Lineer Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

Bu kısımda

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_n(x)y=0$$

Şeklinde verilen değişken katsayılı diferansiyel denklemler için seri çözümleri araştırılacaktır. Öncelikle yöntem, anlaşılabilir olması açısından, 2.mertebeden diferansiyel denklem üzerinde uygulanarak gösterilecektir. Bunun için aşağıda verilen denklemi ele alalım.

$$a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$$

Bu diferansiyel denklem için çözüm,

$$C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+....=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$$

Şeklinde aranacaktır. Burada C_n katsayıları sabitlerdir.

Bazı Tanımlar

$\frac{d^2 y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0$; $P_1(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ ve $P_2(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$ olur.

Tanım 1. Verilen bir f(x) fonksiyonu eğer,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

şeklinde seri olarak gösterilebiliyor ise $x=x_0$ civarında analitiktir denir.

Örneğin $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ fonksiyonu x=1 ve x=2 noktası dışında her yerde analitiktir.

Tanım 2. Verilen bir x_0 noktasında $P_1(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ ve $P_2(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$ fonksiyonlarının her ikisi de analitik ise, x_0 noktasına $a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$ diferansiyel denkleminin ***adi noktası*** denir. Aksi halde x_0 noktasına $a_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$ diferansiyel denkleminin ***tekil noktası*** dır, denir.

Örnek 1.

$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2+2\right)y=0$ için $P_1(x)=x$ ve $P_2(x)=x^2+2$ olur.

Tüm x değerleri için $P_1(x)=x$ ve $P_2(x)=x^2+2$ analitik olur.

Örnek 2.

$$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0$$

$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x}{(x-1)}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x(x-1)}y=0$ için $P_1(x)=\frac{x}{(x-1)}$ ve $P_2(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ olur.

$P_1(x)$, x=1 dışında her x değerinde ve $P_2(x)$, x=1 ve x=0 noktaları dışındaki tüm x değerlerinde analitik olur. Diğer bir değişle, x=0 ve x=1 noktaları verilen diferansiyel denklem için tekil noktalar olur.

Teorem.

Farz edelim ki, $x=x_0$ noktası $a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$ diferansiyel denkleminin adi noktası olsun. Bu durumda bu diferansiyel denklemin birbirinden lineer bağımsız ve her biri $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$ serisi biçiminde gösterilebilen iki çözümü vardır ve bu seriler, belirli koşullar çerçevesinde, $|x-x_0|<R$ (R>0) aralığında yakınsaktırlar.

Bu teorem

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$$

Diferansiyel denklemin seri çözümlerinin bulunması için gerekli koşulları verir. Örnek 2 de verilen diferansiyel denklem için uygulayalım. Buna göre x=2 noktası,

$(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0$ diferansiyel denklemin adi noktasıdır. Çözüm,

$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-2)^n$ seri çözümü vardır. Dolayısıyla,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-2)^n=C_0+C_1(x-2)+C_2(x-2)^2+C_3(x-2)^3+...$$

$$\frac{dy(x)}{dx}=C_1+2C_2(x-2)+3C_3(x-2)^2+...=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n(x-2)^{n-1}$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=2C_2+6C_3(x-2)+...=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_n(x-2)^{n-2}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}+(x-1)x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_n(x-2)^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nC_n(x-2)^{n-1}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-2)^n=0$$

Serisi düzenlenirse (x-2) ye göre

$$K_0+K_1(x-2)+K_2(x-2)^2+K_3(x-2)^3+....=0$$

şeklinde bulunur. Son ifadede $1,(x-2),(x-2)^2,(x-2)^3,...$ fonksiyonları kendi aralarında lineer bağımsız olduğu için bu eşitliğin sağlanması için ancak ve ancak katsayılarının her biri sıfır olmalı yani, $K_1=K_2=K_3=...=0$ bu eşitlikten her bir C_n katsayısı bulunur.

Örnek 3.

