T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH CEBİRLİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ERKAN ZÜLFİKAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUTTALİP ÖZAVŞAR

İSTANBUL, 2019

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH CEBİRLİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Erkan ZÜLFİKAR tarafından hazırlanan tez çalışması 09.01.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üyesi Yaşar POLATOĞLU

İstanbul Kültür Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu çalışmada genel olarak Banach büzme(contraction) dönüşümünün ve bununla ilintili olarak bazı sabit nokta teoremlerinin incelenmesi ile yola çıkılmıştır. Sonra, koni b-metrik uzaylarda Nadler dönüşümleri üzerine inşa edilen sabit nokta teoremleri incelenmiş ve bunun üzerine koninin vektör katsayılı olması halinde, Nadler dönüşümleri için sabit nokta teoremleri verilmiştir. Bu araştırmada ve araştırmanın olgunlaşmasında değerli katkılarını esirgemeyen Muttalip Özavşar hocama ve Yıldız Teknik Üniversitesi matematik bölümü hocalarına teşekkür ederim.

09.01.2019

Erkan ZÜLFİKAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....v
KISALTMA LİSTESİ.....vi
ÖZET.....vii
ABSTRACT.....viii
BÖLÜM 1
GİRİŞ 1
1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 1
1.3 Hipotez 2
BÖLÜM 2
TEMEL TANIMLAR..... 3
BÖLÜM 3
METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ 12
BÖLÜM 4
KONİ METRİK UZAYLAR..... 15
BÖLÜM 5
VEKTÖR KATSAYILI KONİ $\boldsymbol{B}$-METRİK UZAYLARDA NADLER DÖNÜŞÜMLERİ 26
SONUÇ VE ÖNERİLER 32
KAYNAKLAR 33
ÖZGEÇMİŞ.....35

SİMGE LİSTESİ

β	Bağıntı
G	Grup
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayıllar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel uzay
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
H	Halka
F	Cisim
$\|\|a\|\|$	a nın normu
E	Banach uzayı
$\mathcal{A}$	Banach cebiri
P	Koni
d	Metrik
(X, d)	X kümesi üzerinde metrik uzay
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
A°	A kümesinin içi
$CB(X)$	X in kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi
$H(A, B)$	A ve B kümeleri üzerinde Hausdorff metriği
$r(x)$	x in spektral yarıçapı
e	Birim eleman
θ	Sıfır(null) vektör

KISALTMA LİSTESİ

BC	Banach Cebiri
M	Metrik
vcbm	Vektör katsayılı koni b-metrik

ÖZET

BANACH CEBİRLİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Erkan ZÜLFİKAR

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

Bu çalışmada önce, koni için normallik şartı olmaksızın Banach cebirli koni metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerinden ve ispatlarından bahsettik. Daha sonra reel katsayılı koni b-metrik uzaylarda Nadler dönüşümlerini inceledik. Bu tezin ana sonucu olarak da, vektör katsayılı koni b-metrik uzaylar üzerine inşa edilen Hausdorff b-metrik uzaylarda Nadler sabit nokta teoremini ispat ettik.

Anahtar Kelimeler: Banach cebiri, koni, koni b-metrik uzaylar, Hausdorff b-metrik uzaylar, koni b-metrik uzaylarda Nadler dönüşümleri

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS IN METRIC SPACES WITH BANACH ALGEBRA

Erkan ZÜLFİKAR

Department of Mathematic

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muttalip ÖZAVŞAR

In this study, we first mention some fixed point theorems and proofs in cone metric spaces with Banach algebra without assumption of normality for cone. Then, we examine Nadler mapping in cone b-metric spaces with real coefficient. As the main result of this thesis, we prove Nadler's fixed point theorem in the setting of Hausdorff b-metric spaces constructed on cone b-metric spaces with vector coefficient.

Keywords: Banach algebra, cone, cone b-metric spaces, Hausdorff b-metric spaces, Nadler mappings in cone b-metric spaces

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

1922 yılında Banach[1], büzme(contraction) dönüşümü ilkesini ileri sürdü. Daha sonra 1968 yılında Kannan[2], Banach'ın büzme(contraction) dönüşümü ilkesine dayandırdığı sabit nokta teoremini daha da geliştirdi. 1972 yılında ise Chatterjea[3], Kannan tarafından geliştirilen teoremin bir benzerinin ifadesini ve ispatını yaptı. Ayrıca 1969 yılında Nadler[4] küme değerli dönüşümlerin büzme(contraction) dönüşümleri kavramını ileri sürdü ve çok değerli büzme dönüşümleri olarak bilinen bu tür dönüşümler için Banach büzme(contraction) dönüşümü ilkesini ispatladı. Sonra Liu ve Xu[5] spektral yarıçaptan yararlanarak normal koniye sahip Banach cebirli koni metrik uzaylarda Banach büzme(contraction) dönüşümü ilkesi üzerine çalıştı. Xu ve Radenovic[6] de, Liu ve Xu[5]'nun kullandığı normallik şartını kaldırarak Banach büzme prensibini ispatladı. Diğer taraftan Huang ve Radenovic[7], Banach cebirleri üzerine inşa edilen koni b-metrik uzay kavramını tanımlayarak bazı sabit nokta teoremlerini gerçekleştirdi. [8] de Özavşar, reel katsayılı Banach cebirleri üzerinde inşa edilen H- koni b-metrik uzaylarla bağlantılı olarak Nadler tipindeki dönüşümler için Banach büzme(contraction) ilkesini ispatladı. [9] da George, Nabwey, Rajagopalan, Radenovic ve Reshma, Banach cebirleri üzerine kurulan vektör katsayılı koni b-metrik uzay kavramını tanımladı.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin genel amacı, vektör katsayılı koni b-metrik uzaylar üzerine kurulan H-koni b-metrik uzaylarda Nadler dönüşümlerini ve ilgili sabit nokta teoremlerini çalışmaktır.

1.3 Hipotez

Reel katsayılı koni b-metrik uzaylarda Banach büzme(contraction) dönüşümlerinin sağlanacağı gibi vektör katsayılı olması halinde de yine sağlanacaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1 X ve Y boştan farklı iki küme olsun. X, Y kümeleri üzerindeki kartezyen çarpımının $X \times Y$ ile gösterildiğini biliyoruz. $X \times Y$ kartezyen çarpımının her alt kümesine X'den Y'ye bir **bağıntı** denir. $X = Y$ olması durumunda X'den X'e bağıntı yerine X üzerinde bağıntı terimi kullanılır.

Tanım 2.2 β, X'den Y'ye bir bağıntı, $(x, y) \in \beta$ ise $x \in X$ ve $y \in Y$ elemanları β bağıntısı ile bağlıdır. Bu ifadeyi $x\beta y$ şeklinde yazarız. Ayrıca x ve y ikililerinin β bağıntısının elemanı olmaması durumunu da $(x, y) \notin \beta$ şeklinde yazarız.

Örnek 2.1 Reel sayılar içinde "$\leq$" ile gösterilen küçük veya eşit olma bağıntısı iyi bilinen bir bağıntıdır. $\mathbb{R}$'de alınan x, y elemanları için x elemanı y elemanından küçük veya x elemanın y elemanına eşit olması durumunda $x \leq y$ olarak yazıldığını biliyoruz. Tanım 2.2' den yararlanarak $4 \leq 5$, $4 \leq 4$ ve $4 \not\leq 3$ olduğunu görebiliriz.

Örnek 2.2 "$\subseteq$" ile gösterilen herhangi bir küme üzerindeki alt küme olma bağıntısı bir başka iyi bilinen bağıntıdır. Yine Tanım 2.2'den $\{-1,0,1\} \subseteq \{-1,0,1,2\}$ ancak $\{0,3\} \not\subseteq \{-1,0,1,2\}$ dir.

Tanım 2.3 X bir küme ve β, bu küme üzerinde bir bağıntı olsun.

- Her $x \in X$ için $x\beta x$ oluyorsa β için X üzerinde **yansıma** özelliğine sahiptir deriz.
- Her $x, y \in X$ için $x\beta y$ olunca daima $y\beta x$ oluyorsa, β bağıntısına X üzerinde **simetriktir** denir.
- Her $x, y \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta x$ olunca daima $x = y$ oluyorsa, β bağıntısı X üzerinde **ters simetri** özelliğine sahiptir denir.

- Her $x, y, z \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta z$ olunca daima $x\beta z$ oluyorsa, β bağıntısı X üzerinde **geçişme** özelliğine sahiptir denir.

Yukarıda verdiğimiz Örnek 2.1 ve Örnek 2.2 sırasıyla reel sayılardaki "$\leq$" ve "$\subseteq$" bağıntılarına göre yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip olduğunu görebiliriz.

Tanım 2.4 X bir küme ve β, X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β'nın yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa β bağıntısına **denklik bağıntısına** sahiptir denir.

