmasında elde edilen eyleyici genliği doyumlu TKK tabanlı H_∞ kontrolörün bir önceki bölümde sıralanan tüm tez amaçlarını başarı ile gerçekleştirdiği gözlemlenmiştir.

2
UÇUŞ DİNAMİĞİ VE MATEMATİKSEL MODEL

Bu bölümde, sabit kanatlı hava aracının matematiksel modelinin elde edilmesinden önce altyapı oluşturmak amacıyla ilk olarak uçuş dinamiği ile ilgili uçuşun temel prensipleri, uçuş kontrol yüzeyleri, referans sistemleri ve hareket değişkenleri gibi bazı temel kavramlar açıklanıp, sonrasında ise rijit bir gövde olarak kabul edilen sabit kanatlı hava aracı için kuvvet ve moment eşitlikleri kurularak hareket denklemleri elde edilecektir. Hareket denklemleri, içlerinde bulunan aerodinamik kuvvet ve momentler için belirli denge koşulları *(İng: trim conditions)* ele alınarak çeşitli tekniklerle doğrusal hale getirilecektir. Daha sonra, sisteme iyileştirici kontrol girişi sağlayan hareketli uçuş kontrol yüzeyleri ve sistemin atmosferik bozucu girişi olan rüzgarlar da hareket denklemlerine eklenerek matematiksel model sayısal benzetim çalışması için hazır bir şekilde durum uzay formunda son hali ile sunulacaktır. Son olarak ise durum uzay formunda elde edilen matematiksel model üzerinden sistem matrisinin özdeğerleri kullanılarak köklerin konumları, sönüm oranları, periyotlar ve boylamsal uçuşun dinamik modları gibi kavramlar incelenerek sabit kanatlı hava araçlarında kararlılık ve uçuş kalitesi konseptleri açıklanacaktır.

2.1 Uçuşun Temel Prensipleri

Sabit kanatlı bir hava aracına uçuşu sırasında etki eden dört temel kuvvet bulunmaktadır. Bu kuvvetler taşıma, geri sürüklenme, itki ve ağırlık olarak sıralanabilir. Taşıma ve geri sürüklenme kuvveti, aracın hava kütlesi içindeki hareketinden dolayı oluştuğu için *aerodinamik kuvvetler* olarak ifade edilir.



Şekil 2.1 Uçuşa etki eden dört temel kuvvet

2.1.1 Taşıma Kuvveti

Hava araçlarının kanat ve kuyruk gibi aerodinamik yüzeyleri, etraflarından akan havayı yönlendirerek alt ve üst yüzeyleri arasında basınç farkı oluştaracak şekilde tasarlanan, kanat profili *(İng: airfoil)* ismi verilen kesit şekillerine sahip elemanlardır. Aracın hareketinden dolayı kanat etrafında akan hava, Bernoulli ilkesi doğrultusunda kanadın alt yüzeyinde üst yüzeyinden daha yavaş bir akış hızı, dolayısı ile daha yüksek bir basınç alanı oluşturur. Bu olay sonucu yerçekimi ivmesi vektörü ile aynı doğrultuda, fakat tam tersi yönde yukarı doğru oluşan net kuvvete taşıma kuvveti *(İng: lift)* adı verilir. Taşıma kuvvetinin çok büyük bir çoğunluğu kanatlar tarafından üretilir, fakat moment dengesi kurmak amacıya aracın türüne ve kararlılık özelliklerine göre yukarı veya aşağı yönlü olmak üzere kuyruk da aerodinamik kuvvetler üretebilir. Kuyruk tarafından üretilen net aerodinamik kuvvet yukarı yönlü olursa araca etki eden net taşıma kuvvetine katkıda bulunur, aşağı yönlü olursa ise net taşıma kuvvetini azaltır. Taşıma kuvveti matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

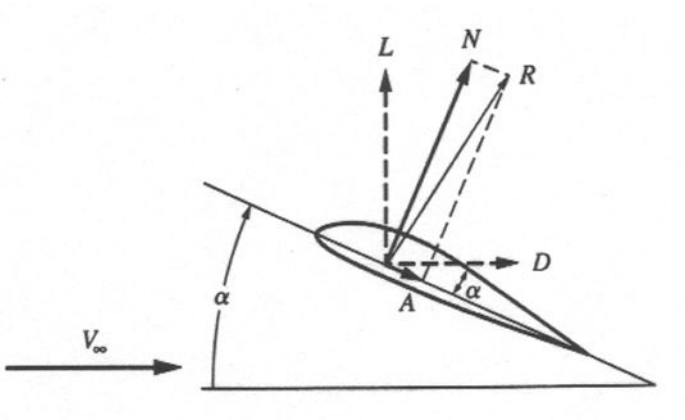
$$F_L = C_L Q S = \frac{1}{2} C_L \rho V_\infty^2 S \tag{2.1}$$

Burada Q ile gösterilen ifade dinamik basınçtır ve $Q = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2$ şeklinde hesaplanır. C_L; hücum açısı α ve kanat profili şekli gibi etkenlere bağlı olan taşıma katsayısı, ρ akışkanın yoğunluğu, V_∞ hava aracının hız vektörü doğrultusundaki bağıl hava akış hızı ve S ise aerodinamik kuvvet üreten bileşenin yüzey alanıdır.

2.1.2 Geri Sürüklenme Kuvveti

Geri sürüklenme kuvveti *(İng: drag)*, hava aracının hız vektörü doğrultusunda olup tam tersi zıt yönde hava aracına etki eden bütün kuvvetler olarak tanımlanabilir. Durağan halde bulunan havanın içinde belirli bir hızda hareket eden hava aracına çarpan hava moleküllerinin ortaya çıkardığı parazit sürüklenme *(İng: parasitic drag)* ve taşıma kuvveti üretmek için kanatlarda geriye yönlendirilen hava akışı ile kanat ucu girdaplarının birlikte oluşturduğu indüklenmiş sürüklenme *(İng: lift induced drag)*, geri sürüklenme kuvvetinin önemli iki kaynağı olarak sıralanabilir. (2.1)'de taşıma katsayısı C_L yerine geri sürüklenme katsayısı C_D kullanılırsa geri sürüklenme kuvveti aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$F_D = C_D Q S = \frac{1}{2} C_D \rho V_\infty^2 S \tag{2.2}$$



Şekil 2.2 Bir kanat profiline etki eden aerodinamik kuvvetler

Şekil 2.2'de aerodinamik etkiler ile oluşan kuvvetler; kanat profilinin ön ve arka yüzeylerini birleştiren düz çizgi olan veter hattı *(İng: chord)* doğrultusuna sırasıyla dik ve paralel olan normal ve eksenel kuvvetler N ve A ile gösterilmiş olup bileşkeleri ise R olarak ifade edilebilir. Bileşke kuvvet R'nin yerçekimi ivmesi doğrultusundaki yukarı yönlü bileşeni L taşıma kuvveti, aracın hız vektörü doğrultusundaki geri yönlü bileşeni D ise geri sürüklenme kuvvetidir.

2.1.3 İtki Kuvveti

İtki kuvveti *(İng: thrust)*, aracı hareket yönünde iten kuvvet olarak tanımlanır ve uçaklarda elektrikli, pistonlu, turbojet, turbofan veya turboprop motorlar tarafından üretilir.

2.1.4 Ağırlık Kuvveti

Ağırlık kuvveti aracın ağırlık merkezinden dünyanın merkezine doğru, yani yerçekimi ivmesi vektörü doğrultusunda olup büyüklüğü yerçekimi ivmesi ve araç kütlesine göre hesaplanan ve uçuş sırasında yakıt tüketimi gibi sebeplerle değişebilen bir kuvvettir.

2.1.5 Uçuş Kontrol Yüzeyleri

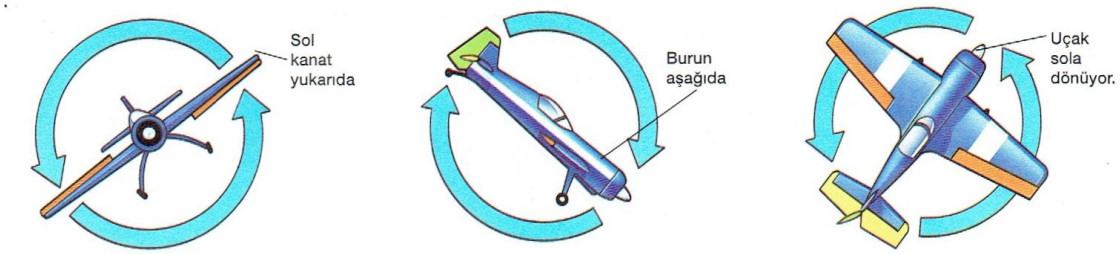
Sabit kanatlı hava araçlarında uçuş sırasında kumanda ve kontrolü sağlayan çeşitli hareketli sistemler bulunur. Bu sistemlere uçuş kontrol yüzeyleri adı verilir. Temel uçuş kontrol yüzeyleri yalpa kanatçıkları *(İng: aileron)*, irtifa dümeni *(İng: elevator)* ve istikamet dümeni *(İng: rudder)* olarak sıralanabilir.

Yalpa kanatçıkları her iki kanadın da uçlarına doğru ve arkasında, yani firar kenarında bulunur ve bulunduğu kanadı aşağı iterek veya yukarı kaldırarak uçağın boylamsal

eksen etrafında sağa veya sola yattığı yalpalama *(İng: roll)* hareketini gerçekleştirir. Uçaklarda yalpa kanatçığı her iki kanatta birbirinin zıt yönünde hareket eder, bu şekilde yalpalama hareketi için iki kanat da gerekli momente katkıda bulunur.

İrtifa dümeni yatay kuyruğun firar kenarında bulunur ve aşağı veya yukarı hareket ederek uçağın burnunun yanal eksen etrafında aşağı veya yukarı dönmesini sağlar, yani uçağın dalış veya tırmanış yapmasını sağlar. Bu hareket de yunuslama *(İng: pitch)* olarak ifade edilir.

İstikamet dümeni ise dikey kuyruğun arkasında bulunur ve sağa veya sola hareket ederek uçağı düşey eksen etrafında döndürür, yani uçağın burnunu sağa veya sola çevirir. Bu hareket de sapma *(İng: yaw)* olarak ifade edilir.



Şekil 2.3 Soldan sağa: yalpalama, yunuslama ve sapma hareketleri [48]

Şekil 2.3'te yalpa kanatçıkları turuncu, irtifa dümeni sarı, istikamet dümeni ise yeşil renkle gösterilmiştir.

2.2 Rijit Gövde Hareket Denklemleri

Hareket denklemleri çıkartılmadan önce, çalışmada kullanılacak referans sistemleri ve hareket değişkenlerinden bahsedilmelidir. Bu çalışmanın konusu yunuslama hareketi ve irtifa kontrolü olduğu için hava aracının sadece **boylamsal** *(İng: longitudinal)* uçuş dinamiği ele alınacaktır. Boylamsal uçuş dinamiği, hava aracının yalpalama ekseni x_b ve sapma ekseni z_b eksenlerindeki öteleme hareketi ile yunuslama ekseni y_b etrafındaki açısal hareketini ifade etmektedir. Uçuşun hareket denklemleri bu bölümde Newton'un 2. Hareket Yasası doğrultusunda elde edilip detaylı olarak açıklanacaktır [49].

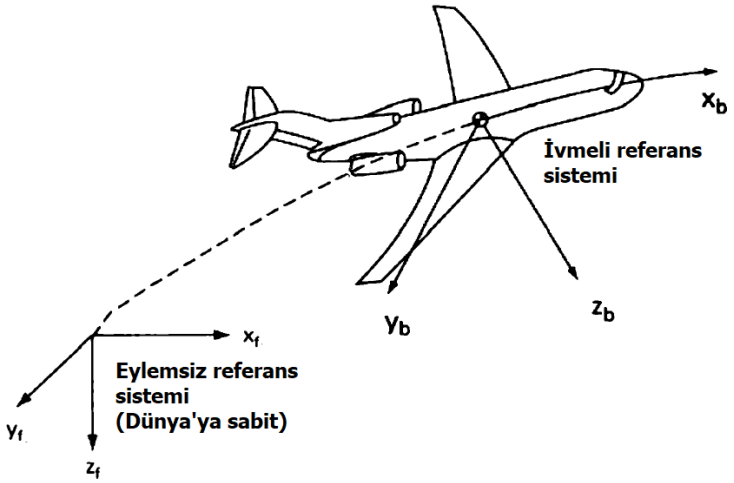
2.2.1 Referans Sistemleri ve Hareket Değişkenleri

Bu çalışmada iki adet farklı referans sistemi ile karşılaşılacaktır. Bunlar; eylemsiz ve ivmeli referans sistemleri olarak kısaca tanımlanabilir.

Eylemsiz referans sistemi, bir ivme etkisi altında herhangi bir dönme veya öteleme hareketi yapmayan, koordinatları sabit bir referans sistemini ifade eder [50]. Bu referans sistemi, **Dünya merkezli referans sistemi** *(İng: earth-fixed frame of reference)* olarak da bilinir ve merkezi Dünya üzerinde sabit olarak seçilen mutlak bir noktadır. Aslında gerçek hayatta eylemsiz bir referans sisteminden bahsetmek mümkün değildir, çünkü Dünya da dahil olmak üzere bütün gökcisimleri uzayda birbirlerine göre bağıl hızlarla hareket etmektedir. Fakat bir uçuş dinamiği probleminde hava aracının hareketi, Dünya'nın hareketi yanında ihmal edilebilecek seviyede olduğu için Dünya merkezli referans sistemi eylemsiz olarak kabul edilir. Eğer üzerinde çalışılan sistem, örneğin, bir roket olsaydı bu kabulün yapılması imkansız olacaktı, çünkü bir roket Dünya atmosferini terk ettiği andan itibaren bir uçağın aksine Dünya ile birlikte hareket eden bir nesne olmayacaktır ve Dünya'ya göre ihmal edilemeyecek bir bağıl hızı olacaktır. Eylemsiz referans sisteminin üç boyuttaki eksen takımı x_f, y_f ve z_f *(f: İng: fixed)* olarak ifade edilir ve x_f ekseni kuzey yönünü, y_f ekseni doğu yönünü, z_f ise dünyanın merkezine doğru aşağı yönü gösterir.

İvmeli referans sistemi olarak ifade edilen diğer referans sistemi ise **gövde merkezli referans sistemi** *(İng: body-centered frame of reference)* olarak da tanımlanabilir ve merkezi uçağın ağırlık merkezindedir [50]. Bu referans sisteminin eksen takımı, uçağın öteleme ve açısal hareketleri sonucu bir ivme etkisi altında sürekli değişecektir. Gövde referans sisteminin üç boyuttaki eksen takımı x_b, y_b ve z_b *(b: İng: body)* olarak ifade edilir ve x_b ekseni uçağın burnuna, y_b ekseni uçağın sağ kanadına, z_b ise uçağın gövdesinin altına doğrudur.

Hareket denklemleri elde edilirken sağladıkları kolaylıklar sebebiyle yerine göre her iki referans sistemi de kullanılacaktır ve bu referans sistemleri arasında ilerideki bölümlerde açıklanacağı üzere dönüşümler yapılması gerekecektir.



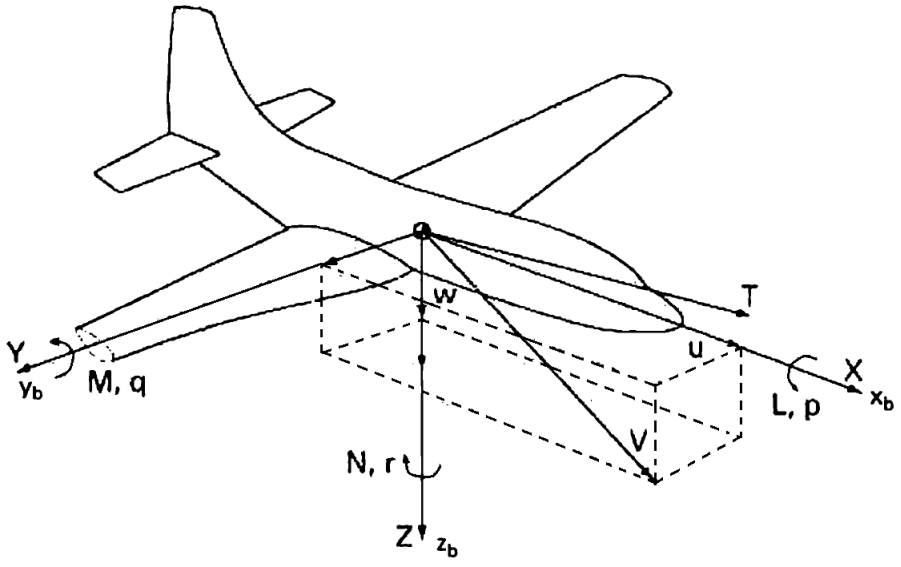
Şekil 2.4 Eylemsiz ve ivmeli referans sistemleri [49]

Bu çalışmada hareket denklemleri elde edilirken vektörel işlemlerin çok daha kolay olması sebebi ile hareket değişkenleri başlangıçta gövde referans sistemine göre ele alınmıştır. Gövde referans sisteminin üç eksenindeki doğrusal ve açısal hızları, kuvvetleri, momentleri, atalet ve çarpım atalet momentleri Tablo 2.1'de ifade edilmiştir.

Gövde referans sisteminin üç ekseni x_b, y_b ve z_b, sırası ile bu eksenler etrafındaki açısal hareketler olan yalpalama, yunuslama ve sapma ekseni olarak da ifade edilir. Bu eksenler doğrultusundaki doğrusal hızlar sırası ile Şekil 2.5'te görüldüğü üzere u, v ve w ve aerodinamik kuvvetler ise X, Y ve Z ile harfleri ile ifade edilir. Gövde eksenleri etrafındaki açısal hızlar ise sırası ile p, q ve r harfleri ile, aerodinamik momentler ise L, M ve N harfleri ile ifade edilir. Gövde eksenleri etrafındaki asal atalet momentleri I_x, I_y ve I_z ile ifade edilmekte ve bu eksenlerdeki çarpım atalet momentleri ise I_{yz}, I_{xz} ve I_{xy} ile ifade edilmektedir. Son olarak, T harfi itki kuvveti vektörünü ve büyük V harfi de uçağın bileşke hız vektörünü ifade etmektedir.

Tablo 2.1 Gövde eksenleri için hareket değişkenleri

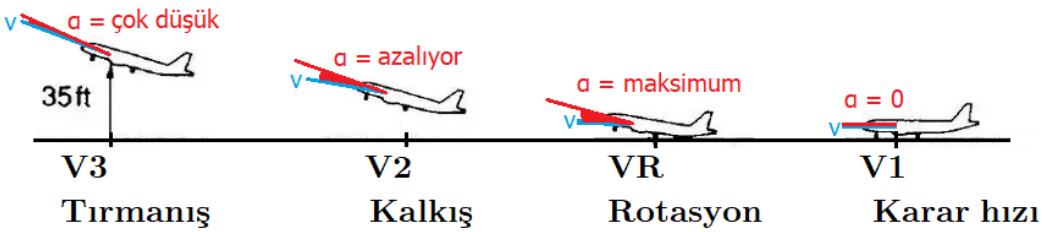
	Yalpalama ekseni, x_b	**Yunuslama ekseni,** y_b	**Sapma ekseni,** z_b
Açısal hızlar	p	q	r
Doğrusal hızlar	u	v	w
Kuvvetler	X	Y	Z
Momentler	L	M	N
Atalet momentleri	I_x	I_y	I_z
Çarpım atalet momentleri	I_{yz}	I_{xz}	I_{xy}



Şekil 2.5 Gövde eksenleri için hareket değişkenlerinin görsel olarak ifadesi [49]

Boylamsal dinamikler x_b ve z_b eksenleri doğrultusundaki kuvvetler ile y_b ekseni etrafındaki momentlerden oluşur. Bu durumda, bu çalışmada ele alınıp hesaplanması gereken kuvvetler X ve Z, moment ise M olmaktadır. Sonuç olarak sistemin çıkışları sırasıyla u, w, q, θ ve h olacaktır. u ve w sırasıyla x_b ve z_b eksenleri doğrultusundaki doğrusal hızları, q yunuslama hareketinin açısal hızını *(İng: pitch rate)*, θ yunuslama açısını *(İng: pitch angle)* ve h da irtifayı ifade etmektedir. Değinilmesi gereken önemli bir nokta şudur: yunuslama açısı θ, uçağın ufuk çizgisi ile, yani eylemsiz referans sisteminin $x_f 0 y_f$ düzlemi ile, yani Dünya yüzeyi ile yaptığı açıdır. Diğer bir önemli konu ise, sistemin ikinci çıkışı olan w hızı yerine ilerleyen bölümlerde basit bir matematiksel dönüşüm ile hücum açısı α kullanılacaktır. Bunun sebebi ise hücum açısı α'nın uçuş ile ilgili en önemli parametrelerinden biri olması ve çeşitli sensörlerden elde edilen verilerden hesaplanmak yerine doğrudan ölçülebilmesidir.

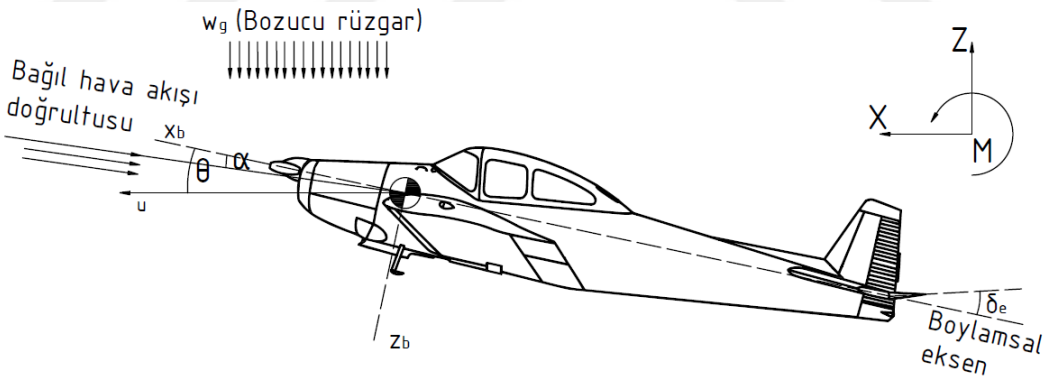
Hücum açısı α, bir aerodinamik yüzeyin (uçaklar için kanat ve kuyruk) bağıl hava akışı doğrultusu ile yaptığı açıdır. Bağıl hava akışı, veya bağıl rüzgar, *(İng: relative airflow, relative wind)* bir uçağın kanatlarından akan havanın hız doğrultu vektörüdür. Normalde uçağın hız vektörü ile bağıl hava akışı vektörünün aynı doğrultuda olacağı düşünülebilir, ki zaten çok ekstrem olmayan durumlarda bu iki vektör arasındaki açı çok az olmaktadır. Fakat uçağın kanatlarının üzerinden akan havanın doğrultusunu belirleyen tek etken, uçağın hızı değildir. Örneğin ani bir rüzgar değişimi, kanatlardan akan havanın yönünü rüzgarın yönüne göre yukarı veya aşağı saptıracak ve bir hücum açısı oluşturacaktır. Başka bir örnek vermek gerekirse, düz uçuştan bir anda tırmanış durumuna geçen bir uçağın hız vektörü, uçağın burnunun baktığı doğrultuya hemen gelmeyecektir ve uçak tırmanma kumandasını takiben bir anda artan ve uçağın tırmanmaya devam etmesi ile zamanla azalan bir hücum açısı ile hareket edecektir. Bu durumun en iyi örneği havalimanlarında görülebilir. Kalkış yapan yolcu uçakları pistte belirli bir minimum kalkış hızına ulaştıktan sonra burunlarını 15° gibi bir açıda kaldırmasına rağmen pistten hemen havalanmamakta, arada bir gecikme süresi olmaktadır. Bu an, hücum açısının maksimum olduğu andır. Uçağın pistte hızlanması sırasında yere tamamen yatay olan hız vektörü uçağın burnu yukarı kalktıktan sonra yavaş yavaş uçağın burun doğrultusuna yaklaşacak ve bir anda artan hücum açısı yavaş yavaş azalacaktır.



Şekil 2.6 Bir uçağın kalkışı sırasındaki aşamalar ve hücum açıları

Burada V1 kalkışın uçak pistten çıkmadan iptal edilebileceği maksimum hızı, VR pilotların kalkış komutunu *(İng: rotate)* verip uçağın burnunu kaldırdığını hızı, V2 uçağın bir motorunun devre dışı kalması halinde uçağın güvenle tırmanışına devam edebileceği emniyetli kalkış hızını, V3 ise uçağın 35 ft irtifayı geçtikten sonra tüm motorları çalışır haldeki kararlı tırmanma hızını ifade etmektedir. Şekil 2.6 incelendiği zaman görülmektedir ki aracın hız vektörünün hala yere tamamen paralel olarak ileri olduğu VR hızı anında hücum açısı kalkıştaki en yüksek değeri alır ve tırmanışı takiben aracın hız vektörünün yukarı doğru dönmesi ile azalmaya başlar.

Sistemin girişi olarak ise iki adet girişten bahsedilebilir. Şekil 2.7'de görüldüğü üzere bunlardan ilki atmosferik bozucu girişi olan w_g'dir. w_g, düşey eksen x_f doğrultusundaki bozucu rüzgar hızını ifade etmektedir. Denklemlerdeki ifadelerin birimlerinin uyumunun sağlanması amacıyla önceden de bahsedildiği üzere bozucu rüzgar hızı olan w_g, bozucu rüzgarın oluşturacağı bozucu hücum açısı değişimi olan α_g cinsinden sisteme verilecektir. Sistemin diğer girişi δ_e ise, irtifa dümeni açısı olup sistemin kontrol girişidir. Dengeli uçuş için, bozucu rüzgar etkisinin uçakta ortaya çıkartacağı moment, irtifa dümeni kontrol yüzeyinin oluşturacağı moment ile dengelenmeye çalışılır. Ayrıca, aracın manevra yapmadan denge konumunda düz seyir uçuşu yaptığı senaryo inceleneceği için, motor itkisi sabit olarak varsayılıp motor gücü değişimi girişi δ_T ise 0 olarak kabul edilecektir.



Şekil 2.7 Boylamsal dinamiklerin görsel ifadesi

2.2.2 Kuvvet ve Moment Eşitlikleri

Rijit bir gövde olarak kabul edilen uçağın hareket denklemleri bu çalışmada Newton'un ikinci hareket yasası doğrultusunda elde edilmiştir. Newton'un ikinci hareket yasasına göre, bir cisme etki eden dış kuvvetlerin toplamı o cismin momentumunun zamana göre değişimine ve aynı şekilde bir cisme etki eden dış momentlerin toplamı da o cismin açısal momentumunun zamana göre değişime eşittir. Doğrusal ve açısal momentumun zamana göre değişimi, eylemsiz bir referans sistemi

olan Dünya merkezli koordinat sistemine göre ifade edilmelidir. Newton'un ikinci hareket yasası aşağıdaki vektör eşitlikleri ile ifade edilebilir:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \sum \mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} \tag{2.3}$$

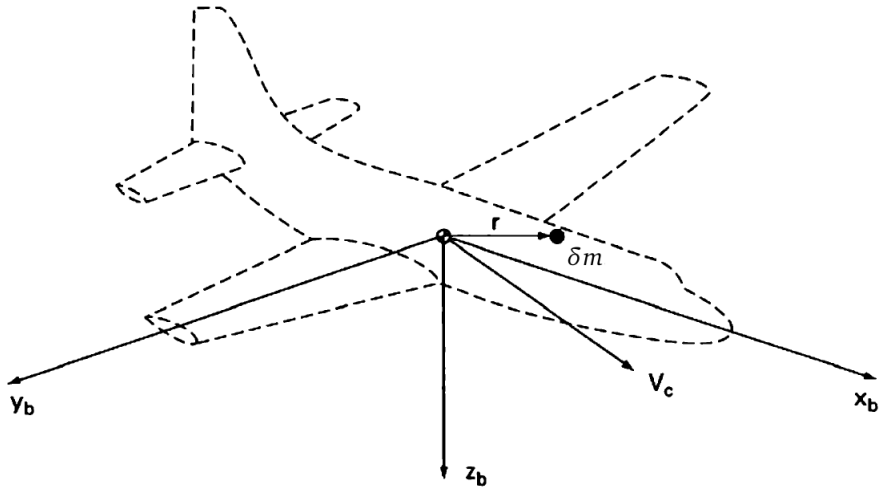
Bu vektör eşitlikleri skaler olarak ifade edilerek üç kuvvet ve üç moment eşitliği olarak (2.4 ve (2.5)'te ifade edildiği şekilde yazılabilir:

$$F_x = \frac{\mathrm{d}(mu)}{\mathrm{d}t} \qquad F_y = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} \qquad F_z = \frac{\mathrm{d}(mw)}{\mathrm{d}t} \tag{2.4}$$

Burada F_x, F_y, F_z ve u, v, w sırasıyla x_b, y_b ve z_b eksenleri doğrultusundaki kuvvet ve doğrusal hız bileşenleridir. Bu kuvvet bileşenleri, aerodinamik, itki ve ağırlık kuvvetlerinin bileşenlerini içermektedir. Moment eşitlikleri de benzer olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_x \qquad M = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_y \qquad N = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_z \tag{2.5}$$

Burada ise L, M, N ve H_x, H_y, H_z sırasıyla x_b, y_b ve z_b eksenleri doğrultusundaki moment ve açısal momentum bileşenleridir.



