T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FIBONACCI VEKTÖRLERİN ÖKLİD, KOMPLEKS VE LORENTZ GEOMETRİSİ

KÜBRA ÇETİNBERK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE

İSTANBUL, 2017

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FIBONACCI VEKTÖRLERİN ÖKLİD, KOMPLEKS VE LORENTZ GEOMETRİSİ

Kübra ÇETİNBERK tarafından hazırlanan tez çalışması 22.12.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

İstanbul Gelişim Üniversitesi _____

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında öncelikle, Fibonacci sayıları ve vektörleri için temel kavramlar verilmiş ve ardından, Fibonacci $3-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım anti-simetrik matris yardımıyla tekrar ele alınarak, bu vektörel çarpıma ait özellikler verilmiştir. Ayrıca, Fibonacci $4-$vektörler ve $7-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım tanımlanmış, ardından, Fibonacci $7-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım anti-simetrik matris yardımıyla tekrar elde edilerek bu vektörel çarpıma ait özellikler ele alınmıştır. Bunlara ek olarak, kompleks Fibonacci $3-$vektörler araştırılmıştır. Son olarak, Fibonacci vektörler Lorentz-Minkowski uzayında incelenmiştir.

Tez çalışmamın her aşamasında benden desteğini, emeğini, yardımlarını ve bilgisini esirgemeyen, sabır ve anlayışla öğrenimime katkı sağlayan, çalışmalarımı özenle yönlendiren çok kıymetli ve saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Salim YÜCE' ye en içten teşekkürlerimi sunarım. Başta Yrd. Doç. Dr. Nurten GÜRSES, Arş. Gör. Gülsüm Yeliz SAÇLI ŞENTÜRK ve Arş. Gör. Esra ERKAN hocalarım olmak üzere hocamız başkanlığında çalışmalarını sürdüren geometri seminer grubuna teşekkürlerimi sunarım.

Yine çalışmalarım sürecinde, maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bana destek olan tüm arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Aralık, 2017

Kübra ÇETİNBERK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vii

ŞEKİL LİSTESİ viii

ÇİZELGE LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xi

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 2

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1 Leonardo Fibonacci, Lucas ve Tavşan Problemi 3
2.1.1 Leonardo Fibonacci 3
2.1.2 Lucas 5
2.1.3 Tavşan Problemi 6
2.2 Fibonacci Sayıları ve Özellikleri 7
2.2.1 α ve β'nın Özellikleri 10
2.2.2 Fibonacci Sayılarının Özellikleri 16
2.3 Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları ve Özellikleri 32
2.4 Kompleks Fibonacci Sayıları ve Özellikleri 52
2.5 Genelleştirilmiş Kompleks Fibonacci Sayıları 56
2.6 Fibonacci Vektörler 56
2.6.1 Fibonacci $3-$ Vektörler 56
2.6.1.1 Fibonacci $3-$ Vektörler için Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm 57

2.6.1.2 Fibonacci $3-$ Vektörler için Öklid Anlamında Vektörel ve Karma Çarpım.....61
2.6.2 Fibonacci $4-$ Vektörler.....65
2.6.2.1 Fibonacci $4-$ Vektörler için Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm66
2.6.3 Fibonacci $7-$ Vektörler.....68
2.6.3.1 Fibonacci $7-$ Vektörler için Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm69
2.6.4 Fibonacci $r-$ Vektörler.....72
2.6.4.1 Fibonacci $r-$ Vektörlerin Özellikleri.....72
2.6.4.2 Fibonacci $r-$ Vektörler Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm.....78
2.6.5 Fibonacci Vektörlerin $x^2-x-1=0$ Denklemine ait Özdeğerlerle ve Özvektörlerle İlişkisi.....80
2.7 Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ Vektörler.....95
2.7.1 Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ Vektörler için Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm.....96
2.7.2 Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ Vektörler için Öklid Anlamında Vektörel Çarpım.....99

BÖLÜM 3

ANTİ-SİMETRİK MATRİS YARDIMIYLA VEKTÖREL ÇARPIM.....103

3.1 Fibonacci $3-$ Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Öklid Anlamında Vektörel Çarpım.....103
3.1.1 Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Elde Edilen Öklid Anlamında Vektörel Çarpımın Özellikleri.....106
3.2 Fibonacci $4-$ Vektörler için Öklid Anlamında Vektörel Çarpım.....121
3.3 Fibonacci $7-$ Vektörler için Öklid Anlamında Vektörel Çarpım.....125
3.3.1 Fibonacci $7-$ Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımıyla Öklid Anlamında Vektörel Çarpım.....128
3.3.2 Fibonacci $7-$ Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımıyla Elde Edilen Öklid Anlamında Vektörel Çarpımın Özellikleri.....132

BÖLÜM 4

KOMPLEKS FIBONACCI VEKTÖRLER.....143

4.1 Kompleks Fibonacci $3-$ Vektörler.....143
4.1.1 Kompleks Fibonacci $3-$ Vektörler için Hermit Anlamında İç Çarpım ve Norm 144
4.1.2 Kompleks Fibonacci $3-$ Vektörlerin Anti-Simetrik Matris Yardımıyla Vektörel Anlamda Çarpımı.....146
4.1.3 Kompleks Fibonacci $3-$ Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Elde Edilen Vektörel Çarpımın Özellikleri.....150

BÖLÜM 5

FIBONACCI VEKTÖRLERİN LORENTZ GEOMETRİSİ.....157

5.1 Fibonacci $3-$ Vektörlerin Lorentz Anlamında İncelenmesi.....157

5.1.1 Fibonacci $3-$ Vektörlerin Lorentz Anlamında İç Çarpımı ve Normu 157
5.1.2 Fibonacci $3-$ Vektörler için Lorentz Anlamında Vektörel Çarpım .. 159
5.1.3 Fibonacci $3-$ Vektörlerin Lorentz Anlamında Vektörel Çarpımının Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Tekrar Elde Edilmesi 161
5.2 Fibonacci $4-$ Vektörlerin Lorentz Anlamında İncelenmesi 164
5.2.1 Fibonacci $4-$ Vektörlerin Lorentz Anlamında İç Çarpımı ve Normu 164
5.2.2 Fibonacci $4-$ Vektörlerin Lorentz Anlamında Vektörel Çarpımı 166
5.3 Fibonacci $7-$ Vektörlerin Lorentz Anlamında İncelenmesi 167
5.3.1 Fibonacci $7-$ Vektörlerin Lorentz Anlamında İç Çarpımı ve Normu 167
5.3.2 Fibonacci $7-$ Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Lorentz Anlamında Vektörel Çarpım 169

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 173

KAYNAKLAR 174

ÖZGEÇMİŞ 175

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
F_n	$n.$ Fibonacci sayısı
L_n	$n.$ Lucas sayısı
C_n	$n.$ kompleks Fibonacci sayısı
$\overrightarrow{F}_n$	$n.$ Fibonacci vektör
$\overrightarrow{L}_n$	$n.$ Lucas vektör
$\overrightarrow{H}_n$	$n.$ genelleştirilmiş Fibonacci vektör
$\overrightarrow{C}_n$	$n.$ kompleks Fibonacci vektör
$\mathbb{F}_n$	Fibonacci $3-$vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris
$S_{\overrightarrow{F}_n}$	Fibonacci $7-$vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris
$\mathbb{H}_n$	Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris
$\mathbb{C}_n$	Kompleks Fibonacci $3-$vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris
$\langle , \rangle$	İç çarpım fonksiyonu
$\langle , \rangle_L$	Lorentz anlamında iç çarpım
$\wedge$	Fibonacci $3-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım
$\wedge_L$	Fibonacci $3-$vektörler için Lorentz anlamında vektörel çarpım
$\otimes$	Fibonacci $4-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım
$\otimes_L$	Fibonacci $4-$vektörler için Lorentz anlamında vektörel çarpım
$\times$	Fibonacci $7-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım
$\times_L$	Fibonacci $7-$vektörler için Lorentz anlamında vektörel çarpım