Örnek 2.3 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde β bağıntısı $\beta = \{(x, y): x, y \in \mathbb{Z}, x - y \; çift\}$ ile tanımlansın. Bu durumda,

Her $x \in X$ için $x - x = 0$ çift olduğundan $x\beta x$, yani yansıyandır.

Her $x, y \in X$ için $x - y$ çift ise $y - x$ ifadesi de $\mathbb{Z}$'de çift olacağından $x\beta y$ iken $y\beta x$ olacağından simetriktir.

Her $x, y, z \in X$ için $x - y$ çift ve $y - z$ çift olunca daima $x - z$ ifadesi de çift olacağından $x\beta y$ ve $y\beta z$ olunca daima $x\beta z$ dir, yani β bağıntısı geçişkendir. Dolayısıyla β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.5 X bir küme ve β, X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahip ise β bağıntısına **kısmi sıralama bağıntısına** sahiptir denir. Üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmış kümeye de **kısmi sıralı küme** denir.

Örnek 2.4 Reel sayılar üzerinde tanımlanmış "$\leq$" ve "$\subseteq$" bağıntıları kısmi sıralama bağıntılarıdır.

Tanım 2.6 G kümesi, üzerinde + (toplama) işlemi tanımlı herhangi bir küme olsun. Eğer $x, y, z \in G$ için:

- $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği);
- $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir $0 \in G$ var (birim eleman);
- $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $-x \in G$ var (ters eleman)

özellikleri sağlanıyorsa G' ye **grup** denir. Ayrıca G gurubu,

- $x + y = y + x$ değişme özelliğine de sahip olursa G' ye **değişmeli (Abel) grup** denir.

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi bilinen $+$ (toplama) işlemine göre değişmeli gruptur.

Tanım 2.7 H, üzerinde bilinen $+$ (toplama) ve $\cdot$ (çarpma) işlemlerine göre ikili işlemlerin tanımlı olduğu bir küme olsun. Eğer $x, y, z \in H$ için;

- $(H, +)$ bir değişmeli (Abel) grup,
- $x(yz) = (xy)z$ (çarpmaya göre birleşme özelliği),
- $x(y + z) = xy + xz$ çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma

  $(x + y)z = xz + yz$ çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan dağılma

özellikleri sağlanıyorsa $(H, +, \cdot)$ yapısına **halka** denir.

- H çarpma işlemine göre birim elemana sahipse **birimli halka**,
- H çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahipse **değişmeli halka** denir.

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.8 F, üzerinde bilinen $+$ (toplama) ve $\cdot$ (çarpma)'ya göre ikili işlemlerin tanımlı olduğu herhangi bir küme olsun. Eğer;

- $(F, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halka,
- F kümesinde 0(sıfır) haricinde her elemanın tersi var

özellikleri sağlanıyor ise $(F, +, \cdot)$ yapısına **cisim** denir. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ yapısı rasyonel sayılar kümesi üzerinde bir cisimdir.

Tanım 2.9 X boştan farklı herhangi bir küme ve F, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde bir cisim olsun.

$+: X \times X \to X$ dönüşümü $(x, y) \to x + y$ ve $\cdot: F \times X \to X$ dönüşümü de $(a, x) \to ax$ şeklinde tanımlansın. Her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in F$ için;

1) $x + y = y + x$ (değişme özelliği),
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği),
3) $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ var,
4) $x + (-x) = (-x) + x = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ var,
5) Her $x \in X$ için $1 \cdot x = x$ $(1 \in F)$,
6) $a(x + y) = ax + ay$,

7) $(a+b)x = ax + bx$,

8) $(ab)x = a(bx)$,

koşulları sağlanıyor ise X'e F cismi üzerinde bir **vektör uzayı** ve bu vektör uzayının elemanlarına da **vektör** denir. $F = \mathbb{R}$ olması durumunda X'e reel vektör uzayı, $F = \mathbb{C}$ olması durumunda ise X' e kompleks vektör uzayı denir.

Örnek 2.5 $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı olan bütün reel değerli ve sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümeyi $C[0,1]$ ile gösterelim. $C[0,1]$ kümesi üzerindeki toplama işlemini $C[0,1] \times C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ dönüşümü altında $(f(x), g(x)) \rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ile, $C[0,1]$ kümesi üzerindeki çarpma işlemini de $F \times C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ dönüşümü altında $(a, f) \rightarrow (af)(x) = af(x)$ ile tanımlayalım. $C[0,1]$ kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemine göre vektör uzayı olduğunu şöyle gösterebiliriz. Her $f, g, h \in C[0,1]$ ve her $a, b \in F$ için;

1) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$,

2) $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$,

3) $f(x) + 0(x) = f(x)$ olacak şekilde bir tek $0(x) \in C[0,1]$,

4) $f(x) + (-f(x)) = 0(x)$ olacak şekilde bir tek $-f(x) \in C[0,1]$,

5) $I(x)f(x) = f(x)I(x) = f(x)$ olacak şekilde $I(x) \in F$,

6) $a(f+g)(x) = af(x) + ag(x)$,

7) $(a+b)f(x) = af(x) + bf(x)$,

8) $(ab)f(x) = a(bf(x))$

olduğundan $C[0,1]$, F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.10 X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \| x \|$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in F$ için;

(N1) $\| x \| \geq 0$ ve $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$,

(N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

özellikleri sağlanıyor ise $\|x\|$, X üzerinde **norm** adını alır. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu uzay** denir.

Tanım 2.11 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n > n_0$ için $\| x_n - x_0 \| < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine x_0 noktasına **yakınsıyor** denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $(n \to \infty)$ için $x_n \to x_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.12 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n, m > n_0$ için $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$ oluyor ise, $\{x_n\}$ dizisine X içinde bir **Cauchy dizisidir** denir.

Tanım 2.13 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise, $(X, \|\cdot\|)$ uzayına **tam normlu uzay** yada **Banach uzayı** denir.

Tanım 2.14 $\mathcal{A}$, F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde vektör uzayı olsun. $+: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ve $\cdot: F \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dönüşümleri üzerinde sırasıyla bilinen toplama ve çarpma işlemlerinin tanımlı olduğu dönüşümler olsun. Eğer her $x, y, z \in \mathcal{A}$ ve $\alpha \in F$ için;

(BC1) $(xy)z = x(yz)$,

(BC2) $x(y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$,

(BC3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,

(BC4) $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$

koşulları sağlanıyor ise, $\mathcal{A}$'ya **Banach cebiri** denir. Bu çalışmada $\mathcal{A}$ Banach cebirinin bilinen çapma işlemine göre her $x \in \mathcal{A}$ için, $ex = xe = x$ olacak şekilde $e \in \mathcal{A}$ birim elemanına ve her $x \in \mathcal{A}$ için, $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ olacak şekilde $x^{-1} \in \mathcal{A}$ ters elemanına sahip olacağını varsayacağız.

Örnek 2.6 Cebirimizi $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{R}) = \{a = (a_{ij})_{n\times n} | a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq n\}$ biçiminde alalım. $\mathcal{A}$ cebirindeki normu da $\|a\| = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{A}$ cebirinin bir Banach cebiri olduğunu görebiliriz.

Tanım 2.15 X boştan farklı bir küme, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü $(x, y) \to d(x, y)$ ile tanımlansın. Her $x, y, z \in X$ için;

(M1) $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri),

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği),

koşullarını sağlayan d dönüşümüne **metrik** denir. (X,d) ikilisine de **metrik uzay** denir.

Örnek 2.7 Tanım 2.15 de d dönüşümünde $X = \mathbb{R}$ alırsak $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümünü elde ederiz. Bu dönüşüm de $(x,y) \to d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlansın. Tanımlanan d dönüşümüne $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriği denir. Şimdi bu dönüşümün metrik koşullarını sağladığını görelim;

i) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y| \geq 0$ ve

$d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$,

ii) $d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1||y-x| = d(y,x)$,

iii) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$$

yani, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ üçgen eşitsizliği elde ederiz ve böylece $(\mathbb{R}, d)$ ikilisinin metrik uzay olduğunu göstermiş oluruz.