$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2+2\right)y=0$ denklemini $x=x_0=0$ noktası civarında seri yardımıyla çözelim.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+...,$$

$$\frac{dy(x)}{dx}=C_1+2C_2x+3x^2+...=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1},\quad\frac{d^2y(x)}{dx^2}=2C_2+6C_3x+...=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}$$

Diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}+\left(x^2+2\right)\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(x^{n+2}+2x^n\right)=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$2C_2+2C_0+\left(6C_3+3C_1\right)x+\left[\sum_{n=2}^{\infty}\left((n+2)(n+1)C_{n+2}+nC_n+C_{n-2}+2C_n\right)x^n\right]=0$$

Sağ taraf sıfır olduğuna göre, x in kuvvetlerine göre düzenlenmiş her terimin katsayısı ayrı ayrı sıfır olur yani,

$$2C_0+2C_2=0$$

$$3C_1+6C_3=0$$

$$\left((n+2)(n+1)C_{n+2}+nC_n+C_{n-2}+2C_n\right)=0\ ,\ n\geq 2$$

Sistem denklemlerinden,

$$C_2=-C_0$$

$$C_3=-\tfrac{1}{2}C_1$$

$C_{n+2}=-\dfrac{(n+2)C_n+C_{n-2}}{(n+1)(n+2)}\ ,\ n\geq 2$ bulunur. Bu rekürans bağıntısı yardımıyla diğer katsayılar örneğin,

$$C_4=-\frac{4C_2+C_0}{12}=\tfrac{1}{4}C_0,\ C_5=\tfrac{3}{40}C_0,\ldots$$

bulunur. Dolayısıyla verilen diferansiyel denklemin seri çözümü,

$$y(x)=C_0\left(1-x^2+\tfrac{1}{4}x^4+\ldots\right)+C_1\left(x-\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{3}{40}x^5+\ldots\right)$$

bulunur.

Örnek 4.

$$\left(x^2-1\right)\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+xy=0$$

$$y(0)=4$$
$$y'(0)=6$$

Başlangıç değer probleminin $x=0$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz.

$P_1(x)=\dfrac{3x}{x^2-1}\quad P_2(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ için x=1 ikinci dereceden tekil noktadır ancak x=0 noktasında her iki fonksiyon da analitiktir. Bu nokta civarında seri çözüm bulunabilir.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\dots,$$

$$\frac{dy(x)}{dx}=C_1+2C_2x+3x^2+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1},$$

$\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}=2C_2+6C_3x+\dots=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)C_nx^{n-2}$ diferansiyel denklemde yerine yazalım ve düzenleyelim.

$$\left(x^2-1\right)\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)C_nx^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty}nC_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)C_n\left(x^n-x^{n-2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}3nC_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)C_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)C_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}3nC_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)C_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)C_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}3nC_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)C_nx^n-2C_2-6C_3x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)C_{n+2}x^n+3C_1x+\sum_{n=2}^{\infty}3nC_nx^n+C_0x+\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-1}x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(n(n-1)C_n-\left(n+2\right)\left(n+1\right)C_{n+2}+3nC_n+C_{n-1}\right)x^n\right]-2C_2+\left(-6C_3+3C_1+C_0\right)x=0$$

Sağ taraf sıfır olduğuna göre, x in kuvvetlerine göre düzenlenmiş her terimin katsayısı ayrı ayrı sıfır olur yani,

$$-2C_2=0$$

$$-6C_3+3C_1+C_0=0$$

$$\left(n(n-1)C_n-\left(n+2\right)\left(n+1\right)C_{n+2}+3nC_n+C_{n-1}\right),\ n\geq 2$$

Sistem denklemlerinden,

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \tfrac{1}{6}C_0 + \tfrac{1}{2}C_1$$

$C_{n+2} = \dfrac{\left(n^2+2n\right)C_n + C_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$, $n \geq 2$ bulunur. Bu rekürans bağıntısı yardımıyla diğer katsayılar örneğin,

$$C_4 = \frac{8C_2 + C_1}{12} = \tfrac{1}{12}C_1, \dots$$

bulunur. Dolayısıyla verilen diferansiyel denklemin seri çözümü,

$$y(x) = C_0\left(1 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{8}x^5 + \dots\right) + C_1\left(x + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{3}{8}x^5 + \dots\right)$$

bulunur. Başlangıç koşulları uygulanırsa, $C_0 = 4$ ve $C_1 = 6$ bulunur. Çözümde yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$y(x) = 4 + 6x + \tfrac{11}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{11}{4}x^5 + \dots$$

Örnek 5.

$$\left(x^2-1\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$y(2) = 4$$
$$y'(2) = 6$$

Başlangıç değer probleminin $x = 2$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz.