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Leonardo Fibonacci..... 5
Şekil 2.2 Lucas 6

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2. 1 Tavşan çiftlerin sayısı……..7
Çizelge 2. 2 Beş nesil soyağacı büyümesi……33

ÖZET

FIBONACCI VEKTÖRLERİN ÖKLİD, KOMPLEKS VE LORENTZ GEOMETRİSİ

Kübra ÇETİNBERK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tezde Fibonacci vektörler, genelleştirilmiş Fibonacci vektörler, özellikleri, Fibonacci vektörler için Öklid anlamında iç çarpım, vektörel çarpım ve karma çarpım ele alınmıştır. Çalışma altı temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir. İkinci bölümde tezin içinde kullanılacak olan temel kavramlar anlatılmıştır. Tezin orijinal kısımlarından biri olan üçüncü bölümde ise anti-simetrik matris yardımıyla Fibonacci $3-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım yeniden ele alınmış, Fibonacci $4-$vektörler ve Fibonacci $7-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım ve karma çarpım tanımlanmıştır. Ayrıca Fibonacci $7-$vektörler için vektörel çarpım anti-simetrik matris yardımıyla tekrar elde edilmiştir. Dördüncü bölüm tezin bir diğer orijinal kısmı olup kompleks Fibonacci $3-$vektörler incelenmiş ve vektörel çarpım tanımlanmıştır. Tezin yine orijinal kısımlarından biri olan beşinci bölümde ise Fibonacci $3-$vektörlerin, Fibonacci $4-$vektörlerin ve Fibonacci $7-$vektörlerin Lorentz geometrisi incelenmiştir. Son olarak altıncı bölümde ise sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci vektörler, genelleştirilmiş Fibonacci vektörler, kompleks vektörel çarpım, anti-simetrik matris, vektörel çarpım, Lorentz iç çarpımı,

ABSTRACT

EUCLIDEAN, COMPLEX AND LORENTZIAN GEOMETRY OF THE FIBONACCI VECTORS

Kübra ÇETİNBERK

Department of Arts and Sciences

MSc. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Salim YÜCE

This study has been subject to Fibonacci vectors, generalized Fibonacci vectors and properties of them. Also, inner product, vector product and triple scalar product for Fibonacci vectors are given. This thesis consists of six chapters. In the first chapter the aim of the thesis and the review of the literature are given. The basic concepts are described in the second chapter. The third chapter of the thesis is one of the original part. In the third chapter the corresponding anti-symmetric matrix for Fibonacci $3-$ vectors are examined. The vector product by using this anti-symmetric matrix is reconsidered. The vector product for Fibonacci $4-$ vectors and Fibonacci $7-$ vectors are described. Furthermore, the corresponding anti-symmetric matrix for Fibonacci $7-$ vectors and properties of vector product by using this anti-symmetric matrix are given. Moreover, in the fourth chapter, complex Fibonacci $3-$ vectors are investigated, vector product of two complex Fibonacci vectors is defined and properties of vector product are given. Furthermore, in the fifth chapter Fibonacci $3-$ vectors, Fibonacci $4-$ vectors and Fibonacci $7-$ vectors are examined at Lorentz-Minkowski space. In the sixth chapter overview of the study is given.

Keywords: Fibonacci vectors, vector product, anti-symmetric matrix, complex vector product, Lorentzian inner product

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Fibonacci sayılarıyla çalışan birinin güzel sonuçlar elde ettiğini görmek şaşırtıcı değildir. Bu yüzden, Fibonacci sayıları özellikle cebir alanında çalışan matematikçilerin ilgilendikleri bir konu olmuştur. Son yıllarda ise geometri alanında çalışanlar da Fibonacci sayılarıyla ilgilenmeye başlamışlar ve Fibonacci vektörleri tanımlayarak Fibonacci sayılarına geometrik bir anlam katmayı amaçlamışlardır. K. T. Atanassov, V. Atanassova, A. G. Shannon ve J. C. Turner [1] tarafından yapılan çalışmada Fibonacci $3-$ vektörler tanımlanmış olup Fibonacci sayılarına ait özellikler temel alınılarak Fibonacci $3-$ vektörler için bazı özellikler verilmiştir. Ayrıca, Fibonacci vektörlerle oluşturulan üçgenlerin alanları hesaplanmıştır.

E. Salter [2] yaptığı çalışmada bir Fibonacci $r-$ vektörün(ve Lucas vektörün) tanımını yapmış ve iki vektörün iç çarpımına farklı bir bakış açısı getirmiştir.

İ. Güven ve S. Nurkan [3] ise yaptıkları çalışmada dual Fibonacci $3-$ vektörleri tanımlamış ve bu vektörlere ait özellikleri vermişlerdir. İki dual vektörün iç çarpımından, vektörel çarpımından ve üç dual vektörün karma çarpımından ise F. Yaşar [4] bahsetmiştir.

Son olarak, S. Yüce ve F. Torunbalcı Aydın [5] genelleştirilmiş dual Fibonacci $3-$ vektörlerin tanımı yaparak bu vektörler için iç çarpımı, vektörel çarpımı ve üç genelleştirilmiş dual Fibonacci $3-$ vektörün karma çarpımını vermiştirler.

1.2 Tezin Amacı

E. Salter [2] yaptığı çalışmada bir Fibonacci $r-$vektörün(ve Lucas vektörün) tanımını verip ardından iki vektörün Öklid anlamında iç çarpımına farklı bir bakış açısı getirmiştir. Literatürde, bu çalışma dışında genel olarak Fibonacci vektörler farklı türlerde incelenmiş olmasına rağmen farklı boyutlarda inceleme yapılmamıştır. Bu tez çalışmasının amacı, Fibonacci vektörleri farklı boyutlarda incelemek, Fibonacci $3-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpımı anti-simetrik matris yardımıyla ele almak, Fibonacci $4-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpımı tanımlamak ve Fibonacci $7-$vektörler için ise Öklid anlamında vektörel çarpımın tanımını verip ardından vektörel çarpım ile ilgili özellikleri incelemektir. Ayrıca, kompleks Fibonacci $3-$vektörlerin tanımını verip, bu vektörler için vektörel çarpımı anti-simetrik matris yardımıyla tanımlayarak literatüre kazandırmak amaçlanmıştır. Son olarak ise, Fibonacci $3-$vektörlerin, Fibonacci $4-$vektörlerin ve Fibonacci $7-$vektörlerin Lorentz geometrisi incelenmiştir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada öncelikle literatürde olan Fibonacci $3-$vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı, anti-simetrik bir matris tanımlanarak bu matris yardımıyla yeniden ele alınmıştır. Ayrıca Fibonacci $4-$vektörler ve Fibonacci $7-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım tanımlanmış, ardından Fibonacci $7-$vektörler için, anti-simetrik matris yardımıyla Öklid anlamında vektörel çarpıma yeni bir tanım verilmiştir. Daha sonra, kompleks Fibonacci $3-$vektörler incelenmiş ve iki kompleks Fibonacci $3-$vektörün Hermit anlamında vektörel çarpımı anti-simetrik matris yardımıyla tanımlanarak literatüre kazandırılmıştır. Son olarak, Fibonacci $3-$vektörlerin, Fibonacci $4-$vektörlerin ve Fibonacci $7-$vektörlerin Lorentz geometrisi incelenmiş, Lorentz anlamında vektörel çarpım ve özellikleri verilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezdeki temel kavramlar verilmiştir.