Örnek 2.8 $[a,b]$ aralığı $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olmak üzere, $[a,b]$ üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların kümesi $C[a,b]$ olsun. Her $f, g \in C[a,b]$ için $d_\infty: C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümünü $d_\infty(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)|: \forall t \in [a,b]\}$ şeklinde tanımlansın. Şimdi bu dönüşümün metrik olduğunu görelim;

i) $\forall f, g \in C[a,b]$ ve $\forall t \in [a,b]$ için $|f(t) - g(t)| \geq 0$ olduğundan $d_\infty(f,g) \geq 0$ ve $d_\infty(f,g) = 0$ olması durumunda $|f(t) - g(t)| = 0$ olur ve bu eşitlik $\forall t \in [a,b]$ için sağlandığından $f = g$ elde edilir.

ii) $\forall f, g \in C[a,b]$ ve $\forall t \in [a,b]$ için;

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)|: \forall t \in [a,b]\}$$
$$= \max\{|g(t) - f(t)|: \forall t \in [a,b]\} = d_\infty(g,f)$$

iii) $\forall f, g, h \in C[a,b]$ ve $\forall t \in [a,b]$ için;

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)|: \forall t \in [a,b]\}$$
$$= \max\{|f(t) - h(t) + h(t) - g(t)|: \forall t \in [a,b]\}$$
$$= \max\{|f(t) - h(t)|: \forall t \in [a,b]\} + \max\{|h(t) - g(t)|: \forall t \in [a,b]\}$$

buradan $d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$ üçgen eşitsizliğini elde ederiz. Bu da bize d_∞ dönüşümünün bir metrik olduğunu gösterir.

Tanım 2.16 (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve r pozitif reel sayısı verilsin.

$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **açık yuvar**,

$\bar{B}(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı yuvar**, $B^s(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$ kümesine de **yuvar yüzeyi** denir.

bunun yanında $B^\circ(x_0,r) = B(x_0,r)\backslash\{x_0\}$ kümesine de x_0 noktasının delinmiş r komşuluğu denir. Yine (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ noktası verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $A \cap B(x,\varepsilon)\backslash\{x\} \neq \emptyset$ ise, x noktasına A kümesinin **limit noktası** denir. A kümesinin bütün limit noktalarının oluşturduğu kümeyi A' ile gösterirsek, A ile A' kümelerinin birleşimine A kümesinin **kapanışı** denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Eğer $A = \bar{A}$ ise, A kümesine X'de **kapalı küme** denir. Şimdi de bir kümenin iç noktasının ve açık küme terimlerinin ne olduğuna değinelim. Uzayımız aynı (X,d) metrik uzayı olsun, $A \subset X$ kümesi ve $x \in A$ noktası verilsin. Eğer $B(x,\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x noktasına A kümesinin bir **iç noktası** denir. A kümesinin iç noktalarının kümesine A kümesinin içi denir ve A° ile gösterilir. $A = A^\circ$ olması durumunda ise A kümesine X'de **açık küme** denir.

Tanım 2.17 (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ var ki $\forall n > n_\varepsilon$ için $d(x_n,x) < \varepsilon$ veya $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ oluyor ise $\{x_n\}$ dizisine x noktasına **yakınsıyor** denir. Bu yakınsama $(n \to \infty)$ iken $x_n \to x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ biçiminde ifade edilir.

Tanım 2.18 (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ boştan farklı bir küme olsun. $d(A) = \sup\{d(x,y): x,y \in A\}$ sayısına A kümesinin çapı denir. $d(A) < \infty$ ise A kümesi X de **sınırlıdır** denir. Eğer X içinde $\{x_n\}$ dizisinin terimlerinden oluşan küme X de sınırlı ise $\{x_n\}$ dizisi X de **sınırlıdır** denir.

Tanım 2.19 (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall n,m > n_\varepsilon$ için $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine X de **Cauchy dizisi** denir ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.20 (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, (X,d) uzaya **tam metrik uzay** denir.

Teorem 2.1 (X,d) bir metrik uzay ve X kümesinin boştan farklı bir A alt kümesi verilsin. Bu durumda $x \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter koşul A alt kümesinde x noktasına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisinin var olmasıdır.

Örnek 2.9 $\mathbb{R}$ kümesi, mutlak değer metriğine göre tam metriktir.

Örnek 2.10 $\mathbb{C}$ kümesinin mutlak değer metriğine göre tam metrik olduğunu gösterelim;

$\mathbb{C}$ de $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ olacak şekilde $z_n = a_n + ib_n$ biçiminde bir Cauchy dizisi alalım. Buradan

$$z_n - z_m = a_n - a_m + i(b_n - b_m) \tag{2.1}$$

ve

$$|a_n - a_m| \leq |z_n - z_m|, |b_n - b_m| \leq |z_n - z_m| \tag{2.2}$$

olduğundan $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dizileri $\mathbb{R}$ içinde Cauchy dizidir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi tam olduğundan $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ olacak şekilde a, b reel sayıları vardır. Bir an için $z = a + ib$ olduğunu kabul edelim. Buradan;

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |(a_n + ib_n) - (a + ib)| \\ &= |(a_n - a) + i(b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \end{aligned} \tag{2.3}$$

ifadesini elde ederiz. Burada $(n \to \infty)$ için limit alırsak $z_n \to z \in \mathbb{C}$ yakınsaklığını elde ederiz. O halde $\mathbb{C}$ tamdır.

Örnek 2.11 $\mathbb{R}^n$ kümesinin $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}$ metriğine göre tam olduğunu şöyle gösterebiliriz;

$\mathbb{R}^n$ içinde $x_m = \{x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\}$ olacak şekilde bir Cauchy dizisi alalım. $\{x_m\}$ dizisi Cauchy dizisi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı var ki $\forall m, r > n_\varepsilon$ için,

$$d_p(x_m, x_r) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k^{(m)} - x_k^{(r)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \tag{2.4}$$

olur. Buradan $\forall m, r > n_\varepsilon$ ve $\forall k = 1, \dots, n$ için

$$\left| x_k^{(m)} - x_k^{(r)} \right|^p < \varepsilon^p \tag{2.5}$$

$$\left| x_k^{(m)} - x_k^{(r)} \right| < \varepsilon \tag{2.6}$$

ifadesini elde ederiz ve bu ifade de bize her sabit k degeri için $\{x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots\}$ reel sayı dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır ve $1 \leq k \leq n$ için $\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k \in \mathbb{R}$ olur. Bunun yanında her sabit k için $\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $m_\varepsilon^{(k)} \in \mathbb{N}$ var ki $\forall m > m_\varepsilon^{(k)}$ için

$$\left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{n}} \tag{2.7}$$

yazabiliriz. Buradan $m_\varepsilon = \max\left\{ m_\varepsilon^{(1)}, \dots, m_\varepsilon^{(n)} \right\}$ alırsak, $\forall m > m_\varepsilon$ için

$$d_p(x_m, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left| x_k^{(m)} - x_k \right|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \tag{2.8}$$

ifadesine ulaşırız. Bu ise $m \to \infty$ iken $\lim_{m\to\infty} d_p(x_m, x) = 0$ eşitliğini ve dolayısıyla $x_m \to x$ yakınsaklığını verir. O halde $(\mathbb{R}^n, d)$ uzayı tamdır.

BÖLÜM 3

METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde sabit nokta tanımından ve metrik uzaylar üzerine inşa edilen büzme(contraction) dönüşümünden bahsedeceğiz. Sonra Banach tarafından ortaya atılan sabit nokta teoremini vereceğiz. Daha sonra Kannan ve Chatterjea tarafından inşa edilen sabit nokta teoremlerinden bahsedeceğiz. En sonunda da Hausdorff metriğinin tanımını ve Nadler sabit nokta teoremini ifade edeceğiz.

Tanım 3.1 (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için;

i) $Tx = x$ oluyorsa $x \in X$ e sabit nokta,

ii) $0 \leq k < 1$ için, $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ oluyorsa T dönüşümüne büzme(contraction) dönüşümü denir.

Örnek 3.1 $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayında $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü $x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \frac{x}{2m} + p$ biçiminde tanımlanırsa $x = \frac{2mp}{2m-1}$ değeri T dönüşümü için sabit nokta ve $m > \frac{1}{2}$ için T dönüşümü büzme(contraction) dönüşümü olur.

Örnek 3.2 $(\mathbb{R}^2, d)$ Öklid metrik uzayında $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $T(x, y) = (\frac{x}{2m} + p, \frac{y}{2n} + p)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $m, n > \frac{1}{2}$ için T dönüşümü büzme(contraction) dönüşümü olur. Ayrıca $\mathbb{R}^2$ de alınan $(x, y) = (\frac{2mp}{2m-1}, \frac{2np}{2n-1})$ değeri de bu dönüşümün sabit noktası olur.

Sabit nokta ve büzme(contraction) dönüşümünden bahsettikten sonra şimdi bu çalışmanın temelini oluşturan Banach büzme(contraction) teoremini verelim:

Teorem 3.1 [1], [5] (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0,1)$ için,

$$d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y) \tag{3.1}$$

koşulunu sağlar ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Banach tarafından inşa edilen bu teorem daha sonra Kannan tarafından geliştirilerek aşağıdaki biçimiyle verilmiştir;

Teorem 3.2 [2], [5] (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0, \frac{1}{2})$ için,

$$d(Tx, Ty) \preceq k\big(d(x, Tx) + d(y, Ty)\big) \tag{3.2}$$

koşulunu sağlar ise T, X de bir tek sabit noktaya sahip olur ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Chatterjea, yukarıda ifade ettiğimiz Teorem 3.2 nin bir benzerini şöyle ifade etmiştir;

Teorem 3.3 [3], [5] (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0, \frac{1}{2})$ için,

$$d(Tx, Ty) \preceq k\big(d(y, Tx) + d(x, Ty)\big) \tag{3.3}$$

koşulunu sağlar ise T, X de bir tek sabit noktaya sahip olur ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Bilinen metrik uzaylarda büzme(contraction) dönüşümü ve bazı sabit nokta teoremlerini verdikten sonra Hausdorff metriğinin tanımını ve Nadler tarafından inşa edilen sabit nokta teoremini verelim.