Problemin çözümü

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(x-2\right)^n = C_0 + C_1\left(x-2\right) + C_2\left(x-2\right)^2 + C_3\left(x-2\right)^3 + \dots$$

şeklinde aranmalıdır. Ancak bu tip problemlerde $x - 2 = t$ (veya $x = t + 2$)değişken dönüştürmesi işlemleri kolaylaştıracaktır. O halde,

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$ $\left(\dfrac{dt}{dx} = 1\right)$ ve $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ ve diferansiyel denklem düzenlenirse,

$$\left((t+2)^2-1\right)\frac{d^2y}{dt^2}+3(t+2)\frac{dy}{dt}+(t+2)y=0 \text{ için}$$

$$\left(t^2+4t+3\right)\frac{d^2y}{dt^2}+(3t+6)\frac{dy}{dt}+(t+2)y=0$$ için çözüm t=0 civarında aranacaktır.

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n=C_0+C_1t+C_2t^2+C_3t^3+\ldots$$ için,

$$\frac{dy(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}nC_nt^{n-1},\ \frac{d^2y(t)}{dt^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nt^{n-2}$$ diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(t^2+4t+3\right)\left\{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nt^{n-2}\right\}+(3t+6)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}nC_nt^{n-1}\right\}+(t+2)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^n\right\}=0$$

$$\left\{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)C_nt^n+\sum_{n=2}^{\infty}4n(n-1)C_nt^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}3n(n-1)C_nt^{n-2}\right\}+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}3nC_nt^n+\sum_{n=1}^{\infty}6nC_nt^{n-1}\right\}+$$
$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}2C_nt^n\right\}=0$$

Seri toplamında ilk terimler genel olarak, t^2, t^1 ve t^0 li terimlerden başlamaktadır. Bazı düzenlemeler yapalım,

$$\sum_{n=2}^{\infty}4n(n-1)C_nt^{n-1}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}4(n+1)(n)C_{n+1}t^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}3n(n-1)C_nt^{n-2}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}3(n+2)(n+1)C_{n+2}t^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}6nC_nt^{n-1}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}6(n+1)C_{n+1}t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_nt^{n+1}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}t^n$$

Bu ifadeler seride uygun yerlere yazılarak düzenlenir,

$$\left\{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4(n+1)(n)C_{n+1}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+2)(n+1)C_{n+2}t^n\right\} + \left\{\sum_{n=1}^{\infty} 3nC_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6(n+1)C_{n+1}t^n\right\} +$$
$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n t^n\right\} = 0$$

Her terimde seri toplamlarında ilk terim t^2 olacak şekilde baştan uygun adet terim seriden dışarı çıkartılır,

$$\left\{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n t^n + 8C_2 t + \sum_{n=2}^{\infty} 4(n+1)(n)C_{n+1}t^n + 6C_2 + 18C_3 t + \sum_{n=2}^{\infty} 3(n+2)(n+1)C_{n+2}t^n\right\} +$$
$$\left\{3C_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} 3nC_n t^n + 6C_1 + 12C_2 t + \sum_{n=2}^{\infty} 6(n+1)C_{n+1}t^n\right\} +$$
$$\left\{C_0 t + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1}t^n + 2C_0 + 2C_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} 2C_n t^n\right\} = 0$$

$$\left(6C_2 + 6C_1 + 2C_0\right) + \left(18C_3 + 20C_2 + 5C_1 + C_0\right)t +$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)C_n + 4n(n+1)C_{n+1} + 3(n+2)(n+1)C_{n+2} + 3nC_n + 6(n+1)C_{n+1} + C_{n-1} + 2C_n\right]t^n = 0$$