2.1 Leonardo Fibonacci, Lucas ve Tavşan Problemi

Bu alt bölümde Leonardo Fibonacci'nin ve Lucas'ın hayatı verilmiştir. Ayrıca Fibonacci sayılarının çıkış noktası olan tavşan problemi açıklanmıştır, [7].

2.1.1 Leonardo Fibonacci

Leonardo Pisano ya da Pisalı Leonard olarak da bilinen Leonardo Fibonacci Ortaçağ Avrupa'sının en seçkin matematikçisi olarak kabul edilen İtalyan matematikçidir. Matematiksel yazılarında verdiği birkaç gerçek dışında yaşamı hakkında bilinenler çok azdır. İronik olansa çağdaşlarının onun adından o hayattayken hiçbir belgede bahsetmemiş olmalarıdır.

Fibonacci, önemli ticaret merkezlerinden olan Pisa'da Bonacci ailesinin bir üyesi olarak tahminen 1170 yılı civarında dünyaya gelmiştir. Babası Guglielmo'nun takma adı Bonaccio idi ve bu ad iyi tabiatlı veya sade ruhlu anlamına gelmektedir. Annesi Alessandra Leonardo 9 yaşındayken öldü. Leonardo babasının takma adını miras olarak almıştır. İtalyanca Filius Bonacci, Bonacci'nin oğlu anlamına gelmektedir ve Leonardo bu nedenle Fibonacci diye anılmaya başlamıştır. Babası Guglielmo (William) başarılı bir tüccardır ve oğlunun da onun yolunda gitmesini istemiştir.

1190 civarında, Guglielmo Cezayir'in Bugia kentinde(şimdi Bougie) gümrük tahsildarı olarak atandığında, hesaplama sanatını öğrenmesi için Leonardo'yu buraya getirdi. Bougie'de, Fibonacci ilk eğitimini Müslüman bir okul müdüründen aldı. Burada Hint-Arap

sayı sistemini ve Hint-Arap hesaplama sistemini öğrendi. Ayrıca İranlı matematikçi el-Khowarizmi (yaklaşık 825) tarafından cebir üzerine yazılan bir kitapla tanıştı: Hisâb al-jabr w'almuqabâlah.

Fibonacci yetişkin olarak, Mısır, Suriye, Yunanistan, Fransa ve Konstantinopolis'te çeşitli aritmetik sistemleri yerinde inceledi ve dönemin önemli yerel matematikçileriyle görüş alışverişinde bulundu.

Yaklaşık 1200 yılı civarında, Fibonacci yaklaşık 30 yaşında iken Pisa'ya evine döndü. Hint-Arap sayı sisteminin o dönem İtalya'da kullanılan Roma sayı sisteminden daha üstün ve kullanışlı olduğuna inandı. 1202 yılında, Fibonacci en bilindik eseri olan Liber Abaci'de (Abaküs Kitabı)(Buradaki abaci kelimesi, abaküs olarak adlandırılan el hesap makinesine değil, genel olarak hesaplamaya atıfta bulunmaktadır.) aritmetik ve temel cebire yer vermiş, ayrıca Hint-Arap sayı sistemini ve aritmetik algoritmaları Avrupa'ya tanıtmıştır. Aslında, Fibonacci, bu kitapta Hint-Arap sayı sisteminin gücünü o zamana kadar ki herhangi bir matematiksel çalışmadan daha kuvvetli bir şekilde gösterdi. Liber Abaci kitabında 15 bölümde el-Khowarizmi ve başka bir Fars matematikçisi olan Ebu Kamil'in (yaklaşık 900) cebire yaptığı önemli katkıları açıkladı. Altı yıl sonra, Fibonacci Liber Abaci'yi revize etti ve ikinci baskıyı II. Frederick mahkemesindeki en ünlü filozof ve astrolog olan Michael Scott'a adadı.

Liber Abaci'nin ardından, Fibonacci üç tane daha etkili kitap yazdı. *Practica Geometriae* (Geometri Uygulaması), 1220'de yazılmış olup, sekiz bölüme ayrılmıştır ve pek bilinmeyen Master Domanique'e ithaf edilmiştir. Bu kitap geometriyi ve trigonometriyi Öklid kesinliğinde ve bir miktar özgünlük ile ustalıkla gösterdi. Fibonacci, cebirsel problemleri çözmek için geometrik problemleri ve geometriyi çözmek için cebiri kullanmıştır, bu da o dönem Avrupası için radikal bir yaklaşımdı.

Yaklaşık 1240 yılında Fibonacci'nin ölümünden kısa bir süre sonra, İtalyan tüccarları Hint-Arap sayı sisteminin gücünü takdir etmeye ve ticaret işlemlerinde kullanmayı yavaş yavaş kabul etmeye başladılar. On altıncı yüzyılın sonuna gelindiğinde, Avrupa'nın çoğu bunu kabul etti. Liber Abaci, iki yüzyıl boyunca Avrupa standardı olarak kaldı ve hantal Roma sayı sisteminin yerini değiştirmede önemli bir rol oynadı.



Şekil 2.1 Leonardo Fibonacci

2.1.2 Lucas

François-Edouard-Anatole-Lucas 1842'de Fransa'nın Amiens kentinde dünyaya geldi. Amiens'deki École Normale'de eğitimini tamamladıktan sonra Paris Gözlemevinde asistan olarak çalıştı. Fransa-Prusya savaşında topçu subayı olarak görev yapmış, sonra Paris'te Lycee Saint-Louis ve Lycee Charlemagne'de matematik profesörü olmuş, yetenekli ve eğlenceli bir öğretmendir. Lucas bir ziyafette acayip bir kazadan öldü; Yanağı yanlışlıkla düşürülen bir tabaktan uçan bir parça ile kesildi ve birkaç gün sonra 3 Ekim 1891'de enfeksiyondan öldü. Lucas, hesaplamayı sevdi ve bir bilgisayar için planlar geliştirdi, ancak asla somutlaşmadı. Sayı teorisine yaptığı katkıların yanı sıra rekreasyonel matematik üzerine yazdığı dört ciltlik klasiği ile tanınır. Geliştirdiği sorunlardan en iyi bilineni, Brahma Kulesi'dir.



Şekil 2.2 Lucas

2.1.3 Tavşan Problemi

Fibonacci'nin klasik haline gelen kitabı Liber Abaci, içerisinde ünlü tavşan problemi de dâhil olmak üzere bir sürü temel problem içerir.

Farz edelim ki kapalı bir yerde biri erkek diğeri dişi olan iki adet yeni doğmuş tavşanımız olsun. Şimdi, aşağıdaki koşullar altında sekiz ay sonunda kaç tavşan olacağını bulalım:

1. Her tavşanın olgunlaşması bir ay sürer,
2. Her çift tavşan ikinci aydan itibaren bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavrular,
3. Yıl boyunca hiçbir tavşan ölmez.