Tanım 3.2 [10] (X, d) metrik uzay ve $CB(X)$, X in boştan farklı tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi olsun. $A, B \in CB(X)$ için $d(x, A) = \inf\{d(x, a): a \in A\}$ olmak üzere $H: CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$H(A, B) = \max\big\{sup_{x \in A} d(x, B), sup_{y \in B} d(y, A)\big\} \tag{3.4}$$

ile tanımlanan metriğe **Hausdorff metriği** denir.

Örnek 3.3 $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ ve $B = \{(x, y): 3 \leq x \leq 5, 4 \leq y \leq 12\}$ olsun.

$sup_{x \in A} d(x, B) = 6$ ve $sup_{y \in B} d(y, A) = 12$ olup,

$H(A, B) = \max\{sup_{x \in A} d(x, B), sup_{y \in B} d(y, A)\}$ ifadesinde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$H(A, B) = \max\{6,12\} = 12$ bulunur.

Tanım 3.3 (X, d) bir metrik uzay ve $CB(X)$, X'in boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin herhangi bir ailesi olsun. $T: X \to CB(X)$ dönüşümü için $x \in Tx$ ise $x \in X$ noktasına çok değerli dönüşümler için sabit nokta denir.

Tanım 3.4 (X, d) bir metrik uzay ve $CB(X)$, X'in tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $T: X \to CB(X)$ çok değerli dönüşümü her $x, y \in X$ ve $k \in [0,1)$ için,

$$H(Tx, Ty) \preceq kd(x, y) \tag{3.5}$$

koşulunu sağlar ise T dönüşümüne çok değerli büzme(contraction) dönüşümü denir.

Nadler, Hausdorff metriğini kullanarak çok değerli büzme(contraction) dönüşümü için aşağıdaki sabit nokta teoremini inşa etti.

Teorem 3.4 [4] (X, d) bir metrik uzay ve $CB(X)$, X'in tüm boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $T: X \to CB(X)$ çok değerli büzme(contraction) dönüşümü ise $x \in Tx$ olacak şekilde $x \in X$ vardır.

BÖLÜM 4

KONİ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde ilk olarak koni, koni metrik, koni metrik uzayı ve c-dizisi tanımlarını verip, koni ve c-dizisi ile ilgili lemmaların ifadelerini yapacağız. Sonra koni üzerine inşa edilen bazı sabit nokta teoremlerinin ifadelerini ve ispatlarını vereceğiz. Sonra da koni b-metrik tanımını, ardından da koni metrik ve koni b-metrik arasındaki farklılığa dair bir örnek vereceğiz. Daha sonra da H-koni b-metrik tanımını yapıp, H-koni b-metrik ile ilgili sabit nokta teoremini ifade edeceğiz.

Tanım 4.1 $\mathcal{A}$ Banach cebirinin bir P alt kümesi eğer;

1) P boştan farklı, kapalı ve $\{\theta, e\} \subset P$,

2) Negatif olmayan her α, β reel sayıları için $\alpha P + \beta P \subset P$,

3) $P^2 = PP \subset P$,

4) $P \cap (-P) = \{\theta\}$

koşullarını sağlıyorsa P'ye **koni** denir. P konisi üzerinde bir "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı; $x \preceq y \Leftrightarrow y - x \in P$ şeklinde tanımlanır. Burada $x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y$ ve $x \neq y$, $x \ll y$ ise $y - x \in intP$ ($intP$, P'nin içi) ile ifade edilir. Eğer her $x, y \in \mathcal{A}$ için,

$$0 \preceq x \preceq y \;\Rightarrow\; \|x\| \leq M\|y\|$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa P konisine **normal koni** denir. Yukarıdaki eşitsizlikte bulduğumuz en küçük M sayısına P konisinin normal sabiti denir. Eğer $intP \neq \emptyset$ ise P konisine **solid koni** denir.

Tanım 4.2 [11] $\mathcal{A}$ bir Banach cebiri, $X \neq \emptyset$ olsun. Eğer bir $d: X \times X \to \mathcal{A}$ dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ ve $\theta \in \mathcal{A}$ sıfır(null) vektörü için aşağıdaki koşulları sağlar ise:

i) $\theta \preceq d(x,y)$ ve $d(x,y) = \theta \iff x = y$;

ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

iii) $d(x,y) \preceq d(x,z) + d(z,y)$

d dönüşümüne **koni metrik**, (X,d) ikilisine de **koni metrik uzay** denir.

Tanım 4.3 [12] P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni ve $\{u_n\}$, P de bir dizi olsun. Eğer her $c \in \mathcal{A}$ ve $\theta \ll c$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_0$ için $u_n \ll c$ ise, $\{u_n\}$ dizisine ***c*-dizisi(*c*-sequence)** denir.

Lemma 4.1 [13] P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni olsun. Eğer $0 \leq \lambda < 1$ ve $u \in P$ için, $u \preceq \lambda u$ ise $u = \theta$ dır.

Lemma 4.2 [14] P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni olsun. $u \in P$ ve her $\theta \ll c$ için $\theta \preceq u \ll c$ ise, $u = \theta$ dır.

Lemma 4.3 [14] P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni olsun. Her $c \in \mathcal{A}$, $\theta \ll c$ ve $u, v \in P$ için $u \preceq v$ ve $v \ll c$ ise $u \ll c$ dir.

Lemma 4.4 [15] P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni olsun. Eğer $n \to \infty$ giderken $u_n \to \theta$ ise, her $c \in \mathcal{A}$ ve $\theta \ll c$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_0$ için $u_n \ll c$ dir.

Lemma 4.5 [12] P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni olsun. Eğer $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri P de c-dizisi iseler, α ve β pozitif reel sayıları için $\{\alpha u_n + \beta v_n\}$ dizisi de P de c-dizisi olur.

Lemma 4.6 [12] P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni ve $\{u_n\}$, P de bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

i) $\{u_n\}$ dizisi bir c-dizisidir.

ii) Her $c \gg \theta$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_0$ için $u_n \prec c$ dir.

iii) Her $c \gg \theta$ için öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_1$ için $u_n \preceq c$ dir.

Lemma 4.7 [6] P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni olsun. Eğer $k \in P$ için $\{u_n\}$ disisi P de bir c-dizisi ise, $\{ku_n\}$ dizisi de P de bir c-dizisidir.

İspat: $c \gg \theta$ sabit bir sayı ve her $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{c}{m} \gg \theta$ dır. $\{u_n\}$ disisi P de bir c-dizisi olduğundan $\forall m \in \mathbb{N}$ için öyle bir $n_m \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n \geq n_m$ için $u_n \ll \frac{c}{m}$ dir. O halde her $n \geq n_m$ için $ku_n \ll \frac{kc}{m}$ olur. Bu ifade de $m \to \infty$ götürürsek $\frac{kc}{m} \to \theta$ olur.

Dolayısıyla öyle bir $m_1 \in \mathbb{N}$ var ki her $m \geq m_1$ için $\frac{kc}{m} \ll c$ ve buradan da öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki $n \geq n_0$ için $ku_n \ll c$, yani $\{ku_n\}$ dizisi P de bir c-dizisidir.

Bundan sonraki kısımlarda özellikle lemma ve teoremlerde çok sık kullanacağımız spektral yarıçapın bazı özelliklerinden bahsedelim.

Lemma 4.8 [6] $\mathcal{A}$ bir Banach cebiri ve $x \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{4.1}$$

ile tanımlanan x'in spectral yarıçapı birden küçük yani $r(x) < 1$ ise, $(e - x)$ terslenebilirdir ve

$$(e - x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \tag{4.2}$$

dir.

Lemma 4.9 [6] $\mathcal{A}$ bir Banach cebiri ve $x, y \in \mathcal{A}$ verilsin. Eğer x, y aralarında değişme özelliğine sahip, yani $xy = yx$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur;

i) $r(xy) \leq r(x)r(y)$;

ii) $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$;

iii) $|r(x) - r(y)| \leq r(x - y)$.

