Yığılma Noktası

$A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer

$$\forall \delta > 0 \quad (a-\delta, a+\delta) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

ise a elemanına A'nın yığılma noktası denir.

Tanım: $f: D \to \mathbb{R}$ ve a, D'nin yığılma noktası olsun.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \text{ ve } x \in D \implies |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Not: a elemanının D'nin yığılma noktası oluşu

$$0 < |x-a| < \delta \text{ ve } x \in D$$

ifadesini sağlayacak x lerin mevcut oluşunu garanti eder. Aksi taktirde (a, D'nin yığılma noktası olmaz ise)

$$0 < |x-a| < \delta \text{ ve } x \in D \implies |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{----} (\star)$$

ifadesini (önermesini) yanlışlayacak x mevcut olmadığından ifadesi her L değeri için doğru olur. Bu durum ($\star$) ifadesi her L değeri için doğru olur. Bu durum "boş küme, her kümenin alt kümesidir" bilgisine benzemektedir çünkü burada da boş kümede eleman bulamıyoruz ki diğer kümenin elemanı olmasın.

a, D'nin yığılma noktası olmadığı zaman ($\star$) ifadesi her L değeri için doğru olduğunu belirtmiştik. Bu ise limit değerinin birden çok olduğunu söyler ki bu da fonksiyonların limit kavramına bir özellik kazandırmaz. Bu yüzden a'nın yığılma noktası oluşu önemlidir.

Soru: Limit tanımını kullanarak aşağıdakileri gösteriniz.

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x-5=1$, b) $\lim\limits_{x\to 2} x^3=8$, c) $\lim\limits_{x\to 1/2} 1/x=2$.

Çözüm:

a) $0<|x-2|<\delta$ iken

$$|(3x-5)-1| = 3.|x-2| < 3.\delta .$$

O halde

$\varepsilon>0$ $\exists\, \delta=\varepsilon/3>0$: $0<|x-2|<\delta \Rightarrow |(3x-5)-1| = 3|x-2| < 3.\delta = \varepsilon$.

b) $0<|x-2|<\delta$ iken

$$|x^3-8| = |x-2|.\underbrace{|x^2+2x+4|}_{\substack{\leq K,\ \text{sınırı} \\ \text{bulmaya çalışıcağız.}}} < \delta.K$$

Eğer $\delta\leq 1$ ise

$|x-2|<1$ 'den $|x^2+2x+4|\leq 19$ ile sınırlandırmış oluruz.

$(1<x<3)$ $(K=19)$

Böylece

$\varepsilon>0$ değeri için $\delta=\min\{1, \varepsilon/19\}>0$ seçelim;

$0<|x-2|<\delta\ (\leq 1, \varepsilon/19) \Rightarrow |x^3-8| = |x-2|.|x^2+2x+4|$

$< \delta.19 \leq \varepsilon$.

c) $0<|x-1/2|<\delta$ iken

$$\left|\frac{1}{x}-2\right| = \left|x-\frac{1}{2}\right| \underbrace{\left|\frac{2}{x}\right|}_{\substack{\leq K,\ \text{sınırı} \\ \text{bulmaya çalışıyoruz.}}} < \delta.K$$

Eğer $\delta\leq 1/4$ ise

$|x-1/2|<1/4$ 'den $\left|\frac{2}{x}\right|\leq 8$ ile sınırlandırmış oluruz.

$\left(\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}\right)$ $(K=8)$

Böylece

$\varepsilon>0$ $\exists\, \delta=\min\{1/4, \varepsilon/8\}>0$: $0<|x-1/2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-2\right| = \left|x-\frac{1}{2}\right|.\left|\frac{2}{x}\right|$

$< \delta.8 \leq \varepsilon$.

Soru:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , x\in\mathbb{Q} \\ -1 & , x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonunun herhangi $x=a\in\mathbb{R}$ sayısı için limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Varsayalım ki $x=a$ da f'nin limiti olsun (limit değerine L diyelim). O halde,

$\varepsilon=1$ için $\exists\delta>0: 0<|x-a|<\delta$ ($ve\ x\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow |f(x)-L|<1$ dir.

Biliyoruz ki her açık aralık hem rasyonel hem de irrasyonel sayılar içerdiğinden

$x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$ rasyonel ise $|f(x)-L|=|1-L|<1$

irrasyonel ise $|f(x)-L|=|1+L|<1$ olur.

Ancak

$2=1-L+1+L\leq|1-L|+|1+L|<1+1=2$, $2<2$ Çelişki

O halde f'nin $x=a$ da limiti yoktur.

Teorem: (fonksiyonların limitinin diziler aracılığı ile belirlenmesi)

$f: A\to\mathbb{R}$, a A'nın yığılma noktası ve $\ell\in\mathbb{R}$ olsun.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell \iff x_n\neq a$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ olacak şekilde A kümesindeki her (x_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\ell$.