Kolaylık sağlamak için, orijinal çift tavşanın 1 Ocak'ta doğduğu varsayılsın. Olgunlaşmaları bir ay süreceğinden, 1 Şubatta hala sadece bir çift tavşan vardır. 1 Martta iki aylık çift ve yeni doğan çift olmak üzere toplam iki çift vardır. Böyle devam edilirse, 1 Nisan'da üç çift, 1 Mayıs'ta beş çift olacak ve böylece devam edecektir. Şimdi Çizelge 2.1'e bakalım:

Çizelge 2. 1 Tavşan çiftlerin sayısı

Çiftlerin Sayısı	**Ocak**	**Şubat**	**Mart**	**Nisan**	**Mayıs**	**Haziran**	**Temmuz**	**Ağustos**
Yetişkin	0	1	1	2	3	5	8	13
Bebek	1	0	1	1	2	3	5	8
Toplam	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**

2.2 Fibonacci Sayıları ve Özellikleri

Bu alt bölümde, Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımı, $n.$ Fibonacci ve Lucas sayısı için Binet formülü ve son olarak Fibonacci ve Lucas sayılarının özellikleri incelenmiştir. İlk olarak Fibonacci sayılarının tanımını verelim.

Tanım 2.1 Her n tamsayısı için F_n Fibonacci sayısı

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısı ve

$$F_1 = F_2 = 1 \tag{2.2}$$

başlangıç koşulları ile tanımlanır ve aşağıdaki şekilde Fibonacci sayıları sıralanabilir, [7] :

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\ldots,F_n,\ldots \tag{2.3}$$

Fibonacci'nin bu bağıntıyı bilip bilmediği kesin değildir. Eğer biliyorsa da, bu bilgi için bir kayıt mevcut değildir. Nitekim tekrarlama ilişkisinin ilk yazılı onayı, dört yüzyıl sonra ortaya çıktığında, büyük Alman gökbilimci ve matematikçi Johannes Kepler (1571-1630) Fibonacci'nin bu yinelenen ilişkiyi kesinlikle fark etmiş olması gerektiğini yazmıştır. Her durumda, ilk olarak Hollandalı matematikçi Albert Girard (1595-1632) tarafından fark edilmiştir.

Teorem 2.1 (Fibonacci Sayıları için Binet Formülü)[1] $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, Fibonacci serisinin $n.$ terimini veren bağıntı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \tag{2.4}$$

şeklindedir, [7].

İspat $n = 1$ için,

$$F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$$

olacağından $n = 1$ için doğrudur.

$n = 2$ için,

$$F_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1$$

olacağından $n = 2$ için de doğrudur.

Kabul edelim ki n için doğru olsun. Yani $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ eşitliği doğru olsun. O halde, $n+1$ içinde doğru mudur? Rekürans bağıntısından,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

yazılabilir. Buradan,

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha+1) - \beta^{n-1}(\beta+1)}{\alpha - \beta}$$

eşitliği bulunur. Şimdi $\alpha + 1$ ve $\beta + 1$ değerlerini hesaplayalım:

---

[1] Bu formül 1843 yılında Fransız matematikçi Jacques-Phillipe-Marie Binet $(1786-1856)$ tarafından keşfedilmesinin ardından Binet formülü olarak anılmıştır. Aslında bu formül ilk olarak 1718 yılında Fransız matematikçi Abraham De Moivre $(1667-1754)$ tarafından keşfedilmiştir ve ayrıca Binet'ten bağımsız olarak 1844 yılında Fransız mühendis ve matematikçi Gabriel Lame $(1795-1870)$ tarafından da bulunmuştur.

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olduğundan, bu denklemi sağlarlar. Bu durumda,

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ ve $\beta^2 - \beta - 1 = 0$ olmak üzere,

$\alpha + 1 = \alpha^2$ ve $\beta + 1 = \beta^2$

elde edilir. Bu eşitlikler yerine yazılırsa,

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^{n-1}\alpha^2 - \beta^{n-1}\beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. Sonuç olarak,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

eşitliği doğrudur.

Fibonacci sayı dizisindeki rekürans bağıntısını korunarak sadece başlangıç koşulları değiştirilirse yeni sayı dizileri oluşturulabilir. Bu sayı dizilerinden biri de Lucas sayı dizisidir.

Tanım 2.2 Her n tamsayısı için L_n Lucas sayı dizisi

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \tag{2.5}$$

rekürans bağıntısı ve

$$L_1 = 1,\ L_2 = 3 \tag{2.6}$$

başlangıç koşulları ile tanımlanır [7]. Bu durumda Lucas sayı dizisi aşağıdaki gibidir:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots, L_n, \ldots \tag{2.7}$$

Fibonacci sayısına benzer olarak $n.$ Lucas sayısını elde etmek için Binet formülü vardır.

Teorem 2.2 $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, Lucas serisinin $n.$ terimini veren bağıntı

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.8}$$

şeklindedir, [7].

İspat Fibonacci sayısına benzer şekilde ispat edilebilir. □

2.2.1 α ve β'nın Özellikleri

Fibonacci sayılarının özelliklerini vermeden önce $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sayılarının özelliklerini incelenecektir.

Lemma 2.1 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır, [2], [6], [7]:

$$\alpha\beta = -1, \tag{2.9}$$

$$\alpha + \beta = 1, \tag{2.10}$$

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}, \tag{2.11}$$

$$\alpha^2 + 1 = \sqrt{5}\alpha, \tag{2.12}$$

$$\beta^2 + 1 = -\sqrt{5}\beta, \tag{2.13}$$

$$\alpha = 2 - \beta^2, \tag{2.14}$$

$$\beta = 2 - \alpha^2. \tag{2.15}$$

İspat α ve β değerleri yerine yazılarak ispatlar kolayca yapılabilir. □

Lemma 2.1'deki (2.9), (2.10) ve (2.11) eşitliklerinden,

$$\alpha^2 = \alpha\alpha = \alpha(1-\beta) = \alpha - \alpha\beta = \alpha + 1,$$
$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1,$$
$$\alpha^4 = \alpha(2\alpha+1) = 2\alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 2 + \alpha = 3\alpha + 2$$

yazılabilir. Buradan,

$$\alpha = 1\alpha + 0,$$
$$\alpha^2 = 1\alpha + 1,$$

$$\alpha^3 = 2\alpha + 1,$$
$$\alpha^4 = 3\alpha + 2$$

elde edilir. Dikkat çekici olan bu eşitliklerdeki katsayıların birer Fibonacci sayısı olmasıdır. O halde aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 2.2 $\forall n$ tamsayısı için,

$$\alpha^n = F_n\alpha + F_{n-1}, \tag{2.16}$$

ve

$$\beta^n = F_n\beta + F_{n-1}, \tag{2.17}$$

eşitlikleri sağlanır, [10].

İspat $\alpha^1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = F_1\alpha + F_0$ yazılabileceğinden $n = 1$ için doğrudur.

$\alpha^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha + 1 = F_2\alpha + F_1$ olacağından $n = 2$ için de doğrudur.

Şimdi, $n-1$ için doğru olduğunu varsayalım. Yani,

$$\alpha^{n-1} = F_{n-1}\alpha + F_{n-2},$$

olsun. Bu durumda n için doğru mudur?

$$\begin{aligned}
\alpha^n &= \alpha^{n-1}\alpha \\
&= \left(F_{n-1}\alpha + F_{n-2}\right)\alpha \\
&= F_{n-1}\alpha^2 + F_{n-2}\alpha \\
&= F_{n-1}\left(\alpha + 1\right) + F_{n-2}\alpha \\
&= \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right)\alpha + F_{n-1} \\
&= F_n\alpha + F_{n-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Benzer işlemler β içinde yapılabilir. □

Lemma 2.3 (2.4) ve (2.8) denklemleri ile verilen Binet formülleri kullanılarak F_n ve L_n sayılarının tanımları negatif yönde genişletilmesi aşağıdaki gibidir, [7]:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \qquad n \geq 1 \tag{2.18}$$

ve

$$L_{-n} = (-1)^{n} L_n, \qquad n \geq 1. \tag{2.19}$$

Ayrıca, (2.16) denkleminin negatif yönde genişletilmiş hali,

$$\alpha^{-n} = \begin{cases} \alpha F_n - F_{n+1} & ,n \quad \text{tek ise} \\ F_{n+1} - \alpha F_n & ,n \quad \text{çift ise} \end{cases} \tag{2.20}$$

şeklindedir, [7].