Şekil 2.8 Uçak üzerinde rastgele seçilen bir diferansiyel kütle elemanı δm [49]

Şekil 2.8'deki uçak için δm uçak üzerinde rastgele seçilen bir diferansiyel kütle elemanı, $\mathbf{v}$ bu diferansiyel kütle elemanının eylemsiz referans sistemine göre bağıl hızı ve $\delta\mathbf{F}$ de kütle elemanına etki eden kuvvet olarak ele alınırsa Newton'un ikinci yasası aşağıdaki eşitliği verir:

$$\delta\mathbf{F} = \delta m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{2.6}$$

Toplam kuvvet ise bütün kütle elemanlarına etki eden kuvvetler toplanarak bulunur:

$$\sum \delta \mathbf{F} = \mathbf{F} \tag{2.7}$$

δm diferansiyel kütlesinin hızı ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_c} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2.8}$$

Bu eşitlikte $\mathbf{v_c}$ uçağın ağırlık merkezinin hızını, $d\mathbf{r}/dt$ ise diferansiyel kütle elemanının ağırlık merkezine göre bağıl hızını ifade eder. Bu eşitlik, Newton'un ikinci yasasında yerine konulursa aşağıdaki denklem elde edilir [49]:

$$\sum \delta \mathbf{F} = \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \sum (\mathbf{v_c} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}) \delta m \tag{2.9}$$

Eğer uçağın kütlesi sabit olarak kabul edilirse (2.7) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$\mathbf{F} \; = \; m\frac{d\mathbf{v_c}}{dt} + \frac{d}{dt}\sum \frac{d\mathbf{r}}{dt}\delta m \; = \; \frac{d\mathbf{v_c}}{dt} + \frac{d^2}{dt^2}\sum \mathbf{r}\delta m \tag{2.10}$$

$\mathbf{r}$ mesafesi kütle merkezinden ölçüldüğü için $\sum \mathbf{r}\delta m$ toplamı sıfıra eşittir. Bu şekilde, uçağa etki eden dış kuvvetlerin uçağın kütle merkezine olan ilişkisini ifade eden kuvvet eşitliği son halini alır:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v_c}}{dt} \tag{2.11}$$

Benzer şekilde hareket eden bir kütle merkezi için moment eşitliği de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\delta \mathbf{M} = \frac{d}{dt}\delta \mathbf{H} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\delta m \tag{2.12}$$

Kütle elemanının hızı; kütle merkezinin hızı ve kütle elemanının kütle merkezine göre olan bağıl hızı cinsinden yazılabilir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_c} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v_c} + \omega \times \mathbf{r} \tag{2.13}$$

Burada ω uçağın açısal hızı ve $\mathbf{r}$ de kütle elemanının kütle merkezine göre konumudur. Açısal momentum eşitliği aşağıdaki şekilde yazılırsa [49];

$$\mathbf{H} = \sum \delta \mathbf{H} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{v_c})\delta m + \sum [\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})]\delta m \tag{2.14}$$

$\mathbf{v_c}$ hızı toplam sembolüne göre sabit olduğu için toplam sembolü dışına çıkartılabilir:

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r}\delta m \times \mathbf{v_c} + \sum [\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})]\delta m \tag{2.15}$$

Önceden de açıklandığı üzere $\sum \mathbf{r}\delta m$ sıfıra eşit olduğu için (2.15)'teki ilk terim $\sum \mathbf{r}\delta m \times \mathbf{v_c}$ sıfıra eşit olur. Eğer açısal hız ve konum vektörleri aşağıdaki gibi ifade edilirse;

$$\omega = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \tag{2.16}$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{2.17}$$

ve (2.15)'te yerine yazılırsa, açısal momentum **H** aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{H} = (p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}) \sum (x^2 + y^2 + z^2)\delta m - \sum (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(px + qy + rz)\delta m \tag{2.18}$$

Açısal momentum **H**'ın skaler bileşenleri [49]:

$$\begin{aligned} H_x &= p \sum (y^2 + z^2)\delta m - q \sum xy\delta m - r \sum xz\delta m \\ H_y &= -p \sum xy\delta m - q \sum (x^2 + z^2)\delta m - r \sum yz\delta m \\ H_z &= -p \sum xz\delta m - q \sum yz\delta m - r \sum (x^2 + y^2)\delta m \end{aligned} \tag{2.19}$$

Bu eşitlik takımında bulunan toplam ifadeleri, uçağın kütle atalet momentleridir ve aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} I_x &= \int\int\int (y^2 + z^2)\,\delta m \qquad I_{xy} = \int\int\int xy\delta m \\ I_y &= \int\int\int (x^2 + z^2)\delta m \qquad I_{xz} = \int\int\int xz\delta m \\ I_z &= \int\int\int (x^2 + y^2)\delta m \qquad I_{yz} = \int\int\int yz\delta m \end{aligned} \tag{2.20}$$

I_x, I_y ve I_z uçağın sırasıyla x_b, y_b ve z_b asal eksenlerindeki kütle atalet momentleridir. Karışık indisli olan I_{xy}, I_{xz} ve I_{yz} ifadeleri ise çarpım atalet momentleridir. Bu atalet momentlerinin sayısal değerleri uçağın şekline ve kütle dağılıma bağlıdır. Atalet momentleri arttıkça, uçağın dönmeye karşı gösterdiği direnç artacaktır. Atalet momentleri (2.19)'da yerlerine yazılırsa açısal momentumun skaler bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} H_x &= pI_x - qI_{xy} - rI_{xz} \\ H_y &= -pI_{xy} - qI_y - rI_{yz} \\ H_z &= -pI_{xz} - qI_{yz} - rI_z \end{aligned} \tag{2.21}$$

Referans sisteminin dönmediği yani eylemsiz olduğu varsayılmış idi. Bu varsayıma göre uçak döndükçe momentler ve atalet momentleri de vektörel olarak değişecektir. Bu durumun ortaya çıkaracağı vektörel işlem karmaşıklığının üstesinden gelmek için referans sistemi uçak gövdesine sabitlenir, yani ivmeli olan gövde merkezli referans

sistemi referans olarak alınır. Artık gövde merkezli koordinat sistemine göre uçağın **v** hızının ve **H** açısal momentumunun türevleri belirlenmelidir. Keyfi olarak **A** ile ifade edilen bir vektörünün ω açısal hızı ile dönen bir gövde merkezli referans sistemine göre türevi aşağıdaki vektör eşitliği ile ifade edilebilir:

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_I = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_B + \omega \times \mathbf{A} \tag{2.22}$$

Burada *I* ve *B* indisleri eylemsiz *(İng: inertial)* ve gövde merkezli *(İng: body)* referans sistemlerini ifade etmektedir. Bu eşitlik önceden elde edilen denklemlerde yerine konulursa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\mathbf{F} = m\left.\frac{d\mathbf{v_c}}{dt}\right|_B + m(\omega \times \mathbf{v_c}) \tag{2.23}$$

$$\mathbf{H} = \left.\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right|_B + \omega \times \mathbf{H} \tag{2.24}$$

Bu şekilde, kuvvet ve momentlerin skaler bileşenlerini ifade eden denklemler aşağıdaki gibi sıralanabilir [49]:

$$\begin{aligned} F_x &= m(\dot{u} + qw - rv) \quad F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \quad F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ L &= \dot{H}_x + qH_z - rH_y \quad M = \dot{H}_y + rH_z - pH_y \quad N = \dot{H}_z + pH_y - qH_x \end{aligned} \tag{2.25}$$

Gövde merkezli referans sistemine göre x_b ve z_b eksenlerinin oluşturduğu $x_b 0 z_b$ düzlemi uçağın simetri ekseni olarak kabul edilirse (ki gerçek senaryolarda da neredeyse her zaman böyledir) çarpım atalet momentleri I_{xy} ve I_{yz} sıfıra eşit olur. Bu sonuç ile, moment eşitliği basitleştirilerek son haliyle aşağıdaki şekilde yazılabilir [49]:

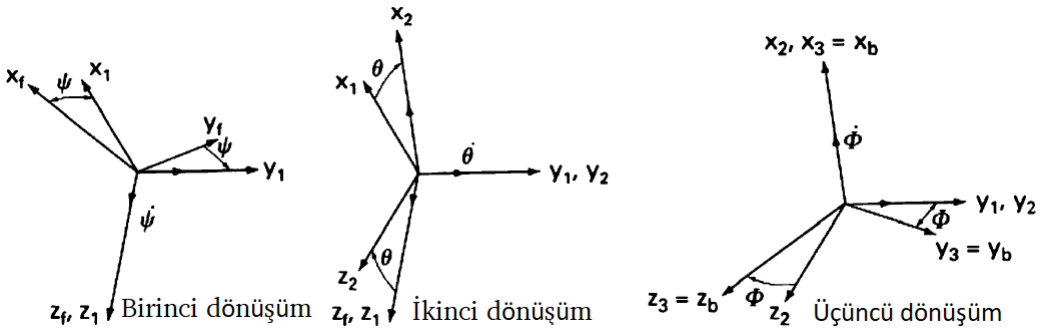
$$\begin{aligned} L &= I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + qr(I_z - I_y) - I_{xz}pq \\ M &= I_y\dot{q} + rp(I_x - Iz) + I_{xz}(p^2 - r^2) \\ N &= -I_{xz}\dot{p} + I_z\dot{r} + pq(I_y - Ix) + I_{xz}qr \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.2.3 Hava Aracının Konum ve Yönelimi

Bir önceki bölümde hareket denklemleri vektörel işlemleri kolaylaştırmak adına gövde merkezli referans sistemine göre tanımlanmıştır. Ne yazık ki, uçağın konumu ve yönelimi gövde eksenli referans sistemine göre ifade edilemez, çünkü uçağa etki eden kuvvet ve momentler uçağa göre bağıl vektörel büyükler olarak değişmektedir ve mutlak bir sonucun elde edilmesi doğrultusunda gerekli işlemlerin yapılabilmesi için uçağın konum ve yönelimi eylemsiz bir referans sistemi olan Dünya merkezli referans sistemine göre tekrardan geri tanımlanmalıdır.

Uçağın Dünya merkezli referans sistemine göre yönelimi, gövde merkezli referans sistemi üzerinde yapılan ve sırası çok önemli olan üç ardışık dönme işlemi ile ifade edilebilir. Bu dönme işlemlerini ifade eden açılar, *Euler açıları* olarak tanımlanır. Gövde merkezli referans sisteminden dünya merkezli referans sistemine geçişi sağlayan üç adet Euler açı dönüşüm işlemi, Şekil 2.9'da görüldüğü üzere aşağıdaki adımlar sırası ile uygulanarak gerçekleştirilebilir:

Gövde ve Dünya merkezli referans sistemleri ilk başta çakışık olarak kabul edilirse;
1. x_f, y_f ve z_f eksen takımı, z_f ekseni etrafında ψ açısı kadar döndürülerek x_1, y_1 ve z_1 eksen takımı elde edilir.
2. x_1, y_1 ve z_1 eksen takımı, y_1 ekseni etrafında θ açısı kadar döndürülerek x_2, y_2 ve z_2 eksen takımı elde edilir.
3. x_2, y_2 ve z_2 eksen takımı, x_2 ekseni etrafında ϕ açısı kadar döndürülerek x_3, y_3 ve z_3 elde edilir. Elde edilen son eksen takımı x_3, y_3 ve z_3, yani aynı zamanda aracın gövde merkezli koordinat sisteminin eksenleri olan x_b, y_b ve z_b'ye denk olmaktadır.



Şekil 2.9 Euler açı dönüşümleri

Euler açı dönüşümleri yapıldıktan sonra uçağın uçuş sırasındaki hız vektörlerinin Dünya merkezli referans sistemine göre bileşenleri hesaplanabilir. Bunun için uçağın x_f, y_f ve z_f eksenleri doğrultusundaki hız bileşenleri sırası ile $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ ve $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ olarak tanımlanırsa, bu hızlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir [49]:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_1 \cos\psi - v_1 \sin\psi \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_1 \sin\psi - v_1 \cos\psi \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w_1 \tag{2.27}$$

İlerlemeden önce kullanılacak bütün trigonometrik ifadeler $S_\psi \triangleq \sin\psi$ gibi kısaltılmış gösterimler olarak ifade edilirse, (2.27)'nin elde edildiği şekilde u_1, v_1 ve w_1 hızları, u_2, v_2 ve w_2 hızları türünden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u_1 = u_2 C_\theta + w_2 S_\theta \qquad v_1 = v_2 \qquad w_1 = -u_2 S_\theta + w_2 C_\theta \tag{2.28}$$

$$u_2 = u \qquad v_2 = vC_\phi - wS_\phi \qquad w_2 = vS_\phi + wC_\phi \tag{2.29}$$

Burada u, v ve w, uçağın gövde merkezli referans sistemine göre, yani x_b, y_b ve z_b eksenlerindeki hız bileşenleridir.

Uçağın dünya merkezli referans sistemine göre x_f, y_f ve z_f eksenlerindeki hızları $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ ve $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$, Euler açıları ve gövde merkezli referans sistemi eksenleri olan x_b, y_b ve z_b eksen takımı doğrultusundaki hız bileşenleri olan u, v ve w cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir [49]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\theta C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

(2.30)'un integrali, uçağın Dünya merkezli referans sistemine göre konumunu verir.

Gövde merkezli referans sistemi eksenleri olan x_b, y_b ve z_b eksenleri etrafındaki açısal hızlar p, q ve r ve Euler açısal hızları ($\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$) arasındaki ilişkiler ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

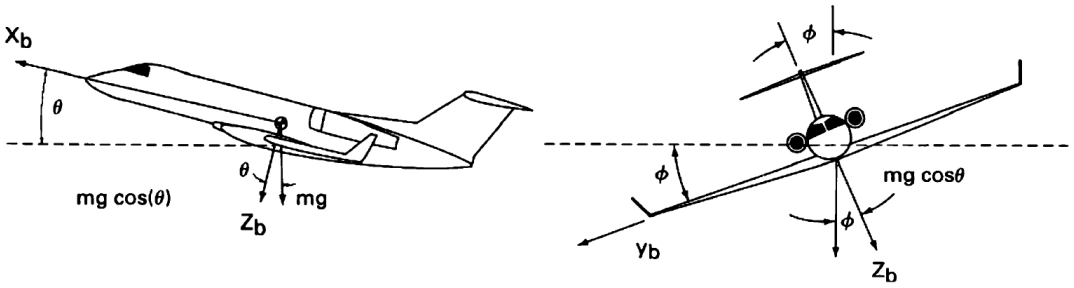
$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & C_\theta S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

(2.29), Euler açısal hızlarının türevleri, gövde merkezli referans sistemine göre açısal hızlar olan p, q ve r cinsinden yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir [49]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S_\phi \tan\theta & C_\phi \tan\theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi \sec\theta & C_\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

2.2.4 Ağırlık ve İtki Kuvvetleri

Şekil 2.10'da görüldüğü üzere uçağa etki eden yerçekimi kuvveti uçağın ağırlık merkezinden Dünya merkezine doğru yani yerçekimi ivmesi vektörü yönünde etki etmektedir. Gövde merkezli referans sisteminin merkezi, uçağın ağırlık merkeziyle çakışık olduğundan dolayı uçağın ağırlık bileşenleri herhangi bir moment üretmeyecektir fakat uçağa etki eden dış toplam kuvvetlere katkıları olacaktır.

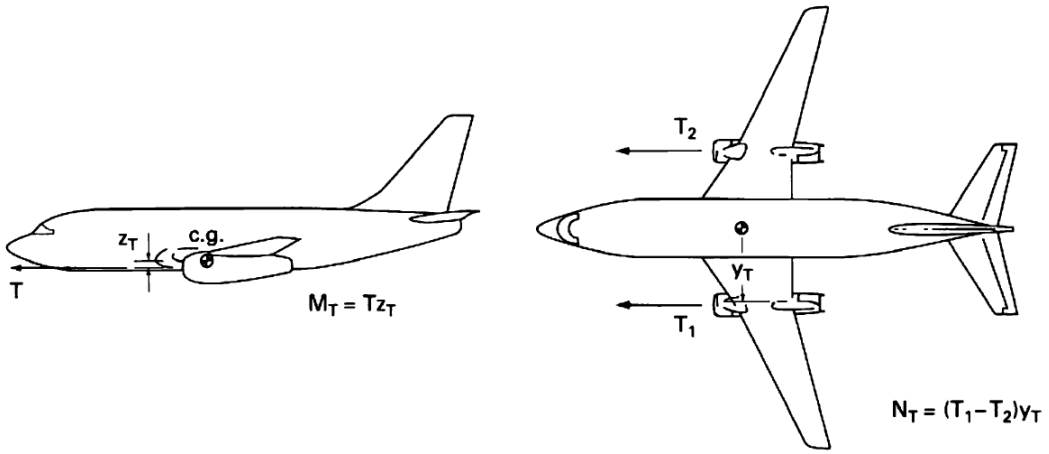


Şekil 2.10 Ağırlık kuvvetlerinin görsel ifadesi [49]

Uçağa etki eden ağırlık kuvvetlerinin x, y ve z eksenindeki bileşenleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$F_{x,mg} = -mg \sin\theta \tag{2.33a}$$
$$F_{y,mg} = mg \cos\theta \sin\phi \tag{2.33b}$$
$$F_{z,mg} = mg \cos\theta \cos\phi \tag{2.33c}$$

Ağırlık kuvvetinin aksine itki kuvvetinin bileşenleri tüm eksen takımları doğrultusunda olabilir. Ayrıca, itki kuvvetleri eğer aracın uçağın merkezi doğrultusundan etki etmezse uçak üzerinde moment oluşturacaktır. İtki kuvvet ve momentleri Şekil 2.11'de görüldüğü üzere aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:



Şekil 2.11 İtki kuvvetleri ve momentlerinin görsel ifadesi [49]

$$F_{x,itki} = X_T \qquad F_{y,itki} = Y_T \qquad F_{z,itki} = Z_T \tag{2.34}$$
$$L_{itki} = L_T \qquad M_{itki} = M_T \qquad N_{itki} = N_T \tag{2.35}$$

2.2.5 Rijit Gövde Hareket Denklemlerinin Özeti

Elde edilen dinamik ve kinematik denklemler aşağıdaki şekilde rijit gövde hareket denklemleri olarak özetlenebilir [49]:

$$X - mgS_\theta = m(\dot{u} + qw - rv) \tag{2.36a}$$
$$Y + mgC_\theta S_\phi = m(\dot{v} + ru - pw) \quad \text{Kuvvet denklemleri} \tag{2.36b}$$
$$Z + mgC_\theta C_\phi = m(\dot{w} + pv - qu) \tag{2.36c}$$
$$L = I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + qr(I_z - I_y) - I_{xz}pq \tag{2.36d}$$
$$M = I_y\dot{q} + rp(I_x - Iz) + I_{xz}(p^2 - r^2) \quad \text{Moment denklemleri} \tag{2.36e}$$
$$N = -I_{xz}\dot{p} + I_z\dot{r} + pq(I_y - Ix) + I_{xz}qr \tag{2.36f}$$
$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi}S_\theta \quad \text{Euler açıları ve Euler açısal} \tag{2.36g}$$
$$q = \dot{\theta}C_\phi + \dot{\psi}C_\theta S_\phi \quad \text{hızları cinsinden gövde} \tag{2.36h}$$
$$r = \dot{\psi}C_\theta C_\phi - \dot{\theta}S_\phi \quad \text{açısal hızları} \tag{2.36i}$$
$$\dot{\theta} = qC_\phi - rS_\phi \quad \text{Euler açıları ve gövde açısal} \tag{2.36j}$$
$$\dot{\phi} = p + qS_\phi T_\theta + rC_\phi T_\theta \quad \text{hızları cinsinden Euler} \tag{2.36k}$$
$$\dot{\psi} = (qS_\phi + rC_\phi)sec\theta \quad \text{açısal hızları} \tag{2.36l}$$

Eylemsiz referans sistemine göre hızlar $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ ve $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ ile ivmeli referans sistemine göre hızlar u, v ve w arasındaki matematiksel ilişki de aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\theta C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

2.3 Hareket Denklemlerinin Doğrusal Hale Getirilmesi

Elde edilen hareket denklemleri, küçük bozucu teorisi *(İng: small disturbance theory)* adı verilen bir yöntem ile doğrusal hale getirilebilir. Bu yöntemi kullanmak için uçağın denge durumundan sadece küçük sapmalar ($< 15°$) yaptığı varsayılmalıdır. Bu yöntemle doğrusal hale getirilen denklemlerdeki açılar çok büyük olmadığı sürece sayısal benzetim çalışmaları yüksek doğruluk ile çalışacaktır. Bu sebeple, stol (tutunma kaybı) veya spin (kontrolsüz dönme) gibi aerodinamik prensiplerinin geçerliliğini kaybettiği durumlarda veya çok yüksek genlikli hareketler yapan sistemlerde küçük bozucu teorisi kullanılamaz. Buna rağmen, küçük bozucu teorisi bu çalışma başta olmak üzere uçuş kontrolünün birçok pratik uygulaması için yeterli ve yüksek doğrulukta sonuçlar sunmaktadır.

Küçük bozucu torisi yönteminin uygulanması için ilk olarak hareket denklemlerindeki her bir hareket değişkeni, 0 indisi ile ifade edilen bir referans (denge) durumu ve başında Δ ile ifade edilen, bu referanstan yapılan bir sapma değerinin toplamı olarak yazılmalıdır:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta u \qquad w = w_0 + \Delta w \\ q &= q_0 + \Delta q \qquad M = M_0 + \Delta M \\ X &= X_0 + \Delta X \qquad Z = Z_0 + \Delta Z \\ \delta_e &= \delta_{e_0} + \Delta\delta_e \end{aligned} \tag{2.38}$$

Bu çalışmada aracın manevra yapmadan denge konumunda düz seyir uçuşı yaptığı senaryonun inceleneceğinden bahsedilmişti. Bu durumda, denge uçuş durumununda simetri ve **itki kuvvetlerinin sabit ($\delta_T = 0$)** olduğunu ele alınırsa, denge durumunda aşağıdaki açısal hızlar ve Euler açılarının sıfır olduğu kabul edilebilir:

$$v_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = 0 \tag{2.39}$$

Ayrıca, başlangıçta x eksenini uçağın u_0 hızı vektörü ile hizalanırsa, z eksenindeki w_0 hızının sıfıra eşit olduğu kabul edilebilir.

(2.38)'de gösterildiği gibi ifade edilen hareket değişkenleri, hareket denklemlerine entegre edilirse hareket denklemleri basitleştirilebilir. Örnek olarak aşağıdaki şekilde ifade edilen, x_b ekseni doğrultusundaki kuvvet olan X ele alınsın:

$$X - mg\sin\theta = m(\dot{u} + qw - rv) \tag{2.40}$$

Küçük bozucu formundaki değişkenler bu denklemde yerine yazılarak (2.40)'tan (2.41) elde elde edilir [49]:

$$\begin{gathered} X_0 + \Delta X - mg\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \\ m[\frac{d}{dt}(u_0 + \Delta u) + (q_0 + \Delta q)(w_0 + \Delta w) - (r_0 + \Delta r)(v_0 + \Delta v)] \end{gathered} \tag{2.41}$$

Aşağıda yapılan denge kabulune göre:

$$w_0 = v_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 \tag{2.42}$$

X kuvvetini ifade eden eşitlik şu hali alır:

$$X_0 + \Delta X - mg\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = m\Delta\dot{u} \tag{2.43}$$

Küçük bozucu teorisi doğrultusunda yapılabilecek $\sin\theta = \theta$ ve $\cos\theta = 1$ kabulleri ile

aşağıdaki trigonometrik bağıntı şu şekilde sadeleştirilebilir:

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin\theta_0 \cos\Delta\theta + \cos\theta_0 \sin\Delta\theta = \sin\theta_0 + \Delta\theta\cos\theta_0 \tag{2.44}$$

(2.44) doğrultusunda X kuvveti eşitliği aşağıdaki halini alır:

$$X_0 + \Delta X - mg(\sin\theta_0 + \Delta\theta\cos\theta_0) = m\Delta\dot{u} \tag{2.45}$$

Hareket değişkenlerinin referans (denge) bileşenleri aşağıdaki şekilde sıfır olarak kabul edilirse,

$$X_0 - mg\sin\theta_0 = 0 \tag{2.46}$$

X kuvvet ifadesi en son şu hali alır [49]:

$$\Delta X - mg\Delta\theta\cos\theta_0 = m\Delta\dot{u} \tag{2.47}$$

ΔX kuvveti, x_b ekseni doğrultusundaki aerodinamik kuvvetlerin değişimidir ve bozucu değişkenler türünden bir Taylor serisi açılımı olarak yazılabilir. ΔX'in, sadece bu kuvvete etkisi en önemli olan u, w ve δ_e bileşenlerinden oluştuğu varsayılırsa ΔX kuvveti aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Delta X = \frac{\partial X}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial X}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e \tag{2.48}$$

(2.48)'de bulunan $\partial X/\partial u$, $\partial X/\partial w$ ve $\partial X/\partial\delta_e$ ifadeleri birer **kararlılık türevi** *(İng: stability derivatives)* olup ve denge durumuna göre (trim) elde edilirler. Kısmi türevler ile gösterilen bu ifadeler sırası ile X kuvvetinin u hızına, w hızına ve δ_e açısına göre değişimi anlamına gelmektedir.

Yukarıda ifade edilen ΔX, (2.47)'de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial X}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial X}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e - mg\Delta\theta\cos\Delta\theta_0 = m\Delta\dot{u} \tag{2.49}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenip aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$(m\frac{d}{dt} - \frac{\partial X}{\partial u})\Delta u - (\frac{\partial X}{\partial w})\Delta w + (mg\cos\theta_0)\Delta\theta = \frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T}\Delta\delta_T \tag{2.50}$$

Bu denklem daha pratik bir şekilde tüm elemanları m kütlesine bölerek yazılabilir:

$$(\frac{d}{dt} - X_u)\Delta u - X_w\Delta w + (g\cos\theta_0)\Delta\theta = X_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{2.51}$$

Burada $X_u = \partial X/\partial u/m$, $X_w = \partial X/\partial w/m$ v.b. şeklinde gösterilen ifadeler kararlılık

türevlerinin uçak kütlesine bölünmesi ile ifade edilen değerler olmaktadır.

Örnek olarak X kuvveti için yapılan işlemler ile de görüldüğü üzere, kuvvet ve momentlerdeki değişim Δu, Δw gibi hareket değişkenlerine bağlı fonksiyonlar olarak ifade edilebilmektedir. Bu çalışmada boylamsal uçuş dinamiğinin modellenmesinde kullanılacak kuvvet ve momentlerin, temel olarak katkısı ihmal edilemeyecek şekilde en önemli olan hareket değişkenleri ve kararlılık türevleri cinsinden gösterimi aşağıdaki şekilde derlenebilir [49]:

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{\partial X}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial X}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e \\ \Delta Z &= \frac{\partial Z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial Z}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial Z}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e \\ \Delta M &= \frac{\partial M}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial M}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial M}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e \end{aligned} \tag{2.52}$$

X kuvveti örneğinde olduğu gibi aynı şekilde küçük bozucu teorisi yöntemi ile doğrusal hale getirilen Z kuvveti ve M momentini de kapsayan doğrusal hale getirilmiş üç hareket denklemi aşağıdaki şekilde listelenebilir:

$$(\frac{d}{dt} - X_u)\Delta u - X_w\Delta w + (g\cos\theta_0)\Delta\theta = X_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{2.53}$$

$$-Z_u\Delta u + (\frac{d}{dt} - Z_w)\Delta w - (u_0\frac{d}{dt} - g\sin\theta_0)\Delta\theta = Z_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{2.54}$$

$$-M_u\Delta u + M_w\Delta w + (M_q\frac{d}{dt})\Delta\theta = M_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{2.55}$$

Sistemi durum uzay formunda ifade edebilmek amacıyla, hareket denklemleri sistemde gözlemlenmesi gereken durumların birinci dereceden türevleri kullanılarak diferansiyel denklemler formunda gösterilebilmelidir. Bu sebeple, sistemde gözlenmesi gereken diğer iki durum olan yunuslama açısı θ ve ve irtifa h da sisteme bu yöntemle eklenmelidir.

Yunuslama açısı θ'nın zamana göre birinci türevinin, yunuslama açısal hızı q'ya eşit olduğunu açıktır. Bu şekilde dördüncü hareket denklemi oldukça basit bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Delta\dot{\theta} = \Delta q \tag{2.56}$$

İrtifayı ifade eden hareket denklemi için ise, açıktır ki irtifanın zamana göre birinci türevi, z_b eksenindeki doğrusal hız olan w'yi ifade etmektedir. w hızı aynı zamanda Şekil 2.7'de görüldüğü üzere $u\tan(\Delta\theta - \Delta\alpha)$ şeklinde de ifade edilebilir.

Toparlanacak olursa:

$$\Delta\dot{h} \;=\; \Delta w \;=\; u\tan(\Delta\theta - \Delta\alpha) \tag{2.57}$$

Önceden bahsedilen açı koşulunda ($< 15°$) olarak belirlenen sınırın mantığı şudur: Birinci sebep olarak; 15° savaş uçakları gibi ekstrem şartlarda çalışmayan, yani neredeyse tüm uçaklar için ortalama bir kritik hücum açısı değeridir. Bu hücum açısı değerinden sonra uçakların kanatlarındaki akış tamamen bozulur ve uçak stol *(İng: stall)* yani tutunma kaybı durumuna girer. Böyle bir durumda bu çalışmada ifade edilen aerodinamik kuvvet denklemleri tamamen geçersiz kalır, uçak artık aerodinamik kanunları çerçevesinde uçan bir cisim olmaktan çıkar ve bir akışkan içinde rastgele hareket eden bir cisim olur. İkinci sebep ise, $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ ve $\tan\theta = \theta$ gibi ifade edilen küçük açı kabulleridir. Bu ifadelerin ortaya çıkardıüı hata payının %1'i geçtiği ilk trigonometrik fonksiyon 14° değerinde sin fonksiyonu olmaktadır. Diğer trigonometrik fonksiyonlarda hata payının %1'i geçmesi daha da yüksek açı değerlerinde olmaktadır.

(2.57)'de belirtilen ifade, açı koşulu ($< 15°$) kabulü ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Delta\dot{h} \;=\; \Delta w \;=\; u(\Delta\theta - \Delta\alpha) \tag{2.58}$$

Bu şekilde beşinci durum olan irtifa h'ı ifade eden beşinci hareket denklemi de elde edilmiş olur. Dikkat edildiğinde, h'ı ifade eden hareket denkleminde şu ana kadar hiç kullanılmayan bir hareket değişkeni, hücum açısı α bulunmaktadır. İşte burada, w hızı ve α hücum açısı arasındaki önceki bölümlerde bir çok kez bahsedilen dönüşüm uygulanacaktır.

Hücum açısı α, geometrik olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir ve küçük açı kabulu ile son halini alır:

$$\alpha = \arctan\frac{w}{u}; \quad \text{Küçük açı kabulu ile} \quad \alpha = \frac{w}{u} \tag{2.59}$$

Elde edilen beş hareket denklemi, (2.53 - 2.57) ile ifade edilmiştir. Bu hareket denklemlerinde w hızı ve w hızına bağlı olan elemanların hücum açısı α'ya bağlı olarak yazılması gerekmektedir. (2.59)'da ifade edilen dönüşüm ve başlangıç durumu için $\theta_0 = 0$, $\sin\theta_0 = 0$ ve $\cos\theta_0 = 1$ kabulleri doğrultusunda, ilgili kararlılık türevlerinde indis değişiklikleri yapılarak ve gerekli katsayıların bölüm olarak eklenmesi sonucunda atmosferik bozucu girişleri henüz eklenmemiş beş hareket denklemi son halini alır:

$$\Delta\dot{u} = X_u\Delta u + X_\alpha\Delta\alpha - g\Delta\theta + X_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{2.60}$$

$$\Delta\dot{\alpha} = \frac{Z_u}{u_0}\Delta u + \frac{Z_\alpha}{u_0}\Delta\alpha + q + \frac{Z_{\delta_e}}{u_0}\Delta\delta_e \tag{2.61}$$

$$\Delta\dot{q} = M_u\Delta u + M_\alpha\Delta\alpha + M_q\Delta_q + M_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{2.62}$$

$$\Delta\dot{\theta} = \Delta q \tag{2.63}$$

$$\Delta\dot{h} = u_0(\Delta\theta - \Delta\alpha) \tag{2.64}$$

2.4 Aerodinamik Kuvvet ve Momentler

Bir önceki bölümde aerodinamik kuvvet ve momentlerin hareket denklemlerindeki etkileri kararlılık türevleri kullanılarak ifade edilmiştir. Bu yaklaşımın mantığı ise bu bölümde açıklanacaktır. Aerodinamik kuvvet ve momentleri kararlılık türevleri olarak ifade etme fikri ilk olarak Bryan tarafından ortaya sunulmuştur [51]. Bryan tarafından sunulan bu teknikte aerodinamik kuvvet ve momentler, hareket değişkenleri ve sistem girişlerine bağlı anlık değişim fonksiyonları türünden kısmi türevler ile ifade edilmiştir. Bu yaklaşımla, aerodinamik kuvvet ve momentler, hareket değişkenlerinin bir referans noktası etrafındaki Taylor açılımları olarak ifade edilebilir.

Örneğin; x_b ekseni yönündeki aerodinamik kuvvetlerin değişimi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Delta X = (u, \dot{u}, w, \dot{w}, ..., \delta_e, \dot{\delta}_e) = \frac{\partial X}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}}\Delta\dot{u} + ... + \frac{\partial X}{\partial \delta_e}\Delta\delta_e + ... \tag{2.65}$$

Burada $\partial X/\partial u$ önceden de bahsedildiği üzere bir kararlılık türevidir ve referans noktası olan denge uçuşu için ele alınmaktadır. Bu şekilde diğer kararlılık türevleri de ifade edilebilir.

x_b ekseni doğrultusundaki doğrusal hız u'nun ani değişiminin x_b eksenindeki kuvvet X'in değişimine etkisi olan X_u, **aerodinamik kararlılık katsayıları** kullanılarak bir aerodinamik kuvvet şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir [49]:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = C_{X_u}\frac{1}{u_0}QS \tag{2.66}$$

Burada C_{X_u} bir aerodinamik kararlılık katsayısıdır ve hesaplamalı akışkanlar dinamiği analizleri ve deneysel çalışmalar sonucunda elde edilebilir. Bu katsayı, u hızının u_0

referans hızına göre değişiminin X kuvvetinde yapacağı etkiyi belirleyen aerodinamik katsayı C_X'in u hızına göre değişimini belirtir ve aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$C_{X_u} = \frac{\partial C_x}{\partial (u/u_0)} \tag{2.67}$$

Bu çalışmada ele alınacak uçak gerekli aerodinamik katsayılar literatürde hali hazırda mevcuttur. Bu sebeple, akışkanlar mekaniği biliminin konusu olan bu katsayıların hesaplanması ve formüllerinin belirlenmesi başlı başlına ayrı bir çalışma konusu olup bu çalışmada değinilmeyecektir. Bu değerlerin nasıl elde edildiği ile ilgili literatürde oldukça detaylı kaynaklar mevcuttur [52].

Yukarıdaki yöntem aerodinamik kuvvet ve momentlerin belirlenmesi için oldukça karışık görünebilir. Fakat, hareket değişkenlerinin değişimlerinin küçük olduğu varsayılarak (2.65)'teki sadece doğrusal olan terimler ele alınabilir. Bu varsayıma rağmen ifade etmek istenilen aerodinamik kuvvet veya moment oldukça yüksek sayıda değişkene bağlı olacaktır. Neyse ki, bu terimlerin de bir çoğu ihmal edilebilir, çünkü ele alınan aerodinamik kuvvet veya momente katkıları ihmal edilebilir kadar küçük olacaktır. Örneğin, yunuslama momenti M, kararlılık türevleri olarak ifade edilirse, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$M = (u, v, w, \dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, p, q, r, \delta_a, \delta_e, \delta_r) = \frac{\partial M}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial M}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial M}{\partial w}\Delta w + ... + \frac{\partial M}{\partial p}\Delta p + ... \tag{2.68}$$

Örneğin, burada yunuslama momenti M'ye v hızının etkisi $\partial M/\partial v$ ve yalpalama açısal hızı p'nin etkisi $\partial M/\partial p$ ihmal edilebilir kadar küçük olacaktır.

Bu bölümün devamında, uçuşa etki eden aerodinamik kuvvet ve momentler kararlılık türevleri cinsinden hesaplanabilir bir şekilde dinamik basınç ve kanat alanı gibi diğer aerodinamik parametrelere ve sadece uçağın hareketine kayda değer etkisi olan hareket değişkenlerine bağlı olarak belirlenecektir. Bu yöntemlerin sadece ses altı hızlarda kullanılması gerektiği de unutulmalıdır, çünkü ses üstü hızlarda sıkıştırılabilir akış durumu ve şok formasyonları sebebi ile bu parametrelerin hesaplanmasında karışıklıklar ortaya çıkmaktadır.