Lemma 4.10 [6] $\mathcal{A}$ bir Banach cebiri ve $k \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $0 \leq r(k) < 1$ ise,

$$r((e - k)^{-1}) \leq \big(1 - r(k)\big)^{-1}. \tag{4.3}$$

İspat: $0 \leq r(k) < 1$ olduğundan,

$$(e - k)^{-1} = e + \sum_{i=1}^{\infty} k^i = e + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k^i \tag{4.4}$$

ve Lemma 4.8 ve Lemma 4.9 dan

$$
\begin{aligned}
r((e-k)^{-1}) &\leq r(e) + r(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k^i) \\
&\leq 1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\big(r(k)\big)^i \\
&\leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\big(r(k)\big)^i \\
&= \big(1 - r(k)\big)^{-1}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

ifadesi elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.11 [16] $k \in P$ ve k'nın spektral yarıçapı $r(k) < 1$ olsun. Buradan $u_n = k^n$ eşitliğine sahip olan $\{u_n\}$ dizisi bir c-dizisidir.

Lemma 4.12 [6] (X, d), $\mathcal{A}$ Banach cebiri üzerinde tam koni metrik uzay ve P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde solid koni olsun. Eğer $\{x_n\} \subset X$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsıyor ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $\{d(x_n, x)\}$ dizisi bir c-dizisidir.

ii) Her $p \in \mathbb{N}$ için, $\{d(x_n, x_{n+p})\}$ dizisi bir c-dizisidir.

Teorem 4.1 [6] (X, d), $\mathcal{A}$ Banach cebiri üzerinde bir tam koni metrik uzay ve P, $\mathcal{A}$ Banach cebirinde $k \in P$ için spektral yarıçapı $r(k) < 1$ olan solid koni olsun. $T: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$
d(Tx, Ty) \preceq kd(x, y) \tag{4.6}
$$

koşulunu sağlar ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat: $x_0 \in X$, $x_n = T^n x$ ve $n \geq 1$ seçelim, büzme şartından

$$
d(x_{n+1}, x_n) \preceq kd(x_n, x_{n-1}) \preceq \cdots \preceq k^n d(x_1, x_0) \tag{4.7}
$$

ifadesini elde ederiz. Buradan $m > n$ için,

$$
d(x_n, x_m) \preceq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)
$$

$$\begin{aligned} &\preceq (k^n + \cdots + k^{m-1}) d(x_1, x_0) \\ &= (e + k + \cdots + k^{m-n-1}) k^n d(x_1, x_0) \\ &\preceq \left(\sum_{i=0}^{\infty} k^i \right) k^n d(x_1, x_0) \preceq (e-k)^{-1} k^n d(x_0, x_1) \end{aligned} \tag{4.8}$$

$d(x_n, x_m) \preceq (e-k)^{-1} k^n d(x_0, x_1)$ ifadesini elde etmiş oluruz. $r(k) < 1$ olmasından ve ayrıca Lemma 4.7, Lemma 4.8, Lemma 4.9, Lemma 4.10 ve Lemma 4.11 den

$$d(x_n, x_m) \preceq (e-k)^{-1} k^n d(x_0, x_1) \ll c \tag{4.9}$$

ve Lemma 4.3 den de $d(x_n, x_m) \ll c$ olacağından $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu görebiliriz. X'in tam olmasından, $\{x_n\}$ dizisi X de bir x elemanına yakınsar. Şimdi bu x noktasının sabit nokta olduğunu görelim;

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\preceq d(Tx, Tx_n) + d(Tx_n, x) \\ &\preceq k d(x, x_n) + d(x_{n+1}, x) \end{aligned} \tag{4.10}$$

ifadesini kolaylıkla elde edebiliriz. Bu ifadede $u_n = k d(x, x_n) + d(x_{n+1}, x)$ dersek, Lemma 4.4, Lemma 4.5, Lemma 4.7 ve Lemma 4.12 den yararlanarak, her $c \in \mathcal{A}$ ve $\theta \ll c$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_0$ için,

$$d(Tx, x) \preceq u_n \ll c \tag{4.11}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve bu da bize $\{u_n\}$ dizisinin bir c-dizisi olduğunu söyler. $\{u_n\}$ dizisinin c-dizisi olmasını ve Lemma 4.2 yi kullanarak $d(Tx, x) = \theta$ olacağını ve metrik tanımından da $Tx = x$ eşitliğinin var olacağını söyleyebiliriz. Geriye bu sabit noktanın tek olduğunu göstermek kalıyor. Bir an için bu noktanın tek olmadığını varsayalım ve y gibi bir başka sabit noktanın var olduğunu düşünelim. Büzüşme(contraction) ilkesinden yararlanarak,

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \preceq k d(x, y) \preceq k^2 d(x, y) \preceq \cdots \preceq k^n d(x, y) \tag{4.12}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $r(k) < 1$ olduğundan ve Lemma 4.11 den $\{k^n\}$ dizisinin bir c-dizisi olduğunu söyleyebiliriz. Yine Lemma 4.12 den $\{k^n d(x, y)\}$ dizisinin de bir c-dizisi olduğunu söyleyebiliriz. O halde,

$$\theta \preceq d(x,y) \ll c \tag{4.13}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Lemma 4.2 den de $d(x,y) = \theta$ ve $x = y$ eşitliğini yazabiliriz. Dolayısıyla bir çelişki elde etmiş olduk. Sonuç olarak sabit nokta tektir.

Teorem 4.2 [6] (X,d), $\mathcal{A}$ Banach cebiri üzerinde bir tam koni metrik uzay ve P, $\mathcal{A}$ da bir solid koni olsun. Her $x,y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü spektral yarıçapı $r(k) < \frac{1}{2}$ olan $k \in P$ için,

$$d(Tx,Ty) \preceq k\big(d(Tx,y) + d(Ty,x)\big) \tag{4.14}$$

koşulunu sağlar ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat: $x_0 \in X$, $x_n = T^n x$ ve $n \geq 1$ seçelim, büzme(contraction) şartından

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n) &\preceq d(Tx_n,Tx_{n-1}) \\ &\preceq k\big(d(Tx_n,x_{n-1}) + d(Tx_{n-1},x_n)\big) \\ &\preceq k\big(d(x_{n+1},x_n) + d(x_n,x_{n-1})\big) \end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitsizliğini ve Buradan da,

$$d(x_{n+1},x_n) \preceq (e-k)^{-1}kd(x_n,x_{n-1}) \tag{4.16}$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi $(e-k)^{-1}k$ ifadesini spektral yarıçapının 1'den küçük, yani

$$r((e-k)^{-1}k) < 1 \tag{4.17}$$

olduğunu görelim. $(e-k)^{-1}$ve k terimlerinin değişmeli olduğu açıktır. Yine $r(k) < \frac{1}{2}$ olmasından ve Lemma 4.9 dan

$$\begin{aligned} r((e-k)^{-1}k) &\leq r((e-k)^{-1})r(k) \\ &\leq \frac{r(k)}{1-r(k)} < 1 \end{aligned} \tag{4.18}$$

olur ve böylece Teorem 4.1 in ispatından yararlanarak $\{x_n\}$ dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu söyleyebiliriz. X in tam olmasından $n \to \infty$ giderken $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Şimdi de sabit noktanın varlığını yani, $Tx = x$ olduğunu görelim;

$$\begin{aligned} d(Tx,x) &\preceq d(Tx,Tx_n) + d(Tx_n,x) \\ &\preceq k\big(d(Tx,x_n) + d(Tx_n,x)\big) + d(x_{n+1},x) \\ &\preceq k\big(d(Tx,x) + d(x,x_n) + d(x_{n+1},x)\big) + d(x_{n+1},x) \end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan da,

$$(e-k)d(Tx,x) \preceq kd(x,x_n) + (e+k)d(x_{n+1},x) \tag{4.20}$$

eşitsizliğine ulaşabiliriz. $r(k) < \frac{1}{2} < 1$ olmasından $(e-k)$ terslenebilirdir. Dolayısıyla

$$d(Tx,x) \preceq (e-k)^{-1}\big(kd(x,x_n) + (e+k)d(x_{n+1},x)\big) \tag{4.21}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (4.21) eşitsizliğinin sağ tarafına $u_n = (e-k)^{-1}\big(kd(x,x_n) + (e+k)d(x_{n+1},x)\big)$ dersek, Lemma 4.5, Lemma 4.7, Lemma 4.9 ve Lemma 4.12 den, öyle bir $u_0 \in \mathbb{N}$ var ki $n \geq u_0$ için

$$d(Tx,x) \preceq u_n \ll c \tag{4.22}$$

olur ve Lemma 4.2 den de $d(Tx,x) = \theta$ sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla $Tx = x$ olduğunu görmüş oluruz. Bu sabit noktanın tekliğini göstermek için, y gibi bir başka sabit noktanın var olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(Tx,Ty) \\ &\preceq k\big(d(Tx,y) + d(Ty,x)\big) \\ &= 2kd(x,y) \end{aligned} \tag{4.23}$$

ifadesini elde ederiz ve $n \geq 1$ için,

$$d(x,y) \preceq (2k)^n d(x,y) \tag{4.24}$$

olur. $r(k) < \frac{1}{2}$ ve Lemma 4.11 i kullanarak $n \to \infty$ götürürsek $\{(2k)^n\}$ dizisinin ve Lemma 4.12 yi kullanarak da $\{(2k)^n d(x,y)\}$ dizisinin bir c-dizisi olduğunu görebiliriz. O halde her $c \in \mathcal{A}$ ve $\theta \ll c$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_0$ için,

$$\theta \preceq d(x,y) \preceq (2k)^n d(x,y) \ll c \tag{4.25}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Lemma 4.2 den $d(x,y) = \theta$ ve buradan da $x = y$ sonucunu elde etmiş oluruz. Bu da bizi çelişkiye götürür. Böylelikle sabit noktanın tekliğini görmüş oluruz.