İspat

$$F_{-1} = \frac{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1,$$

$$F_{-2} = \frac{\alpha^{-2} - \beta^{-2}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha\beta)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{1}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -1$$

$\vdots$

şeklinde yazılırsa,

$$\ldots F_{-4}, F_{-3}, F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 \ldots$$
$$\ldots -3,\ 2,\ -1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots$$

elde edilir.

Buradan,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \qquad n \geq 1$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç aşağıdaki şekilde ispatlanabilir:

Fibonacci sayıları için Binet Formülünden,

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} F_{-n} &= \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n \beta^n}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\frac{-\left(\alpha^n - \beta^n\right)}{(-1)^n}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\left(\alpha^n - \beta^n\right)}{\sqrt{5}} \\ &= (-1)^{n+1} F_n \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$L_{-n} = (-1)^n L_n, \qquad n \geq 1$$

yazılabilir. □

Bu sonuçlardan, n'nin tek olması durumunda $F_{-n} = F_n$ ve n'nin çift olması durumunda $L_{-n} = L_n$ olduğu kolayca görülür.

Benzer şekilde, $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ özelliği kullanarak α^{-n} hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \alpha^{-n} &= \alpha F_{-n} + F_{-n-1} \\ &= \alpha(-1)^{n+1} F_n + (-1)^{n+2} F_{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}\left(\alpha F_n - F_{n+1}\right) \\ &= \begin{cases} \alpha F_n - F_{n+1} & ,n \quad \text{tek ise} \\ F_{n+1} - \alpha F_n & ,n \quad \text{çift ise} \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Lemma 2.4 $\forall n_1$ ve n_2 tamsayıları için,

$$\alpha^{n_1}\beta^{n_2}+\alpha^{n_2}\beta^{n_1}=(-1)^{n_1}L_{n_2-n_1}, \tag{2.21}$$

$$\alpha^{n_1}\beta^{n_2}-\alpha^{n_2}\beta^{n_1}=(-1)^{n_1+1}(\alpha-\beta)F_{n_2-n_1}, \tag{2.22}$$

eşitlikleri yazılabilir, [2].

İspat

$$\alpha^{n_1}\beta^{n_2}=\frac{1}{2}\left(\alpha^{n_1}\beta^{n_2}+\alpha^{n_1}\beta^{n_2}\right)$$

(2.9) denkleminden,

$$\alpha^{n_1}\beta^{n_2}=\frac{1}{2}\left((-1)^{n_1}\beta^{n_2-n_1}+(-1)^{n_2}\alpha^{n_1-n_2}\right),$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\alpha^{n_2}\beta^{n_1}&=\frac{1}{2}\left(\alpha^{n_2}\beta^{n_1}+\alpha^{n_2}\beta^{n_1}\right) && "\alpha\beta=-1"\\ &=\frac{1}{2}\left((-1)^{n_2}\beta^{n_1-n_2}+(-1)^{n_1}\alpha^{n_2-n_1}\right),\end{aligned}$$

yazılabileceğinden, eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}\alpha^{n_1}\beta^{n_2}+\alpha^{n_2}\beta^{n_1}&=\frac{1}{2}\left((-1)^{n_1}\beta^{n_2-n_1}+(-1)^{n_2}\alpha^{n_1-n_2}\right)+\frac{1}{2}\left((-1)^{n_2}\beta^{n_1-n_2}+(-1)^{n_1}\alpha^{n_2-n_1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left((-1)^{n_1}\left(\beta^{n_2-n_1}+\alpha^{n_2-n_1}\right)+(-1)^{n_2}\left(\alpha^{n_1-n_2}+\beta^{n_1-n_2}\right)\right)\\ &=\frac{1}{2}\left((-1)^{n_1}L_{n_2-n_1}+(-1)^{n_2}L_{n_1-n_2}\right), && "L_{-n}=(-1)^{n}L_n"\end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğinden,

$$\alpha^{n_1}\beta^{n_2}+\alpha^{n_2}\beta^{n_1}=(-1)^{n_1}L_{n_2-n_1}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Benzer işlemler, diğer eşitlik içinde yapılabilir. □

Sonuç 2.1 $\forall n$ tamsayısı için,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = (-1)^n L_{2n}, \tag{2.23}$$

ve

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = (-1)^n (\alpha - \beta) F_{2n}, \tag{2.24}$$

eşitlikleri sağlanır, [2].

İspat $n_1 = n$ ve $n_2 = -n$ alınırsa üstteki denklemlerden istenen elde edilir. □

Lemma 2.5 $\forall n$ tamsayısı için,

$$F_n = \frac{1}{\alpha^{n-1}}\left(\frac{\alpha^{2n} - (-1)^n}{\alpha^2 + 1}\right) = \frac{1}{\beta^{n-1}}\left(\frac{\beta^{2n} - (-1)^n}{\beta^2 + 1}\right) \tag{2.25}$$

ve

$$L_n = \frac{\alpha^{2n} + (-1)^n}{\alpha^n} = \frac{\beta^{2n} + (-1)^n}{\beta^n}, \tag{2.26}$$

eşitlikleri sağlanır, [2].

İspat F_n, Fibonacci sayısı için (2.4) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{2n} - \alpha^n \beta^n}{\alpha^2 - \alpha\beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^n} \\ &= \frac{1}{\alpha^{n-1}}\left(\frac{\alpha^{2n} - (-1)^n}{\alpha^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

veya

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^n \beta^n - \beta^{2n}}{\alpha\beta - \beta^2}\left(\frac{\beta}{\beta^n}\right) \\
&= \frac{1}{\beta^{n-1}}\left(\frac{(-1)^n - \beta^{2n}}{-1-\beta^2}\right) \\
&= \frac{1}{\beta^{n-1}}\left(\frac{\beta^{2n} - (-1)^n}{\beta^2+1}\right),
\end{aligned}
$$

elde edilir. F_n $n.$ Fibonacci sayısı için ispat tamamlanır.

Benzer şekilde, L_n, $n.$ Lucas sayısı içinde Binet formülü kullanılarak ispatlanabilir. □

O halde, artık Fibonacci sayılarının bazı özellikleri incelenebilir.