2.4.1 u Doğrusal Hızına Bağlı Parametreler

Sabit kanatlı bir hava aracına etki eden taşıma ve sürüklenme kuvvetleri ile yunuslama momenti, aracın u hızına göre değişmektedir. x_b ekseni üzerinde araca geri sürüklenme ve itki kuvvetleri etki etmektedir. X kuvvetinin u hızına göre göre değişimini hesaplamak için kullanılan X_u kararlılık türevi aşağıdaki şekilde ifade

edilebilir:

$$X_u = \frac{C_{X_u} QS}{mu_0} \tag{2.69}$$

Aerodinamik kararlılık katsayısı $C_{X_u} = -(C_{D_u} + 2C_{D_0}) + C_{T_u}$ şeklinde hesaplanabilmekte olup itki sabit olduğu için $C_{T_u} = 0$ olarak kabul edilirse, X_u aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$X_u = \frac{-(C_{D_u} + 2C_{D_0})QS}{mu_0} \tag{2.70}$$

Z kuvvetinin u hızına göre değişimi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = -\frac{1}{2}\rho S u_0 [C_{L_u} + 2C_{L_0}] \tag{2.71}$$

Bu şekilde, Z kuvvetinin u hızına göre göre değişimini hesaplamak için kullanılan Z_u kararlılık türevi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$Z_u = \frac{C_{Z_u} QS}{mu_0} \tag{2.72}$$

Aerodinamik kararlılık katsayısı $C_{Z_u} = -(C_{L_u} + 2C_{L_0})$ şeklinde hesaplanabilmekte olup, Z_u aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$Z_u = \frac{-(C_{L_u} + 2C_{L_0})QS}{mu_0} \tag{2.73}$$

M momentinin u hızına göre göre değişimini hesaplamak için kullanılan M_u kararlılık türevi ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$M_u = C_{m_u} \frac{QS\overline{c}}{u_o I_y} \tag{2.74}$$

2.4.2 w Doğrusal Hızına Bağlı Parametreler

X ve Z kuvveti ile M momentinin w hızına bağlı değişimini ifade eden parametrelerin belirlenmesi, bir önceki bölümde ifade edilen u hızına göre parametrelerin belirlenmesi ile neredeyse aynıdır, sadece elde edilen kuvvet ve etki eden hızların yönlerine göre aerodinamik kararlılık katsayıları değişecektir.

X kuvvetinin w hızına göre göre değişimini hesaplamak için kullanılan X_w kararlılık türevi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$X_w = \frac{-(C_{D_\alpha} + 2C_{L_0})QS}{mu_0} \tag{2.75}$$

Z kuvvetinin w hızına göre göre değişimini hesaplamak için kullanılan Z_w kararlılık

türevi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$Z_w = \frac{-(C_{L_\alpha} + 2C_{D_0})QS}{mu_0} \tag{2.76}$$

M momentinin w hızına göre göre değişimini hesaplamak için kullanılan M_w kararlılık türevi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

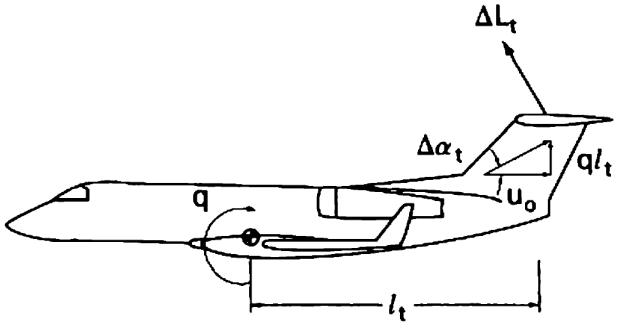
$$M_w = C_{m_\alpha} \frac{QS\overline{c}}{u_o I_y} \tag{2.77}$$

2.4.3 q Açısal Hızına Bağlı Parametreler

q açısal hızının hareket denklemlerinde etkilediği büyüklükler Z kuvveti ile M momenti olarak önceden belirlenmiştir. Bu kuvvet ve momentin hesaplanmasında kullanılan Z_q ve M_q kararlılık türevlerinin içinde bulunan C_{Z_q} ve C_{m_q} aerodinamik kararlılık katsayılarının hesaplanması için normalde bir dizi kinematik hesap yapılmalıdır, fakat buna rağmen bu katsayıları ifade eden matematiksel ifadeler yine de akış analizleri veya deneysel çalışmalar ile elde edilen ve yunuslama momenti üreten ana uçak bileşeni olan kuyruğa bağlı başka aerodinamik parametreler de içerecektir [49].

$$C_{Z_q} = -2C_{L_{a_t}} \eta V_H \tag{2.78}$$

$$C_{m_q} = -2C_{L_{a_t}} \eta V_H \frac{l_t}{\overline{c}} \tag{2.79}$$



Şekil 2.12 Yunuslama hareketinin kinematiği ile ilgili bir görsel ifade [49]

Bu doğrultuda Z_q ve M_q kararlılık türevleri hesaplabilir. q açısal hızının ağırlıklı olarak katkısı M momentine olacağı için, Z_q bu çalışmada sıfır olarak kabul edilecektir.

M momentinin q hızına göre göre değişimini hesaplamak için kullanılan M_q kararlılık türevi ise aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [49]:

$$M_q = C_{m_q} \frac{\overline{c}}{2u_o} (QS\overline{c})/I_y \tag{2.80}$$

Bu çalışmada kullanılan bütün kararlılık türevleri Tablo 2.2'de ifade edildiği şekilde aşağıdaki gibi derlenebilir:

Tablo 2.2 Kararlılık türevleri ve matematiksel ifadeleri [49]

Parametre	Formül	Birim
X_u	$[-(C_{D_u}+2C_{D_0})QS]/mu_0$	s^{-1}
X_w	$[-(C_{D_\alpha}-C_{L_0})QS]/mu_0$	s^{-1}
X_a	u_0X_w	m/s^2
Z_u	$[-(C_{L_u}+2C_{L_0})QS]/mu_0$	s^{-1}
Z_w	$[-(C_{D_u}+2C_{D_0})QS]/mu_0$	s^{-1}
Z_a	u_0Z_w	m/s^2
Z_q	$[-C_{Z_q}(\overline{c}/2u_0)QS]/m$	m/s
Z_{δ_e}	$-C_{Z_{\delta_e}}QS/m$	m/s^2
M_u	$C_{m_u}[(QS\overline{c})/u_oI_y]$	$1/ms$
M_w	$C_{m_a}[(QS\overline{c})/u_oI_y]$	$1/ms$
M_a	u_0M_w	s^{-2}
M_q	$[C_{m_q}(\overline{c}/2u_o)(QS\overline{c})]/I_y$	s^{-1}
M_{δ_e}	$[C_{m_{\delta e}}(QS\overline{c})]/I_y$	s^{-2}

2.5 Atmosferik Bozucuların Hareket Denklemlerine Eklenmesi

Atmosferik bozucular, rüzgar olduklarından dolayı uçağa etki eden bağıl hava akışı vektörünü değiştirirler. Bu sebeple aslında atmosferik bozucuların sisteme eklenmesi oldukça basittir: Bir uçak için hava akışının uçağa gelmesi ile uçağın hava akışının içinde hareket etmesi tamamen aynıdır. Bu sebeple Bölüm 2.4'de açıklanan yöntem, atmosferik bozucunun etki ettiği eksen ile ilgili kararlılık türevlerinin aynen kullanılması şeklinde atmosferik bozucuları sisteme eklemek için kullanılabilir.

Sistemin hareketini ifade eden beş hareket denklemine atmosferik bozucular da aynı kontrol girişi gibi dış etki olarak eklenirse, hareket denklemleri son halini alır:

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{u} &= X_u\Delta u + X_\alpha\Delta\alpha - g\Delta\theta + X_{\delta_e}\Delta\delta_e - X_u\alpha_g \\
\Delta\dot{\alpha} &= \frac{Z_u}{u_0}\Delta u + \frac{Z_\alpha}{u_0}\Delta\alpha + \Delta q + \frac{Z_{\delta_e}}{u_0}\Delta\delta_e - \frac{Z_\alpha}{u_0}\Delta\alpha_g \\
\Delta\dot{q} &= M_u\Delta u + M_\alpha\Delta\alpha - M_q\Delta q + M_{\delta_e}\Delta\delta_e + M_\alpha\alpha_g \\
\Delta\dot{\theta} &= \Delta q \\
\Delta\dot{h} &= u_0(\Delta\theta - \Delta\alpha)
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Burada α_g ile ifade edilen giriş, bozucu rüzgarın uçak üzerinde ortaya çıkardığı bozucu hücum açısı değişimidir, çünkü rüzgar uçağın bağıl hava akışını değiştirerek hücum açısını değiştirecektir. α_g matematiksel olarak (2.59)'a benzer şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\alpha_g = \frac{w_g}{u_0} \tag{2.82}$$

2.6 Hareket Denklemlerinin Durum Uzay Formunda Gösterimi

Sistemin bu çalışmada kullanılacak şekilde son halinin durum uzay formunda gösterimi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 d(t) + B_2 u(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\dot{u} \\ \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{h} \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_u & X_\alpha & 0 & -g & 0 \\ \frac{Z_u}{u_0} & \frac{Z_\alpha}{u_0} & 1 & 0 & 0 \\ M_u & M_\alpha & M_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u_0 & 0 & u_0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta\alpha \\ \Delta q \\ \Delta\theta \\ \Delta h \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -X_\alpha \\ -\frac{Z_\alpha}{u_0} \\ -M_\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_g \end{bmatrix}}_{d(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} X_{\delta e} \\ \frac{Z_{\delta e}}{u_0} \\ M_{\delta e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\delta_e \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

$$y = Cx(t) + Du(t) \tag{2.83}$$

Burada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^n$ ve $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sırası ile sistemin sistem matrisi, bozucu giriş matrisi, kontrol giriş matrisi, çıkış matrisi ve ileri besleme matrisidir. $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ ve $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ise sırası ile sistemin durumları, bozucu girişi ve kontrol girişidir.

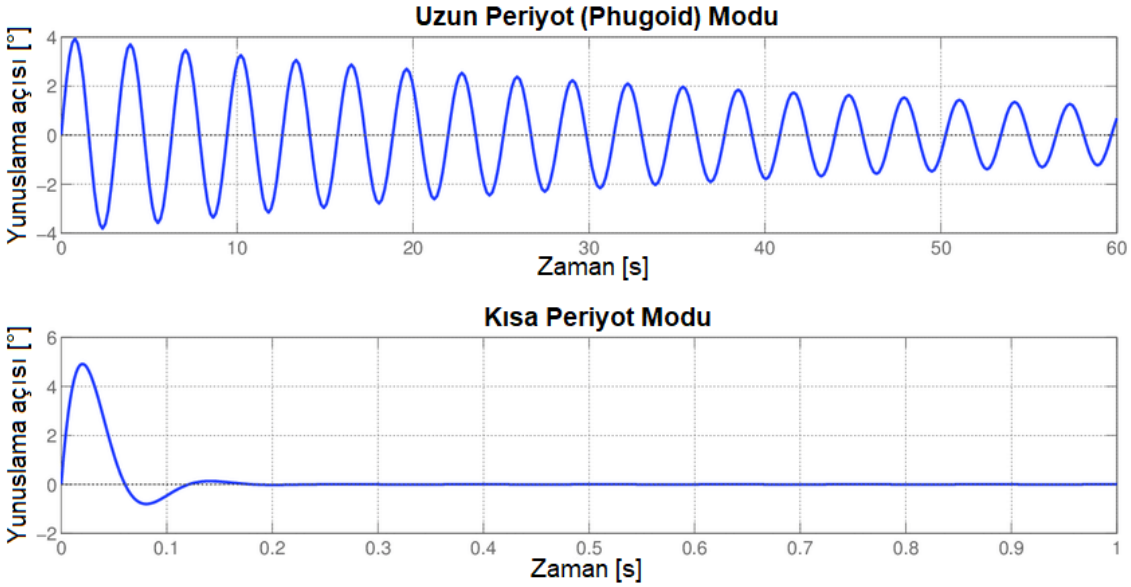
2.7 Sabit Kanatlı Hava Araçlarında Kararlılık ve Uçuş Kalitesi

Sabit kanatlı hava araçları için uçuş kontrol sistemleri tasarlamaya başlamadan önce, bu sistemlerin kararlılığı hakkında yorumlar yapmak amacıyla LTI bir sistemin durum uzay formu ile ifadesinde bulunan sistem matrisi *A*'nın özdeğerleri incelenebilir. Sistem matrisi *A*'nın özdeğerleri (veya karakteristik kökleri) aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

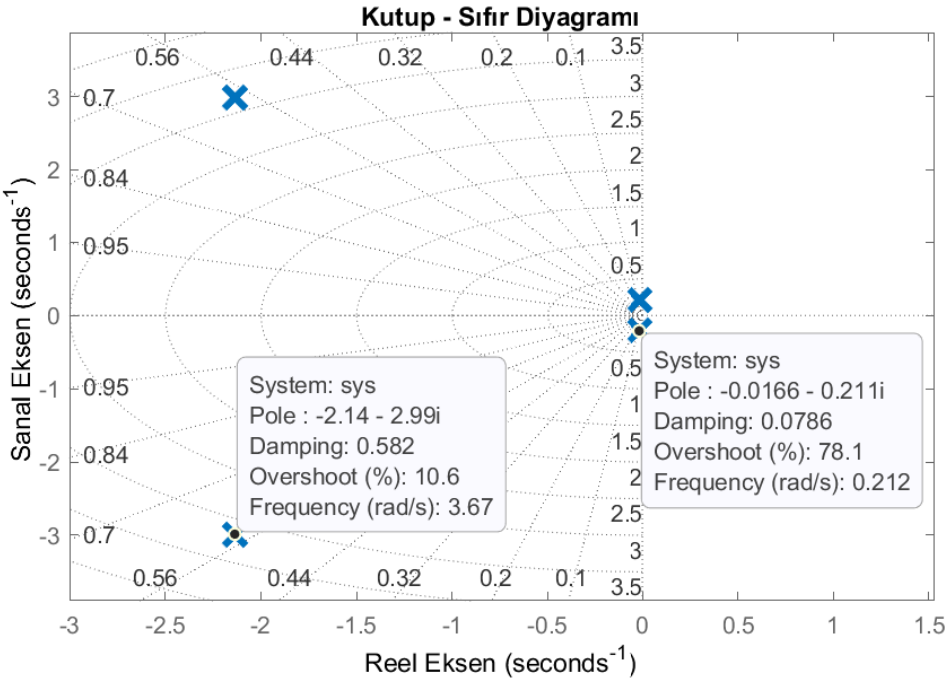
$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.84}$$

Burada λ sistemin özdeğerlerini ifade edecek olan bilinmeyen bileşen ve I da sistem matrisi ile uyumlu boyuttaki birim matristir. Bu determinantı sıfır yapan λ değerleri ise sistemin özdeğerlerini verir.

Sabit kanatlı bir hava aracının boylamsal hareketini ifade eden durum uzay formundaki matematik model, irtifa denklemi eklenmemiş hali ile 4 adet özdeğer ifade etmektedir. Kontrol girişi olmayan ve doğal sistem cevapları incelenecek bir sabit kanatlı hava aracı için bu özdeğerler neredeyse her zaman ikişerli karmaşık kök çiftleri olarak gözlemlenir, çünkü boylamsal hareketin iki farklı dinamik modu bulunur ve bu modlar az sönümlüdür, yani sönüm oranı ζ, iki mod için de $0 < \zeta < 1$ olarak gözlemlenir. Sistemin doğal cevabı ise bu iki modun ortak olarak hareketi, yani bir veya daha fazla sistem girişinin oluşturduğu net sistem cevabı olarak tanımlanan *süperpozisyonu* olarak gözlemlenir.



Şekil 2.13 Kısa periyot ve uzun periyot modlarının zaman cevapları

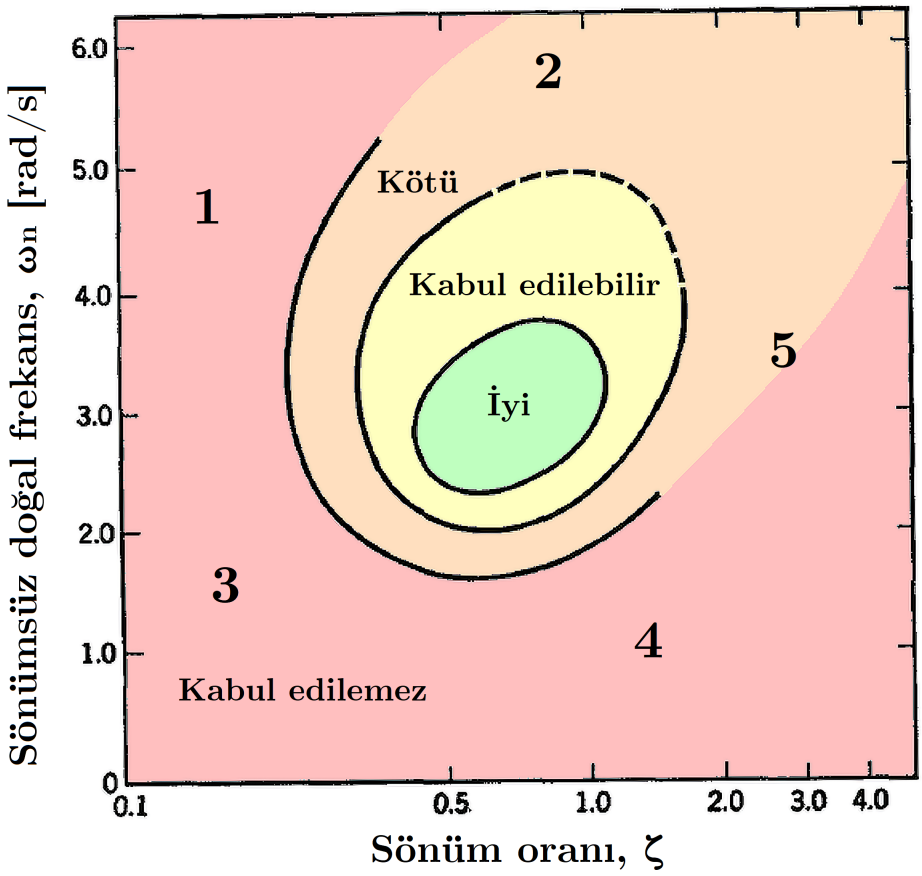


Şekil 2.14 Sabit kanatlı bir hava aracının boylamsal uçuş dinamiği modlarını ifade eden kutup-sıfır diyagramı

Şekil 2.14'te görülen iki farklı kök çifti, sistemin iki farklı hareket modunu ifade etmektedir. Sabit kanatlı hava araçlarının boylamsal uçuş dinamiğinde bu modlar kısa periyot *(İng: short period)* ve uzun periyot *(İng: phugoid, long period)* olarak ifade edilir ve Şekil 2.13'te zaman cevapları görülebilir. Kısa periyot modunun davranışı, uçağın ani tepkilerini ifade etmekte olup geçici rejim cevabı ile yakından ilgilidir. Uzun periyot modunun davranışı ise uçağın dakikalara kadar varabilen uzun periyodlardaki doğal salınım eğilimini incelemekte olup daha çok sürekli rejim cevabı ile ilgilidir.

Kısa periyot modu, uçakların kuvvet ve moment dengesi gibi çeşitli özellikleri doğrultusunda geniş bir yelpazede uçakta uçağa değişen farklı karakteristik özellikler gösterebilmektedir. Bunun yanında, uçuş dinamiğinin doğası gereği uzun periyot modunu temsil eden köklerin reel bileşenleri genellikle sanal eksene, sönüm oranı da 0'a oldukça yakın olmakta ve kararlı olduğu takdirde düşük genlikli fakat uzun periyotlu bir salınım hareketi ifade etmektedir.

Bu modların sönüm oranı ve doğal frekans gibi parametreleri üzerinden ise uçuş kalitesi hakkında literatürdeki çeşitli çalışmalar doğrultusunda yorum yapılabilmektedir [53].



Şekil 2.15 Uçuş kalitesi eğrileri [53]

Şekil 2.15'te literatürde bulunan bir uçuş kalitesi eğrileri grafiği görülmektedir [53]. Burada kırmızı, turuncu, sarı ve yeşil renkler ile ifade edilen bölgeler sırası ile pilotlu bir uçağın uçurulabilirliğinin kalitesinin ölçütü olarak olarak kabul edilemez, kötü, kabul edilebilir ve iyi olarak tanımlanan bölgeleri temsil etmektedir. Bu bölgelerin belirlenmesinde ise hava aracının kısa periyot modunun sönümsüz doğal frekansı ve sönüm oranı kullanılmıştır. Ek olarak, geniş bir alan ile ifade edilen uçuşa uygun olmayan bölgenin hangi kısmında hava aracının nasıl bir uçuş karakteristiği gösterdiği de 1'den 5'e kadar olan numaralar ile ifade edilmiştir. Bu beş durum hakkında aşağıdaki şekilde kısa açıklamalar yapılabilir:

- **1. Bölge:** Bu bölgede hava aracı düşük sönüm oranı ve yüksek salınım frekansından dolayı hızlı bir başlangıç salınımına girip salınımı devam ettirmeye ve aşım yapmaya eğimli bir uçuş karakteristiği sergiler.
- **2. Bölge:** Bu bölgede hava aracı çok yüksek salınım frekansından dolayı aynı şekilde hızlı bir başlangıç salınımına girme eğilimi gösterir. Ek olarak, araç pilot kumandasına aşırı hassas tepki verir ve pilot tarafından tetiklenerek gittikçe genliği artan kararsız bir salınıma girmeye eğilim gösterir.

- **3. Bölge:** Bu bölgede hava aracı düşük sönüm oranı ve düşük salınım frekansından dolayı yavaş başlayan fakat sonrasında sürekliliğini koruyan ve pilotun aşırı kumanda girişi yapması ile sonuçlanabilecek bir salınıma girmeye eğilim gösterir.
- **4. Bölge:** Bu bölgede hava aracı düşük salınım frekansından dolayı pilot kumandasına çok geç ve yavaş cevap veren ve denge duruma getirilmesi oldukça zor bir uçuş dinamiği karakteristiği gösterir. Ek olarak bu durumdaki bir hava aracını yönlendirebilmek için pilot tarafından fazla kumanda uygulanması gerekir.
- **5. Bölge:** Bu bölgede ise hava aracı çok yüksek sönüm oranından dolayı aşırı hantal bir uçuş dinamiği karakteristiği gösterir ve böyle bir hava aracını yönlendirebilmek için pilot tarafından çok fazla kumanda uygulanması gerekir.

3
KONTROLÖR SENTEZİ

Optimal kontrol teorisi, kontrol teorisinin dinamik bir sistemi minimum maliyet veya efor ile kontrol eden kontrolör tasarımları ile ilgilenen bir alt alanıdır. Bu bölümde ilk olarak sürekli zamanda *(İng: continuous time)* sistemlerin optimizasyonu hakkında altyapı oluşturmak amacı ile bir optimizasyon probleminin tanımı, dışbükey kümeler, dışbükey fonksiyonlar, dışbükey optimizasyon ve dışbükey optimizasyon problemlerinin doğrusal matris eşitsizlikleri formunda matematiksel olarak modellenmesi gibi kavramlar açıklanacaktır.

Dışbükey optimizasyon ve doğrusal matris eşitsizlikleri ilgili kavramların açıklanmasını takiben, dinamik sistemlerin matematiksel olarak performansını tanımlayabilmek amacı ile sistem normu kavramına değinilecektir. Bu doğrultuda, doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemlerin H_∞ normunun matematiksel olarak ifadesi ve DME'ler kullanılarak hesaplanması gibi kavramlar açıklanacaktır. Devamında ise bu yüksek lisans tezinde tasarlanacak ve performansları birbirleri ile kıyaslanacak olan üç farklı kontrolör türü için kapalı çevrim sistem denklemleri ve problem tanımlamaları yapılacak, sonrasında ise gerekli teorik altyapının da sağlanması ile ilgili optimal kontrol problemlerinin çözümleri ispatlarıyla birlikte açıklanacaktır.

Bu doğrultuda ilk olarak doğrusal karesel düzenleyici problemi ele alınacaktır. Bu yöntemde, sistem durumları ve kontrol girişlerine etki eden ağırlık parametreleri kullanılarak ifade edilen maliyet fonksiyonunu en aza indirgeyen bir çözüm elde edilecek olup, elde edilen bu çözüm kullanılarak ilgili kontrolör kazancının hesaplanması açıklanacaktır.

İkinci olarak, sistemin kontrol girişi üzerinde değişmez elipsoitler yöntemi ile eyleyici genliği doyumu kısıtı tanımlanan bir H_∞ kontrol yöntemi ele alınacaktır. Bu doğrultuda ilk olarak durum geri beslemeli kapalı çevrim sistemi kararlı kılan ve sistemin H_∞ normunu en aza indirgeyen kontrolör kazancının bilinmeyen bir matris değişkeni olarak tanımlandığı bir DME elde edilecektir. Buna ek olarak,

kontrol girişi üzerindeki eyleyici genliği doyumu kısıtını değişmez elipsoitler yöntemi doğrultusunda ifade eden ikinci bir DME daha elde edilecektir. Sonuç olarak ise ilgili optimal kontrol probleminin çözümü, bu iki DME'nin birlikte çözümü olarak ifade edilecektir.

Üçüncü ve son olarak ise bu yüksek lisans tezinin özgün çalışması olan, kontrol girişi üzerinde eyleyici genliği doyumu kısıtı tanımlanan **TKK tabanlı H_∞ kontrol** yöntemi ele alınacaktır. Bu doğrultuda ilk olarak sistemin eyleyici genliği kısıtı, doğrusal kesirli gösterim yöntemi ile nominal sisteme bir döngü halinde bağlı olan belirsiz eleman olarak modellenecektir. Bu adımı takiben, sistemlerde bulunan belirsiz, doğrusal olmayan veya modellemesi zor elemanların kontrol problemlerine dahil edilmesinde çok güçlü bir yöntem olan *tümleşik karesel kısıtlar* detaylı olarak açıklanıp Δ'nın bir **sektör-sınırlı** bir eleman olarak modellenmesi doğrultusunda Δ'nın girişi ve çıkışı arasındaki ilişki, bir TKK olarak tanımlanacaktır. Sonuç olarak ilgili optimal kontrol probleminin çözümü, durum geri beslemeli kapalı çevrim sistemi kararlı kılıp sistemin H_∞ normunu en aza indirgeyen kontrolör kazancının bilinmeyen bir matris değişkeni olarak tanımlandığı performans koşulu ile Δ'ya tanımlanan TKK koşulunu sağlayan ortak bir DME olarak ifade edilecektir.

3.1 Dışbükey Optimizasyon

Optimizasyon veya en iyileştirme, genel tanımı ile herhangi bir problemin çözümleri arasından belirli kriterler doğrultusunda en iyi çözümü seçmek olarak tanımlanabilir ve bütün mühendislik alanlarının yanı sıra fizik, kimya, biyoloji, ekonomi ve ekoloji gibi çeşitli alanlarda da oldukça geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu doğrultuda, optimizasyon problemlerinde belirli bir küme içinden seçilen giriş değerleri kullanılarak bir gerçek fonksiyon en iyi değerine ulaştırılmaya çalışılır. Bu gerçek fonksiyonu mümkün olan en iyi değere ulaştıran giriş değerleri, belirli kriterler doğrultusunda ve belirli yöntemler ile sistematik olarak hesaplanarak belirlenir [54].

Tanım 3.1. (Optimizasyon Problemi): Bir optimizasyon problemi, matematiksel olarak

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f_0(x) \\ \text{Koşullar:} \quad & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanabilir [55]. Burada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ karar değişkenleri olan x_i 'leri içeren vektörü, optimizasyonu gerçekleştirilecek $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu amaç veya maliyet fonksiyonunu, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ fonksiyonu koşul fonksiyonlarını ve $b_1, ..., b_m$ ise koşulları tanımlayan skaler değerleri ifade eder. Bu optimizasyon probleminin optimal çözümü, $f_1(x) \leq b_1, ..., f_m(x) \leq b_m$ koşullarını sağlayan x_i karar

değişkenlerinin en küçük değerinin hesaplanmasıdır. Özetlenecek olursa, belirlenen koşullar ile

$$f_0(x) \geq f_0(x^*) \tag{3.2}$$

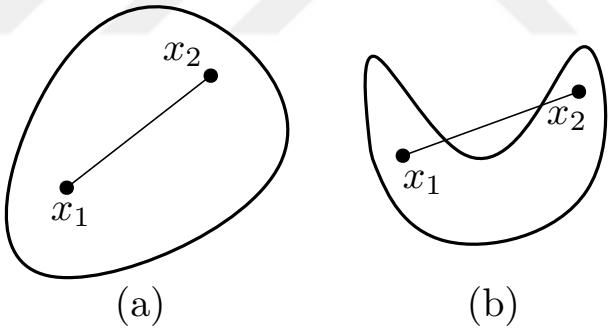
eşitsizliğini sağlayan x^* değişkeni, bu problemin optimal (en iyileyici) çözümü olarak adlandırılır.

Optimizasyon konusunun bir alt dalı olan dışbükey optimizasyon *(İng: convex optimization)*, dışbükey maliyet fonksiyonların dışbükey kümeler ile en iyileyici çözümünün elde edilmesi ile ilgilenir.

Tanım 3.2. (Dışbükey Küme): $\mathscr{F}$ kümesi verilmiş olsun. $\forall \mu \in [0,1]$ ve $x_1, x_2 \in \mathscr{F}$ koşulları için

$$\mu x_1 + (1-\mu)x_2 \in \mathscr{F} \tag{3.3}$$

şartı sağlanıyor ise $\mathscr{F}$ kümesi dışbükey bir küme olarak tanımlanır [55]. Açıktır ki, $\mu x_1 + (1-\mu)x_2 \in \mathscr{F}$ ifadesi, $x_1 \in \mathscr{F}$ ve $x_2 \in \mathscr{F}$ noktalarını birleştiren doğru parçasını ifade eder. Bu doğrultuda dışbükeylik geometrik olarak incelendiğinde, bir kümenin ancak ve ancak içindeki herhangi iki elemanı birleştiren doğru parçası her zaman bu kümenin içinde kalıyor ise bu küme dışbükey olarak tanımlanabilir.

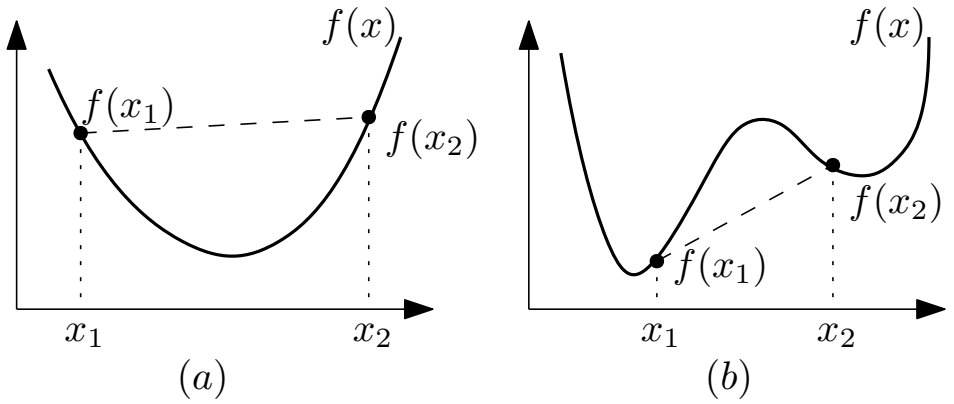


Şekil 3.1 Dışbükey (a) ve dışbükey olmayan (b) bir küme

Tanım 3.3. (Dışbükey Fonksiyon): $\mathscr{F}$ dışbükey kümesi verilmiş olsun. $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall \mu \in [0,1]$ ve $x_1, x_2 \in \mathscr{F}$ için

$$f(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \leq \mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_2) \tag{3.4}$$

şartını sağlıyor ise $f(x)$ dışbükey bir fonksiyon olarak tanımlanır [55].



Şekil 3.2 Dışbükey (a) ve dışbükey olmayan (b) bir fonksiyon

Tanım 3.4. (Dışbükey Optimizasyon Problemi): Bir dışbükey optimizasyon problemi, matematiksel olarak optimizasyon probleminin genel tanımı (3.1)'de ifade edildiği gibi aynı şekilde

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathscr{F} \subseteq \mathbb{R}^n} \quad & f_0(x) \\ \text{Koşullar:} \quad & f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak tanımlanabilir [55]. Dışbükey optimizasyon probleminin genel optimizasyon probleminden tek farkı, karar değişkenleri vektörü x, optimizasyonu gerçekleştirilecek amaç fonksiyonu $f_0(x)$ ve koşul fonksiyonları $f_i(x)$ 'in dışbükey bir küme olan $\mathscr{F} \in \mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış olmasıdır.

Tanım 3.5. (Yerel ve Mutlak Minimum): Yerel minimum, bir fonksiyonun değerinin, bu fonksiyonun tanım kümesinin sadece belirli bir aralığı için sahip olduğu en küçük değer anlamında gelir. Bir fonksiyonun mutlak minimumu ise fonksiyonun tanım kümesinin tamamı için sahip olduğu en küçük değeri ifade eder.