İspat:

$\Rightarrow$ Kabul edelim ki

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\ell \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: x\in A$ ve $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$x_n\neq a$ ve $\lim x_n=a \Rightarrow \delta>0$ için $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N$ için $0<|x_n-a|<\delta$ olur.

$\forall n\geq N$ için $0<|x_n-a|<\delta$ old. $|f(x_n)-\ell|<\varepsilon$ olur.

Sonuç olarak

$\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |f(x_n)-\ell|<\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\ell$.

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq\ell$ olsun. (Çelişki ile ispat yapılacak)

$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\delta>0$ için $\exists x_\delta\in A$ öyle ki $0<|x_\delta-a|<\delta$ ve $|f(x_\delta)-\ell|\geq\varepsilon_0$

$\delta=1/n$ alınırsa

$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in A$ öyle ki $0<|x_n-a|<1/n$ ve $|f(x_n)-\ell|\geq\varepsilon_0$

Sıkıştırma teo'den $x_n\to a$. Böylece kabulden

$0=\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-\ell|\geq\varepsilon_0$. Çelişki!!

Soru:

a) $f(x)=\sin 1/x$ olsun $\lim_{x\to 0} f(x)$ mevcut olup olmadığını araştır.

b) $\lim_{x\to 0} x \sin 1/x = 0$ old. göster.

Çözüm:

a) $x_n = 1/\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $f(x_n)=\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=1$ olup

$x_n \to 0$ $f(x_n) \to 1$

ayrıca

$y_n = 1/-\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $f(y_n)=\sin(-\frac{\pi}{2}+2n\pi)=-1$ olup

$f(y_n) \to -1$

$y_n \to 0$

$-1 \neq 1$ old. limit mevcut değildir.

b) 1. Yol (Sıkıştırma Teo'den)

$0 \leq |x \sin 1/x - 0| \leq |x|$ olup

~~Sıkıştırma~~ Sıkıştırma Teo'den $\lim_{x\to 0} |x \sin 1/x| = 0 \Rightarrow \lim x \sin \frac{1}{x} = 0$.

2. Yol (Tanımdan)

$|x \sin 1/x| \leq |x|$ old

$\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon > 0$: $0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| < \delta = \varepsilon$.

Soru: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x=a$ noktasında sürekli ve $f(a)>0$ olsun. Gösteriniz ki öyle bir $\delta>0$ vardır ki

$\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ için $f(x)>0$ dır.

Çözüm:

f, $x=a$'da sürekli olduğundan

$\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ için $\exists \delta > 0$: $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{f(a)}{2}$.

Buradan $x \in (a-\delta, a+\delta)$ ise

$$f(a)-\frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a)+\frac{f(a)}{2} \Rightarrow 0 < \frac{f(a)}{2} < f(x)$$

$$\Rightarrow 0 < f(x), \; x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Soru:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ limitinin var olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{2 . \cos\frac{x}{2} . \sin\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\cos\frac{x}{2} . \sin\frac{x}{2}}{\sqrt{2} . \left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

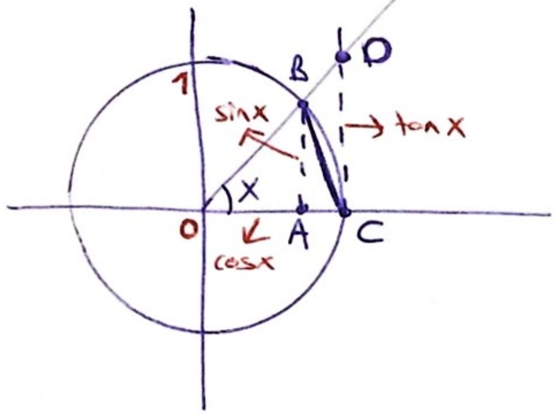
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = 2 . \sin\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{2} \\ \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \end{array} \right.$$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = 1$ ve $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = -1$ old.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = \sqrt{2}$ ve $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = -\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \neq -\sqrt{2}$ old. limit yoktur.

$0 < x < \pi/2$



$$A(\overset{\Delta}{OCB}) < A(O\widehat{CB}) < A(\overset{\Delta}{OCD})$$

$$\frac{\sin x}{2} < \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{x}{2\pi} < \frac{\tan x}{2}$$

$$\sin x < x < \tan x \quad \text{---(i)}$$

- $0 < \sin x < x$ old. Sıkıştırma teo'den $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0$, ayrıca $\lim\limits_{x \to 0^-} \sin x = \lim\limits_{h \to 0^+} \sin(-h) = \lim\limits_{h \to 0^+} -\sin h = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \sin x = 0}$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1.$

- (i)'den $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ sıkıştırma teo'den

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

- $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \lim\limits_{h \to 0} \sin(a+h) = \lim\limits_{h \to 0} (\sin a . \overset{\nearrow 1}{\cancel{\cos h}} + \overset{\nearrow 0}{\cancel{\sin h}} . \cos a) = \sin a$

  $(x-a=h)$

- Benzer şekilde $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$

  Yani, sin ve cos fonksiyonları süreklidirler.