Teorem 4.3 [6] (X,d) bir tam koni metrik uzay ve P, $\mathcal{A}$ da bir solid koni olsun. Her $x, y \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü spektral yarıçapı $r(k) < \frac{1}{2}$ olan $k \in P$ için,

$$d(Tx,Ty) \preceq k\big(d(Tx,x) + d(Ty,y)\big) \tag{4.26}$$

koşulunu sağlar ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat: $x_0 \in X$, $x_n = T^n x$ ve $n \geq 1$ seçelim, büzme şartından

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n) &= d(Tx_n,Tx_{n-1}) \\ &\preceq k\big(d(Tx_n,x_n) + d(Tx_{n-1},x_{n-1})\big) \\ &= k\big(d(x_{n+1},x_n) + d(x_n,x_{n-1})\big) \end{aligned} \tag{4.27}$$

buradan da,

$$d(x_{n+1},x_n) \preceq (e-k)^{-1} k d(x_n,x_{n-1}) \tag{4.28}$$

ifadesini elde ederiz. Teorem 4.1 de gösterildiği gibi $\{x^n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Ayrıca X tam olduğundan $n \to \infty$ giderken $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Bu x noktasının T nin sabit noktası olduğunu görelim,

$$\begin{aligned} d(Tx,x) &\preceq d(Tx,Tx_n) + d(Tx_n,x) \\ &\preceq k\big(d(Tx,x) + d(Tx_n,x_n)\big) + d(x_{n+1},x) \end{aligned} \tag{4.29}$$

olduğundan

$$d(Tx, x) \preceq (e-k)^{-1}(kd(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x) \tag{4.30}$$

olur ve $u_n = (e-k)^{-1}\big(kd(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x)\big)$ dersek Lemma 4.2, Lemma 4.3, Lemma 4.4, Lemma 4.5 ve Lemma 4.7 ve Lemma 4.12 den, her $c \in \mathcal{A}$ ve $\theta \ll c$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_0$ için,

$$d(Tx, x) \preceq u_n \ll c \tag{4.31}$$

ifadesine ulaşırız. Dolayısıyla $\{u_n\}$ bir c-dizisidir. Lemma 4.2 ve Lemma 4.3 den $d(Tx, x) = \theta$ ve buradan da $Tx = x$ eşitliğini elde etmiş oluruz. Şimdi bu sabit noktanın tekliğini görelim. Bir an için bu sabit noktanın tek olmadığını y gibi bir başka sabit noktanın olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\theta \preceq d(x, y) = d(Tx, Ty) \preceq k\big(d(Tx, x) + d(Ty, y)\big) = \theta \tag{4.32}$$

olacağından $d(x, y) = \theta$ ve buradan da $x = y$ eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla bir çelişki elde etmiş olduk ve sonuç olarak bu sabit nokta tektir.

Tanım 4.4 [10] (X, d), E Banach uzayı üzerinde bir koni metrik uzay ve $N(X)$, X in boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer her $A, B \in N(X)$ için, $H: N(X) \times N(X) \to E$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlar ise:

(H1) $H(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$;

(H2) $H(A, B) = H(B, A)$;

(H3) $\forall \varepsilon \in E, \theta \ll \varepsilon$ için $\forall x \in A$, $\exists y \in B$ öyleki

$$d(x, y) \preceq H(A, B) + \varepsilon;$$

(H4) Aşağıdaki koşullardan biri doğrudur:

i) $\forall \varepsilon \in E, \theta \ll \varepsilon$ için $\forall x \in A$, $\exists y \in B$ öyleki

$$H(A, B) \preceq d(x, y) + \varepsilon;$$

ii) $\forall \varepsilon \in E, \theta \ll \varepsilon$ için $\forall x \in B$, $\exists y \in A$ öyleki

$$H(A, B) \preceq d(x, y) + \varepsilon.$$

Bu dönüşüme ***H*-koni metrik** denir.

Örnek 4.1 [10] (X,d), E Banach uzayı üzerinde bir koni metrik uzay ve $C(X)$, X in boştan farklı tüm kapalı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Her $A,B \in C(X)$ için, $H: C(X) \times C(X) \to E$ dönüşümü;

$$H(A,B) = \max\{sup_{x\in A} d(x,B), sup_{y\in B} d(y,A)\} \tag{4.33}$$

şeklinde daha önce tanımlamış olduğumuz Hausdorff metriği bir H-koni metriktir.

Tanım 4.5 [16], [17] $\mathcal{A}$ bir Banach cebiri, $X \neq \emptyset$, $s \in \mathbb{R}$ ve $s \geq 1$ olsun. Eğer bir $d: X \times X \to \mathcal{A}$ dönüşümü $\forall x,y,z \in X$ ve $\theta \in \mathcal{A}$ sıfır(null) vektörü için aşağıda verilen:

i) $\theta \preceq d(x,y)$ ve $d(x,y) = \theta \iff x = y$;

ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

iii) $d(x,y) \preceq s\big(d(x,z) + d(z,y)\big)$

koşullarını sağlar ise d dönüşümüne **koni b-metrik**, (X,d) ikilisine de **koni b-metrik uzay** denir.

Örnek 4.2 $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) \in \mathcal{A}: x,y \geq 0\} \subset \mathcal{A}$, $X = \mathbb{R}$ ve $d: X \times X \to \mathcal{A}$ dönüşümü $p > 1$ için $d(x,y) = (|x-y|^p, |x-y|^p)$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümün Tanım 4.5 in i), ii) koşullarını sağladığı açıktır. iii) koşulunun sağlandığını görelim. Her $x,y,z \in X$ için $u = x - z, v = z - y$ alırsak $u + v = x - y$ olur. Ayrıca $p > 1$ ve her $a,b \geq 0$ için

$$(\mathrm{a} + \mathrm{b})^p \preceq (2\max\{a,b\})^p \preceq 2^p(a^p + b^p) \tag{4.34}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |x-y|^p = |u+v|^p &\preceq (|u| + |v|)^p \\ &\preceq 2^p(|u|^p + |v|^p) = 2^p(|x-z|^p + |z-y|^p) \end{aligned} \tag{4.35}$$

olur. (4.35) eşitsizliğinde $s = 2^p > 1$ olacağından

$$d(x,y) \preceq s(d(x,z) + d(z,y)) \tag{4.36}$$

üçgen eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla bu dönüşüm bir koni b-metriktir. Ancak $p > 1$ ve her $a, b \geq 0$ için $(\mathrm{a} + \mathrm{b})^p > a^p + b^p$ olduğundan her $x, y, z \in X$ için $x > z > y$ alırsak

$$|x - y|^p = |u + v|^p = (u + v)^p > u^p + v^p$$
$$= (x - z)^p + (z - y)^p = |x - z|^p + |z - y|^p \quad (4.37)$$

olur. Dolayısıyla Tanım 4.2 nin iii) koşulu sağlanamadığından koni metrik değildir.

Tanım 4.6 [8] (X, d), $\mathcal{A}$ Banach cebiri üzerinde bir koni b-metrik uzay ve $N(X)$, X in boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Tanım 4.4 de verilen (H1)-(H4) koşullarını sağlayan $H: N(X) \times N(X) \to \mathcal{A}$ dönüşümüne d koni b-metriğine göre $\mathcal{A}$ üzerinde ***H*-koni *b*-metrik** denir.

Lemma 4.13 [8] $k \in P$ ve k'nın spektral yarıçapı $r(k) < 1$ olsun. Buradan her $p \in \mathbb{N}$ için;

$$\sum_{i=p}^{n} k^i \preceq k^p (e - k)^{-1}. \quad (4.38)$$

BÖLÜM 5

VEKTÖR KATSAYILI KONİ B-METRİK UZAYLARDA NADLER DÖNÜŞÜMLERİ

4. bölümde koni b-metrik tanımında reel olarak aldığımız s katsayısını bu bölümde vektör olarak alıp, vektör katsayılı koni b-metrik tanımını yapacağız. Daha sonra Nadler dönüşümünü kullanarak sabit nokta teoremini ifade edeceğiz.