Teorem 3.1. *$\mathscr{F}$ bir dışbükey küme olmak üzere, $f : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ bir dışbükey fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonun herhangi bir yerel minimumu, aynı zamanda bu fonksiyonun mutlak minimumudur.*

İspat. $x^* \in \mathscr{F}$ noktası, dışbükey f fonksiyonunun yerel minimumu, $\bar{x}^* \in \mathscr{F}$ ise mutlak minimumu olsun. f fonksiyonunun mutlak minimumu, yerel minimumdan daha küçük olacağı için bu durum,

$$f(\bar{x}^*) < f(x^*) \tag{3.6}$$

eşitsizliği ile ifade edilebilir. f fonksiyonu üzerinde $x(\mu) = \mu x^* + (1-\mu)\bar{x}^*$ olarak ifade edilen bir doğru parçası verilmiş olsun. f fonksiyonu dışbükey olduğundan dolayı

$\forall \mu \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} f(x(\mu)) = f(\mu x^* + (1-\mu)\bar{x}^*) &\leq \mu f(x^*) + (1-\mu) f(\bar{x}^*) \\ &< \mu f(x^*) + (1-\mu) f(x^*) \\ &< f(x^*) \end{aligned} \tag{3.7}$$

μ sayısı neredeyse 1'e eşit olacak şekilde, 1'e çok yakın bir sayı olarak seçilsin. Bu durumda $f(x(\mu)) < f(x^*)$ ifadesi elde edilecektir, fakat bu ifade yerel minimum tanımı doğrultusunda mümkün değildir, dolayısı ile $\bar{x}$ noktasının varlığı da mümkün değildir [55]. Böylece çelişki yöntemi ile ispat tamamlanır. ■

Dışbükeyliğin doğası gereği bir dışbükey optimizasyon probleminin çözümünün ilgili dışbükey kümesinin içinde kalacağı garanti edilir. Bu sebeple dışbükeylik, bir optimizasyon problemini daha kolay çözülebilir hale getirir. Bunun yanında, bir dışbükey küme üzerine tanımlı dışbükey fonksiyonların yerel minimumunun aynı fonksiyonun mutlak minimumu olması sebebi ile birçok optimizasyon problemi dışbükey olarak modellenmeye çalışılır. Bunun sebebi ise dışbükey olmayan bir optimizasyon problemine çözüm arayan bir algoritma, optimum olmayan *(İng: suboptimal)* yani yerel minimum (veya maksimum) olabilecek bir çözüme yakınsayıp burada takılı kalabilir ve mutlak minimuma (veya maksimuma) ulaşamayabilir.

Sonuç 3.1. *$\dot{x}(t) = Ax(t)$ olarak modellenen homojen bir sistemin sistem matrisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verilmiş olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $P \in \mathbb{S}^n,\ P > 0$ şeklinde pozitif tanımlı ve simetrik P matrislerinin oluşturduğu $\mathscr{F} \in \mathbf{R}$ kümesi dışbükeydir [56].*

$$A^{\mathrm{T}}P + PA < 0 \tag{3.8}$$

İspat. $\mathscr{F} \in \mathbf{R}$ dışbükey kümesi içinden P_1 ve P_2 olarak pozitif tanımlı iki simetrik matris seçilsin. Bu durumda, $P_1 \in \mathbb{S}^n,\ P_1 > 0$ ve $P_2 \in \mathbb{S}^n,\ P_2 > 0$ olacaktır. Ek olarak,

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A < 0 \\ A^{\mathrm{T}}P_2 + P_2A < 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. $\mathscr{F}$ kümesinin bir dışbükey küme olması durumunda $\forall \in (0,1)$ için $\mu P_1 + (1-\mu)P_2$ matrisi simetrik ve $\mathscr{F}$ kümesinin bir elemanı olmalıdır. Aşağıdaki ifade geçerli olduğu için P_1 ve P_2 matrisleri simetrik, yani tersçaprazları (transpoz) kendilerine eşittir:

$$\begin{aligned} \mu P_1 + (1-\mu)P_2 &= \mu P_1^{\mathrm{T}} + (1-\mu)P_2^{\mathrm{T}} \\ &= (\mu P_1 + (1-\mu)P_2)^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ek olarak, P_1 ve P_2 pozitif tanımlı olduğundan dolayı $\forall \in (0,1)$ için $\mu P_1 > 0$ ve $(1-\mu)P_2 > 0$ ifadeleri de doğru olacaktır. Bu doğrultuda $\mu P_1 + (1-\mu)P_2 > 0$ çıkarımı yapılabilir. Bu ifade, (3.8)'deki matris değişkeni P'nin yerine yazılır ise;

$$A^{\mathrm{T}}(\mu P_1 + (1-\mu)P_2) + (\mu P_1 + (1-\mu)P_2)A \tag{3.11}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenirse de

$$\mu(A^{\mathrm{T}}P_1 + P_1A) + (1-\mu)(A^{\mathrm{T}}P_2 + P_2A) < 0 \tag{3.12}$$

ifadesi elde edilir. Görüldüğü üzere, bu ifade, bileşenlerinin içinde olduğu $\mathscr{F} \in \mathbf{R}$ dışbükey kümesinde tanımlı bir dışbükey fonksiyonu temsil etmektedir. Sonuç olarak, en başta yapılan $\mathscr{F} \in \mathbf{R}$ kümesinin dışbükey olduğu kabulünün doğruluğu da kanıtlanmış olur ve böylece ispat tamamlanır. ■

Burada örnek olarak Sonuç 3.1'te ele alınan $A^{\mathrm{T}}P + PA < 0$ eşitsizliği, aslında diferansiyel denklemler ile modellenen doğrusal sistemlerin kararlığını ifade eden **Lyapunov eşitsizliğidir**. DME formunda ifade edilen Lyapunov eşitsizliği, ispatlandığı üzere bir dışbükey optimizasyon problemidir ve DME tabanlı kontrolör sentezinin temelini oluşturur. Bu doğrultuda, bir sonraki başlıkta yarı tanımlı programlama, doğrusal matris eşitsizlikleri gibi kavramlar ve çeşitli yardımcı teoremler açıklanacaktır.

3.2 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri

Doğrusal matris eşitsizliklerinin matematiksel olarak açıklanmadan önce tarihi gelişiminden bahsetmek faydalı olacaktır.

Doğrusal matris eşitsizliklerinin tarihi, 19. yüzyıla kadar uzanmaktadır. 1890 yılında yayınladığı makalede Rus matematikçi Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, günümüzde **Lyapunov Kararlılık Teorisi** olarak bilinen teorisini açıklamıştır. Bu çalışmada Lyapunov, $P \in \mathbb{S}^n,\ P > 0$ şeklinde pozitif tanımlı ve simetrik bir P matrisi,

$$A^{\mathrm{T}}P + PA < 0 \tag{3.13}$$

eşitsizliğini sağlıyor ise $\dot{x}(t) = Ax(t),\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olarak modellenen diferansiyel denklemin kararlı olduğunu (yani $x(t)$'nin tüm yörüngelerinin sıfıra yakınsadığını) göstermiştir. Bu ifade günümüzde Lyapunov eşitsizliği olarak bilinmekte olup bir DME ifade etmektedir. Lyapunov ayrıca bu eşitsizliğin, $Q \in \mathbb{S}^n,\ Q > 0$ olarak tanımlanan bir matris ile $A^{\mathrm{T}}P + PA + Q < 0$ şeklinde açık bir çözümünün de olduğu göstermiştir.

Yaklaşık 60 sonra, 1940'lı yıllarda Sovyet matematikçiler Mikhail Postnikov ve Anatoliy Isakovich Lure, Lyapunov'un yöntemlerini doğrusal olmayan eyleyiciler içeren sistemler gibi çeşitli kontrol mühendisliği problemlerinde ilk kez uygulamaya çalışmışlardır. Bu doğrultuda elde ettikleri polinomları elle kontrol ederek çözmüş olup bu sebeple birinci, ikinci ve üçüncü dereceden, yani küçük dereceli sistemler üzerinde çalışabilmişlerdir.

1960'ların başında Rudolf Kalman, Vladimir Yakubovich ve Vasile M. Popov tarafından paralel olarak geliştirilen teknikler doğrultusunda DME'lerin çözümü için grafiksel yöntemler sunulmuştur. 1960'ların sonlarına doğru ise bu DME'lerin sadece grafiksel yöntemlerle değil, cebirsel Riccati denklemleri ile de çözülebildiği anlaşılmıştır.

1970'li yılların başında Pyatnitskiy ve Skorodinskiy, bu DME'leri basit cebirsel Riccati denklemleri ile analitik olarak çözmek yerine sayısal yöntemler ile de çözülebileceği fikrini ortaya atmış olup, Lyapunov eşitsizliğini bir dışbükey optimizasyon problemi olarak modellemiş ve çözümü için algoritmalar geliştirmişlerdir.

1980'li yıllarda dışbükey optimizasyon problemlerinin DME olarak modellenebilirliği yaygın olarak kabul görmüş olup bu doğrultuda çözüm algoritmaları geliştirilmeye başlanmıştır. Bu çalışmalar 1990'lı yıllarda MATLAB gibi yüksek seviye programlama dilleri kullanılarak DME çözen araçların ve yazılım paketlerinin geliştirilmesi ile daha da ileri bir seviyeye taşınmıştır. Bu araçlar ve yazılım paketleri günümüzde hala aktif olarak geliştirilmeye ve kullanılmaya devam etmektedir.

Tanım 3.6. $x \in \mathbb{R}^m$ karar değişkeni ve $i = 0, \ldots, m$ için simetrik $F_i = F_i^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilmiş olsun. Bir doğrusal matris eşitsizliği, standart formunda

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanabilir. $>$ ifadesi $F(x)$'in pozitif tanımlı olduğunu ve $F(x) > 0$ doğrusal matris eşitsizliğinin sıkı *(İng: strict)* olduğunu gösterir. Bu ifade yerine, örneğin, $\geq$ kullanılırsa $F(x)$ pozitif yarı tanımlı, $F(x) \geq 0$ doğrusal matris eşitsizliği ise sıkı olmayan *(İng: non-strict)* olarak ifade edilebilir.

Tanım 3.7. Simetrik matris $A \in \mathbb{S}^n$ verilmiş olsun.

1. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ için $x^{\mathrm{T}} A x > 0$ ise A matrisi *pozitif tanımlı*,
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $x^{\mathrm{T}} A x \geq 0$ ise A matrisi *pozitif yarı tanımlı*,
3. $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ için $x^{\mathrm{T}} A x < 0$ ise A matrisi *negatif tanımlı*,

4. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $x^{\mathrm{T}}Ax \leq 0$ ise A matrisi *negatif yarı tanımlı*,

5. $x^{\mathrm{T}}Ax$ negatif ya da pozitif değil ise de A matrisi belirsiz olarak ifade edilir [57].

Sıkı olan DME'ler için geçerli olan koşulların bir çoğu, sıkı olmayan DME'ler için de geçerli olmaktadır [58].

(3.14) ile standart formda ifade edilen DME'yi sağlayan karar değişkeni x'leri oluşturan $\{x|F(x) > 0\}$ kümesi dışbükeydir. Bu sebeple kontrolör tasarımı ile ilişkili olarak dışbükeylik ifade eden bir çok koşul (Lyapunov eşitsizliği, matris normu eşitsizlikleri, v.b.), DME'ler ile ifade edilebilir. Bu doğrultuda, $F_1(x) > 0$, $F_2(x) > 0$, ..., $F_n(x) > 0$ şeklinde tanımlanan birden fazla DME'yi $\mathrm{diag}\{F_1, F_2, ..., F_n\} > 0$ şeklinde tek bir DME kullanarak ifade etmek mümkündür.

Tanım 3.8. (Yarı Tanımlı Programlama): Aşağıdaki formda ifade edilen dışbükey optimizasyon problemi ele alınsın:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{Koşullar:} \quad & F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \geq 0 \quad i = 1, ..., m, \end{aligned} \tag{3.15}$$

Burada $x \in \mathbb{R}^n$ karar değişkenini, $c \in \mathbb{R}^n$ sabit ağırlık vektörünü, $F_i = F_i^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik matrisi de ilgili optimizasyon probleminin koşulları sağlayan x'e bağlı matrisi ifade etmektedir. Bu dışbükey optimizasyon problemi, yarı tanımlı olarak modellenmiştir. **Yarı tanımlı programlama** *(İng: semidefinite programming, SDP)*, pozitif yarı tanımlı matrislerin bir afin uzay ile kesişimi üzerinde doğrusal bir maliyet fonksiyonunun optimal değerinin bulunması olarak tanımlanabilir [55].

Bu tanım doğrultusunda açıktır ki Lyapunov eşitsizliği, (3.15) formunda bir yarı tanımlı optimizasyon problemi olarak modellenebilir. Yarı tanımlı optimizasyon problemlerinin DME olarak modellenmesinde kullanılan iki önemli araç olan Kongrüans Dönüşümü ve Schur Tümleyeni isimli iki yardımcı teoremlerinden bahsetmekte fayda olacaktır.

Lemma 3.1. ***(Kongrüans Dönüşümü)***
$Q \in \mathbb{S}^n$ ve $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathrm{rank}(W) = n$ matrisleri verilmiş olsun. $Q < 0$ ile ifade edilen matris eşitsizliği, ancak ve ancak $WQW^{\mathrm{T}} < 0$ veya eşdeğer olarak $W^{\mathrm{T}}QW < 0$ ise sağlanır [56] ve $\mathrm{rank}(Q) = n$ ifadesi geçerli olur.

İspat. İspat, Q ve WQW^{T} matrislerin kertelerinin *(İng: rank)* eşit olduğu koşulu üzerine kuruludur. Bu özelliği göstermek için, W ve dolayısı ile W^{T} matrislerinin

tersinir olması sebebi ile WQ matrisinin boşuzayının *(İng: kernel)*, Q matrislerinin boşuzayını kapsar veya eşit olduğu, yani $\ker(QW) \supseteq \ker(Q)$ tanımı bilinmelidir. Benzer şekilde $\ker(W^{\mathrm{T}}QW) \supseteq \ker(QW)$ ifadesi de doğrudur. Bu doğrultuda, aşağıdaki çıkarım yapılabilir:

$$\mathrm{rank}(W^{\mathrm{T}}QW) = n - \dim(\ker(W^{\mathrm{T}}QW)) = n - \dim(\ker(QW)) = n - \dim(\ker(Q)) = \mathrm{rank}(Q) \tag{3.16}$$

Böylece ispat tamamlanır [59]. ■

Dışbükey optimizasyon problemleri olarak modellenen ve doğrusal olmayan fakat dışbükey bir fonksiyon ifade eden eşitsizlikler, Schur Tümleyeni Yardımcı teoremi kullanılarak DME formunda kolayca ifade edilebilir:

Lemma 3.2. ***(Schur Tümleyeni)***
$Q \in \mathbb{S}^n$, $R \in \mathbb{S}^n$ simetrik matrisleri ve $S \in \mathbb{S}^{n\times n}$ matrisi verilmiş olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir [56]:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^{\mathrm{T}} & R \end{bmatrix} < 0 \tag{3.17}$$

$$Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S < 0, \quad R < 0 \tag{3.18}$$

$$R - S^{\mathrm{T}}Q^{-1}S < 0 \quad Q < 0 \tag{3.19}$$

İspat. (3.17) ile ifade edilen birinci DME ele alınsın. Bu DME'ye, solundan ve sağından sırası ile $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S^{\mathrm{T}}Q^{-1} & I \end{bmatrix}$ ve tersçaprazı ile çarpılarak Kongrüans dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^{\mathrm{T}}Q^{-1}S \end{bmatrix} < 0 \tag{3.20}$$

ifadesi elde edilir ve bu ifade, (3.17) ile tanımlanan DME koşununun negatif tanımlılık özelliğini Kongrüans Dönüşümü korur. Açıktır ki, Schur Tümleyeni bu ifadeye uygulandığı zaman $Q < 0$ ifadesi elde edilir ve bu ifade yardımcı teoremde hali hazırda tanımlandığı için doğrudur. Özetle, (3.19) önermesinin (3.17) DME'sini sağladığı görülmektedir. Benzer şekilde aynı ilişiki (3.17) ve (3.18) arasında da gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Günümüzde, DME'ler ile modellenen yarı tanımlı optimizasyon problemleri iç-nokta yöntemleri ve elipsoit algoritmaları ile çözülebilmektedir. Bu doğrultuda MATLAB gibi yüksek seviye programlama dilleri ile çalışabilen YALMIP gibi derleyiciler ortaya çıkmıştır [34]. YALMIP ile yarı tanımlı olarak programlanan dışbükey

optimizasyon problemleri DME formunda oldukça kolay bir şekilde yazılımsal olarak modellenebilmekte olup, YALMIP derleyicisi ile uyumlu olarak çalışan SDPT^3 [35] ve SeDuMi [36] gibi çözücüler ile bu problemler verimli bir şekilde çözülebilmektedir. Burada çözüm olarak ifade edilen kavram, ilgili DME'yi çözen ve verilen şartları sağlayan matris değişkenlerinin mevcut olup olmadığının kontrolü, mevcut ise de değerlerinin hesaplanmasıdır.

Dışbükey optimizasyon, yarı tanımlı programlama ve doğrusal matris eşitsizlikleri hakkında bahsedilen kavramlar doğrultusunda elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

- Dinamik bir sistemin kararlılığını inceleyen Lyapunov eşitsizliği, bir dışbükey optimizasyon problemi olarak modellenebilmektedir.
- Bir dışbükey optimizasyon problemi olarak modellenebilen matris eşitsizlikleri (ve tabii ki Lyapunov eşitsizliği), Kongrüans Dönüşümü ve Schur Tümleyeni gibi yardımcı teoremler ile DME formunda ifade edilebilmektedir.
- Bu DME'ler günümüzde yüksek seviye programlama dilleri ve derleyiciler kullanılarak hızlı bir şekilde modellenebilmekte ve çeşitli çözücüler kullanılarak başarılı bir şekilde çözülebilmektedir.

Şu ana kadar Lyapunov Kararlılık Teorisi doğrultusunda üzerinde durulan, *bir sistemin kararlı kılınması* işlemi, ne yazık ki tek başına günümüzün modern kontrol sistemlerinin performans ihtiyaçlarını karşılamamaktadır. Modern sistemler, kararlı kılınmaya ek olarak dış bozucuların sistem üzerindeki etkilerinin en iyi şekilde bastırılması ve kontrol girişlerine doğrusal olarak kolayca modellenemeyen çeşitli kısıtlar konulması gibi performans hedeflerine de ihtiyaç duymaktadır. Bu doğrultuda, ilk olarak bir sonraki başlıkta bir sistemin durumları ve kontrol girişleri üzerine önceden belirlenen ağırlık matrisleri ile kısıtlar konulan bir optimizasyon problemi olan doğrusal karesel düzenleyici problemi incelenecektir. İlerleyen başlıklarda ise bir sistemin performansını ifade etmenin ve kontrol girişleri üzerinde kısıtlar tanımlamanın daha farklı yöntemler ile matematiksel olarak nasıl gerçekleştirileceği, elde edilen tanımlar doğrultusunda bu kısıtların DME olarak nasıl modelleneceği ve elde edilen DME'lerin çözümüyle ilgili kısıtları sağlayan kontrolörlerin nasıl inşa edileceği ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

3.3 Doğrusal Karesel Düzenleyici Tabanlı Kontrolör Tasarımı

Doğrusal karesel düzenleyici, dinamik bir sistemin durumlar ve kontrol girişlerine önceden belirlenen ağırlıklandırma matrisleri kullanılarak konulan kısıtlar doğrultusunda kontrol edilmesini sağlayan bir optimal kontrol problemidir. Bu bölümde, ağırlık matrisleri kullanılarak tanımlanan bir karesel maliyet fonksiyonunun en aza indirgenmesini amaçlayan DKD probleminin çözümü ve bu çözümü sağlayan kontrolör kazancının hesaplanma yöntemi Teorem 3.2'de elde edilmiş olup ispatı ile açıklanmıştır.

DKD problemi, ele alınan sistemin *kararlı kılınabilir* olmasını gerektirmektedir. Bu doğrultuda ilk olarak kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik kavramlarının açıklanmasında fayda olacaktır.

3.3.1 Kontrol Edilebilirlik ve Gözlemlenebilirlik

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklinde durum uzay formunda ifade edilen bir sistemin karşılığı olan transfer fonksiyonunun pay ve paydası arasında sadeleştirme yapılamıyor ise bu sisteme minimal sistem adı verilir. Minimal bir sistemin transfer fonksiyonun payda polinomunun derecesi n, ilgili sistemin minimal olarak gerçeklenen durum uzay formundaki modelinde bulunan durum sayısına eşittir.

Kontrol edilebilirlik *(İng: controllability)*, bir sistemin bütün durumlarının sistemin kontrol girişi tarafından doğrudan etkilenip etkilenmediğini ifade eder. Bir sistem tamamen kontrol edilebilir ise, bu sistem kararsız dahi olsa uygun kontrol girişi ile kararlı hale getirilebilir. Bunun aksine sistem tamamen kontrol edilebilir değil ise, sistemin kontrol edilemeyen durumuna karşılık gelen kökünün kararsız olması durumunda sistem de kararsız olacaktır. Eğer bir sistemde kontrol edilemeyen kökler mevcut, fakat bu kökler kararlı ise sistem *kararlı kılınabilir* olarak tanımlanır. Minimal olarak (A, B, C, D) şeklinde ile durum uzay formunda modellenen bir sistemin kontrol edilebilirliğinin tek şartı,

$$\operatorname{rank}(\mathscr{C}) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n \tag{3.22}$$

olarak tanımlanabilir. Burada $\mathscr{C}$ kontrol edilebilirlik matrisi, n ise ilgili minimal sistemin durum sayısıdır.

Benzer şekilde, gözlemlenebilirlik *(İng: observability)* kavramından da bahsedilebilir. Gözlemlenebilirlik, bir sistemin durumlarının başlangıç koşullarının sistemin

durumlarının mevcut çıkışlarından elde edilip edilemeyeceğini ifade eder. Benzer şekilde, minimal olarak (A, B, C, D) matrisleri ile durum uzay formunda modellenen bir sistemin gözlemlenebilirliğinin tek şartı,

$$\operatorname{rank}(\mathcal{O}) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = n \tag{3.23}$$

olarak tanımlanabilir. Burada $\mathcal{O}$ gözlemlenebilirlik matrisi, n ise ilgili minimal sistemin durum sayısıdır.

3.3.2 Problem Tanımı

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x_0 = 0 \tag{3.24}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrisleri ile yukarıdaki şekilde durum uzay formunda ifade edilen bir sistemin DKD problemi için aşağıdaki gibi bir maliyet fonksiyonu J tanımlansın:

$$J \triangleq \int_0^\infty g(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t \tag{3.25}$$

Bu maliyet fonksiyonunu ifade eden integral, zaman sonsuza gidecek şekilde tanımlandığı için elde edilen çözüm cebirsel bir Riccati denklemi olacaktır. Bunun aksine, sınırlı zaman aralığında tanımlanması durumunda ise bir Riccati diferansiyel denklemi elde edilir. Bu maliyet fonksiyonu matematiksel olarak çeşitli farklı şekillerde ifade edilebilmekle birlikte en pratik şekilde aşağıdaki gibi karesel fonksiyon olarak tanımlanır ise:

$$J \triangleq \int_0^\infty x(t)^{\mathrm{T}} Q x(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.26}$$

burada $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durumların ağırlık matrisini ifade eder ve hangi durumun hangi oranda kontrol girişi tarafından etkileneceğini tanımlar. Diyagonal bir matris olan Q matrisinin asal köşegenindeki her bir eleman, durum vektöründe denk geldiği ilgili durumun ne kadar çok kontrol edileceğini tanımlayan bir katsayıdır. Birden fazla durumu olan çok girişli-çok çıkışlı (*İng: multi input-multi output, MIMO)* bir sistem için, Q matrisinin asal köşegeni üzerindeki elemanlardan kontrolü öncelikli veya önemli olan durumlara denk gelenler daha yüksek katsayılar ile tanımlanmalıdır.

Fiziksel sistemlerdeki birçok kontrol probleminde genelde kontrol girişinin de sınırlandırılması gerekmektedir. Bu doğrultuda $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrisi, Q ile aynı mantık doğrultusunda oluşturulup kontrol girişlerinin ağırlık matrisi olarak tanımlanır. R de diyagonal bir matristir ve asal köşegenindeki her bir eleman, ilgili kontrol girişi üzerine tanımlanan kısıtı ifade eder. Bu doğrultuda, maliyet fonksiyonu son hali ile aşağıdaki

şekilde ifade edilebilir:

$$J \triangleq \int_0^\infty \Big(x^{\mathrm{T}}(t) Q x(t) + u^{\mathrm{T}}(t) R u(t) \Big) \mathrm{d}t \tag{3.27}$$

$u(t) = Kx(t)$ durum geri beslemeli kontrol kanunu ile kontrol edilen kapalı çevrim bir Λ sistemi, durum uzay formunda aşağıdaki şekilde verilmiş olsun:

$$\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x_0 = 0 \\ = \dot{x}(t) = (A + BK)x(t), & x_0 = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

Burada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sistem matrisi, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ giriş matrisi, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörü ve $d(t) \in \mathbb{R}^m$ sistemin kontrol giriş vektörüdür. K ise kapalı çevrim sistemin sabit kontrolör kazancıdır.

Tanım 3.9. (Doğrusal Karesel Düzenleyici Problemi): DKD problemi, matematiksel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x(t), u(t), Q, R) \\ \text{Koşullar:} \quad & \Lambda \text{ sistemi (3.28)}, \\ & Q \in \mathbb{R}^{n \times n},\ Q \geq 0, \\ & R \in \mathbb{R}^{m \times m},\ R > 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Burada J, en aza indirgenecek karesel maliyet fonksiyonu olup Q ve R ise sırası ile sistem durumları ve kontrol girişlerinin ağırlık matrisleridir. Verilen koşullar altında maliyet fonksiyonu J' nin en aza indirgenmesi ile bu problem çözülür.

3.3.3 Yöntem

Tanım 3.9'da ifade edilen DKD probleminin çözüm yöntemi olarak aşağıdaki adımlar sırası ile izlenerek uygulanmalıdır:

1. Karesel maliyet fonksiyonu J tanımlanır ve Lyapunov fonksiyonunu ifade edecek şekilde düzenlenir.
2. Sistem durumları ve kontrol girişlerinin ağırlık matrisleri olan Q ve R'nin değerleri tanımlanır.
3. Elde edilen cebirsel Riccati denklemi düzenlenerek çözülür ve Riccati matrisi S hesaplanır.
4. Riccati matrisi S'e bağlı olan kontrolör kazancı K hesaplanır.

3.3.4 Kontrolör Sentezi

Teorem 3.2. *Verilen Λ sistemi için, sistem matrisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kontrol giriş matrisi $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ve sırası ile durumlar ve kontrol girişlerinin ağırlık matrisleri olan $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ile $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ diyagonal matrisleri ile aşağıdaki eşitliği çözen, pozitif yarı tanımlı simetrik bir $S \in \mathbb{R}^n$, $S \geq 0$ matrisi hesaplanabiliyor ise*

$$A^{\mathrm{T}}S + SA - SBR^{-1}B^{\mathrm{T}}S + Q = 0 \tag{3.30}$$

durum geri beslemeli sistemin kontrol kazancı K, (3.30)'un çözümü ile elde edilen Riccati matrisi S kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$K = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}S \tag{3.31}$$

İspat. (3.27) ile ifade edilen maliyet fonksiyonunda, durum geri beslemeli kontrol girişi $u(t) = Kx(t)$ olarak yerine yazılıp düzenlenir ise;

$$J \triangleq \int_0^\infty x^{\mathrm{T}}(t)(Q + K^{\mathrm{T}}RK)x(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.32}$$

ifadesi elde edilir. Sistem durumlarının zaman cevaplarının

$$x(t) = e^{(A+BK)t}x_0 \tag{3.33}$$

şeklinde ifadesi doğrultusunda maliyet fonksiyonu tekrar düzenlenir ise de

$$J \triangleq x_0^{\mathrm{T}}(t)\left(\int_0^\infty e^{(A+BK)^{\mathrm{T}}t}(Q + K^{\mathrm{T}}RK)e^{(A+BK)t}\,\mathrm{d}t\right)x_0(t) \tag{3.34}$$

ifadesi elde edilir. (3.34)'daki integral ifadesi incelendiğinde açıktır ki, maliyet fonksiyonu alternatif olarak aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$J \triangleq x_0^{\mathrm{T}}(t)Sx_0(t). \tag{3.35}$$

(3.35) ifadesi, aşağıdaki şekilde ifade edilen Lyapunov denklemine denktir:

$$(A+BK)^{\mathrm{T}}S + S(A+BK) + Q + K^{\mathrm{T}}RK = 0. \tag{3.36}$$

Elde edilen bu eşitlik açılıp düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir:

$$A^{\mathrm{T}}S + SA + K^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}S + RK) + SBK + Q = 0 \tag{3.37}$$

Kontrolör kazancı $K = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}S$ ve dolayısı ile tersçaprazı da $K^{\mathrm{T}} = -SBR^{-\mathrm{T}}$ olarak

tanımlanır ve (3.37)'de yerine konur ise,

$$A^{\mathrm{T}}S + SA - SBR^{-\mathrm{T}}B^{-1}S + SBR^{-\mathrm{T}}\cancel{RR^{-1}}B^{-1}S - SBR^{-1}B^{\mathrm{T}}S + Q = 0 \tag{3.38a}$$

$$= A^{\mathrm{T}}S + SA \cancel{- SBR^{-\mathrm{T}}B^{-1}S} \cancel{+ SBR^{-\mathrm{T}}B^{-1}S} - SBR^{-1}B^{\mathrm{T}}S + Q = 0 \tag{3.38b}$$

$$= A^{\mathrm{T}}S + SA - SBR^{-1}B^{\mathrm{T}}S + Q = 0 \tag{3.38c}$$

sonuç olarak (3.30) ifadesi elde edilir. Böylece ispat sonlanır. ■

3.4 Bir Sistemin H_∞ Normu

Zaman düzleminde herhangi bir sinyal olan $e(t)$'nin normunun hesaplanması için birçok yol mevcuttur. Bunlardan yaygın olarak kullanılanlardan biri, Öklid normu olarak da bilinen $\mathscr{L}_2$ normudur ve bu yüksek lisans tezi de dahil olmak üzere bir çok kontrolör tasarımında önemli bir performans kriterleri olarak sıklıkla kullanılır. $\mathscr{L}_2$ normu, bir vektörün orijin ile arasındaki Öklid uzaklığını, yani doğrusal mesafeyi ifade eder. $e(t)$ sinyalinin $\mathscr{L}_2$ normu $\|e\|_2$ olarak gösterilir ve matematiksel olarak bu vektörün kendisi ile iç çarpımının karekökü olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\|e\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty e^{\mathrm{T}}(t)e(t)\,\mathrm{d}t} \tag{3.39}$$

T olarak ifade edilen bir dinamik sistem verilmiş olsun. Bu sistemin girişleri $d(t)$, performans çıkışlarını ise $e(t)$ olarak tanımlanırsa, indüklenmiş $\mathscr{L}_2$ kazancı bu sistemin $e(t)$ çıkışlarının enerjisi üzerinde $d(t)$ girişlerinin ne kadar etkili olduğu ifade eder ve olarak aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [58]:

$$\|T\|_\infty \triangleq \sup_{d\neq 0} \frac{\|e\|_2}{\|d\|_2} \tag{3.40}$$

Burada $\|T\|_\infty$ ifadesi, T sisteminin indüklenmiş $\mathscr{L}_2$ kazancına eşittir ve T sisteminin H_∞ normu olarak adlandırılır. H_∞ normu, aslında bir sistemin en kötü hal performansını belirler.

Teorem 3.3. *$V(x(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olarak tanımlanan Lyapunov fonksiyonu verilmiş olsun. $V(x(t)) \geq 0 \quad \forall x(t),\ V(0) = 0$ tanımları altında aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyor ise*

$$\dot{V}(x(t)) \leq \gamma^2 d^{\mathrm{T}}(t)d(t) - e^{\mathrm{T}}(t)e(t) \tag{3.41}$$

$\|e\|_2 \leq \gamma\|d\|_2$, yani $\|T\|_\infty \leq \gamma$ olur. Burada γ, T sisteminin H_∞ normu ve (3.41)'i sağlayan en küçük $\gamma \in \mathbb{R}^+$ değeridir.

İspat. (3.41) ifadesinin $t \in [0, \infty]$ zaman aralığında integali alındığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\underbrace{V(x)}_{\geq 0} - \cancelto{0}{V(0)} \leq \gamma^2 \int_0^\infty d^{\mathrm{T}}(t)d(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty e^{\mathrm{T}}(t)e(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.42}$$

Burada görüldüğü üzere eşitsizliğin sağ tarafı ≥ 0 olmalıdır. Sistemin H_∞ normu koşulu doğrultusunda $\int_0^\infty e^{\mathrm{T}}(t)e(t)\,\mathrm{d}t \leq \gamma^2 \int_0^\infty d^{\mathrm{T}}(t)d(t)\,\mathrm{d}t$ olduğunu bilinmektedir. Sonuç olarak, $\gamma \in \mathbb{R}^+$nın uygun değerinin bulunması ile ilgili koşul sağlanabilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Kontrolsüz halde kararlı ve nominal bir Σ sistemi durum uzay formunda aşağıdaki şekilde verilmiş olsun:

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bd(t) \\ e(t) = Cx(t) + Dd(t) \end{cases} \tag{3.43}$$

Burada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sistem matrisi, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ giriş matrisi, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ performans çıkış matrisi, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ise ileri besleme matrisidir. $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ ve $e(t) \in \mathbb{R}^n$ ise sırası ile sistemin durum, giriş ve performans çıkışı vektörüdür.

Lemma 3.3. ***(Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) Yardımcı Teoremi)***
Verilen Σ sistemi için A matrisi Hurwitz iken $P \in \mathbb{S}^n$, $P > 0$ şeklinde pozitif yarı tanımlı bir matris mevcut ise aşağıda verilen önermeler eşdeğerdir [60]:

$$\|\Sigma\|_\infty < \gamma \tag{3.44}$$

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} \\ D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.45}$$

Burada γ, Σ sisteminin H_∞ normu ve yukarıdaki önermeleri sağlayan en küçük $\gamma \in \mathbb{R}^+$ değeridir.