2.2.2 Fibonacci Sayılarının Özellikleri

Bu alt bölümde Fibonacci sayılarının bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Teorem 2.3 F_n, $n.$ Fibonacci sayısı ve L_n, $n.$ Lucas sayısı olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır, [7], [8], [9]:

1) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$, (2.27)

2) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$, (2.28)

3) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$, (2.29)

4) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} - \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + F_{2n-1} - F_{2n} = 1 - F_{2n-1}$, (2.30)

5) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, (Cassini Özdeşliği), (2.31)

6) Herhangi ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asaldır.($(F_{n+1}, F_n) = 1$), (2.32)

7) $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$, (2.33)

8) n pozitif tam sayısının Fibonacci sayısı olması için gerek ve yeter şart $5n^2 \pm 4$'ün tam kare olmasıdır. (2.34)

9) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, (2.35)

10) $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$, (Struyk, 1950), (2.36)

11) $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$, (2.37)

12) $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$, (2.38)

13) $F_{2n-1} = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2}$, (2.39)

14) $F_{2n} = F_n L_n$, (2.40)

15) $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$, (2.41)

16) $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$, (2.42)

17) $F_n F_{n-1} = F_n^2 - F_{n-1}^2 + (-1)^n$, (Struyk, 1950), (2.43)

18) F_n ile Fibonacci dizisi gösterilmek üzere $n \mid m$ ise $F_n \mid F_m$ 'dir. (2.44)

19) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1} F_{n+1}} = 2$, (2.45)

20) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1} F_{n+1}} = 1$, (2.46)

21) $F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1} F_{n-m}$, (2.47)

22) $F_{n+1}{}^2 - F_n{}^2 = F_{n-1} F_{n+2}$, (2.48)

23) $\sum_{i=1}^{n} F_{k+i} = F_{n+k+2} - F_{k+2}$, (2.49)

24) $F_{2n-1} = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2}$, (Lucas, 1876), (2.50)

25) $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$, (2.51)

26) $F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n = F_n^2$, (2.52)

27) $F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} = F_{n+m+1}$, (Vajda) (2.53)

28) $F_n F_{m+1} - F_{n+1} F_m = (-1)^m F_{n-m}$, (Weisstein) (2.54)

29) $F_n F_{m+r} - F_{n+r} F_m = (-1)^m F_{n-m} F_r$ (2.55)

İspat

1) F_n , $n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim, (Lucas, 1876):

Rekürans bağıntısından,

$$F_1 = F_3 - F_2$$
$$F_2 = F_4 - F_3$$
$$F_3 = F_5 - F_4$$
$$\vdots$$
$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$
$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

şeklinde yazılabileceğinden tüm eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$$

elde edilir.

2) F_n, $n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

eşitliğini gösterelim, (Lucas, 1876):

Rekürans bağıntısından,

$$F_1 = F_2$$
$$F_3 = F_4 - F_2$$
$$F_5 = F_6 - F_4$$
$$\vdots$$
$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

3) F_n, $n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

olduğunu gösterelim:

Rekürans bağıntısından,

$$\begin{aligned}
F_2 &= F_3 - F_1 \\
F_4 &= F_5 - F_3 \\
F_6 &= F_7 - F_5 \\
&\vdots \\
F_{2n} &= F_{2n+1} - F_{2n-1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} &= F_{2n+1} - F_1 \\
&= F_{2n+1} - 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

4) $\forall F_n$, $n.$ Fibonacci sayısı için,

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + F_{2n-1} - F_{2n} = 1 - F_{2n-1}$$

olduğunu gösterelim:

(2.28) ve (2.29) eşitliklerinden,

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

yazılabilir. Eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} - F_{2n} &= F_{2n} - \left(F_{2n+1} - 1\right) \\
&= F_{2n+1} - F_{2n-1} - F_{2n+1} + 1 \\
&= 1 - F_{2n-1}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. İstenen elde edilir.

5) $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$ Cassini özdeşliğinin[1] sağlandığını gösterelim:

$n=1$ için,

$$F_0F_2-F_1^2=0.1-1=-1=(-1)^1$$

şeklinde olacağından eşitlik sağlanır.

n için doğru olsun. Yani,

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$$

olduğunu kabul edilsin. $n+1$ için de doğru olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}F_nF_{n+2}-F_{n+1}^2&=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_n+F_{n+1})-F_{n+1}^2\\&=F_{n+1}F_n-F_{n-1}F_n-F_{n-1}F_{n+1}+F_{n+1}^2-F_{n+1}^2\\&=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})-F_{n-1}F_{n+1}\\&=F_nF_n-F_{n-1}F_{n+1}\\&=-(F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2)\\&=-(-1)^n\\&=(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece istenen elde edilir. Ayrıca, Cassini özdeşliğinde $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$F_{n-1}(F_n+F_{n-1})-F_n^2=(-1)^n,$$

$$F_{n-1}^2+F_nF_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$$

elde edilir. Bu ise $x^2+xy-y^2=\pm1$ diyofant denkleminin sonsuz çokluktaki $x=F_{n-1}$ ve $y=F_n$ çözümüdür.

[1] Bu formül 1680 yılında İtalya doğumlu Fransız gökbilimci ve matematikçi Giovanni Domenico Cassini $(1625-1712)$ ve ondan bağımsız olarak 1753 yılında Glasgow Üniversitesi'nden Robert Simson $(1687-1768)$ tarafından keşfedilmiştir.

6) Herhangi ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asaldır. Yani her n değeri için

$\left(F_{n+1}, F_n\right)=1$ olduğunu gösterelim:

p, F_n ve F_{n+1}'in asal çarpanı olsun. Cassini özdeşliğinden $p \mid \pm 1$ olmalı. Bu bir çelişki olacağından $\left(F_{n+1}, F_n\right)=1$ 'dir. İstenen elde edilir.

7) L_n, $n.$ Lucas sayısı olmak üzere,

$$F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$n=0$ için,

$$L_0=F_{-1}+F_1=1+1=2$$

n için doğru olduğunu kabul edilsin. Yani $F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ olsun.

$n+1$ için doğru mudur?

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \\ &= F_{n-1} + F_{n+1} + F_{n-2} + F_n \\ &= \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) + \left(F_n + F_{n+1}\right) \\ &= F_n + F_{n+2} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $L_{n+1}=F_n+F_{n+2}$ olur. O halde $n+1$ içinde doğrudur.

İspat tamamlanmış olur.

8) n pozitif tam sayısının Fibonacci sayısı olması için gerek ve yeter şart $5n^2 \pm 4$'ün tam kare olmasıdır[1].

F_n $n.$ Fibonacci sayısı olsun. Buradan,

$$\left(-1\right)^n + F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1}$$

ve

[1] 1972 yılında Harvard Üniversitesi'nden Ira Gessel Cassini özdeşliğini kullanarak, bu ilginç sonucu yayınlamıştır.

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

eşitlikleri yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned} L_n^2 - 4\left((-1)^n + F_n^2\right) &= \left(F_{n+1} + F_{n-1}\right)^2 - 4\left(F_{n-1}F_{n+1}\right) \\ &= F_{(n+1)}^2 + 2F_{(n-1)}F_{(n+1)} + F_{(n-1)}^2 - 4F_{(n-1)}F_{(n+1)} \\ &= F_{n+1}^2 - 2F_{n-1}F_{n+1} + F_{n-1}^2 \\ &= \left(F_{n+1} - F_{n-1}\right)^2 \\ &= F_n^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten,

$$L_n^2 - 4(-1)^n - 4F_n^2 = F_n^2$$
$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$$

yazılabilir. Buradan $5F_n^2 \pm 4$ tam kare ifade çıkar. Yani n pozitif tam sayısı Fibonacci sayısı ise $5n^2 \pm 4$ tam kare ifadedir. Diğer taraftan,

$$5n^2 \pm 4 = m^2$$

olsun. Bu durumda,

$$m^2 - 5n^2 = \pm 4$$
$$\left(\frac{m + n\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{m - n\sqrt{5}}{2}\right) = \pm 1$$

yazılabilir. m ve n değerlerinin ya ikisi de tek ya da ikisi de çift olacağından, $\frac{m + n\sqrt{5}}{2}$ ve $\frac{m - n\sqrt{5}}{2}$ sayıları $\mathbb{Q}\sqrt{5} = \left\{x + y\sqrt{5} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Q}\right\}$ cisim genişlemesinin içindedir. Burada $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini ifade eder. Bu iki sayının çarpımı bir olduğundan, cisimde birimsel eleman olmalılar. Fakat, $\mathbb{Q}\sqrt{5}$ cisminin birimsel elemanları $\pm\alpha^{\pm i}$ formatındadır. Bu durumda,

$$\frac{m + n\sqrt{5}}{2} = \alpha^i$$

yazılabilir. Buradan,

$$\frac{m+n\sqrt{5}}{2}=\alpha^i$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha^i+\beta^i\right)+\left(\alpha^i-\beta^i\right)\right]$$
$$=\frac{L_i+F_i\sqrt{5}}{2}$$

elde edilir. O halde, sonuç olarak $n=F_i$ olur. İspat tamamlanır.