Tanım 5.1 [9] $\mathcal{A}$ bir Banach cebiri, $X \neq \emptyset$, $s \in P$ ve $s \succeq e$ olsun. Eğer bir $d: X \times X \to \mathcal{A}$ dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ ve $\theta \in \mathcal{A}$ sıfır(null) vektörü için aşağıda verilen:

(vcbm1) $\theta \preceq d(x,y)$ ve $d(x,y) = \theta \iff x = y$;

(vcbm2) $d(x,y) = d(y,x)$;

(vcbm3) $d(x,y) \preceq s\big(d(x,z) + d(z,y)\big)$

koşullarını sağlar ise d dönüşümüne **vektör katsayılı koni b-metrik**, (X,d) ikilisine de **vektör katsayılı koni b-metrik uzay** denir.

Bundan sonraki kısımda (X,d) uzayını, $s \in P$ olmak üzere $s \succeq e$ vektör katsayılı koni b-metrik uzay olarak alacağız.

Örnek 5.1 $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$ Banach cebiri, genel norm ve genel noktasal çarpım ile donatılmış olsun. $X = \{1,2,3,4\}$ kümesi için $d: X \times X \to \mathcal{A}$ dönüşümü

$$d(x,y) = (|x-y|^2, |x-y|^2)$$

ile tanımlansın. Bu dönüşüm, Tanım 4.2 nin i), ii) koşullarını sağlamasına rağmen $d(1,4) > d(1,2) + d(2,4)$ için Tanım 4.2 nin iii) koşulu sağlanamadığından bir koni metrik değildir. Fakat $s = (2,2) \in P$ için Tanım 5.1 in tüm koşulları sağlanacağından bir vektör katsayılı koni b-metriktir.

Şimdi Banach cebiri üzerinde H-koni b-metrik uzay notasyonundan bahsedelim.

Tanım 5.2 (X,d), $\mathcal{A}$ Banach cebiri üzerinde bir vektör katsayılı koni b-metrik uzay olsun. Eğer Tanım 4.4 de verilen $(H1)-(H4)$ koşulları sağlar ise $(N(X),H)$ ikilisine (X,d)'ye göre $\mathcal{A}$ üzerinde **vektör katsayılı H-koni b-metrik uzay** denir.

Tanım 5.3 (X,d), $\mathcal{A}$ Banach cebiri üzerinde bir vektör katsayılı koni b-metrik uzay, $N(X)$, X'in boştan farklı tüm kapalı alt kümelerinin bir ailesi ve $(N(X),H)$ ikilisi, (X,d)'ye göre $\mathcal{A}$ üzerinde vektör katsayılı H-koni b-metrik uzayı olsun. $T: X \to N(X)$ çok değerli dönüşümü eğer her $x, y \in X$ için,

$$H(Tx,Ty) \preceq kd(x,y) \tag{5.1}$$

koşulunu sağlayan ve $sk = ks$ özelliğine sahip sk'nın spektral yarıçapı 1'den küçük, yani $r(sk) < 1$ olacak şekilde $k \in P$ var ise, $T: X \to N(X)$ dönüşümüne çok değerli büzme(contraction) dönüşümü denir.

Yukarıda verdiğimiz Tanım 5.1, Tanım 5.2 ve Tanım 5.3 ışığında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1 (X,d) bir tam vektör katsayılı koni b-metrik uzay, $s \geq e$ olmak üzere $s \in P$ nin tersi var ve $T: X \to N(X)$ çok değerli dönüşümü yukarıda tanımladığımız gibi olsun. Bu durumda eğer $sk = ks$ ise, $x \in Tx$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.

İspat: $\delta \in intP$ ve $\{\delta_n\} \subset P$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\delta_n \preceq k^{2n}\delta \tag{5.2}$$

olan bir dizi ve keyfi bir sabit $x_0 \in X$ için $x_1 \in Tx_0$ olsun. $x_0 = x_1$ olması durumunda x_0 noktası T nin bir sabit noktasıdır. $x_0 \neq x_1$ olması durumunda ise Tanım 4.4 $(H3)$'den,

$$d(x_2,x_1) \preceq H(Tx_1,Tx_0) + \delta_1 \tag{5.3}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Tümevarımdan her $n \geq 1$ için,

$$d(x_{n+1},x_n) \preceq H(Tx_n,Tx_{n-1}) + \delta_n \tag{5.4}$$

ifadesini sağlayan ve $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. Böylece yukarıda elde ettiğimiz (5.1), (5.2) ve (5.4) eşitsizliklerini kullanarak,

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_n) &\preceq H(Tx_n,Tx_{n-1})+\delta_n \preceq kd(x_n,x_{n-1})+\delta_n \\
&\preceq k(H(Tx_{n-1},Tx_{n-2})+\delta_{n-1})+\delta_n \\
&\preceq k^2 d(x_{n-1},x_{n-2})+k\delta_{n-1}+\delta_n \\
&\preceq \cdots \preceq k^{n-1}(H(Tx_1,Tx_0)+\delta_1)+\sum_{i=2}^{n} k^{n-i}\,\delta_i \\
&\preceq k^n d(x_1,x_0)+\sum_{i=1}^{n} k^{n-i}\,k^{2i}\delta \\
&\preceq k^n d(x_1,x_0)+k^n\left(\sum_{i=1}^{n} k^i\right)\delta \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. $s \succeq e$ olduğundan, her $i \geq 1$ için $s^i \succeq e$ ve $s^i k^i \succeq k^i$ olacağından (5.5) ifadesi

$$
d(x_{n+1},x_n) \preceq k^n d(x_1,x_0)+k^n\left(\sum_{i=1}^{n}(sk)^i\right)\delta \qquad (5.6)
$$

ifadesine ve Lemma 4.13 ü kullanarak da (5.6) eşitsizliği,

$$
d(x_{n+1},x_n) \preceq k^n d(x_1,x_0)+k^n(sk)(e-sk)^{-1}\delta \qquad (5.7)
$$

eşitsizliğine dönüşür. Elde ettiğimiz (5.7) eşitsizliğinin sağ tarafını k^n parantezine alıp

$$
\lambda = d(x_1,x_0)+(sk)(e-sk)^{-1}\delta \qquad (5.8)
$$

dersek

$$
d(x_{n+1},x_n) \preceq k^n\lambda \qquad (5.9)
$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi $m,n \in \mathbb{N}$ değerlerini $m > n$ olacak şekilde alalım. Tanım 5.1 (vcbm3)'den

$$
d(x_m,x_n) \preceq s^{m-n-1}d(x_{m-1},x_m)+\sum_{j=n}^{m-2} s^{j-n+1}\,d\left(x_{j+1},x_j\right) \qquad (5.10)
$$

olur. P'nin özelliklerini ve $s \succeq e$ olmasını kullanarak

$$s^{m-n-1} d(x_{m-1}, x_m) \preceq s^{m-n} d(x_{m-1}, x_m) \tag{5.11}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu durumda (5.10) ifadesi

$$d(x_m, x_n) \preceq \sum_{j=n}^{m-1} s^{j-n+1}\, d(x_{j+1}, x_j) \tag{5.12}$$

ifadesine dönüşür. (5.9) eşitsizliğini (5.12) de yerine yazarsak

$$d(x_m, x_n) \preceq \sum_{j=n}^{m-1} s^{j-n+1}\, k^j \lambda \tag{5.13}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $sk = ks$ olması gerçeğinden (5.13) eşitsizliği,

$$d(x_m, x_n) \preceq s^{-n+1} \left(\sum_{j=n}^{m-1} (sk)^j \right) \lambda \tag{5.14}$$

eşitsizliğine dönüşür. $r(sk) < 1$ olmasından ve Lemma 4.13 den (5.14) ifadesi de,

$$d(x_m, x_n) \preceq s^{-n+1} (sk)^n (e - sk)^{-1} \lambda \tag{5.15}$$

eşitsizliğine dönüşür. $s \succeq e$ ve $s^{n-1} \succeq \cdots \succeq s \succeq e$ olmasından hareket ederek, yukarıda bulduğumuz (5.15) eşitsizliğinin sağ tarafını s^{n-1} ile çarparsak,

$$d(x_m, x_n) \preceq (sk)^n (e - sk)^{-1} \lambda \tag{5.16}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Elde ettiğimiz (5.16) eşitsizliğinin sağ tarafına

$$u_n = (sk)^n (e - sk)^{-1} \lambda \tag{5.17}$$

dersek $r(sk) < 1$ olmasından, Lemma 4.7 ve Lemma 4.11 den $\{u_n\}$ dizisinin bir c-dizisi olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda her $c \in intP$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_0$ için,