Lemma 3.4. ***(Sınırlı Gerçek Yardımcı Teoremi):*** *Verilen Σ sistemi için A matrisi Hurwitz iken, aşağıdaki DME'yi sağlayan $P \in \mathbb{S}^n$, $P > 0$ şeklinde pozitif yarı tanımlı bir matris ve bir skaler $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mevcut ise Σ sisteminin $d(t)$ girişinden $e(t)$ performans çıkışına H_∞ normu γ'dan küçüktür [32].*

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I & D^{\mathrm{T}} \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.46}$$

İspat. Lyapunov Kararlılık Teoremi doğrultusunda, Σ sisteminin asimptotik kararlı olması için bu sisteme ait bir enerji fonksiyonunun $\forall t \geq 0$ için pozitif olması ve türevinin, yani sistemin enerji değişiminin de negatif olması gerekir. Bu doğrultuda ilk olarak sistemin enerjisini ifade eden Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t),\ \forall t > 0 \tag{3.47}$$

Bu durumda Lyapunov fonksiyonunun türevi ise aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) < 0,\ \forall t \geq 0 \tag{3.48}$$

Σ sisteminin durum uzay denklemleri, (3.48)'de yerlerine yazılır ise;

$$\begin{aligned}[Ax(t) + Bd(t)]^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P[Ax(t) + Bd(t)] \\ +[Cx(t) + Dd(t)]^{\mathrm{T}}[Cx(t) + Dd(t)] < 0\end{aligned} \tag{3.49}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, Σ sisteminin asimptotik kararlılık koşulunu tanımlamaktadır. Bu ifade, bir sistemin performans şartını H_∞ normu ile tanımlayan (3.41)'de yerine yazılır ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}[Ax(t) + Bd(t)]^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P[Ax(t) + Bd(t)] \\ +[Cx(t) + Dd(t)]^{\mathrm{T}}[Cx(t) + Dd(t)] - \gamma^2 d^{\mathrm{T}}(t)d(t) + e^{\mathrm{T}}(t)e(t) < 0\end{aligned} \tag{3.50}$$

Burada $x(t)$, $d(t)$ vektörleri ve tersçaprazları parantezlerin içinde dağıtılıp ifadeler düzenlendikten sonra, genelleştirilmiş durum vektörünün $\xi(t) = [x(t)\ d(t)]^{\mathrm{T}}$ olarak seçilmesi ile (3.50) ifadesi $\xi^{\mathrm{T}}(t)\Gamma\xi(t) < 0$ formunda yazılabilir. Bu durumda, Γ aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + C^{\mathrm{T}}C & PB + C^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}C & D^{\mathrm{T}}D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.51}$$

Görüldüğü üzere bu ifade, KYP Yardımcı Teoremi'nde (Lemma 3.4) gösterilen DME ile aslında denktir. Bu doğrultuda ilgili ifade KYP Yardımcı Teoremi'nde gösterildiği formuna getirilip ardından Schur Tümleyeni uygulanır ise

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA & PB & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P & -\gamma I & D^{\mathrm{T}} \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.52}$$

şeklinde Sınırlı Gerçek Yardımcı Teoremi'nde tanımlanan DME'ye ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sınırlı Gerçek Yardımcı Teoremi'nde (Lemma 3.4) görüldüğü üzere durum uzay formunda ifade edilen bir sistemin H_∞ normu, DME'ler kullanılarak tanımlanabilmektedir. Benzer şekilde, kontrolsüz sistemin durum uzay formunda gösteriminde kullanılan A, B, C ve D matrisleri yerine kapalı çevrim durum geri beslemesi ile kontrol edilen sistemin kontrolör kazancı K'yı içeren durum uzay matrisleri yazılıp Sınırlı Gerçek Yardımcı Teoremi kullanılarak kontrol edilen sistemin H_∞ normunu mümkün olan en küçük değere indirgeyecek kontrolör kazançları hesaplanabilir. Ek olarak, sistemle ilgili çeşitli kısıtlar da DME'ler olarak tanımlanıp tüm bu DME'lerin ortak olarak çözümü ile hem sistemin H_∞ normunu en aza indirgeyen, hem de tanımlanan kısıtları sağlayan çok amaçlı *(İng: multi objective)* kontrol problemleri tasarlanması da mümkündür. Bu doğrultuda, bir sonraki alt başlıkta eyleyici genliği doyumu ile ilgili çeşitli kavramlar açıklanıp devamında ise değişmez elipsoitler yöntemi açıklanacaktır.

3.5 Eyleyici Genliği Doyumu

Gerçek hayattaki kontrol sistemlerinin büyük bir çoğunluğunda, eyleyicilerin sahip olduğu fiziksel sınırlar sebebi ile kontrol girişi üzerinde çeşitli kısıtlar mevcut olmaktadır. Bu kısıtlardan en yaygın olarak gözlemlenenlerden biri, eyleyici genliğinin bir alt ve üst sınırı olmasını ifade eden eyleyici genliği doyumudur. Bu durumun hesaba katılmadığı yöntemler ile tasarlanan kontrolörler, eyleyicinin sınırları dışında kontrol sinyali üretebilmekte ve sistemin performansını düşürebilmektedir.

Bu tür kısıtlar, değişmez elipsoitler kullanılarak optimal kontrolör tasarım problemlerine dahil edilebilir. Bu doğrultuda, değişmez elipsoitler yöntemi kullanılarak bir sistemin kontrol girişinin sınırlandırılması konsepti işlenmeden önce ilk olarak eyleyici genliği doyumu ile ilgili çeşitli kavramlarının tanımının yapılması faydalı olacaktır.

Tanım 3.10. (İşaret Fonksiyonu): İşaret fonksiyonu (*İng: signum function*), sgn olarak ifade edilir ve giriş değerinin işaretine göre çıktı olarak -1, 0 veya 1 çıktılarını veren bir fonksiyondur. Bu fonksiyon kullanılarak ile bir gerçek sayının işareti bulunabilir.

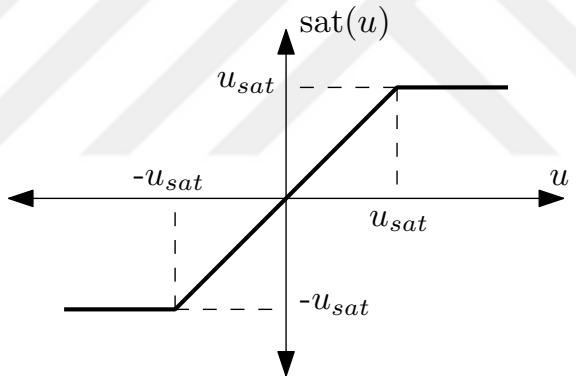
$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \ : \ x < 0 \\ 0 \ : \ x = 0 \\ 1 \ : \ x > 1 \end{cases} \tag{3.53}$$

Görüldüğü üzere işaret fonksiyonu, girişi negatif bir sayı ise -1, sıfır ise sıfır ve pozitif bir sayı ise de 1 çıkışını vermektedir. İşaret fonksiyonu, doyum fonksiyonunun matematiksel ifadesinde kullanılmaktadır.

Tanım 3.11. (Doyum Fonksiyonu): Doyum *(İng: saturation)*, genel anlamı ile bir giriş değerinin belirli bir doyum noktasına kadar giriş değeri ile orantılı bir çıkış, doyum noktasından sonra ise sabit bir çıkış üretmesi olarak açıklanabilir. Matematiksel olarak doyum fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u & : |u| \leq u_{\text{sat}} \\ u_{\text{sat}}\text{sgn}(u) & : |u| > u_{\text{sat}} \end{cases} \tag{3.54}$$

Bu ifade ve Şekil 3.3 incelendiğinde, giriş sinyali u'ya bağlı olan ve sat(u) olarak ifade edilen doyum fonksiyonu, mutlak değeri doyum noktası olan u_{sat}'tan küçük bir giriş değeri aldığında çıkış değeri olarak doğrusal bir şekilde aynı giriş değerini, artı veya eksi yönde fark etmeksizin doyum noktasından büyük bir değer aldığında ise çıkış olarak doyum noktası değerini vermektedir. Bu doğrultuda doyum fonksiyonu, negatif ve pozitif doyum noktası arasında birinci açıortay doğrusunu tanımlayıp doyum noktalarının dışında ise giriş sinyalinin işaretine göre negatif veya pozitif olarak doyum noktasının değerini alır.



Şekil 3.3 Doyum fonksiyonunun görsel ifadesi

Sabit kanatlı hava araçlarında kontrol girişlerini fiziksel olarak sağlayan uçuş kontrol yüzeyleri, hidrolik pistonlar gibi çeşitli mekanik sistemler sayesinde hareket etmektedir ve bu sebeple uygulayabilecekleri açısal hareketlerin fiziksel bir sınırı bulunmaktadır. Örneğin bu çalışmada ele alınacak sabit kanatlı hava aracının irtifa dümeni kontrol yüzeyi yukarı ve aşağı yönde maksimum 20 derece hareket edebilmektedir, yani doyum noktası $u_{\text{sat}} = \pm 20$ derece olarak ifade edilebilir. Uçuş kontrol sistemi veya pilottan gelen irtifa dümeni kontrol sinyali bu doyum noktasından küçük olduğu sürece, komut eyleyici tarafından birebir gerçekleştirmekle birlikte doyum sınırından daha büyük bir kontrol sinyali gelmesi durumunda ise eyleyici bu komutu gerçekleştiremeyeceği için ilgili uçuş kontrol yüzeyi, işaretine (yönüne) göre doyum noktasına gelip komut girişi kalkana kadar burada bekleyecektir.

3.6 Değişmez Elipsoitler

Tanım 3.12. (Bir Matrisin Determinantı): $i = 1,..,n$ olmak üzere, bir P matrisinin özdeğerleri λ_i ile ifade edilsin. Bu matrisin determinantı, o matrisin özdeğerlerinin çarpımına eşittir.

$$\det(P) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{3.55}$$

Tanım 3.13. (Bir Matrisin İzi): Bir P matrisinin izi *(İng: trace)*, $\text{iz}(P)$ olarak gösterilir ve o matrisin özdeğerlerinin veya eşdeğer şekilde o matrisin asal köşegenindeki elemanların toplamına eşittir.

$$\text{iz}(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{3.56}$$

Tanım 3.14. Bir P matrisinin özdeğerlerinin geometrik ortalaması, aritmetik ortalamasından büyük olamaz.

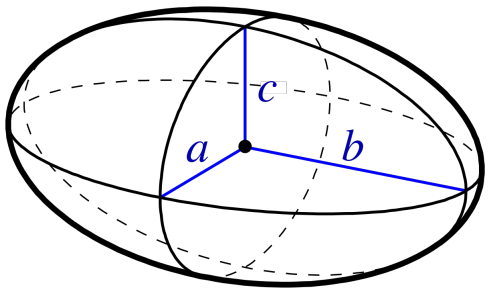
$$\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n} \tag{3.57}$$

Tanım 3.12, Tanım 3.13 ve Tanım 3.14, değişmez elipsoitler kullanarak kontrol girişi kısıtlarını bir dışbükey optimizasyon problemi olarak tanımlamada kullanılacaktır.

Tanım 3.15. Elipsoit, geometrik tanımı olarak asal eksenler ve orijine göre simetrik olan, herhangi bir düzlemle ara kesiti elips olan ikinci dereceden bir yüzeydir. Aynı zamanda, simetrik ve pozitif tanımlı bir $P \in \mathbb{S}^n$, $P > 0$ matrisi için $x^{\mathrm{T}} P x \leq 1$ gibi bir karesel eşitsizliği sağlayan tüm x değişkenlerinin tanımlı olduğu küme de bir elipsoit ifade eder. Bu elipsoit, matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\varepsilon_P \triangleq \{x \ : \ x^{\mathrm{T}} P x \leq 1\} \tag{3.58}$$

Bu elipsoiti tanımlayan P matrisinin özvektörleri, elipsoitin asal eksenleri olmaktadır.



Şekil 3.4 Bir elipsoitin görsel ifadesi

Tanım 3.16. $\varepsilon_P \triangleq \{x \ : \ x^{\mathrm{T}}Px \leq 1\}$ olarak tanımlanan bir elipsoitin hacmi $\sqrt[n]{\det(P^{-1})}$ ile orantılıdır.

Teorem 3.4. ***(Değişmez Elipsoit):*** *A Hurwitz olmak üzere,* $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ *olarak tanımlanan homojen sistem için* $A^{\mathrm{T}}P + PA < 0$ *DME'sini sağlayan bir pozitif tanımlı simetrik* $P \in \mathbb{S}^n$, $P > 0$ *matrisi mevcut ise,* $\varepsilon_P \triangleq \{x : x^{\mathrm{T}}Px \leq 1\}$ *elipsoiti bir değişmez elipsoit olarak adlandırılır ve bu elipsoitin sınırları içerisinde olan bir* $x_0 \in \varepsilon_P$ *başlangıç şartı için durum yörüngeleri* $x(t)$ *her zaman* ε_P *elipsoitinin içinde kalır, yani* $\forall t \geq 0$ *için* $x(t) \in \varepsilon_P$ *koşulu sağlanır [56].*

İspat. İlk olarak, verilen sistemin başlangıç durum vektörü x_0'ın ε_P elipsoiti içinde olduğu, yani $x_0^{\mathrm{T}}Px_0 \leq 1$ şartını sağladığı ifade edilmelidir. Sonrasında, aşağıdaki şekilde verilen bir $f(t)$ fonksiyonu tanımlanır ise,

$$f(t) \triangleq x(t)^{\mathrm{T}}Px(t) \geq 0 \tag{3.59}$$

açıktır ki bu fonksiyon, $\varepsilon_P \triangleq \{x : x^{\mathrm{T}}Px \leq 1\}$ şeklinde bir değişmez elipsoit ifade etmektedir. Bu durumda bu fonksiyonun, giriş değeri olarak x'in başlangıç koşulu olan x_0 değerini alması durumunda da yine ilgili elipsoit şartı korunacaktır, yani $f(0) \leq 1$ tanımı yapılabilir. Ayrıca, $A^{\mathrm{T}}P + PA < 0$ ifadesi, tanımlanan $f(t)$ fonksiyonu doğrultusunda

$$x^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}PAx(t) < 0 \tag{3.60}$$

ifadesine eşdeğerdir. Elde edilen bu ifade de, verilen $\dot{x}(t) = Ax(t)$ tanımı göz önüne alındığında aslında $f(t)$ fonksiyonunun türevi olan

$$\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \dot{x}(t)Px^{\mathrm{T}}(t) < 0 \tag{3.61}$$

ifadesine eşdeğerdir. Bu doğrultuda da $f(t)$ fonksiyonunun türevi için

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) < 0 \tag{3.62}$$

eşitsizliği geçerli olur. $f(t)$ fonksiyonu için zaten $f(0) \leq 1$ olduğundan, ve bu fonksiyonun türevi de negatif olduğundan dolayı her zaman $f(t) \leq 1$ olacaktır, yani $\forall t \geq 0$ için $x(t) \in \varepsilon_P$ şartı sağlanır. ■

Tanım 3.17. Tanım 3.14 ve Tanım 3.16 doğrultusunda bir matrisin determinantı ve izi arasındaki ilişkiyi ifade eden aşağıdaki çıkarım yapılabilir:

$$\sqrt[n]{\det(P^{-1})} = \det P \leq \left(\frac{\mathrm{iz}(P)}{n}\right)^n \tag{3.63}$$

Tanım 3.16 doğrultusunda açıktır ki, bir elipsoitin hacmi o elipsoiti tanımlayan P matrisinin tersinin determinantı ile orantılıdır. Bu durumda, Tanım 3.17'ye göre ilgili elipsoitin hacmini en yüksek değerine ulaştırabilmek için P matrisinin izinin en küçük değerine indirgenmesi yeterli olmaktadır. Bu durum, bahsedilen hacmi en yüksek değerine ulaştırma probleminin bir dışbükey optimizasyon problemi olarak tanımlanmasını mümkün kılmaktadır.

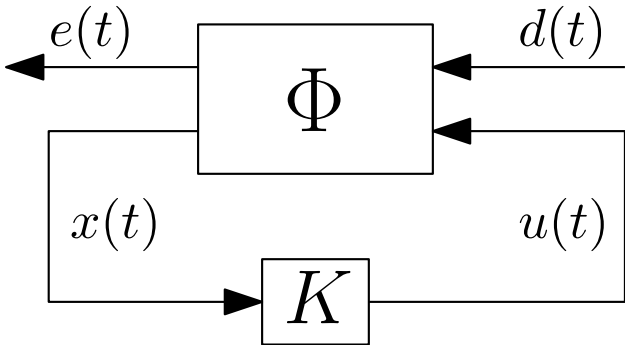
Önceki başlıklarda verilen bilgiler kullanılarak bir sistemi kararlı kılan ve H_∞ normunu en aza indirgeyecek DME'ler tanımlanabilmektedir. Ek olarak bu başlıkta verilen bilgiler kullanılarak, bir sonraki başlıkta kontrol girişi üzerine değişmez elipsoitler kullanılarak genlik kısıtı tanımlanan bir sistem için değişmez elipsoit tabanlı eyleyici genliği doyumlu bir H_∞ kontrolör tasarlanacaktır.

3.7 Değişmez Elipsoit Tabanlı Eyleyici Genliği Doyumlu H_∞ Kontrolör Tasarımı

3.7.1 Sistem Yapısı

$$\Phi \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 d(t) + B_2 u(t) \\ e(t) = C_1 x(t) + D_1 d(t) + D_2 u(t) \end{cases} \tag{3.64}$$

Verilen Φ sisteminde, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sistem matrisi, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ bozucu giriş matrisi, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ kontrol giriş matrisi, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ performans çıkış matrisi, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ve $D_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ise sırası ile bozucu ve kontrol girişi için ileri besleme matrisleridir. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ sistemin durum vektörü, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ bozucu girişi ve $u(t) \in \mathbb{R}^p$ de kontrol girişidir.



Şekil 3.5 Durum geri beslemeli kapalı çevrim sistem için genelleştirilmiş yapı

K durum geri beslemeli kontrol kazancı olmak üzere, $u(t) = Kx(t)$ kontrol kuralı ile kontrol edilen Φ sistemi, Şekil 3.5'de gösterilen genelleştirilmiş sistem yapısı ile ifade edilebilir.

3.7.2 Problem Tanımı

Tanım 3.18. (Değişmez Elipsoit Tabanlı Eyleyici Genliği Doyumlu H_∞ Kontrol Problemi): Değişmez elipsoit tabanlı eyleyici genliği doyumlu H_∞ kontrolör tasarım problemi, matematiksel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{Koşullar:} \quad & \Phi \text{ sistemi (3.64)}, \\ & \text{Kontrol koşulları (3.66) ve (3.67)} \\ & Q \in \mathbb{S}^n,\ Q \geq 0, \\ & F \in \mathbb{R}^{p \times n}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Verilen koşullar altında Φ sisteminin asimptotik kararlı kılınması, $\|\Phi\|_\infty \leq \gamma$'yı sağlayan γ'nın en küçük değerine indirgenmesi ve kontrol girişi üzerine tanımlanan $\|u\|_2 < u_{\max}$ koşulunun sağlanmasıyla birlikte bu koşulları sağlayan kontrolör kazancı K'nın hesaplanması ile bu problem çözülür.

3.7.3 Yöntem

Tanım 3.18'da ifade edilen değişmez elipsoitler yöntemi ile eyleyici genliği doyumlu H_∞ kontrolör probleminin çözüm yöntemi olarak aşağıdaki adımlar sırası ile izlenerek uygulanmalıdır:

1. Durum geri beslemesi ile kontrol edilen kapalı çevrim sistem için sistemin asimptotik kararlılığını garanti eden ve performans koşulunu (H_∞ normu) tanımlayan eşitsizlik elde edilir.
2. Bu eşitsizlik üzerine uygun bir matris ile Kongrüans dönüşümü uygulanır.
3. Elde edilen yeni eşitsizlik, Schur Tümleyeni ve KYP Lemma yardımcı teoremleri ile DME formunda yazılır.
4. Bilinmeyen kontrolör kazanç matrisi sebebi ile ortaya çıkan doğrusal olmayan bileşenler için uygun şekilde bir değişken dönüşümü yapılır.
5. Kontrol giriş sinyali üzerindeki en yüksek genlik kısıtını tanımlamak için ise kontrol giriş sinyalinin $\mathscr{L}_2$ normu tanımı kullanılarak bir elipsoit ifade eden eşitsizlik kurulur.
6. Bu elipsoitin, Lyapunov kararlılığını sağlayan elipsoiti kapsadığı veya eşit olduğu tanımı doğrultusunda iki elipsoit arasındaki ilişki yeni bir eşitsizlik olarak yazılır.

7. Elde edilen bu yeni eşitsizlik, uygun şekilde Kongrüans dönüşümü ve Schur Tümleyeni uygulanması ile DME formunda ifade edilir.

8. Sistemin performans kriterini (3. Adım) ve kontrol giriş sinyali üzerindeki en yüksek genlik kısıtını (7. Adım) ifade eden iki DME'nin ortak olarak çözülüp bu koşulları sağlayan kontrolör kazancı K'nın hesaplanması ile problem çözülür.

3.7.4 Kontrolör Sentezi

Teorem 3.5. ***(Değişmez Elipsoit Tabanlı Eyleyici Genliği Doyumlu H_∞ Kontrolör Tasarımı):*** *(3.64) ile tanımlanan Φ sistemi verilmiş olsun. Matris değişkenleri $Q \in \mathbb{S}^n$, $Q > 0$ ve $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$ için aşağıdaki DME'leri sağlayan bir $\gamma \in \mathbb{R}^+$ skaleri mevcut ise Φ sistemi asimptotik kararlıdır ve $||\Phi||_\infty \leq \gamma_\infty$ koşulu sağlanır [56, 58].*

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^{\mathrm{T}} + B_2F + F^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & B_1 & QC_1^{\mathrm{T}} + F^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.66}$$

$$\begin{bmatrix} Q & F^{\mathrm{T}} \\ F & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.67}$$

Burada Φ sisteminin H_∞ normu, (3.66) ve (3.67)'yi sağlayan en küçük $\gamma \in \mathbb{R}^+$ değeridir. İlgili kontrolör kazancı ise $K = FQ^{-1}$ olarak hesaplanır.

İspat. (3.64) sisteminin kapalı çevrim sistemin durum uzay formunda gösterimi aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\Phi \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_2)x(t) + B_1 d(t) \\ e(t) = (C + D_2)x(t) + D_1 d(t) \end{cases} \tag{3.68}$$

$P \in \mathbb{S}^n$, $P > 0$ matrisi ile $V(x(t), t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$ olarak tanımlanan Lyapunov fonksiyonu verilmiş olsun. Lyapunov fonksiyonunun türevi alındığında;

$$\dot{V}(x(t), t) = \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P\dot{x}(t) \tag{3.69}$$

ifadesi elde edilir. (3.68)'daki durum uzay denklemleri, (3.69)'de yerlerine yazılır ise;

$$\begin{aligned} &[(A + B_2K)x(t) + B_1 d(t)]^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)P[(A + B_2K)x(t) + B_1 d(t)] \\ &+[(C_1 + D_2K)x(t) + D_1 d(t)]^{\mathrm{T}}[(C_1 + D_2K)x(t) + D_1 d(t)] - \gamma^2 d^{\mathrm{T}}(t)d(t) < 0 \end{aligned} \tag{3.70}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, genelleştirilmiş durum vektörünün $\xi = [x(t)\ d(t)]^{\mathrm{T}}$ olarak seçilmesi ile (3.70) ifadesi $\xi^{\mathrm{T}}(t)\Gamma\xi(t) < 0$ formunda yazılabilir. Sonrasında ise Γ ifadesi sağından ve solundan sırasıyla $Q = P^{-1}$ olarak tanımlanan Q matris değişkeni ile çarpılarak üzerine Kongrüans dönüşümü uygulanır ve elde edilen sonuç Schur tümleyeni ile bir matris eşitsizliği olarak yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)Q+Q(A+B_2)^{\mathrm{T}}+Q(C_1+D_2K)^{\mathrm{T}}(C_1+D_2K)Q & B_1+Q(C_1+D_2K)^{\mathrm{T}}D_1 \\ B_1^{\mathrm{T}}+D_1^{\mathrm{T}}(C_1+D_2K)Q & -\gamma I+D_1^{\mathrm{T}}D_1 \end{bmatrix} < 0 \tag{3.71}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade, Kalman-Yakubovich-Popov Yardımcı Teoremi (Lemma 3.3) doğrultusunda aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)Q+Q(A+B_2K)^{\mathrm{T}} & B_1 \\ B_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} Q(C_1+D_2K)^{\mathrm{T}} \\ D_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (C_1+D_2K)Q & D_1 \end{bmatrix} < 0 \tag{3.72}$$

Yukarıdaki ifade Schur Tümleyeni Yardımcı Teoremi ile aşağıdaki hale getirilebilir:

$$\left[\begin{array}{cc|c} (A+B_2K)Q+Q(A+B_2K)^{\mathrm{T}} & B_1 & Q(C_1+D_2K)^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}} \\ \hline (C_1+D_2K)Q & D_1 & -\gamma I \end{array}\right] < 0 \tag{3.73}$$

(3.73) eşitsizliğindeki yatay ve dikey doğru parçaları, Schur Tümleyeni'nin hangi matrisler ile alındığının net bir şekilde görülmesi amacı ile çizilmiştir. Burada açıkça görülmektedir her ki ikisi de bilinmeyen olan K ve Q elemanlarının çarpımı sonucu ortaya çıkan KQ ve $K^{\mathrm{T}}Q$ ifadelerinden dolayı 3.73 ifadesi bir DME değildir. Bu doğrultuda yukarıdaki doğrusal olmayan matris eşitsizliğine $F = KQ$ değişken dönüşümü yapılarak,

$$\begin{bmatrix} AQ+QA^{\mathrm{T}}+B_2F+F^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} & B_1 & QC_1^{\mathrm{T}}+F^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_1^{\mathrm{T}} \\ C_1Q+D_2F & D_1 & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.74}$$

DME'si elde edilir. Bu DME'yi çözen Q ve F matrisleri hesaplanabilirse, ilgili sistemin H_∞ normu bu DME'yi sağlayan en küçük $\gamma \in \mathbb{R}^+$ değeri olur ve kontrol kazancı da $K = FQ^{-1}$ olarak hesaplanır. Bu şekilde birinci DME (3.66) ispatlanmış olur.

İkinci DME (3.67) ise sistemin kontrol girişine değişmez elipsoitler yöntemi kullanılarak bir genlik kısıt konulmasını tanımlamaktadır. Bu doğrultuda, kontrol girişine kısıt koymak amacıyla kontrol giriş sinyalinin üzerinde bulunan enerji koşulu

aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\|u\|_2 < u_{\max} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{u^{\mathrm{T}}u} \leq u_{\max} \tag{3.75}$$

Durum geri beslemeli kontrol yapısı $u(t) = Kx(t)$ için yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın da karesi alınarak için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}Kx(t) \leq u_{\max}^2, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.76}$$

$K = FQ^{-1}$ olarak tanımlanan kontrol kazancı yukarıdaki eşitsizlikte yerine konulup eşitsizliğin her iki tarafı $u_{\max}^2$ ifadesine bölünürse

$$\frac{1}{u_{\max}^2}x^{\mathrm{T}}(t)Q^{-1}F^{T}FQ^{-1}x(t) \leq 1, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.77}$$

eşitsizliği elde edilir. Görüldüğü üzere bu ifade $\varepsilon_{\frac{1}{u_{\max}^2}Q^{-1}F^{T}FQ^{-1}}$ elipsoitini ifade etmektedir ve sistem durumlarının yörüngeleri $\|u\|_2 < u_{\max}$ şartını sağlamak amacıyla bu elipsoitin içinde kalmalıdır. Bu elipsoite ek olarak, sistemin asimptotik kararlılığını tanımlayan ve Lyapunov denklemi ile elde edilen ε_P elipsoiti de bulunmaktadır ve yine aynı şekilde sistem durumlarının yörüngeleri bu elipsoitin de içinde kalmalıdır. Önceden yapılan $P = Q^{-1}$ tanımı da doğrultusunda iki koşulun da sağlanması için elde edilen elipsoitler arasında olması gereken ilişki aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\varepsilon_{\frac{1}{u_{\max}^2}Q^{-1}F^{T}FQ^{-1}} \supseteq \varepsilon_{Q^{-1}} \tag{3.78}$$

Not: $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ için, $\varepsilon_A \subseteq \varepsilon_B$ koşulu ancak ve ancak $B \subseteq A$ ise geçerlidir.

Bu notun ışığında, iki elipsoit arasında olması gereken ilişki aşağıdaki eşitsizliğe eşdeğerdir:

$$P = Q^{-1} \geq \frac{1}{u_{\max}^2}Q^{-1}F^{\mathrm{T}}FQ^{-1} \tag{3.79}$$

Bu eşitsizliğe sağdan ve soldan Q ile çarpılarak Kongrüans Dönüşümü uygulanır ve elde edilen sonuç Schur tümleyeni kullanılarak bir DME haline getirilirse,

$$\begin{bmatrix} Q & F^{\mathrm{T}} \\ F & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.80}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade, teoremdeki ikinci DME'yi (3.67) tanımlamaktadır. Böylece ispat tamamlanır. ■

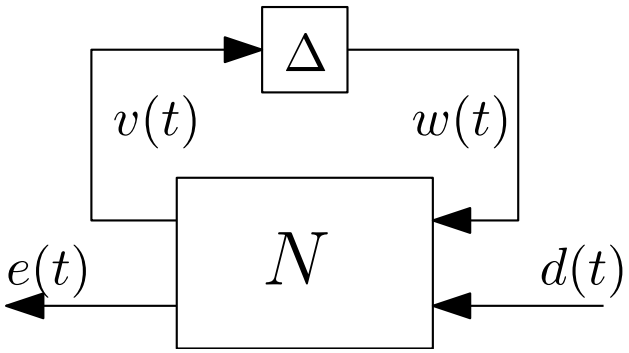
3.8 Tümleşik Karesel Kısıtlar

Bir sistemin performansı, şu ana kadar açıklandığı üzere bu sistemin girişi ile çıkışı arasındaki bir ilişki, örneğin, H_∞ normu olarak tanımlanabilmektedir. Bu yaklaşım oldukça mantıklı olmakla birlikte, bu tür bir ilişkiyi ifade eden sistem unsurlarından herhangi birinin doğrusal olmaması, belirsiz olması veya yüksek doğruluk ile modellenememesi gibi durumlar mevcut ise doğrusal olarak kurulan modeller ve DME'ler artık ele alınan sistemi gerçekçi bir şekilde yansıtmayacaktır.

Bu şekilde sadece *giriş ve çıkış arasındaki ilişki* olarak kolaylıkla ifade edilemeyen ve modellenmesi zor elemanlar içeren sistemlerde bu elemanlar, modellenmesi kolay olan ana sistemden bir döngü ile ayrılarak modellenebilir. Bu şekilde, modellenmesi kolay ana sistem için performans koşulları mevcut yöntemler ile şu ana kadar açıklandığı şekilde tanımlanabilir. Modellenmesi zor bölüm için ise, bu zorluğu oluşturan elemanın mümkün olduğu kadar gerçekçi bir şekilde nasıl olarak modellenebileceği belirlenebilir ise işlemler oldukça kolaylaşacaktır.

Bu doğrultuda, modellenmesi zor olan elemanların giriş ve çıkışları arasında çeşitli yollar ile karesel kısıtlar tanımlanarak bu ilişkiler dışbükey optimizasyon problemleri halinde ifade edilebilir ve modellenmesi kolay olan ana sistemin performans koşulunu sağlayan problemler ile ortak bir dışbükey optimizasyon problemi olarak çözülerek elde çözümünün her iki koşulu da geçerli kılması sağlanabilir.

Şekil 3.6'da gösterilen temel sistem verilmiş olsun [61]:



Şekil 3.6 Doğrusal kesirli gösterim

Burada N ile gösterilen blok, genel sistemin modellenmesi kolay ve bilinen bölümü veya modellenmesi zor olan elemanı içermeyen modelidir. Bu bölüm genelde ilgili sistemin dinamiğini tamımlayan doğrusal diferansiyel denklemleri ifade eder. Δ ile gösterilen blok ise modellenmesi zor olan ve ana sistemden bir döngü ile ayrılmış elemandır. Bu eleman eyleyici genliği/hızı doyumu, zaman gecikmesi veya parametre belirsizliği gibi doğrusallığı bozacak bir elemanı ifade ediyor olabilir.

Bir sistemin elemanlarını bu şekilde bir döngü ile ana sistemden ayırma işlemine doğrusal kesirli gösterim adı verilir. Yukarıdaki örnek sistem, bir *üstten* doğrusal kesirli gösterim olarak $\mathscr{F}_u(N,\Delta)$ şeklinde ifade edilebilir. Kontrol mühendisliği bünyesindeki birçok problem, nihai olarak bu şekilde DKG ile modellenebilir hale getirilebilmektedir.

Şekil 3.6'da DKG ile modellenerek tanımlanan $\mathscr{F}_u(N,\Delta)$ sisteminin giriş ve çıkışları arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} w(t) &= \Delta v(t) \\ \begin{bmatrix} v(t) \\ e(t) \end{bmatrix} &= N \begin{bmatrix} w(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.81}$$

Burada N ve Δ blokları birer matris, $w(t)$, $d(t)$, $e(t)$ ve $v(t)$ sinyalleri ise birer vektör ifade etmektedir.