9) $\sum_{i=1}^{n}F_i^2=F_1^2+F_2^2+F_3^2+\ldots+F_{n-1}^2+F_n^2=F_nF_{n+1}$

olduğunu gösterelim, (Lucas, 1876):

$$F_n^2=F_nF_n=F_n\left(F_{n+1}-F_{n-1}\right)=F_nF_{n+1}-F_nF_{n-1},$$
$$F_{n-1}^2=F_{n-1}F_{n-1}=F_{n-1}\left(F_n-F_{n-2}\right)=F_nF_{n-1}-F_{n-1}F_{n-2},$$
$$F_{n-2}^2=F_{n-2}F_{n-2}=F_{n-2}\left(F_{n-1}-F_{n-3}\right)=F_{n-2}F_{n-1}-F_{n-2}F_{n-3},$$
$$\vdots$$
$$F_3^2=F_3F_3=F_3\left(F_4-F_2\right)=F_3F_4-F_3F_2,$$
$$F_2^2=F_2F_2=F_2\left(F_3-F_1\right)=F_2F_3-F_1F_2,$$

eştilikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$F_2^2+F_3^2+\ldots+F_{n-1}^2+F_n^2=F_nF_{n+1}-F_1F_2$$

elde edilir. Burada $F_1=F_2$ alınırsa,

$$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\ldots+F_{n-1}^2+F_n^2=F_nF_{n+1}$$

elde edilir.

10) $F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}$ eşitliğini gösterelim, (Struyk, 1950):

Binet formülünden,

$$F_{n+1}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\quad\text{ve}\quad F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

şeklinde yazılabileceğinden,

$$F_{n+1}^2=\frac{\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}-2(\alpha\beta)^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2}\quad\text{ve}\quad F_n^2=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2(\alpha\beta)^{n+1} + \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$= \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2+1) + \beta^{2n}(\beta^2+1) - 2(-1)^{n+1} - 2(-1)^n}{(\alpha-\beta)^2}$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$-2(-1)^{n+1} = +2(-1)^n$$

ve ayrıca (2.12) ve (2.13) eşitlikleri kullanılırsa,

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = \frac{\alpha^{2n}\sqrt{5}\alpha + \beta^{2n}(-\sqrt{5}\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{5}(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})}{(\alpha-\beta)^2}$$

elde edilir. Ayrıca (2.11) denklemi kullanılırsa,

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = \frac{(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1})}{(\alpha-\beta)}$$
$$= F_{2n+1}$$

sonucuna ulaşılır. İstenen elde edilir.

11) $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$ olduğunu gösterelim:

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1})$$
$$= (F_n)(F_{n+1} + F_{n-1})$$
$$= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}(\alpha^2+1) - \beta^{n-1}(\beta^2+1)}{\alpha-\beta}\right)$$
$$= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}\sqrt{5}\alpha - \beta^{n-1}(-\sqrt{5})\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha - \beta}\sqrt{5}\right) \\
&= \frac{\left(\alpha^n - \beta^n\right)\left(\alpha^n + \beta^n\right)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \\
&= F_{2n}
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$'dir.

12) $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$ eşitliğini gösterelim:

(2.37) denkleminden,

$$
\begin{aligned}
F_{2n} &= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \\
&= \left(F_{n+1} - F_{n-1}\right)\left(F_{n+1} + F_{n-1}\right) \\
&= F_n\left(F_{n+1} + F_{n-1}\right) \\
&= F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

13) $F_{2n-1} = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2}$ olduğunu gösterelim, (Lucas, 1876):

$$
\begin{aligned}
F_{2n-1} &= F_{2n+1} - F_{2n} \\
&= F_{n+1}^2 + F_n^2 - \left(F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n\right) \\
&= F_{n+1}^2 + F_n^2 - F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \\
&= F_{n+1}^2 + F_n\left(F_n - F_{n+1}\right) - F_{n-1} F_n \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1} F_n - F_{n-1} F_n \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1}\left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) - F_{n-1} F_n \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 - F_{n-1} F_{n-2} - F_{n-1} F_n \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1}\left(F_{n-1} + F_n\right) - F_{n-1} F_{n-2} \\
&= F_{n+1}\left(F_{n+1} - F_{n-1}\right) - F_{n-1} F_{n-2} \\
&= F_{n+1} F_n - F_{n-1} F_{n-2}
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

14) $F_{2n} = F_n L_n$ eşitliğini gösterelim:

(2.38) denkleminden,

$$F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$$

yazılabilir. Buradan,

$$F_{2n} = F_n\left(F_{n+1} + F_{n-1}\right) = F_n L_n$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$F_n L_n = F_n\left(F_{n+1} + F_{n-1}\right) = F_n F_{n+1} + F_{n-1}F_n = F_{2n}$$

şeklindedir. İki tarafın eşitliğinden ispat tamamlanır.

15) $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} \\ &= F_n - F_{n-2} + F_{n+2} - F_n \\ &= F_{n+2} - F_{n-2} \end{aligned}$$

elde edilir.

16) $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$ eşitliğini gösterelim:

$$L_{n-1} = F_{n-2} + F_n$$

ve

$$L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$$

yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n+1} &= 2F_n + F_{n-2} + F_{n+2} \\ &= 2F_n + F_{n-2} + F_{n+1} + F_n \\ &= 3F_n + F_{n-2} + F_n + F_{n-1} \\ &= 4F_n + F_{n-2} + F_{n-1} \\ &= 5F_n \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$ 'dir.

17) $F_n F_{n-1} = F_n^2 - F_{n-1}^2 + (-1)^n$ olduğunu gösterelim, (Struyk, 1950):

(2.31) denkleminden,

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$$
$$F_{n-1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 + (-1)^n$$
$$F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n = F_n^2 + (-1)^n$$
$$F_{n-1}F_n = F_n^2 - F_{n-1}^2 + (-1)^n$$

şeklinde bulunur.

18) F_n ile Fibonacci dizisi gösterilmek üzere $n|m$ ise $F_n|F_m$ 'dir.

Binet formülünden,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } F_m = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}$$

yazılabilir. Ayrıca $n|m$ ise $m = nq\left(q \in \mathbb{Z}^+\right)$ olmalıdır. Buradan,

$$F_m = F_{nq} = \frac{\alpha^{nq} - \beta^{nq}}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^n)^q - (\beta^n)^q}{\alpha - \beta}$$

olur. $F_n|F_m$ elde edilir. $\left(x \neq y \, için (x-y) | x^n - y^n\right)$

19) (F_n) Fibonacci dizisinde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = 2$ olduğunu gösterelim:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{F_{n+1}}$$

şeklinde düzenlenirse,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{F_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_5} + \frac{1}{F_4} - \frac{1}{F_6} \ldots$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$

elde edilir.

20) (F_n) Fibonacci dizisinde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = 1$ olduğunu gösterelim:

$$\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_nF_{n-1}F_{n+1}}$$
$$= \frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_nF_{n-1}F_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{F_nF_{n-1}} - \frac{1}{F_nF_{n+1}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_nF_{n-1}} - \frac{1}{F_nF_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{F_2F_1} - \frac{1}{F_2F_3} + \frac{1}{F_3F_2} - \frac{1}{F_3F_4} + \frac{1}{F_4F_3} - \frac{1}{F_4F_5} + \dots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{F_2F_1}$$
$$= 1$$

elde edilir.