$$d(x_n, x_m) \preceq u_n \ll c \tag{5.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $\{x_n\} \subset X$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X'in tam olmasından $x_n \to x$ yakınsaklığını sağlayan bir $x \in X$ vardır. Ayrıca $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olduğundan Lemma 4.12 den $\{d(x_n, x)\}$ dizisi bir c-dizisidir. O halde, her $\varepsilon \in intP$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_0$ için $d(x_n, x) \ll \frac{1}{3}s^{-1}\varepsilon$ sağlanır. Yine $n \geq 1$ için $x_n \in Tx_{n-1}$ olduğundan $(H3)$'den her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in Tx$ vardır öyleki,

$$d(x_n, y_n) \preceq (H(Tx_{n-1}, Tx) + \delta_n) \preceq kd(x_{n-1}, x) + k^{2n}\delta \tag{5.19}$$

eşitsiliği sağlanır. $s \succeq e$ için $s^{2n} \succeq e$ olacağından (5.19) ifadesini

$$d(x_n, y_n) \preceq kd(x_{n-1}, x) + k^{2n}\delta \preceq (sk)d(x_{n-1}, x) + (sk)^{2n}\delta \tag{5.20}$$

ifadesine genişletebiliriz. $r(sk) < 1$ olması ile birlikte Lemma 4.5, Lemma 4.7, Lemma 4.11 ve Lemma 4.12 yi kullanarak $\{(sk)d(x_{n-1}, x) + (sk)^{2n}\delta\}$ dizisinin de bir c-dizisi olduğunu görebiliriz. Böylece her $\varepsilon \in intP$ için öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ var ki her $n \geq n_1$ için,

$$d(x_n, y_n) \preceq \{(sk)d(x_{n-1}, x) + (sk)^{2n}\delta\} \ll \frac{2}{3}s^{-1}\varepsilon \tag{5.21}$$

ifadesini elde ederiz. Bu durumda $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ için,

$$d(y_n, x) \preceq s\big(d(y_n, x_n) + d(x_n, x)\big) \ll s\frac{2}{3}s^{-1}\varepsilon + s\frac{1}{3}s^{-1}\varepsilon = \varepsilon \tag{5.22}$$

olur ve dolayısıyla Tx içinde x'e yakınsayan bir $\{y_n\}$ dizisinin var olduğunu göstermiş oluruz. Sonuç olarak Tx kapalı olduğundan $x \in Tx$ olur.

Örnek 5.2 $\mathcal{A} = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ve $\|a\| = \sum_{1\leq i,j\leq 2}|a_{ij}|$ ile ifade edilen norma sahip olsun. $X = \mathbb{R}^2$ ve koniyi de $P = \{(a_{ij}): a_{ij} \geq 0, 1 \leq i, j \leq 2\}$ alalım. Her $x, y \in X$ için, $d: X \times X \to \mathcal{A}$ dönüşümünü

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \begin{pmatrix} |x_1 - x_2|^2 & 0 \\ 0 & |y_1 - y_2|^3 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $s = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e$ için d dönüşümünün vektör katsayılı koni b-metrik koşullarını sağladığı açıktır. X'in kapalı alt kümesi $a \otimes b = \{(x, y) \in X : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ ve kapalı alt kümelerin oluşturduğu aile de $N(X) = \{a \otimes b : a, b \geq 0\}$ olsun. Bu durumda $H : N(X) \times N(X) \to \mathcal{A}$,

$$H(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) = \begin{pmatrix} |a_1 - a_2|^2 & 0 \\ 0 & |b_1 - b_2|^3 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

ile tanımlanan H dönüşümü $\mathcal{A}$ üzerinde (X, d) ye göre bir vektör katsayılı H-koni b-metriktir. Şimdi de $T : X \to N(X)$ dönüşümünü $T(x, y) = \left|\frac{\cos x}{4}\right| \otimes \left|\frac{\cos y}{4}\right|$ ile tanımlayalım. Buradan

$$H\big(T(x_1, y_1), T(x_2, y_2)\big) \leq kd\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \tag{5.25}$$

eşitsizliğini sağlayan $k = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} \end{pmatrix}$ değerinin var olduğunu görebiliriz. Ayrıca $sk = ks$ ve $r(sk) < \frac{1}{4}$ olduğundan Teorem 5.1 gereğince T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, vektör katsayılı koni b-metrik üzerine inşa edilen H-koni b-metrik uzaylarda Nadler tipinde küme değerli büzme dönüşümleri ve ilgili sabit nokta teoremi ispat edildi. Bu tezdeki çalışmalar, klasik metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerini vektör katsayılı koni b-metrik uzaylara taşımak isteyenlere ışık tutacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Banach, S., (1922). “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales”, Fund. Math., 3:133-181.

[2] Kannan, R., (1968). “Some results on fixed points”, Bull. Calcutta Math. Soc., 60:71-76.

[3] Chatterjea, S.K., (1972). “Fixed point theorems”, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25:727-730.

[4] Nadler, S.B., (1969). “Multivalued contraction mappings”, Pacific J Math, 30:475-488.

[5] Liu, H. ve Xu, S., (2013). “Cone metric spaces with Banach algebras and Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings”, Fixed Point Theory Appl., 10 pages.

[6] Xu, S. ve Radenovic, S., (2014). “Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality”, Fix. P. Theory Appl 12 pages 13.

[7] Huang, H.P. ve Radenovic, S., (2016). “Some fixed point results of generalized Lipschitz mapping on cone b-metric spaces over Banach algebras”, J.Comput. Anal., 20:566-583.

[8] Özavsar, M., (2018). “Nadler mappings in H-cone b-metric spaces over Banach algebras”, Rendiconti del Seminario Matematico.

[9] George, R., Nabwey, H.A., Rajagopalan, R., Radenovic, S. ve Reshma, K.P., (2017). “Rectangular cone b-metric spaces over Banach algebra and contraction principle”, Fixed Point Theory and Applications.

[10] Wardowski, D., (2011). “On set-valued contractions of Nadler type in cone metric spaces”, App Math Lett, 24:275-278 12.

[11] Huang, L.G. ve Zhang, X., (2007). “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings”, J Math Anal Appl, 332:1468-1476.

[12] Kadelburg, Z. ve Radenovic, S., (2013). “A note on various types of cones and fixed point result in cone metric spaces”, Asian J. Math. Appl., Article ID ama0104.

[13] Kadelburg, Z., Pavlovic, M. ve Radenovic, S., (2010). “Common fixed point theorems for ordered contractions and quasi-contractions in ordered cone metric spaces”, Comput. Math. Appl., 59:3148-3159.

[14] Radenovic, S. ve Rhoades, B.E., (2009). “Fixed point theorem for two non-self mapping in cone metric spaces”, Comput. Math. Appl., 57:1701-1707.

[15] Jankovic, S., Kadelburg, Z. ve Radenovic, S., (2011). “On cone metric spaces:a survey”, Nonlinear Anal., 4(7):2591-2601.

[16] Huang, H. ve Radenovic, S., (2015). “Common fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings in cone b-metric spaces over Banach algebras and applications”, J Non Sci Appl 8:787-799.

[17] Hussain, N. ve Shah, M.H., (2011). “KKM mappings in cone b-metric spaces”, Comput.Math. Appl., 62:1677-1684.

[18] Radenovic, S., Simic, S., Cakic, N. ve Golubovic, Z., (2011). “A note on tvs-cone metric fixed point theory”, Math Comp Mod, 54:2418-2422.

[19] Suzuki, T., (2008). “Mizoguchi-Takashi's fixed point theorem is a real generalization of Nadler's”, J Math Anal Appl, 340: 752-755.

[20] Sintunavarat, W. ve Kumam, P., (2012). “Common fixed point theorem for cyclic generalized multivalued contraction mappings”, App Math Lett, 25: 1849-1855.

[21] Ahmed, A. ve Salunke, J.N., (2018). “Algebra cone generalized b-metric space over banach algebra and fixed point theorem of generalized lipschitz mappings”, Asian-European Journal of Mathematics, 11(No.3):1850068.

[22] Du, W.S., (2010). “A note on cone metric fixed point theory and its equivalence”, Nonlinear Anal., 72:2259-2261.

[23] Rudin, W., (1991). Functional Analysis, 2nd edn., McGraw-Hill, New York.

[24] Liu, H. ve Xu, S., (2013). Fixed Point Theory and Applications, 2013:32.

[25] Musayev, B. ve Alp, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, 1. Baskı, Balcı yayınları, Kütahya.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Erkan ZÜLFİKAR

Doğum Tarihi ve Yeri :10.01.1976/Elazığ

Yabancı Dili :İngilizce

E-posta :erkan.zulfikar@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik	Ankara Üniversitesi	2004
Lise	Matematik	Elazığ Karşıyaka Lisesi	1992

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2009-…..	PTT	Memur
2005-2009	Dersane	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Makale

1. Özavşar, M. ve Zülfikar, E., (2018). “Nadler mapping in cone b-metrik spaces with vector coefficient over Banach algebra”, Nonlinear Analysis Forum, 23(2):15-23.