Δ olarak ifade edilen belirsiz elemanın modellenmesi için, bu elemanın türüne de bağlı olarak çeşitli yöntemler olmakla birlikte şu an için tek şart olarak Δ'nın kararlı bir dinamiğe sahip olduğu farz edilsin. Bu doğrultuda Δ'nın çıkış sinyali $w(t)$'nin $\mathscr{L}_2$ normunun, çıkış sinyali $v(t)$'nin $\mathscr{L}_2$ normundan daha küçük olması, yani $\|w(t)\|_2 \leq \|v(t)\|_2$ koşulunu sağlaması gerekir.

N genel sisteminin ise, bu basit örnekte herhangi bir ekstra performans kriteri tanımlanmadan sadece kararlı olup olmadığı incelenmektedir. Bu doğrultuda N'nin çıkış sinyali $e(t)$'nin normunun, çıkış sinyali $d(t)$'nin normundan daha küçük olması, yani $\|e(t)\|_2 \leq \|d(t)\|_2$ koşulunu sağlaması gerekir.

Bu iki koşul, **karesel kısıtlar** olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\|w(t)\|_2 \leq \|v(t)\|_2 \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.82a}$$

$$\|d(t)\|_2 \leq \|e(t)\|_2 \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} d(t) \\ e(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.82b}$$

Elde edilen karesel kısıtları daha detaylı olarak ifade etmek amacıyla N matrisi sistemdeki sinyallerle uyumlu olarak aşağıdaki şekilde bir üst ve alt matrise bölünebilir:

$$\left[\begin{array}{c} v(t) \\ \hline e(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} N_{\text{ÜST}} \\ \hline N_{\text{ALT}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} w(t) \\ \hline d(t) \end{array}\right] \tag{3.83}$$

Bu doğrultuda karesel kısıtlar (3.82a) ve (3.82b) aşağıdaki şekilde daha detaylı olarak

ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} N_{\text{ÜST}} \\ \hline \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right] \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix} \tag{3.84a}$$

$$= \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \underbrace{\left\{ \left[\begin{array}{c} N_{\text{ÜST}} \\ \hline \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right]^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} N_{\text{ÜST}} \\ \hline \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right] \right\}}_{N_1} \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.84b}$$

$$\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ \hline N_{\text{ALT}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix} \tag{3.85a}$$

$$= \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \underbrace{\left\{ \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ \hline N_{\text{ALT}} \end{array}\right]^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\ \hline N_{\text{ALT}} \end{array}\right] \right\}}_{N_0} \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.85b}$$

(3.85b) ve (3.85b) olarak daha detaylı şekilde elde edilen karesel eşitsizlikler aşağıdaki formda da ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} N_1 \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.86a}$$

$$\begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} N_0 \begin{bmatrix} w \\ d \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.86b}$$

N'nin kararlı olup olmadığı, yani çıkış sinyali $e(t)$'nin $\mathscr{L}_2$ normunun, çıkış sinyali $d(t)$'nin $\mathscr{L}_2$ normundan daha küçük olup olmadığı Δ'nın belirsiz yapısı gereği henüz bilinememektedir. Bu aşamada, Δ'nın kendisinin kararlı bir dinamiğe sahip olduğu kabulü doğrultusunda N'nin kararlı olup olmadığı incelenmektedir. Tanımlanan bu varsayım ve koşul doğrultusunda aşağıdaki önemli soru sorulmalıdır:

Belirsiz eleman olan Δ'nın çıkış sinyali $w(t)$'nin $\mathscr{L}_2$ normunun, giriş sinyali $v(t)$'nin $\mathscr{L}_2$ normundan küçük olması, yani $\|w(t)\|_2 \leq \|v(t)\|_2 \rightarrow \|\Delta\|_\infty \leq 1$ koşulunun sağlanması, genel sistem N'in giriş sinyali $d(t)$'nin $\mathscr{L}_2$ normunun, performans çıkış sinyali $e(t)$'nin $\mathscr{L}_2$ normundan küçük olmasını, yani $\|d(t)\|_2 \leq \|e(t)\|_2 \rightarrow \|N\|_\infty \leq 1$ koşulunu sağlar mı?

Daha genel bir tabir ile, Δ belirsiz elemanı belirli bir karesel koşulu sağladığı takdirde N için tanımlanan başka bir karesel koşul sağlanır mı?

Bu sorunun cevabını, S-Prosedürü Yardımcı Toeremi vermektedir.

Lemma 3.5. ***(S-Prosedürü Yardımcı Teoremi) [56]***
$x \in \mathbb{R}^n$ vektörü ile karesel fonksiyonlar $N_0(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $N_1(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verilmiş olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $N_0(x) \geq 0$ eşitsizliği ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ skaleri mevcut ise, $N_1(x) \geq 0$ eşitsizliği geçerli olur.

$$N_0(x) - \lambda N_1(x) \geq 0 \tag{3.87}$$

İspat. $\lambda N_1(x)$ ifadesi eşitsizlikte karşı tarafa gönderilir ise;

$$\underbrace{N_0(x)}_{\geq 0} \geq \underbrace{\lambda N_1(x)}_{\geq 0} \tag{3.88}$$

eşitsizliği elde edilir. $N_0(x)$ ve $N_1(x)$ hali hazırda pozitif yarı tanımlı olarak tanımlanmış idi. Bilinmeyen skaler için $\lambda \in \mathbb{R}^+$ uygun bir değer mevcut ve bulunabiliyor ise yarı tanımlı olarak modellenen bu eşitsizlik sağlanır. ■

Görüldüğü üzere bir karesel koşulun geçerli olması, bazı şartlar altında başka bir karesel koşulun geçerli olmasını da sağlayabilmektedir.

Bu doğrultuda Δ'nın iç dinamikleri önem arz etmeksizin kesin ve net olarak, belirsiz parametre Δ üzerine $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ koşulunun tanımlanması gerekmektedir [41].

Çünkü, $\|w\|_2 \leq \|v\|_2$ ifadesinin $\forall t \geq 0$ olarak tanımlandığı zaman aralığının her noktasında geçerli olup olmadığı, özellikle Δ'nın çeşitli iç dinamiklere sahip olması durumunda bilinememektedir. Fakat bu koşulun tanımlı olduğu zamandaki her nokta için sağlanmasına ihtiyaç da yoktur. Bu ifadenin tanımlı olduğu zaman aralığındaki her nokta için geçerli olup olmadığından ziyade $\mathscr{L}_2$ normu kullanılarak Δ'nın giriş ve çıkış sinyalleri olan $v(t)$ ve $w(t)$'nin arasındaki ilişki, enerji ifade edecek şekilde **integral** kullanılarak tanımlanabilir [42]:

$$\int_0^\infty w^{\mathrm{T}}(t) w(t)\, \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty v^{\mathrm{T}}(t) v(t)\, \mathrm{d}t \tag{3.89}$$

Tanım 3.19. Tümleşik karesel kısıtlar, bir sistemde mevcut bulunan çeşitli sinyaller arasındaki ilişkileri ifade etme amacıyla kullanılan, integral formunda ve karesel olarak tanımlanan eşitsizliklerdir [41].

TKK'ler, sistemlerde bulunan modellenmesi zor (belirsiz, zaman gecikmeli, zamanla değişen, doğrusal olmayan v.b) elemanların modellenmesini, bu elemanların giriş ve çıkışları arasında çeşitli ilişkiler tanımlayarak basitleştirmekte, bu şekilde de

dayanıklılık *(İng: robustness)* analizi ve kontrolör tasarımı gibi konularda oldukça önemli bir araç olmaktadırlar.

(3.89)'da tanımlanan temel TKK koşulunu ele alınsın. Bu ifadeyi daha güçlü bir varsayım haline getirmek amacı ile ilgili ifadede $t \in [0, \infty]$ zaman aralığında tanımlanan integral, $t \in [0, \tau]$ gibi sınırlı bir zaman aralığında tanımlanmalıdır.

Tanım 3.20. (Nedensellik): Nedensellik, *(İng: causality)*, bir durumun sadece geçmişine bağlı olarak gerçekleşebiliyor olması, yani sadece geçmişinde yaşanan bir etki sebebi ile gerçekleşebilmesini tanımlar.

Tanım 3.21. N genel sistemine $\mathcal{F}_u(N, \Delta)$ şeklinde bağlı olan eleman Δ, nedensel *(İng: causal)* bir eleman olup $\forall \tau \geq 0$ için $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ koşulunu sağlıyor ise aşağıdaki TKK sağlanır [42]:

$$\int_0^\tau w^{\mathrm{T}}(t) w(t)\, \mathrm{d}t \leq \int_0^\tau v^{\mathrm{T}}(t) v(t)\, \mathrm{d}t \tag{3.90}$$

İspat. İspat nedensellik ilkesine dayanmaktadır. (3.89) ile ifade edilen ve $t \in [0, \infty]$ zaman aralığında tanımlanan integral koşulu sağlandığı takdirde $t \in [0, \infty]$ zaman aralığının içinde kalan, yani daha geçmişinde olan bir $t \in [0, \tau]$ zaman aralığında ifade edilen integral koşulu (3.90) da sağlanır. ■

Teorem 3.6. *$V(x(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(x(t) = x^{\mathrm{T}}(t) P x(t)$ olarak tanımlanan bir Lyapunov fonksiyonu olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $P \in \mathbb{S}^n$, $P > 0$ matrisi ile $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ve $\gamma \in \mathbb{R}^+$ skalerleri var olması halinde $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ koşulunu sağlayan her bir Δ, genel sistemin performans çıkışı için $\|e\|_2 \leq \gamma \|d\|_2$ koşulunu sağlar:*

$$\dot{V}(x(t)) + \lambda(v^{\mathrm{T}}(t) v(t) - w^{\mathrm{T}}(t) w(t)) \leq \gamma^2 d^{\mathrm{T}}(t) d(t) - e^{\mathrm{T}}(t) e(t) \tag{3.91}$$

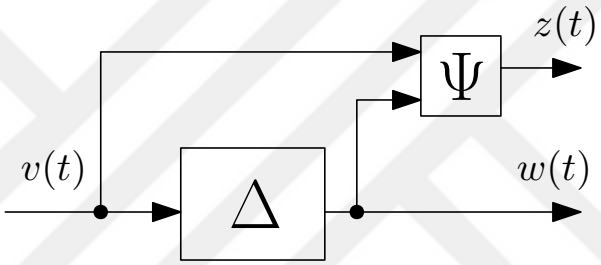
İspat. (3.90) ifadesindeki integralin alınması ile $v^{\mathrm{T}}(t) v(t) - w^{\mathrm{T}}(t) w(t) \geq 0$ ifadesi elde edilir. Bu ifade, S-Prosedürü Yardımcı Teoremi kullanılarak sistemin performansını H_∞ normu ile tanımlayan ifade (3.41)'e eklenir ise sonuç olarak (3.91) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Mevcut aşamada hala belirsiz parametre Δ'nın giriş ve çıkış sinyalleri arasındaki $\mathcal{L}_2$ normu koşulu $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ haricinde herhangi bir dinamik ifade edilmemiştir. Bu amaç doğrultusunda Δ'nın giriş ve çıkış sinyalleri arasında çeşitli dinamikler tanımlayabilmek amacı ile Teorem 3.6'da tanımlanan TKK, Δ için çeşitli iç dinamikler de içerebilecek şekilde genelleştirilebilir.

Tanım 3.22. (Tümleşik Karesel Kısıt): Simetrik matris $M \in \mathbb{S}^n$ ve kararlı bir dinamik sistem ifade eden Ψ sistemi olsun. $\forall \tau \geq 0$ ve $w = \Delta(v)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerli ise, nedensel ve sınırlı belirsiz eleman Δ, $IQC(\Psi, M)$ olarak ifade edilen TKK'yı sağlar [42]:

$$\int_0^\tau z^{\mathrm{T}}(t) M z(t)\, \mathrm{d}t \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.92}$$

Burada $z(t)$, $z(t) = \begin{bmatrix} v(t) & w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ olarak ifade edilen ve belirsiz parametre Δ'nın girişi ile çıkışı arasında tanımlanan $IQC(\Psi, M)$ TKK'sını sağlayan genişletilmiş durum vektörüdür. M ise Δ'nın giriş ve çıkış sinyalleri arasındaki dinamiği tanımlamakta olup, blok diyagramında kararlı Ψ sistemi ile ifade edilmiş ve $z(t)$'ye göre uygun boyutlu bir matris olarak tanımlanmıştır. Bu yöntem ile genel formunda tanımlanan TKK'yı ifade eden sistem yapısı, Şekil 3.7 ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:



Şekil 3.7 TKK'nın blok diyagramı ile ifadesi

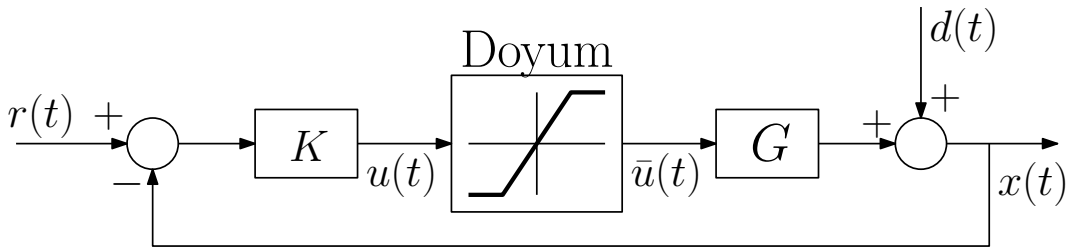
Teorem 3.7. ***(Genel Formda Tümleşik Karesel Kısıtlar):*** *$V(x(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(x(t) = x^{\mathrm{T}}(t) P x(t)$ olarak tanımlanan bir Lyapunov fonksiyonu olsun. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $M \in \mathbb{S}^n$ ve $P \in \mathbb{S}^n$, $P > 0$ matrisi ile $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ve $\gamma \in \mathbb{R}^+$ skalerleri mevcut olması halinde (3.92)'i sağlayan her bir Δ, sistemin performans çıkışı için $\|e\|_2 \leq \gamma \|d\|_2$ koşulunu sağlar [42]:*

$$\dot{V}(x(t)) + \lambda z^{\mathrm{T}}(t) M z(t) \leq \gamma^2 d^{\mathrm{T}}(t) d(t) - e^{\mathrm{T}}(t) e(t) \tag{3.93}$$

İspat. Teorem 3.6 ile aynı şekilde elde edilir. ■

Burada Δ'nın dinamiklerini daha net bir şekilde ifade etmek amacı ile geriye kalan tek adım, M'nin uygun bir şekilde belirlenmesidir. Bu amaç doğrultusunda TKK'leri modellemek için çeşitli modelleme yöntemleri mevcuttur. İlk adım olarak, belirsiz parametrenin fiziksel karşılığı üzerinden çıkarımlar yapılarak sistemden bu belirsiz parametrenin DKG ile nasıl ayrılacağı belirlenmelidir. Daha sonra DKG ile ayrılan Δ'nın davranışı net bir şekilde belirlenip, ifade ettiği fonksiyonu sağlayan dinamik koşullar doğrultusunda M belirlenmelidir.

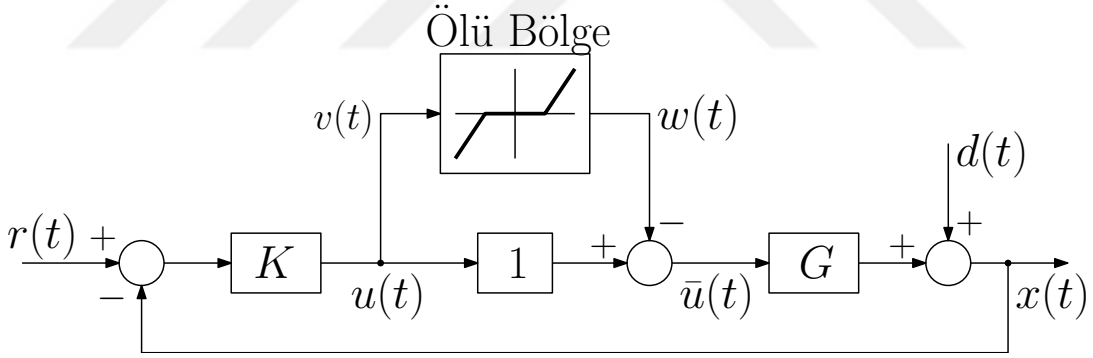
Şekil 3.8'de gösterilen durum geri beslemeli ve eyleyici genliği doyumlu sistem ele alınsın:



Şekil 3.8 Durum geri beslemeli ve eyleyici genliği doyumlu sistemin blok diyagramı

Burada $r(t)$ referans sinyali, K kontrolör kazancı, G ele alınan dinamik sistem, $u(t)$ saf kontrol sinyali, $\bar{u}(t)$ genlik doyumlu kontrol sinyali, $d(t)$ sistemin bozucu girişi ve $x(t)$ ise sistemin durumlarıdır.

Görüldüğü üzere eyleyici genliği doyumu bu sistemin doğrusallığı ve DKG kullanılarak ana sistemden bir şekilde döngü ile ayrılması gerekmektedir. Bu doğrultuda, yukarıdaki sistem üzerinde yapılacak küçük bir değişiklik ile doyum fonksiyonu yerine saf kontrol sinyali ve bir **ölü bölge** *(İng: deadzone)* fonksiyonunun ileri besleme döngüsü DKG yöntemi kullanılarak Şekil 3.9 ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir::



Şekil 3.9 DKG uygulanarak düzenlenmiş sistemin blok diyagramı

Burada aynı şekilde $r(t)$ referans sinyali, K kontrolör kazancı, G ele alınan dinamik sistem, $u(t)$ saf kontrol sinyali, $\bar{u}$ genlik doyumlu kontrol sinyali, $d(t)$ sistemin bozucu girişi ve $x(t)$ ise sistemin durumları olmakla birlikte $v(t)$ ve $w(t)$ sinyalleri ise ölü bölge fonksiyonun sırası ile girişi ve çıkışını ifade etmektedir.

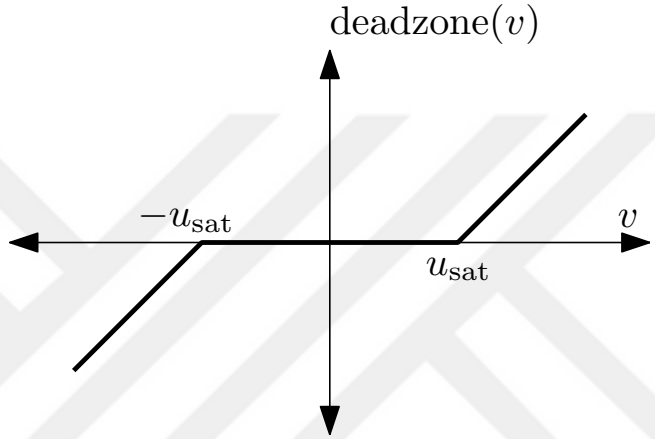
Bu doğrultuda, ölü bölge fonksiyonunun girişi $v(t)$'nin $u(t)$ ile eşdeğer olarak ifade edildiği göz önüne alınarak sistemin eyleyici genliği doyumlu kontrol sinyali $\bar{u}$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\bar{u}(t) = v(t) - w(t) \tag{3.94}$$

Tanım 3.23. Ölü Bölge: Ölü bölge fonksiyonu *(İng: deadzone veya deadband)*, belirli bir aralıkta giriş aldığında çıkış olarak sıfır veren bir fonksiyondur. Bu çalışmada, birinci açıortay doğrusundan doyum fonksiyonunu çıkarılması ile elde eilen ölü bölge fonksiyonu matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\text{deadzone}(v) = \begin{cases} 0 & : |v| \leq u_{\text{sat}} \\ v - u_{\text{sat}}\text{sgn}(v) & : |v| > u_{\text{sat}} \end{cases} \tag{3.95}$$

Ölü bölge fonksiyonu görsel olarak da Şekil 3.10 ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:



Şekil 3.10 Ölü bölge fonksiyonunun görsel ifadesi

TKK'lerin uygun bir şekilde kullanılabilmesi için ilk olarak ele alınan ana sistemin modelinin çok iyi bilinmesi, ikinci olarak ise bu ana model üzerinde belirsiz eleman ile tanımlanacak TKK'nın mümkün olduğu kadar gerçekçi bir şekilde modellenebilmesi gerekmektedir.

Mevcut durumda, DKG ile ana sistemden ayrılan Δ, ölü bölge fonksiyonu olarak tanımlandığı için artık Δ'nın dinamikleri hakkında net bir tanım yapmak mümkündür. Bu doğrultuda, Δ'nın girişi olan $v(t)$'ye bağlı olarak tanımlanan ölü bölge fonksiyonunu kapsayacak şekilde iki doğru ile sınırlanan bir **sektör sınırlı** *(İng: norm-bounded)*, hafızasız yani çıkışı sadece o anki girişine bağlı bir kısıt tanımlanabilir.

Tanım 3.24. (Sektör Sınırı) *(İng: norm bound)*: Belirsiz parametre Δ için yapılan $\Delta(0) = 0$ ve $\dot{\Delta}(v) \in [\alpha, \beta]$ için tanımlar doğrultusunda, $w(t)$ sinyalini $w = \Delta(v)$ olarak tanımlayan $\Delta(v)$ fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdaki eşitsizlik geçerli ise her zaman $w(t) = \alpha v(t)$ ve $w(t) = \beta v(t)$ doğruları arasında kalır [46].

$$(w(t) - \alpha v(t))(\beta v(t) - w(t)) \geq 0 \tag{3.96}$$

Burada, belirsiz Δ elemanının çıkış sinyali $w(t)$'nin, uygun α ve β değerlerinin sağlanması ile $\forall v(t) \in \mathbb{R}^n$ için (3.96) ile tanımlanan sektör sınırının içinde kalması sağlanıyor ise bu sektör sınırı mevcut TKK'yi modellemek için başarı ile kullanılabilir.

(3.96) ifadesi aynı zamanda aşağıdaki ifadeye eşdeğerdir:

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -2\alpha\beta & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \geq 0 \tag{3.97}$$

Bu ifade $\forall t \geq 0$ için her zaman noktasında geçerli olmalıdır. Bu doğrultuda yukarıdaki ifade $t \in [0, \tau]$ zaman aralığında tanımlı bir integral olarak yazılabilir:

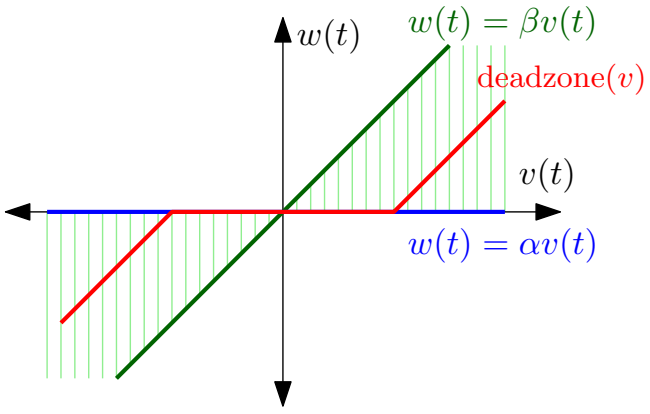
$$\int_0^{\tau} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -2\alpha\beta & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}t \geq 0 \tag{3.98}$$

TKK'nin genel tanımı incelendiğinde bu ifadenin birebir olarak aynı formda bir TKK ifade ettiği oldukça açıktır. Burada ek olarak dikkat edilmesi gereken küçük bir konu bulunmaktadır: Bu ifaden $\forall t \geq 0$ için her zaman noktasında geçerli olduğundan dolayı $t \in [0, \tau]$ zaman aralığında tanımlı bir integral olarak da ifade edildiğinde de geçerlidir, fakat bunun tam tersi her zaman doğru olmayabilir. Sonuç olarak,

$$\Psi = I, \quad \text{ve} \quad M = \begin{bmatrix} -2\alpha\beta & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & -2 \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

tanımları elde edilir. Bu çalışmada tanımlanan ölü bölge fonksiyonunu sınırları arasında tutacak hafızasız *(İng: memoryless)* sektör, Şekil 3.11'te görüldüğü şekilde $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ parametreleri ile tanımlanır ise M matrisi aşağıdaki şekilde son halini alır:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-2}{\beta} \end{bmatrix} \tag{3.100}$$



Şekil 3.11 Ölü bölge fonksiyonunu sınırları arasında tutan sektör sınırı

3.9 TKK Tabanlı Eyleyici Genliği Doyumlu H_∞ Kontrolör Tasarımı

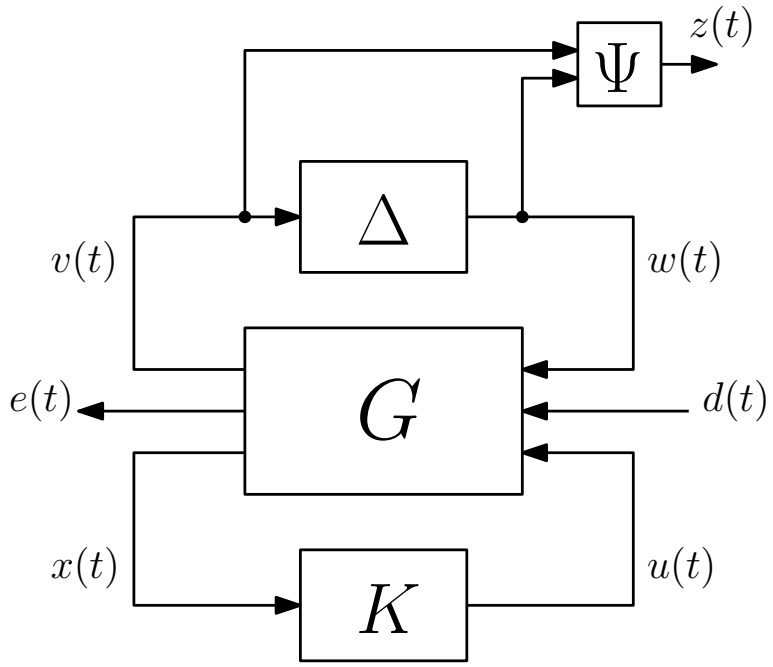
3.9.1 Sistem Yapısı

$$G\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 d(t) + B_2 w(t) + B_3 u(t) \\ e(t) = C_1 x(t) + D_{11} d(t) + D_{12} w(t) + D_{13} u(t) \\ v(t) = C_2 x(t) + D_{21} d(t) + D_{22} w(t) + D_{23} u(t)\end{cases} \tag{3.101}$$

Şekil 3.12 ile blok diyagramı yapısı da verilen G sisteminde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ durum vektörü, $d(t) \in \mathbb{R}^m$ bozucu giriş vektörü, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ ve $w(t) \in \mathbb{R}^p$ sırası ile belirsiz eleman Δ'nın giriş ve çıkış vektörü, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ kontrol giriş vektörü, $e(t) \in \mathbb{R}^n$ ise sistemin performans çıkış vektörü ve $z(t) \in \mathbb{R}^{p+q}$ ise $IQC(G, \Delta)$ TKK'sını tanımlayan kararlı dinamik sistem Ψ'nin genelleştirilmiş çıkış vektörüdür.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sistem matrisi, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ bozucu giriş matrisi, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ belirsiz eleman Δ'nın G sistemi üzerindeki giriş matrisi, $B_3 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ise kontrol giriş matrisidir. $C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genel sistemin performans çıkış matrisi, $C_2 \in \mathbb{R}^{q\times n}$ ise belirsiz eleman Δ'nın performans çıkış matrisidir.

Not: $u(t) = v(t)$ olarak tanımlandığı için C_2, D_{21} ve D_{22} matrisleri sıfır ve $D_{23} = I$ olacaktır. Bunun yanında, bu çalışmada ele alınan sistemde ileri besleme olmadığı için D_{11}, D_{12} ve D_{13} matrisleri de sıfır olacaktır. Bu matrislerin değerleri, kontrolör sentezinde direkt olarak yerlerine yazılarak elde edilen DME'yi sadeleştirme amacıyla kullanılacaktır.



Şekil 3.12 Belirsiz eleman Δ'yı DKG ile tanımlayan durum geri beslemeli kapalı çevrim sistemin genel yapısı [42]

3.9.2 Problem Tanımı

Tanım 3.25. (TKK Tabanlı Eyleyici Genliği Doyumlu H_∞ Kontrol Problemi): TKK tabanlı eyleyici genliği doyumlu H_∞ kontrolör tasarım problemi, matematiksel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{Koşullar:} \quad & G \text{ sistemi (3.101)}, \\ & \text{Kontrol koşulu (3.103)} \\ & X \in \mathbb{S}^n,\ X \geq 0, \\ & L \in \mathbb{R}^{p \times n}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Verilen koşullar altında G sisteminin asimptotik kararlı kılınması, $\|G\|_\infty \leq \gamma$'yı sağlayan γ'nın en küçük değerine indirgenmesi ve eyleyici genliği doyumunu modellemek amacıyla DKG ile sistemden döngü ile Δ olarak ayrılan ölü bölge fonksiyonu ile tanımlanan $IQC(\Psi, G)$ (3.108) TKK koşulunun sağlanmasıyla birlikte bu koşulları sağlayan kontrolör kazancı K'nın hesaplanması ile bu problem çözülür.

3.9.3 Yöntem

Tanım 3.25'de ifade edilen TKK tabanlı eyleyici genliği doyumlu H_∞ kontrol probleminin çözüm yöntemi olarak aşağıdaki adımlar sırası ile izlenerek uygulanmalıdır:

1. Sistemdeki mevcut eyleyici genliği doyumu, DKG yöntemi ile ana sistemden bir döngü ile ayrılarak belirsiz eleman Δ şeklinde modellenir.
2. Δ'yı ifade eden fonksiyon *ölü bölge* fonksiyonu olarak modellendikten sonra ilk Δ'nın giriş ve çıkışı arasındaki $H_\infty 2$ normu koşulu tanımlanır. Daha sonra, ölü bölge fonksiyonundan istenen sonuçlar doğrultusunda bu fonksiyonun eğrisini tüm girişler için belirli iki doğru arasında tutacak sektör kısıtı tanımlanır. Bu şekilde Δ'yı ifade eden TKK tanımlanmış olur.
3. Durum geri beslemesi ile kontrol edilen kapalı çevrim sistem için sistemin asimptotik kararlılığını garanti eden ve performans koşulunu (H_∞ normu) tanımlayan eşitsizlik elde edilir.
4. S-Prosedürü Yardımcı Teoremi doğrultusunda (2. Adım) ve (3. Adım) ile elde edilen kısıtlar tek bir eşitsizlik halinde toplanıp DME formunda elde edilir.
5. Model sebebi ile değeri 0 ve I olan matrisler, DME'de yerine konularak DME sadeleştirilir.

6. Elde edilen sadeleştirilmiş DME'deki doğrusal olmayan çarpım elemanlarını yok etmek için Kongrüans Dönüşümü uygulanır ve arkasından gerekli değişken dönüşümleri yapılır.

7. Elde edilen DME üzerinde, gerekirse birden fazla defa ifadeyi düzenlemeye izin verecek şekilde uygun olarak Schur Tümleyeni uygulanır ve DME'nin son hali elde edilir.

8. Elde edilen DME'nin çözülüp bu koşulları sağlayan kontrolör kazancı K'nın hesaplanması ile problem çözülür.

3.9.4 Kontrolör Sentezi

Teorem 3.8. ***(TKK Tabanlı Eyleyici Genliği Doyumlu H_∞ Kontrolör Tasarımı):*** *(3.101) ile tanımlanan G sistemi verilmiş olsun. Matris değişkenleri $X \in \mathbb{S}^n$, $X > 0$ ve $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$ için aşağıdaki DME'yi sağlayan $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ve $\gamma \in \mathbb{R}^+$ skalerleri mevcut ise G sistemi asimptotik kararlıdır ve $\|G\|_\infty < \gamma$ koşulu sağlanır.*

$$\begin{bmatrix} XA^{\mathrm{T}} + AX + B_3L + L^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}} & B_2 + \lambda L^{\mathrm{T}} & B_1 \\ * & -I & 0 & 0 \\ * & * & \frac{-2\lambda}{\beta} I & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.103}$$

Burada G sisteminin H_∞ normu, (3.103)'ü sağlayan en küçük $\gamma \in \mathbb{R}^+$ değeridir. İlgili kontrolör kazancı ise $K = LX^{-1}$ olarak hesaplanır.