t' nin derecelerine göre serinin terimler düzenlenir ve sıfıra eşitlenirse,

$$C_2 = -\tfrac{1}{3}\left(3C_1 + C_0\right)$$
$$C_3 = \tfrac{-1}{18}\left(20C_2 + 5C_1 + C_0\right) = \tfrac{5}{6}C_1 + \tfrac{17}{54}C_0$$
$$\left(3n^2 + 9n + 6\right)C_{n+2} + \left(4n^2 + 10n + 6\right)C_{n+1} + \left(n^2 + 2n + 2\right)C_n + C_{n-1} = 0, \quad n \geq 2$$

Bağıntılarından tüm katsayılar C_0 ve C_1 cinsinden belirlenir. Dolayısıyla,

$$y(t) = C_0\left\{1 - \tfrac{1}{3}t^2 + \tfrac{17}{54}t^3 - \tfrac{89}{324}t^4 + \ldots\right\} + C_1\left\{t - t^2 + \tfrac{5}{6}t^3 - \tfrac{26}{36}t^4 + \ldots\right\}$$

$t = x - 2$ ters değişken dönüşümü kullanılarak,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(x-2\right)^n = C_0 + C_1\left(x-2\right) + C_2\left(x-2\right)^2 + C_3\left(x-2\right)^3 + \ldots$$

$$y(t) = C_0\left\{1 - \tfrac{1}{3}\left(x-2\right)^2 + \tfrac{17}{54}\left(x-2\right)^3 - \tfrac{89}{324}\left(x-2\right)^4 + \ldots\right\} + C_1\left\{\left(x-2\right) - \left(x-2\right)^2 + \tfrac{5}{6}\left(x-2\right)^3 - \tfrac{26}{36}\left(x-2\right)^4 + \ldots\right\}$$

seri çözümü bulunur. Başlangıç koşulları yerine yazılarak,

$y(2)=4$ için $C_0 = 4$

$y'(2)=6$ için $C_1 = 6$ bulunur.

Yakınsaklık

$P_1(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$ $\quad P_2(x) = \dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}$ fonksiyonları için $x = x_0$ adi nokta olsun.

$P_1(x) \Rightarrow |x - x_0| < R_1$ ve $P_2(x) \Rightarrow |x - x_0| < R_2$ olacak şekilde R_1 ve R_2 bulunabiliyorsa, seri çözüm yakınsaktır.

Örnek olarak

$P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 + 2$ ve $x_0 = 0$ için

$P_1(x) \Rightarrow |x - 0| < R_1$ ve $P_2(x) \Rightarrow |x - 0| < R_2$ bulunabilir.

$P_1(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$, $P_2(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ ve $x_0 = 0$ için

$R_1 = R_2 = 1$ seçilirse, $P_1(x) \Rightarrow |x| < 1$ ve $P_2(x) \Rightarrow |x| < 1$ için seri yakınsak olur.

Uygulamalar

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin çözümünü, $x = 0$ noktası civarında kuvvet serisi olarak bulunuz.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(2x^2 + 1\right)y = 0$
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(3x + 2\right)y = 0$
4. $\left(x^3 - 1\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

   $y(0) = 0$

   $y'(0) = 2$
5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

$y(0)=1$

$y'(0)=0$

6. $\left(2x^2-3\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

   $y(0)=-1$

   $y'(0)=5$

7. $\left(1-x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$ n=sbt. Legendre denklemidir.
   a. x=0 adi noktası civarında diferansiyel denklemin kuvvet serisi biçiminde iki lineer bağımsız çözümünü bulun
   b. Eğer n tam pozitif sayı ise (a) şıkkında bulunan lineer bağımsız çözümlerden birinin, n. dereceden polinom olduğunu gösterin.

ÖDEV Yukarıda verilen 7 sorulardan, ilk üç sorudan 1 tane ve geri kalanlardan 1 tane olmak üzere toplam 2 soruyu çözünüz.