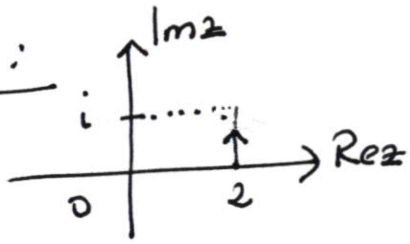
Uygulama

1°) C eğrisi $z=2$ noktasını $z=2+i$ noktasına birleştiren doğru parçası olsun.

$$I = \int_C \frac{dz}{1+z^2}$$

integralini hesaplamadan integralin (mutlak değeri) modülü için bir üst sınır belirleyiniz.

C :



$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=t \end{array}\right\} \quad 0 \le t \le 1$$

$$z(t) = 2 + i\cdot t \Rightarrow |z| = \sqrt{4+t^2}$$

$$dz = i \cdot dt$$

$$|I| = \left| \int_C \frac{dz}{1+z^2} \right| \le \int_C \frac{dz}{|1+z^2|}$$

ve

$$|z^2+1| \ge \big||z|^2-1\big| = |4+t^2-1| = |3+t^2| \ge \underbrace{|3+0^2|}_{t=0}$$

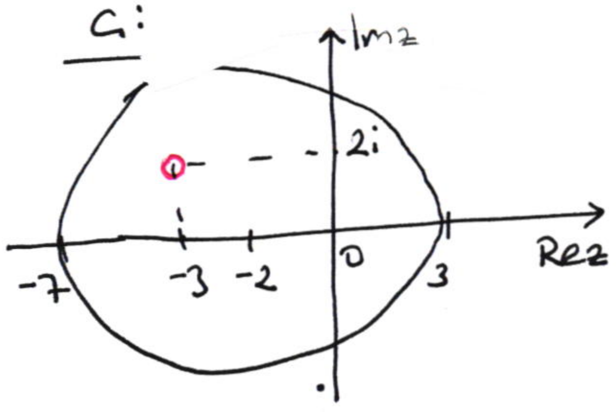
$$M = \frac{1}{3} \ge \frac{1}{|z^2+1|}$$

$$|I| \le \frac{1}{3} \underbrace{\int_C dz}_{1=L} \Rightarrow |I| \le 1/3$$

2°) C: +'ve yönlü $|z+2|=5$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{(z+i)^2}{(z+3-2i)^3}\,dz$$ integralini hesaplayınız.

C:



$z_0=-3+2i$, $|z+2|=5$ çemberi içinde kalan nokta $\Rightarrow$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0)$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{(z+i)^2}{(z-(-3+2i))^3}\,dz = \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{2}!}\cdot f^{(2)}(-3+2i)$$

$f(z)=(z+i)^2$, $z_0=-3+2i$ nok. analitik

ve $f(-3+2i)=(-3+2i+i)^2\neq 0$ dır. Dolayısıyla

$f'(z)=2(z+i)$

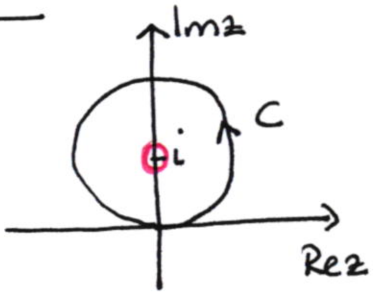
$f''(z)=2 \Rightarrow f''(-3+2i)=2 \Rightarrow$ bulunur.

$I=\pi i.2=2\pi i$ //

3°) c: +ve yönlü $|z-i|=1$ cemberi olmak üzere

$$\int_c \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}dz = ?$$ integralini hesaplayınız.

C:



$f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{(z-i)^3}$, 3. mer. kutup $z=i$

$Q(z)=e^{z^2} \Rightarrow Q(i)=e^{i^3}=e^{-i}\neq 0$

$Q(z)$, $z=i$ de analitik

Dolayısıyla

$$\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot Q''(i) \Rightarrow$$

$$\int \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2}\cdot\frac{-2}{e} = \frac{-2\pi i}{e}$$ bulunur.

$Q(z)=e^{z^2}$

$Q'(z)=2z.e^{z^2}$

$Q''(z)=2e^{z^2}+4z^2e^{z^2}\Big|_{z=i} = \frac{2}{e}-\frac{4}{e}=\frac{-2}{e}$

4°) $f(z) = \dfrac{1}{z.(1-z)}$ fonksiyonunun açılımını

a) $|z| > 1$ bölgesinde bulunuz. b) $0 < |z| < 1$ böl. bulunuz.

Ç: $f(z) = \dfrac{1}{z.(1-z)}$ $\left.\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \end{array}\right\}$ basit kutuplarıdır.

Ayrıca

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , |z| < 1$$

serisinden yararlanarak ve

$$|z| > 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{|z|} \Rightarrow 1 > \left|\frac{1}{z}\right| \text{ old.dan}$$

$$f(z) = \frac{1}{z.(1-z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot -\frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

$$= -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}} \quad , |z| > 1$$

$\underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z) = 0$

$$= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots - \frac{1}{z^{n+2}} - \cdots \; ; |z| > 1$$

bulunur.

b) $$f(z) = \frac{1}{z.(1-z)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} \quad 0 < |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + \cdots \quad , 0 < |z| < 1$$

$\underset{z=0}{\text{Res}}\, f(z) = 1$

5°) Aşağıda verilen komplex sayıların tüm değerlerini ve esas değerlerini bulunuz.

a) $\log(-4)$ b) $\log(3i)$ c) $\log(\sqrt{3}-i)$

Cevap: a) $2\ln 2 + i\cdot(\pi + 2k\pi)$; $k=0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

b) $\ln 3 + i\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$; 〃

c) $\ln 2 + i\cdot\left(\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\right)$; 〃

d) $(1+i)^i = ?$

C: $(1+i)^i = e^{i\cdot\log(1+i)} = e^{i\cdot[\ln\sqrt{2} + i\cdot(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)]}$

$= e^{i\cdot\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2k\pi} \Rightarrow \underbrace{e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\cos\left(\frac{\ln 2}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\right]}_{P.V.(1+i)^i =}$

e) $1^{\sqrt{2}} = ?$

C: $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\cdot\log 1} = e^{\sqrt{2}\cdot[\underbrace{\ln 1}_{0} + i\cdot(0^\circ + 2k\pi)]}$, $k\in\mathbb{Z}$

$= e^{i\cdot 2\sqrt{2}k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow 1^{\sqrt{2}} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$; $k\in\mathbb{Z}$

$P.V.(1^{\sqrt{2}}) = 1$ 〃