İspat. $u(t) = Kx(t)$ durum geri beslemeli kontrol kuralı doğrultusunda, (3.101)'de ifade edilen durum uzay denklemleri aşağıdaki şekilde düzenlenebilir:

$$G \begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{(A + B_3)}_{\tilde{A}} x(t) + B_1 d(t) + B_2 w(t) \\ e(t) = \underbrace{(C_1 + D_{13}}_{\tilde{C}_1} x(t)) + D_{11} d(t) + D_{12} w(t) \\ v(t) = \underbrace{(C_2 + D_{23})}_{\tilde{C}_2} x(t) + D_{21} d(t) + D_{22} w(t) \end{cases} \tag{3.104}$$

Δ'ya tanımlanan kısıt koşulunu sağlayan $z(t)$ çıkışı ve tersçaprazı $z^{\mathrm{T}}(t)$ ise aşağıdaki

şekilde ifade edilebilir:

$$z = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_2 & D_{21} & D_{22} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \\ w \end{bmatrix}$$
$$z^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} v^{\mathrm{T}} & w^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} & d^{\mathrm{T}} & w^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ D_{21}^{\mathrm{T}} & 0 \\ D_{22}^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

(3.93)'te Lyapunov fonksiyonunun türevi $\dot{V} = \dot{x}^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\dot{x}$ olarak yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\underbrace{\dot{x}^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\dot{x}}_{1} + \underbrace{\lambda z^{\mathrm{T}}Mz}_{2} + \underbrace{e^{\mathrm{T}}e}_{3} - \underbrace{\gamma^2 d^{\mathrm{T}}d}_{4} \leq 0 \tag{3.106}$$

Elde edilen ifade, işlemlerin düzenli olması amacı ile 4 ayrı elemana bölünüp her bir eleman için işlemler ayrı olarak gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} ① &= (\bar{A}x + B_1 d + B_2 w)^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P(\bar{A}x + B_1 d + B_2 w) \\ &= x^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}}Px + d^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}Px + w^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\bar{A}x + x^{\mathrm{T}}PB_1 d + x^{\mathrm{T}}PB_2 w \\ &= \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} \\ d^{\mathrm{T}} \\ w^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} & PB_1 & PB_2 \\ B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 \\ B_2^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.107}$$

$$② = \lambda \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} \\ d^{\mathrm{T}} \\ w^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \bar{C}_2^{\mathrm{T}} & 0 \\ D_{21}^{\mathrm{T}} & 0 \\ D_{22}^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-2}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_2 & D_{21} & D_{22} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \\ w \end{bmatrix} \tag{3.108}$$

$$③ = \begin{bmatrix} x^{\mathrm{T}} \\ d^{\mathrm{T}} \\ w^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \bar{C}_1^{\mathrm{T}} \\ D_{11}^{\mathrm{T}} \\ D_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & D_{11} & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \\ w \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

$$④ = \gamma^2 d^{\mathrm{T}}d \tag{3.110}$$

Bu ifadelerin toplanması ile ortaya çıkan ifade, genelleştirilmiş durum vektörünün $\xi = [x\ d\ w]^{\mathrm{T}}$ olarak seçilmesi ile $\xi^{\mathrm{T}}(t)\Omega\xi(t) < 0$ olarak yazılabilir. Bu durumda $\Omega < 0$ ifadesine denk olan DME, önceden tanımları yapılan $\bar{A} = A + B_3K$, $\bar{C}_1 = C_1 + D_{13}K$ ve

$\bar{C}_2 = C_2 + D_{13}K$ ifadeleri tekrar açılıp yerine konulduğunda aşağıdaki halini alır:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & PB_1 + C_1^{\mathrm{T}}D_{11} + K^{\mathrm{T}}D_{13}^{\mathrm{T}}D_{11} & PB_2 + C_1^{\mathrm{T}}D_{12} + K^{\mathrm{T}}D_{13}^{\mathrm{T}}D_{12} + \lambda C_2^{\mathrm{T}} + \lambda K^{\mathrm{T}}D_{23}^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I + D_{11}^{\mathrm{T}}D_{11} & D_{11}^{\mathrm{T}}D_{12} + \lambda D_{21}^{\mathrm{T}} \\ * & * & D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12} + \lambda D_{22}^{\mathrm{T}} + \lambda D_{22} + \frac{-2\lambda}{\beta} I \end{bmatrix} < 0$$
$$\Omega_{11} = A^{\mathrm{T}}P + K^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}}P + PA + PB_3K + C_1^{\mathrm{T}}C_1 + C_1^{\mathrm{T}}D_{13}K + K^{\mathrm{T}}D_{13}^{\mathrm{T}}C_1 + K^{\mathrm{T}}D_{13}^{\mathrm{T}}D_{13}K \tag{3.111}$$

Bu ifadede bulunan C_2, D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21}, $D_{22} = 0$ ve $D_{23} = 1$ matrislerinin değerleri yerine yazıldığında ifade aşağıdaki şekilde daha sade bir biçime indirgenir:

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + K^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}}P + PA + PB_3K + C_1^{\mathrm{T}}C_1 & PB_1 & PB_2 + \lambda K^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & \frac{-2\lambda}{\beta} I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.112}$$

Görüldüğü üzere elde edilen matris eşitsizliğinde ikisi de bilinmeyen matris olan K ve P'nin çarpımından oluşan elemanlar bulunmaktadır ve ifadeye mevcut durumu ile direkt olarak değişken dönüşümü yapılamamaktadır. Bu sebeple yukarıdaki matris eşitsizliğini sağından ve solundan $\mathrm{diag}(P^{-1}, I, I)$ ile çarpmak suretiyle uygulanan Kongrüans dönüşümü sonucu elde edilen eşitsizlikte $P = X^{-1}$ ve $L = KX$ şeklinde iki değişken dönüşümü uygulanır ise;

$$\Xi = \begin{bmatrix} XA^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}} + AX + B_3L + XC_1^{\mathrm{T}}C_1X & B_1 & B_2 + \lambda L^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & \frac{-2\lambda}{\beta} I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.113}$$

matris eşitsizliği elde edilir. Buradaki $XC_1^{\mathrm{T}}C_1X$ ifadesinden kurtulmak için ise Ξ matrisinin $\Xi(1,1)$, $\Xi(1,2)$, $\Xi(2,1)$ ve $\Xi(2,2)$ elemanlarının oluşturduğu 2×2'lik matrise, arka arkaya iki kez Schur Tümleyeni uygulanarak alternatif bir formda yazılabilir. İlk Schur Tümleyeni aşağıdaki şekilde uygulanır:

$$\begin{bmatrix} \Xi(1,1) & \Xi(1,2) \\ \Xi(2,1) & \Xi(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XA^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}} + AX + B_3L + XC_1^{\mathrm{T}}C_1X & B_1 \\ B_1^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$
$$= XA^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}} + AX + B_3L + XC_1^{\mathrm{T}}C_1X - B_1(-\gamma^2 I)^{-1}B_1^{\mathrm{T}}$$

Elde edilen bu ifade küçük bir düzenleme ile aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$XA^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}} + AX + B_3L - B_1(-\gamma^2 I)^{-1}B_1^{\mathrm{T}} - XC_1^{\mathrm{T}}(-I)^{-1}C_1X \tag{3.115}$$

Son olarak bu ifadeye tekrar Schur Tümleyeni uygulanır ise, Ξ matrisinin **yeni** $\Xi(1,1)$, $\Xi(1,2)$, $\Xi(2,1)$ ve $\Xi(2,2)$ elemanlarının oluşturduğu 2×2'lik matris aşağıdaki şekilde

yazılır:

$$\begin{bmatrix} \Xi_{yeni}(1,1) & \Xi_{yeni}(1,2) \\ \Xi_{yeni}(2,1) & \Xi_{yeni}(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XA^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}} + AX + B_3L - B_1(-\gamma^2 I)^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}} \\ C_1X & -I \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

Bu matris de ilk baştaki asıl Ξ matrisinde (3.113) tekrar yerine yazılır ise aşağıdaki DME elde edilir:

$$\Xi_{yeni} = \begin{bmatrix} XA^{\mathrm{T}} + L^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}} + AX + B_3L - B_1(-\gamma^2 I)^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}} & B_2 + \lambda L^{\mathrm{T}} \\ C_1X & -I & 0 \\ B_2^{\mathrm{T}} + \lambda L & 0 & \frac{-2\lambda}{\beta} I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.117}$$

Bu ifadeyi genişletilmek amacı ile son bir kez Schur Tümleyeni uygulanırsa, ilgili DME son halini alır:

$$\begin{bmatrix} XA^{\mathrm{T}} + AX + B_3L + L^{\mathrm{T}}B_3^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}} & B_2 + \lambda L^{\mathrm{T}} & B_1 \\ C_1X & -I & 0 & 0 \\ B_2^{\mathrm{T}} + \lambda L & 0 & \frac{-2\lambda}{\beta} I_n & 0 \\ B_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.118}$$

Böylece ispat tamamlanır. ■

4
SAYISAL BENZETİM ÇALIŞMALARI

Bu bölümde, ilk olarak sabit kanatlı bir hava aracının boylamsal uçuş dinamiğini ifade eden matematik modelin parametreleri için aerodinamik katsayılar ile hesaplanan kararlılık türevleri ve diğer çeşitli hareket değişkenleri kullanılarak sayısal değerler hesaplanacaktır. Bu doğrultuda benzetim çalışmasında kullanılmak üzere, tek motorlu ve dört kişilik hafif uçak Ryan Navion seçildi. Bu hava aracının ihtiyaç duyulan tüm parametreleri [49, 50] bu çalışmanın sonunda bulunan Ek A'da mevcuttur. Bu parametreler rüzgar tüneli testleri ve hesaplamalı akışkanlar dinamiği analizleri ile kapsamlı süreçler doğrultusunda hesaplanmış olup, elde edilme yöntemleri bu çalışmanın kapsamı dışındadır. Durum uzay matrislerinin yaklaşık deniz seviyesinde irtifada $u_0 = 54$ [m/s] denge seyir hızı için ele alınan aerodinamik parametreler kullanılarak hesaplanan sayısal değerleri:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -0.0454 & 1.9609 & 0 & -9.8066 & 0 \\ -0.0069 & -2.1652 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8.9246 & -2.0968 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -54 & 0 & 54 & 0 \end{bmatrix}, \\
B_1 &= \begin{bmatrix} -1.9609 & 2.1652 & 8.9246 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\
B_3 &= -B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1611 & -12.0606 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

şeklinde elde edilir. Matematik model sayısal olarak elde edildikten sonra, ilgili doğrusallaştırmalar sonucunda elde edilen DME'ler önceki bölümlerde açıklanan kontrolör sentezi süreçlerinde kullanılarak ilgili kontrolör kazançları hesaplanacaktır. Bu doğrultuda, bu çalışmada ele alınan üç kontrol yöntemi olan DKD, değişmez elipsoit tabanlı eyleyici genliği doyumlu H_∞ ve TKK tabanlı eyleyici genliği doyumlu H_∞ kontrol yöntemleri ile inşa edilen kontrolörler için sistem girişiyle performans çıkışı arasına tanımlanan H_∞ normları hesaplanacaktır.

Kontrolör kazançlarının hesaplanmasını takiben, elde edilen sistemler benzetim için

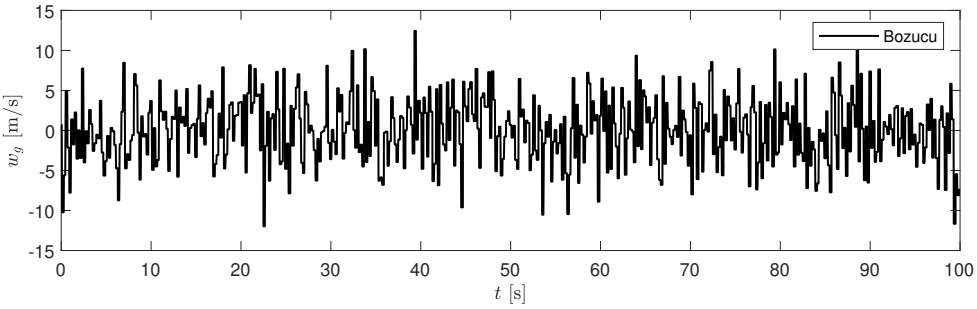
hazır hale gelmiş olmaktadır. MATLAB programlama dili kullanılarak benzetimi yürütmek için durum uzay denklemlerinin her bir zaman adımında integralini alarak benzetimi başlangıç zamanından bitiş zamanına doğru ilerleten bir program hazırlandı. Bu program ileri Euler yöntemine dayanmakta olup çalışma şekli kısaca aşağıdaki gibi açıklanabilir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= Ax_i + Bu_i \\ x_{i+1} &= x_i + \dot{x}_i \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.2}$$

Burada i iterasyon adımıdır. Bu değer, benzetim çalışmasının yürütüleceği zaman aralığının sonuna denk gelen değerini aldığı zaman benzetimi ilerleten döngü durur ve benzetim tamamlanır.

Benzetim çalışmasının yürütüleceği zaman aralığı $t \in [0, 100]$ [s], zaman adımı ise $\mathrm{d}t = 10^{-4}$ [s] olarak belirlendi.

Tüm benzetim senaryolarında sisteme atmosferik bozucu girişi olarak, Şekil 4.1'te görüldüğü üzere düşey eksen doğrultusunda yönü değişerek uçağa etki eden ve şiddeti maksimum 10 [m/s] olan beyaz gürültü şeklinde bir rüzgar uygulandı.



Şekil 4.1 Bozucu rüzgar girişi

Kontrolörlerin performans çıkışı matrisinin parametrelerinin belirlenmesinde belirleyici olan kriter, hangi sistem durumlarının ağırlıklı olarak kontrol edilmesi istendiği olmaktadır. Bu çalışmada ağırlıklı olarak kontrol edilmesi hedeflenen sistem durumu irtifa değişimi Δh'tır. Bu doğrultuda performans çıkışı matrisi C_1 (aynı zamanda DKD'de sistem durumlarının ağırlık matrisi olarak ifade edilen Q matrisi), geniş kapsamlı benzetim çalışmaları sonucunda $C_1 = \mathrm{diag}\{1, 10, 1, 2250, 20\}$ olarak tanımlandı. DKD'de bulunan 1×1 boyutundaki kontrol girişi ağırlık matrisi R ise $R = 30$ olarak tanımlandı. TKK tabanlı H_∞ kontrolör sentezide bulunan ve S-Prosedürü Yardımcı Teoremi sonucunda elde edilen Lagrange çarpanı λ ise yine benzetim çalışmaları sonucu genel sistemin H_∞ normunun en küçük değerini sağlayacak şekilde $\lambda = 8900$ olarak belirlendi.

Benzetim senaryosu olarak ise iki farklı durum analizi ele alındı. İlk durum analizinde

hava aracının kontrol girişi olan irtifa dümeni kontrol yüzeyinin, bu kontrol yüzeyinin gerçekleştirebildiği maksimum fiziksel yer değişimi olan $-20°$ ile $+20°$ arasında hareket edebileceği kabul edildi. İkinci durum analizinde ise, irtifa dümeninin herhangi bir sebeple ortaya çıkmış olan bir arızayı (örneğin eyleyici veya hidrolik tesisat arızası) temsil edecek şekilde $-3°$ ile $+3°$ derece gibi oldukça kısıtlı bir çalışma aralığında çalıştığı bir genlik doyumu tanımlandı.

Kontrol hedefi olarak, sisteme etki eden bozucunun sistemin beşinci durumu olan ve Şekil 2.7'de görsel olarak ifade edilen irtifa değişimi Δh üzerindeki etkilerinin minimum olacak şekilde bastırılması amaçlandı. Diğer dört sistem durumu olan ileri hız değişimi Δu, hücum açısı değişimi $\Delta \alpha$, yunuslama açısal hızı değişimi Δq ve yunuslama açısı değişimi $\Delta \theta$ için ise özel olarak bir iyileştirme hedeflenmezken yine de bu dört hareket değişkeninin uçuş güvenliğini tehlikeye atmayacak şekilde belirli sınırlar içinde kalıp kalmadığı kontrol edildi.

Uygulanan kontrolörlerin performansını değerlendirmek amacıyla çeşitli performans kriterleri ele alındı. Bu kriterler aşağıdaki şekilde maddeler halinde sıralanabilir:

- **Sistem Cevapları:** Her iki kontrol senaryosu için beş sistem durumu ve hesaplanan gerekli kontrol girişinin benzetim zamanı boyunca aldığı değerler grafikler üzerinden görsel olarak incelendi. Özel bir kontrol amacı hedeflenmeyen ilk dört sistem durumu olan ileri hız değişimi Δu, hücum açısı değişimi $\Delta \alpha$, yunuslama açısal hızı değişimi Δq ve yunuslama açısı değişimi $\Delta \theta$ değerlerinin benzetim zamanı boyunca uçuşu riske atmayacak sınırlar içinde kalıp kalmadığı kontrol edildi. 5. Sistem durumu olan irtifa değişimi Δh'ın mümkün olduğu kadar bastırılması ise bu çalışmanın kontrol hedefi olup bu durumUN zamana bağlı sistem cevaplarında iyileştirme gözlemlenmesi hedeflendi. Son olarak ise, TKK tabanlı H_∞ kontrol yönteminin en büyük motivasyonu ve en önemli hedefi olan sistem cevaplarını kötüleştirmeden kontrol girişini azaltma ve belirlenen genlik sınırları içinde tutma işleminin de kontrol girişinin zamana bağlı olarak çizdirilen grafiğinde gözlemlenmesi de öncelikli olarak hedeflendi.

- **H_∞ Normu:** Sistemin bozucu girişinden sistemin performans çıkışına tanımlanan H_∞ normu, sisteme etki eden bozucu giriş sinyalinin sistemin performans çıkışı üzerinde ne kadar güçlendirileceğini doğrudan ifade eden skaler bir sayı ve önemli bir performans kriteritir. Bu parametrenin en aza indirgenmesi öncelikli bir kontrol şartı olup TKK tabanlı H_∞ kontrol yöntemi ile kontrolsüz sistem ve diğer yöntemler ile kontrol edilen sistemlerden daha düşük bir değer elde edilmesi hedeflenmiştir.

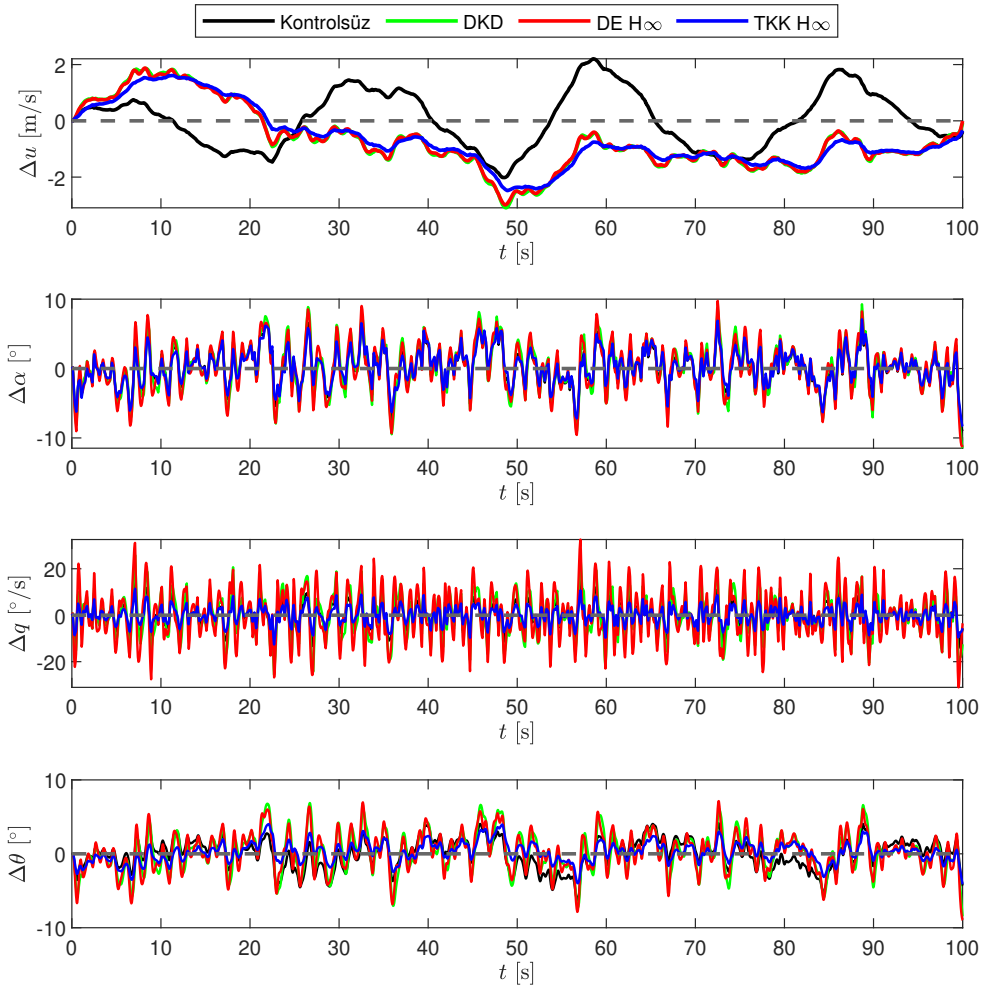
- **Modal Analiz ve Uçuş Kalitesi Eğrileri:** Hava aracının kısa periyot salınım modunun analitik yöntemler ile elde edilen sönüm oranı ve doğal frekans gibi değerleri, literatürde mevcut olarak bulunan uçuş kalitesi kriterleri ve eğrileri kullanılarak mühendisler ve araştırmacılar için anlamlı sonuçlar sağlayabilmektedir. Bu çalışmada temel alınan uçuş kalitesi eğrisi ve bu eğrinin hangi noktasında hava aracının ne tür bir uçuş karakteristiği gösterdiği Bölüm 2'de detaylı olarak açıklanmış olup, bu bölümde kontrolsüz ve tüm kontrollü durumlar için hava aracının kısa periyot salınımını ifade eden eşlenik kök çiftlerinin sönüm oranı ve doğal frekans değerleri, uçuş kalitesi eğrisinde işaretlenerek iyileştirme olup olmadığı ve bu değerlerin TKK tabanlı H_∞ kontrol yöntemi mümkün olan en iyi aralığa getirilip getirilemeyeceği incelendi.

4.1 Durum Analizi 1

İlk olarak, durum analizi 1 için hesaplanan kontrolör kazançları (4.3)'te gösterildiği şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} K_{DKD} &= \begin{bmatrix} -0.138 & 32.385 & -6.436 & -44.319 & -0.816 \end{bmatrix} \\ K_{DE\ H_\infty} &= \begin{bmatrix} 0.014 & -8.063 & 0.852 & 13.576 & 0.371 \end{bmatrix} \\ K_{TKK\ H_\infty} &= \begin{bmatrix} 0.879 & -889.761 & 295.923 & 1727.036 & 9.835 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

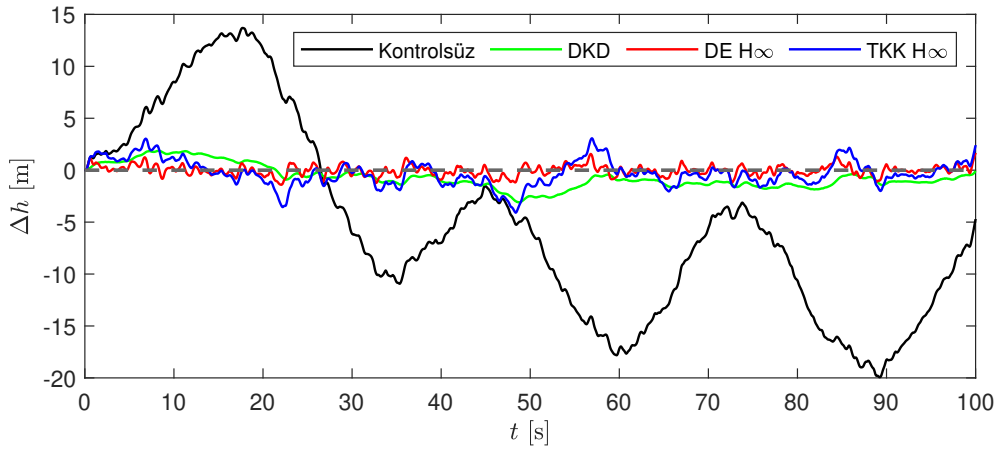
Burada K_{DKD} doğrusal karesel denetleyici kontrolör kazancını, $K_{DE\ H_\infty}$ değişmez elipsoit tabanlı eyleyici genliği doyumlu H_∞ kontrolör kazancını, $K_{TKK\ H_\infty}$ ise TKK tabanlı eyleyici genliği doyumlu H_∞ kontrolör kazancını ifade etmektedir.



Şekil 4.2 Durum analizi 1 için ilk dört durum Δu, $\Delta\alpha$, Δq ve $\Delta\theta$'nın zaman cevapları

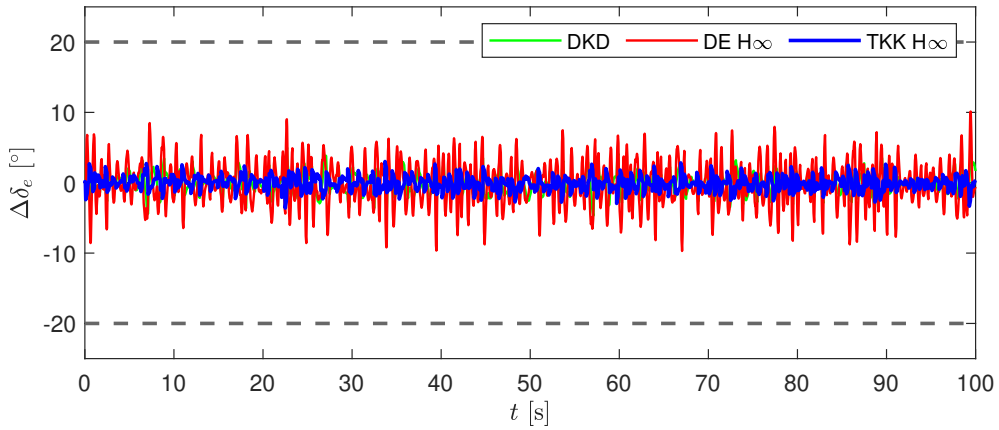
Durum analizi 1 için sistemin ilk dört durumu olan Δu, $\Delta\alpha$, Δq ve $\Delta\theta$'nın zaman cevapları Şekil 4.2 ile paylaşılmıştır. Burada sistemin ilk üç durumu olan ileri hız değişimi Δu, hücum açısı değişimi $\Delta\alpha$ ve yunuslama açısal hızı değişimi Δq incelendiğinde, yunuslama açısal hızı değişimi Δq haricinde kontrolsüz sistem cevaplarına kıyasla belirgin bir iyileştirme gözlemlenmemektedir. Bu durumlar için herhangi bir kontrol hedefi belirlenmediği önceden ifade edilmiş idi. Buna ek olarak, bu durumların uçuş güvenliğini tehlikeye atacak seviyelerde davranış göstermediği de rahatça söylenebilir. Örneğin, hava aracının ileri hız değişimi Δu düşük genlikte olmakta ve hücum açısı değişimi $\Delta\alpha$ ise trim koşulunda düşük bir hücum açısı ile uçan bu hava aracını stole sokacak seviyede bir risk teşkil etmemektedir. Burada hücum açısı α ile ilgili bir özellikten bahsetmek faydalı olacaktır: Sistemin bozucu girişi olan düşey eksendeki rüzgar, sisteme direkt olarak bozucu hücum açısı girişi α_g olarak etki ettiği için bu durum sistemin hücum açısı değişimi $\Delta\alpha$ cevabında gözlemlenmektedir

ve bu sebeple hücum açısı üzerinde aşırı agresif kontrol uygulanmaya çalışılması diğer sistem cevaplarında istenmeyen tepkilere yol açabilmektedir. Sistemin dördüncü durumu olan yunuslama açısı değişimi $\Delta\theta$'nın zaman cevabı incelendiğinde, DKD ve değişmez elipsoit tabanlı H_∞ kontrolörde yer yer aşım yapıldığı ve bu tezin konusu olan TKK tabanlı H_∞ kontrolörün ise kontrolsüz ve diğer yöntemler ile kontrol edilen sistemlere kıyasla sağladığı daha düşük genlikte zaman cevapları ile üstün olduğu görülmektedir. Burada gözlemlenen aşımların sebebi, aracın normalde irtifa dümeni kontrol yüzeyine ek olarak motor itkisi şeklinde ikinci bir kontrol girişi ile birlikte kontrol edilmesi, fakat motor itkisinin bu çalışmada sabit olarak alınmış olmasıdır. Önceki bölümlerde bahsedilen boylamsal dinamiğin kısa ve uzun periyot modları, bu iki kontrol girişi ile direkt olarak ilişkilidir. Motor itkisinin sistemin kontrolüne etkisi, sistemin uzun periyot modu ve bu modun karakteristiğini ağırlıklı olarak tanımlayan aracın ileri hızı u ve yunuslama açısı θ'da gözlenlenir. Özetle, bu iki durumda belirgin bir iyileşme gözlemlenememesinin sebebi, sistemde motor itkisi dinamik bir kontrol girişi olarak ele alınmaması ve sabit olarak varsayılmasıdır.



Şekil 4.3 Durum analizi 1 için irtifa değişimi Δh'ın zaman cevapları

Şekil 4.3'te zaman cevabı paylaşılan ve kontrol edilmesi hedeflenen sistem durumu olan irtifa değişimi Δh'ın zaman cevabı incelendiğinde ise, kontrol edilen tüm sistemlerin, kontrolsüz sisteme göre çok belirgin bir şekilde üstün geldiği görülmektedir.



Şekil 4.4 Durum analizi 1 için irtifa dümeni kontrol girişi $\Delta\delta_e$

Şekil 4.4 ise durum analizi 1'de üç farklı kontrolör için yukarıda paylaşılan sistem cevaplarını sağlayan kontrol girişlerini göstermektedir. Burada mevcut bozucu rüzgar şiddeti ve kontrol girişinin genlik sınırı olan ±20° ele alındığında görülmektedir ki, üç kontrol yönteminde de kontrol giriş sinyali genlik doyumuna girmemektedir. TKK tabanlı H_∞ kontrolörün hedeflenen en önemli performans kriterlerinden biri ise sağlanmaktadır: TKK tabanlı H_∞ kontrolör, kontrolsüz sistem ve diğer kontrol yöntemleri ile aynı veya daha iyi sistem cevaplarını çok belirgin bir şekilde daha az kontrol girişi ile sağlamaktadır. Bu şekilde, bu kontrol girişini fiziksel olarak sağlayan eyleyici daha az enerji harcayacaktır. Ek olarak, gerçek hayatta bu eyleyicinin aynı zamanda hareket hızının üstünde de fiziksel kısıtlar olduğu düşünüldüğünde, daha düşük genlikli kontrol girişi ile bu eyleyici kontrol giriş sinyalinin hızı üzerindeki doyum kısıtlarından daha az etkilenecektir, çünkü denge noktası etrafında daha az genlikli salınımlar yaptığı için bir noktadan diğer bir noktaya daha hızlı bir şekilde ulaşacaktır.

Durum analizi 1'de kontrolsüz ve üç farklı yöntem ile kontrol edilen sistemler için Tablo 4.1'de paylaşılan H_∞ normları incelendiğinde, TKK tabanlı H_∞ kontrolör ile kontrol edilen sistemin en düşük H_∞ normuna sahip görülmektedir ve bu değer **mavi renk** ile işaretlenmiştir.

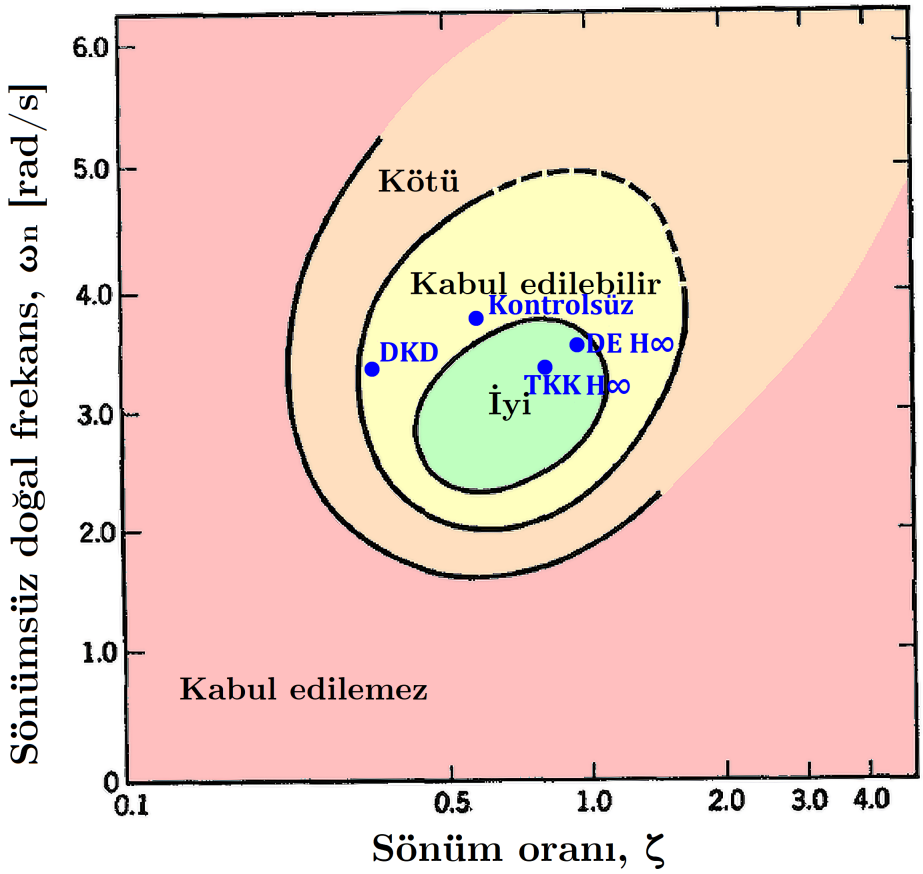
Tablo 4.1 Tüm sistemlerin durum analizi 1 için H_∞ normu

Sistem	**H_∞ Normu**
Kontrolsüz	1.277×10^7
DKD	Hesaplanmadı
DE H_∞	7.718×10^3
TKK H_∞	$\mathbf{3.048 \times 10^3}$

Son olarak ise, uçuş kalitesi eğrileri üzerinden yorum yapabilmek amacı ile tüm sistemlerin kısa periyot salımının sönüm oranı ve doğal frekans özellikleri Tablo 4.2'de gösterildi. İlgili değerler Bölüm 2'de detaylı olarak açıklanan uçuş kalitesi eğrisinde işaretlendi. Tablo 4.2'de elde edilen veriler ve bu verilerin Şekil 4.5'teki uçuş kalitesi eğrileri üzerindeki görsel ifadesi ışığında sonuç olarak görülmektedir ki, kontrolsüz ve DKD ile kontrol edilen sistem "kabul edilebilir" sınırlar içerisinde yer alırken değişmez elipsoit tabanlı H_∞ ve TKK tabanlı H_∞ kontrolör ile kontrol edilen sistemler "iyi" sınırları içinde yer almaktadır ve bu konuda da iyileştirme sağlanmıştır.

Tablo 4.2 Tüm sistemlerin durum analizi 1 için kısa periyod hareket modu karakteristik özellikleri

Sistem	**İlgili Kök Çifti**	**Sönüm Oranı, ζ**	**Doğal Frekans, ω_n [rad/s]**
Kontrolsüz	$-2.14 \pm 2.99i$	0.582	3.67
DKD	$-1.31 \pm 3.07i$	0.391	3.34
DE H_∞	$-3.07 \pm 1.82i$	0.860	3.57
TKK H_∞	$-2.31 \pm 2.34i$	0.704	3.29



Şekil 4.5 Durum analizi 1 için tüm sistemlerin kısa periyot salınım modlarının uçuş kalitesi eğrisi üzerinde gösterimi

4.2 Durum Analizi 2

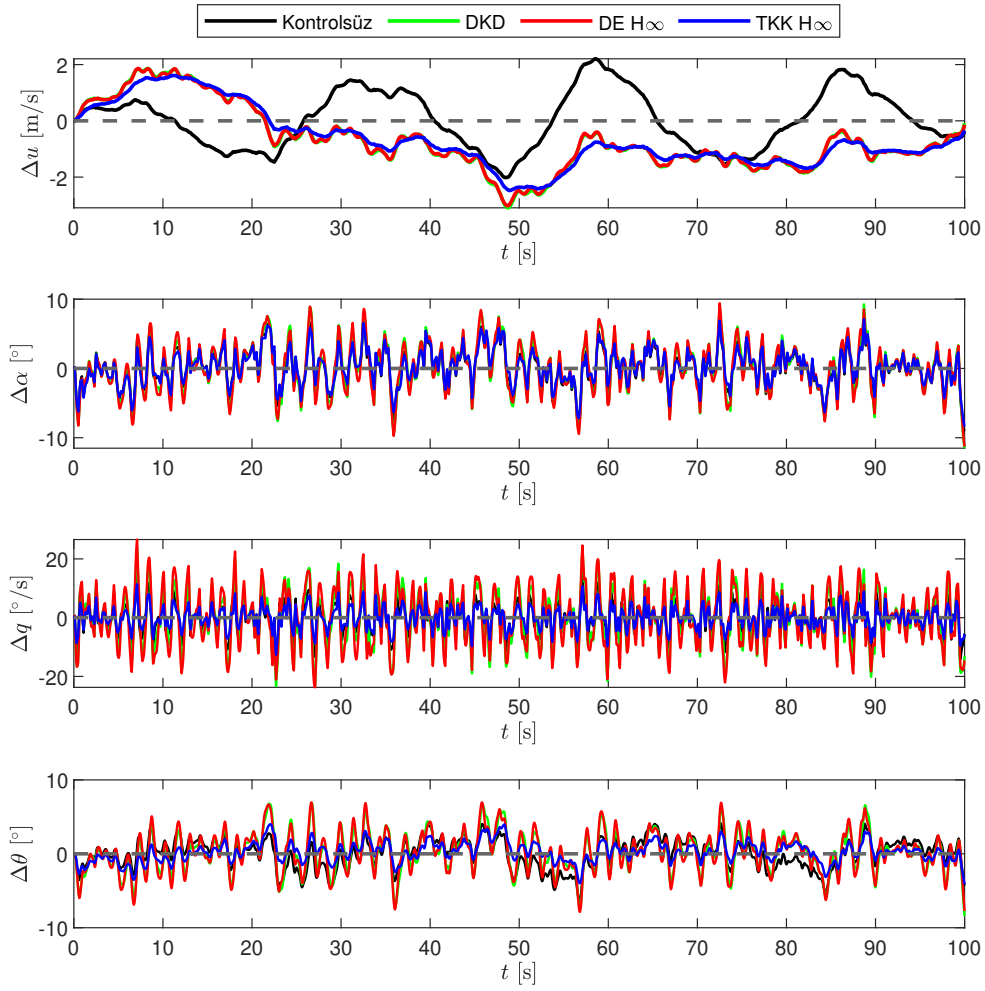
Durum analizi 2 için kontrol giriş sinyalleri hariç elde edilen sonuçların tamamı durum analizi 1 ile neredeyse aynı olacak şekilde benzerdir. Bunu sebebi ise, durum analizi 1 ile durum analizi 2 arasındaki tek farkın kontrol giriş sinyali üzerinde tanımlanan genlik doyumu kısıtının miktarı olmasıdır. Durum analizi 1'de ±20° olan bu kısıt, önceden de bahsedildiği gibi durum analizi 2'de ±3° olmaktadır. Kontrolör sentezini ve hesaplamaları büyük oranda etkilemeyen bu değişiklik sebebi ile iki durumda de kontrol giriş sinyali hariç performans kriterleri birbirlerine çok benzer olmakla birlikte değişmez elipsoit tabanlı H_∞ kontrolör ile kontrol edilen sistemin performans sonuçlarında gözlemlenebilir bir fark mevcuttur.

Sonuç olarak, bu bölümde durum analizi 2'ye ait tüm performans kriterleri de aynı şekilde paylaşıldı, fakat kontrol giriş sinyali hariç diğer performans kriterlerinin önceki bölümdeki gibi detaylı olarak açıklanmasına gerek görülmemiştir.

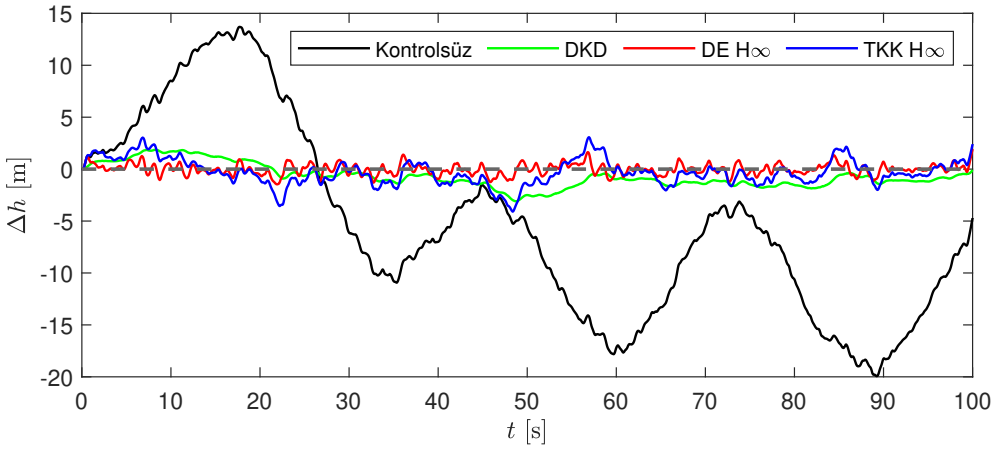
Şekil 4.6, durum analizi 1 için ilk dört sistem durumu olan Δu, $\Delta\alpha$, Δq ve $\Delta\theta$'nın zaman cevapları göstermektedir. Şekil 4.7'de ise beşinci sistem durumu olan kontrol edilmesi hedeflenen irtifa değişimi Δh'nın zaman cevabı paylaşılmıştır. Şekil 4.8 ise ilgili paragrafta açıklaması yapılacağı üzere durum analizi 2'de üç farklı kontrolör için uygulanan kontrol giriş sinyallerini göstermektedir.

Durum analizi 2 için hesaplanan kontrolör kazançları (4.4)'te gösterildiği şekilde ifade edilebilir:

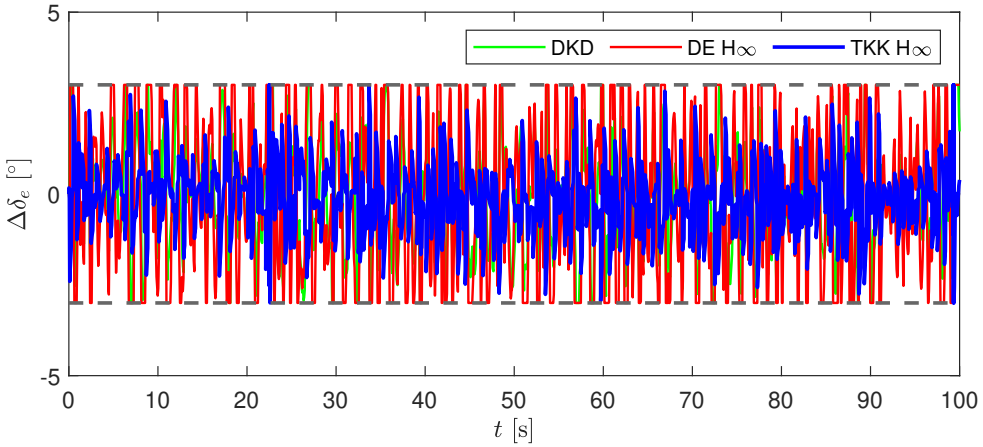
$$\begin{aligned} K_{DKD} &= \begin{bmatrix} -0.138 & 32.385 & -6.436 & -44.319 & -0.816 \end{bmatrix} \\ K_{DE\ H_\infty} &= \begin{bmatrix} 0.014 & -4.590 & 0.481 & 7.391 & 0.196 \end{bmatrix} \\ K_{TKK\ H_\infty} &= \begin{bmatrix} 0.879 & -889.761 & 295.923 & 1727.036 & 9.835 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$



Şekil 4.6 Durum analizi 2 için ilk dört durum Δu, $\Delta \alpha$, Δq ve $\Delta \theta$'nın zaman cevapları



Şekil 4.7 Durum analizi 2 için irtifa değişimi Δh'ın zaman cevapları



Şekil 4.8 Durum analizi 2 için irtifa dümeni kontrol girişi $\Delta\delta_e$

Durum analizi 2 için Şekil 4.8 ile gösterilen kontrol giriş sinyalleri incelendiğinde açık bir şekilde görülmektedir ki değişmez elipsoit tabanlı H_∞ kontrolör alt ve üst sınırdan sürekli olarak doyuma girmiştir. Bu durumun yansıması olarak da sistem cevapların bir seviye kötüleşmesi olarak gözlemlenebilir. Bunun yanında, bu çalışmanın konusu olan TKK tabanlı H_∞ kontrolör ise daha iyi sistem cevapları sağlamasının yanı sıra doyuma neredeyse hiç ulaşmamıştır.

Durum analizi 2'de kontrolsüz ve üç farklı yöntem ile kontrol edilen sistemler için Tablo 4.3'te paylaşılan H_∞ normları incelendiğinde, durum analizi 1 ile aynı şekilde TKK tabanlı H_∞ kontrolör ile kontrol edilen sistemin en düşük H_∞ normuna sahip görülmektedir.

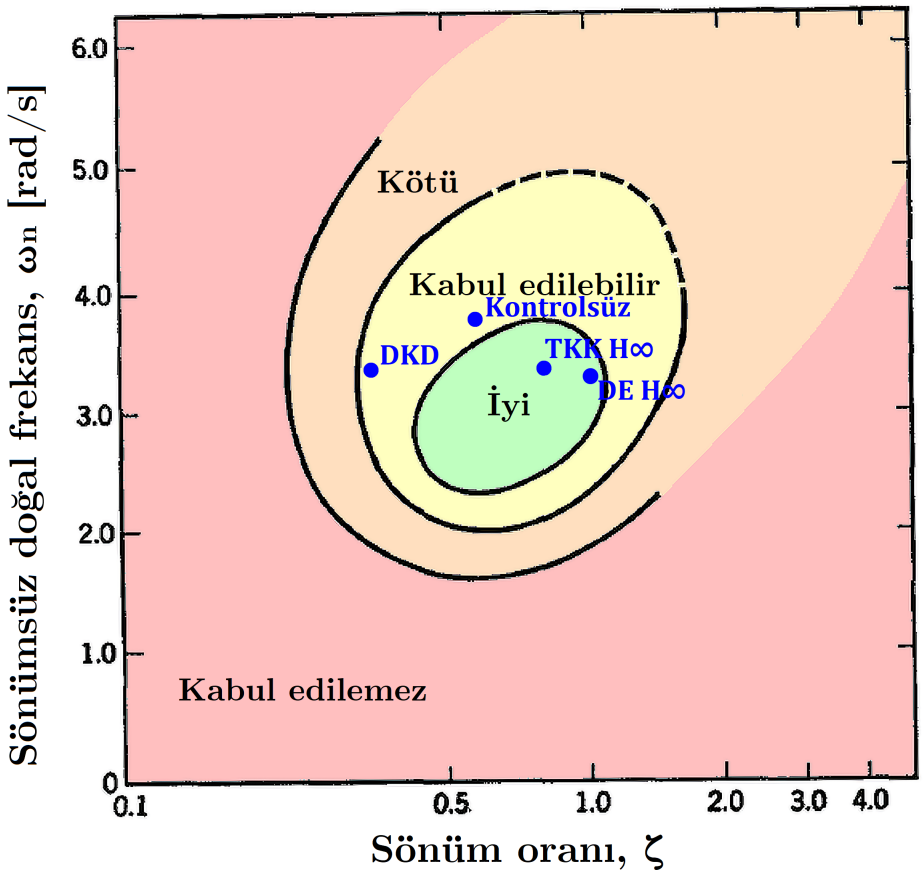
Tablo 4.3 Tüm sistemlerin durum analizi 2 için H_∞ normu

Sistem	**H_∞ Normu**
Kontrolsüz	1.277×10^7
DKD	Hesaplanmadı
DE H_∞	6.414×10^3
TKK H_∞	$\mathbf{3.048 \times 10^3}$

Son olarak, Tablo 4.4'te durum analizi 2'deki tüm sistemler için paylaşılan salınım karakteristikleri incelendiğinde görülmektedir ki durum analizi 1 ile aynı şekilde kontrolsüz ve DKD ile kontrol edilen sistem "kabul edilebilir" sınırlar içerisinde yer alırken değişmez elipsoit tabanlı H_∞ ve TKK tabanlı H_∞ kontrolör ile kontrol edilen sistemler "iyi" sınırları içinde yer almaktadır. Bu değerler Şekil 4.9 ile uçuş kalitesi eğrileri üzerinde de gösterilmiştir.

Tablo 4.4 Tüm sistemlerin durum analizi 2 için kısa periyod hareket modu karakteristik özellikleri

Sistem	İlgili Kök Çifti	Sönüm Oranı, ζ	Doğal Frekans, ω_n [rad/s]
Kontrolsüz	$-2.14 \pm 2.99i$	0.582	3.67
DKD	$-1.31 \pm 3.07i$	0.391	3.34
DE H_∞	$-2.84 \pm 1.58i$	0.873	3.25
TKK H_∞	$-2.31 \pm 2.34i$	0.704	3.29



Şekil 4.9 Durum analizi 2 için tüm sistemlerin kısa periyot salınım modlarının uçuş kalitesi eğrisi üzerinde gösterimi

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tezinde, genlik doyumlu eyleyiciye sahip sabit kanatlı bir hava aracının boylamsal uçuş dinamiğinin bozucu bastırma problemi ele alındı. Bu doğrultuda, ilk olarak sistemin asimptotik karalılığı ve uçağa etki eden bozucu rüzgar girişinden uçağın durumlarına olan performans çıkışına tanımlanan H_∞ normunun en aza indirgenmesi hedeflendi. İkinci olarak, eyleyici genliği doyumu DKG yöntemi ile nominal sistemden ayrılan bir belirsiz eleman olarak modellenip bu belirsiz elemanın giriş-çıkış ilişkisi de TKK'ler kullanılarak tanımlandı ve DME formunda ifade edildi. Elde edilen bu iki koşul, S-Prosedürü Yardımcı Teoremi kullanılarak ortak bir dışbükey optimizasyon problemi olarak DME formunda ifade edildi. Bu doğrultuda, ilgili DME'deki uygun boyutlu matrisler ve uygun bir kontrolör kazancı hesaplandı ve sayısal benzetim çalışmaları gerçekleştirildi. Sayısal benzetim çalışmalarının sonuçları göstermektedir ki, bu yüksek lisans tezinde özgün olarak tasarlanıp sunulan TKK tabanlı H_∞ kontrolör, diğer iki kontrolöre kıyasla gerekli kontrol girişini belirgin bir oranda azaltmakta, sistemin bozucu girişlerinden performans çıkışlarına tanımlanan H_∞ normu için en düşük değerleri sağlamakta ve uçuş kalitesi karakteristiğini iyileştirmektedir.

Sabit kanatlı hava araçlarında eyleyicilerin genlik doyumundan farklı olarak bu çalışmada ele alınmayan hız doyumunun kritik bir seviyede önemli olduğu düşünüldüğünde, gelecekteki çalışmalarda da TKK'ler kullanılarak hem genlik hem de hız doyumlu eyleyiciye sahip sabit kanatlı bir hava aracının uçuş dinamiğini ifade eden bir sistem modellenip bu sistem için kontrolör tasarımı gerçekleştirilmesi planlanmaktadır. Buna ek olarak, aynı şekilde sabit kanatlı hava araçlarında bulunan uçuş kontrol yüzeylerinin ve itki sistemlerinin zaman gecikmesinin ve parametre değişimi/belirsizliğinin de TKK'ler kullanılarak modellendiği çalışmalar yapılması planlanmaktadır. Son olarak ise, boylamsal uçuş dinamiğindeki ikinci kontrol girişi olan motor itkisinin de modele dahil edilmesi ve gerçek havacılık uygulamalarında kullanılan doğrultu sabitleme ve otonom iniş gibi daha kapsamlı uçuş senaryoları üzerinden benzetim çalışmaları yapılması da planlanmaktadır.

KAYNAKÇA

[1] W. Bollay, "Aerodynamic stability and automatic control: The fourteenth wright brothers lecture," *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 18, no. 9, pp. 569–617, 1951.

[2] F. Golnaraghi, B. C. Kuo, *Automatic control systems*. McGraw-Hill Education, 2017.

[3] D. H. Nguyen, M. H. Lowenberg, S. A. Neild, "Effect of actuator saturation on pilot-induced oscillation: A nonlinear bifurcation analysis," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 44, no. 5, pp. 1018–1026, 2021.

[4] M. Dornhein, "Report pinpoints factors leading to yf-22 crash," *Aviation Week & Space Technology*, vol. 9, pp. 53–54, 1992.

[5] D. T. McRuer, "Aviation safety and pilot control: Understanding and preventing unfavorable pilot-vehicle interactions," 1997.

[6] A. Stoorvogel, "Special issues: Control problems with constraints," *Int. J. of Robust & Nonlinear Control*, vol. 9, 1999.

[7] S. Ayyildiz, H. Yazici, "Pitch control by lqr for fixed wing aircraft during microburst encounter," *arXiv preprint arXiv:2006.09942*, 2020.

[8] B. Kouvaritakis, W. Murray, A. MacFarlane, "Characteristic frequency-gain design study of an automatic flight control system," *International Journal of Control*, vol. 29, no. 2, pp. 325–358, 1979.

[9] K. Tamkaya, L. Ucun, I. Ustoglu, "H_∞-based model following method in autolanding systems," *Aerospace Science and Technology*, vol. 94, p. 105 379, 2019.

[10] P. Lu, "Tracking control of nonlinear systems with bounded controls and control rates," *Automatica*, vol. 33, no. 6, pp. 1199–1202, 1997.

[11] S. S. Tohidi, Y. Yildiz, "Handling actuator magnitude and rate saturation in uncertain over-actuated systems: A modified projection algorithm approach," *International Journal of Control*, vol. 95, no. 3, pp. 790–803, 2022.

[12] S. Wang, Y. Gao, J. Liu, L. Wu, "Saturated sliding mode control with limited magnitude and rate," *IET Control Theory & Applications*, vol. 12, no. 8, pp. 1075–1085, 2018.

[13] P. Hippe, *Windup in control: its effects and their prevention*. Springer Science & Business Media, 2006.

[14] I. B. Kucukdemiral, H. Yazici, "Robust gain-scheduling h_∞ control of uncertain continuous-time systems having magnitude-and rate-bounded actuators: An application of full block s-procedure," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 358, no. 16, pp. 8226–8249, 2021.

[15] M. Cui, Z. Zhang, P. Yan, "Tracking control of a large range 3d printed compliant nano-manipulator with enhanced anti-windup compensation," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 131, pp. 33–48, 2019.

[16] P. Liu, P. Yan, H. Özbay, "Design and trajectory tracking control of a piezoelectric nano-manipulator with actuator saturations," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 111, pp. 529–544, 2018.

[17] Y.-Y. Cao, Z. Lin, D. G. Ward, "Anti-windup design of output tracking systems subject to actuator saturation and constant disturbances," *Automatica*, vol. 40, no. 7, pp. 1221–1228, 2004.

[18] C. Barbu, R. Reginatto, A. Teel, L. Zaccarian, "Anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate," in *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 00CH36334)*, IEEE, vol. 2, 2000, pp. 1230–1234.

[19] S. R. Arya, S. Rao, "Effect of control saturation on the tracking of longitudinal states of an aircraft," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 1, pp. 573–578, 2016.

[20] N. Wada, M. Saeki, "Synthesis of a static anti-windup compensator for systems with magnitude and rate limited actuators," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 33, no. 14, pp. 131–136, 2000.

[21] M. S. Reineh, S. S. Kia, F. Jabbari, "New anti-windup structure for magnitude and rate limited inputs and peak-bounded disturbances," *Automatica*, vol. 97, pp. 301–305, 2018.

[22] S. Galeani, S. Tarbouriech, M. Turner, L. Zaccarian, "A tutorial on modern anti-windup design," in *2009 European Control Conference (ECC)*, IEEE, 2009, pp. 306–323.

[23] S. Tarbouriech, I. Queinnec, J.-M. Biannic, C. Prieur, "Pilot-induced-oscillations alleviation through anti-windup based approach," in *Space Engineering*, Springer, 2016, pp. 401–423.

[24] T. Hu, Z. Lin, *Control systems with actuator saturation: analysis and design*. Springer Science & Business Media, 2001.

[25] V. Kapila, K. Grigoriadis, *Actuator saturation control*. CRC Press, 2002.

[26] S. Tarbouriech, G. Garcia, J. M. G. da Silva Jr, I. Queinnec, *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media, 2011.

[27] A. M. Lyapunov, "The general problem of the stability of motion," *International journal of control*, vol. 55, no. 3, pp. 531–534, 1992.

[28] R. E. Kalman, "Lyapunov functions for the problem of lur'e in automatic control," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 49, no. 2, p. 201, 1963.

[29] Y. S. Pyatnitskiy, V. Skorodinskiy, "Numerical methods of lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem," *Systems & Control Letters*, vol. 2, no. 2, pp. 130–135, 1982.

[30] B. A. Francis, *A course in H_∞ control theory*. Springer, 1987.

[31] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis, "State-space solutions to standard h/sub 2/ and h/sub infinity / control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989. DOI: 10.1109/9.29425.

[32] P. Gahinet, P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to h_∞ control," *International journal of robust and nonlinear control*, vol. 4, no. 4, pp. 421–448, 1994.

[33] M. Chilali, P. Gahinet, "H/sub/spl infin//design with pole placement constraints: An lmi approach," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 41, no. 3, pp. 358–367, 1996.

[34] J. Lofberg, "Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab," in *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*, IEEE, 2004, pp. 284–289.

[35] K.-C. Toh, M. J. Todd, R. H. Tütüncü, "Sdpt3—a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3," *Optimization methods and software*, vol. 11, no. 1-4, pp. 545–581, 1999.

[36] J. F. Sturm, "Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization methods and software*, vol. 11, no. 1-4, pp. 625–653, 1999.

[37] E. D. Andersen, K. D. Andersen, "The mosek interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm," in *High performance optimization*, Springer, 2000, pp. 197–232.

[38] A. Bateman, Z. Lin, "An analysis and design method for linear systems under nested saturation," *Systems & control letters*, vol. 48, no. 1, pp. 41–52, 2003.

[39] B. Zhou, "Analysis and design of discrete-time linear systems with nested actuator saturations," *Systems & Control Letters*, vol. 62, no. 10, pp. 871–879, 2013.

[40] A. Palmeira, J. Gomes da Silva Jr, S. Tarbouriech, I. Ghiggi, "Sampled-data control under magnitude and rate saturating actuators," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 15, pp. 3232–3252, 2016.

[41] A. Megretski, A. Rantzer, "System analysis via integral quadratic constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 6, pp. 819–830, 1997.

[42] P. Seiler, "Stability analysis with dissipation inequalities and integral quadratic constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 6, pp. 1704–1709, 2014.

[43] H. Pfifer, P. Seiler, "Robustness analysis of linear parameter varying systems using integral quadratic constraints," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 15, pp. 2843–2864, 2015.

[44] J. Veenman, C. W. Scherer, "Stability analysis with integral quadratic constraints: A dissipativity based proof," in *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 2013, pp. 3770–3775.

[45] J. Veenman, C. W. Scherer, H. Köroğlu, "Robust stability and performance analysis based on integral quadratic constraints," *European Journal of Control*, vol. 31, pp. 1–32, 2016.

[46] A. Knoblach, H. Pfifer, P. J. Seiler, "Worst case analysis of a saturated gust loads alleviation system," in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2015, p. 0858.

[47] S. Wang, H. Pfifer, P. Seiler, "Robust synthesis for linear parameter varying systems using integral quadratic constraints," *Automatica*, vol. 68, pp. 111–118, 2016.

[48] C. Gifford, *The Usborne Book of Cutaway Planes*, ser. Cutaway Series. Edc Pub, 1996, ISBN: 9780881107890. [Online]. Available: `https://books.google.com.tr/books?id=0ku3KaC9EZsC`.

[49] R. C. Nelson *et al.*, *Flight stability and automatic control*. WCB/McGraw Hill New York, 1998, vol. 2.

[50] D. Schmidt, *Modern flight dynamics*. McGraw-Hill Higher Education, 2012.

[51] G. H. Bryan, *Stability in aviation: an introduction to dynamical stability as applied to the motions of aeroplanes*. Macmillan and Company, limited, 1911.

[52] J. E. Williams, S. R. Vukelich, "The usaf stability and control digital datcom. volume iii. plot module," MCDONNELL DOUGLAS ASTRONAUTICS CO ST LOUIS MO, Tech. Rep., 1979.

[53] F. O'hara, "Handling criteria," *The Aeronautical Journal*, vol. 71, no. 676, pp. 271–291, 1967.

[54] H. Yazıcı, "Eyleyici gecikmesine bağlı doyumlu ve dayanıklı h_∞ denetleyiciyle deprem etkisi altındaki yapısal sistemlerin titreşimlerinin kontrolü," Ph.D. dissertation, Yıldız Teknik Üniversitesi, Istanbul, 2011.

[55] S. Boyd, S. P. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.

[56] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.

[57] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.

[58] G.-R. Duan, H.-H. Yu, *LMIs in control systems: analysis, design and applications*. CRC press, 2013.

[59] A. Schultz, *Math416 - soyut lineer cebir ders notları*, Nisan 2010.

[60] C. W. Scherer, "The riccati inequality and state-space h_∞-optimal control.," Ph.D. dissertation, Citeseer, 1990.

[61] A. Packard, "Gain scheduling via linear fractional transformations," *Systems & control letters*, vol. 22, no. 2, pp. 79–92, 1994.

[62] R. Simpson, *The general aviation handbook*. Ian Allen Pub, 2005.

A
RYAN NAVION

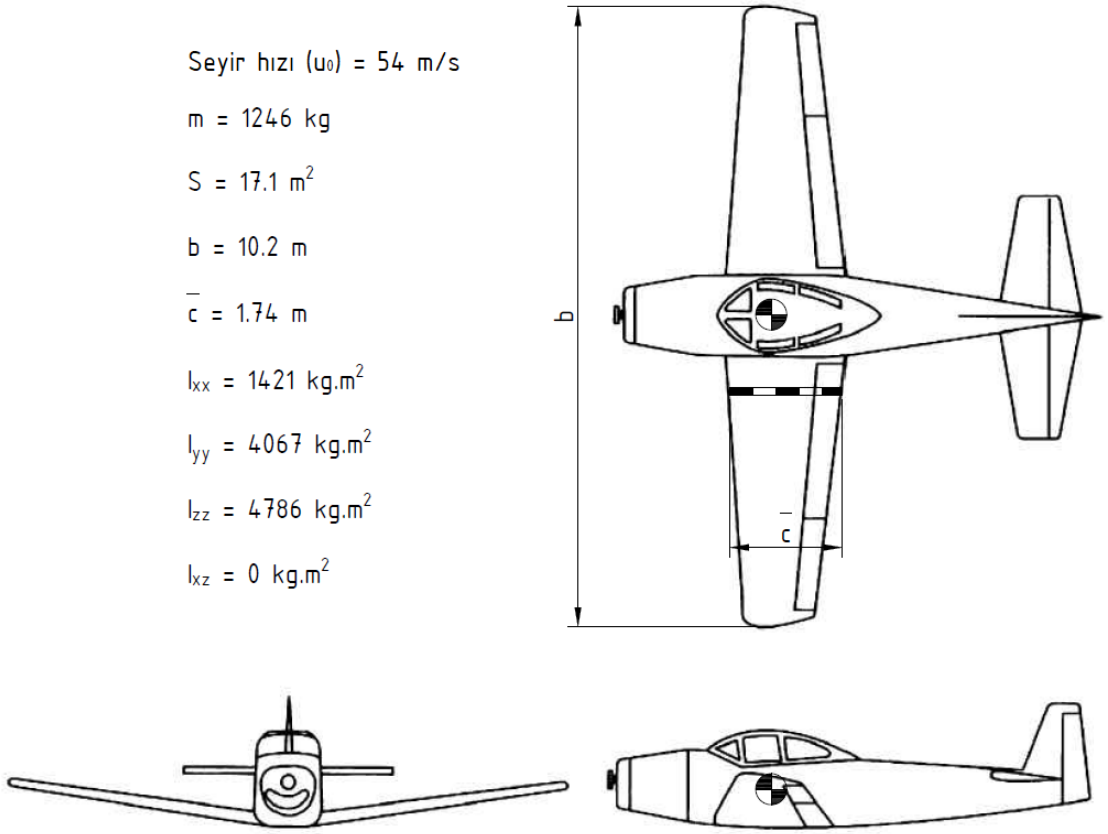
Ryan Navion, ilk olarak 1948 yılında North American Aviation ve daha sonra ise Ryan Aeronautical Company firmaları tarafından üretilmiş olan tek motorlu ve dört kişilik bir hafif uçaktır. Bu uçak İkinci Dünya Savaşı sonrası beklenen sivil havacılıktaki güçlü talep patlamasına yönelik üretilmiştir, ki ilk üreticisi North American Aviation aynı zamanda Amerika Birleşik Devletleri'nin İkinci Dünya Savaşı'ndaki ana savaş uçağı P-51 Mustang'lerin de üreticisidir.

Ryan Navion sivil havacılık pazarına yönelik yönelik üretilse de aynı zamanda Amerikan Hava Kuvvetleri tarafından da hafif kargo, personel taşıma ve eğitim uçağı olarak kullanılmıştır. Toplamda 2634 adet üretilen [62] Ryan Navion'dan günümüzde dahi uçabilecek kadar iyi durumda çok sayıda bulunmaktadır. Küçük de olsa kendine özel bir topluluğu ve sevenleri bulunan bu uçakların günümüzde de tamir ve restore edilerek uçuşa hazır hale getirilmesi çalışmaları sürdürülmektedir.



Şekil A.1 Amerikan Hava Kuvvetleri'ne ait bir Ryan Navion

Ryan Navion'un aerodinamik katsayıları ve geometrik ölçüleri gibi fiziksel parametreleri, bu uçağın artık çok eski olması sebebi ile özellikle temel uçak mühendisliği eğitimi ve araştırma faaliyetlerinde örnek olarak kullanılması amacıyla halka açık bir şekilde erişilebilir durumdadır. Bu çalışmada ihtiyaç duyulan bütün parametreler Tablo A.2 ve Şekil A.1'de mevcuttur.



Şekil A.2 Ryan Navion'un geometrik parameterleri [49]

Tablo A.1 Ryan Navion'un aerodinamik parametreleri [49]

C_{L_0}	C_{L_α}	C_{L_u}	C_{L_q}	$C_{L_{\delta_e}}$	C_{m_q}
0.41	4.44	0	3.8	0.355	-9.96
C_{m_α}	$C_{m_{\delta_e}}$	C_{m_u}	C_{D_0}	C_{D_α}	C_{D_u}
-0.638	-0.923	0	0.05	0.33	0

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. S. Ayyildiz and H. Yazici, "Pitch Control by LQR for Fixed Wing Aircraft During Microburst Encounter," in *5th International Conference on Advances in Mechanical Engineering Istanbul 2019 (ICAME 2019)*, 201920?, pp. 2298-2306.