21) $F_n = F_mF_{n+1-m} + F_{m-1}F_{n-m}$ olduğunu gösterelim:

(2.4) denklemi kullanılırsa,

$$F_m = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}, \quad F_{n+1-m} = \frac{\alpha^{n+1-m} - \beta^{n+1-m}}{\alpha - \beta}, \quad F_{m-1} = \frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta}$$

ve

$$F_{n-m} = \frac{\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}}{\alpha - \beta}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan,

$$F_mF_{n+1-m} = \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1-m} - \beta^{n+1-m}}{\alpha - \beta}\right)$$
$$= \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - \alpha^m\beta^{n+1-m} - \alpha^{n+1-m}\beta^m}{(\alpha - \beta)^2}$$

ve

$$F_{m-1}F_{n-m} = \left(\frac{\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-m}-\beta^{n-m}}{\alpha-\beta}\right)$$
$$= \frac{\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}-\alpha^{m-1}\beta^{n-m}-\alpha^{n-m}\beta^{m-1}}{(\alpha-\beta)^2}$$

elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$F_mF_{n+1-m}+F_{m-1}F_{n-m} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha^2+1)+\beta^{n-1}(\beta^2+1)-\alpha^{m-1}\beta^{n-m}(\alpha\beta+1)-\alpha^{n-m}\beta^{m-1}(\alpha\beta+1)}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$= \frac{\alpha^{n-1}(\sqrt{5}\alpha)+\beta^{n-1}(-\sqrt{5}\beta)-\alpha^{m-1}\beta^{n-m}(-1+1)-\alpha^{n-m}\beta^{m-1}(-1+1)}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$= \frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)^2}.\sqrt{5}$$
$$= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$
$$= F_n$$

şeklinde bulunur. O halde $F_n = F_mF_{n+1-m}+F_{m-1}F_{n-m}$'dir.

22) $F_{n+1}{}^2 - F_n{}^2 = F_{n-1}F_{n+2}$ eşitliğini gösterelim:

$$F_{n+1}{}^2 = F_{n+1}F_{n+1}$$
$$= F_{n+1}(F_n+F_{n-1})$$
$$= F_nF_{n+1}+F_{n+1}F_{n-1}$$

ve

$$F_n{}^2 = F_nF_n$$
$$= F_n(F_{n+1}-F_{n-1})$$
$$= F_nF_{n+1}-F_nF_{n-1}$$

yazılabilir. Buradan,

$$F_{n+1}{}^2 - F_n{}^2 = F_nF_{n+1}+F_{n+1}F_{n-1}-(F_nF_{n+1}-F_nF_{n-1})$$
$$= F_nF_{n+1}+F_{n+1}F_{n-1}-F_nF_{n+1}+F_nF_{n-1}$$
$$= F_{n+1}F_{n-1}+F_nF_{n-1}$$
$$= F_{n-1}(F_n+F_{n+1})$$
$$= F_{n-1}F_{n+2}$$

elde edilir.

23) $\sum_{i=1}^{n} F_{k+i} = F_{n+k+2} - F_{k+2}$ olduğunu gösterelim:

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1} = F_{k+3} - F_{k+2},\\
&F_{k+2} = F_{k+4} - F_{k+3},\\
&F_{k+3} = F_{k+5} - F_{k+4},\\
&\vdots\\
&F_{k+n-1} = F_{k+n+1} - F_{k+n},\\
&F_{k+n} = F_{k+n+2} - F_{k+n+1}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Burada eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$F_{k+1} + F_{k+2} + \ldots + F_{k+n-1} + F_{k+n} = \sum_{i=1}^{n} F_{k+i} = F_{n+k+2} - F_{k+2}$$

elde edilir.

24) $F_{2n-1} = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n-2}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim, (Lucas, 1876):

$$
\begin{aligned}
F_{2n-1} &= F_{2n+1} - F_{2n}\\
&= F_{n+1}^2 + F_n^2 - \left(F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n\right)\\
&= F_{n+1}^2 + F_n^2 - F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n\\
&= F_{n+1}^2 + F_n \left(F_n - F_{n+1}\right) - F_{n-1} F_n\\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1} F_n - F_{n-1} F_n\\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) - F_{n-1} F_n\\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 - F_{n-1} F_{n-2} - F_{n-1} F_n\\
&= F_{n+1}^2 - F_{n-1} \left(F_{n-1} + F_n\right) - F_{n-1} F_{n-2}\\
&= F_{n+1} \left(F_{n+1} - F_{n-1}\right) - F_{n-1} F_{n-2}\\
&= F_{n+1} F_n - F_{n-1} F_{n-2}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir.

25) $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$ olduğunu gösterelim:

Rekürans bağıntısından,

$$
\begin{aligned}
F_{2n-1} &= F_{2n+1} - F_{2n}\\
&= F_{n+1}^2 + F_n^2 - \left(F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2\right)\\
&= F_{n+1}^2 + F_n^2 - F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2\\
&= F_n^2 + F_{n-1}^2
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

26) $F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n=F_n^2$ eşitliğini gösterelim:

Eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse,

$$\begin{aligned}F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n&=F_n\left(F_{n+1}-F_{n-1}\right)\\&=F_nF_n=F_n^2\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}F_n^2&=F_nF_n\\&=F_n\left(F_{n+1}-F_{n-1}\right)\\&=F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde, $F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n=F_n^2$'dir.

27) $F_nF_m+F_{n+1}F_{m+1}=F_{n+m+1}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

Binet formülünden,

$$\begin{aligned}F_nF_m+F_{n+1}F_{m+1}&=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\sqrt{5}}\right)\\&=\frac{\left(\alpha^{n+m}+\beta^{n+m}-\alpha^n\beta^m-\alpha^m\beta^n\right)+\left(\alpha^{n+m+2}+\beta^{n+m+2}-\alpha^{n+1}\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}\beta^{n+1}\right)}{5}\\&=\frac{\alpha^{n+m}\left(\alpha^2+1\right)+\beta^{n+m}\left(\beta^2+1\right)}{5}\\&=\frac{\alpha^{n+m}\left(\sqrt{5}\alpha\right)+\beta^{n+m}\left(-\sqrt{5}\beta\right)}{5}\\&=\left(\frac{\alpha^{n+m+1}-\beta^{n+m+1}}{\sqrt{5}}\right)\\&=F_{n+m+1}\end{aligned}$$

şeklinde bulunabilir.

28) $F_nF_{m+1}-F_{n+1}F_m=(-1)^m F_{n-m}$ eşitliğini gösterelim:

Binet formülünden,

$$\begin{aligned}F_nF_{m+1}-F_{n+1}F_m&=\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\sqrt{5}}\right)\\&=\frac{\left(\alpha^{n+m+1}+\beta^{n+m+1}-\alpha^n\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}\beta^n\right)-\left(\alpha^{n+m+1}+\beta^{n+m+1}-\alpha^{n+1}\beta^m-\alpha^m\beta^{n+1}\right)}{5}\end{aligned}$$

$$= \frac{-\alpha^n \beta^{m+1} - \alpha^{m+1}\beta^n + \alpha^{n+1}\beta^m + \alpha^m \beta^{n+1}}{5}$$
$$= \frac{\alpha^n \beta^m (-\beta + \alpha) + \alpha^m \beta^n (-\alpha + \beta)}{5}$$
$$= \frac{\alpha^n \beta^m (\sqrt{5}) + \alpha^m \beta^n (-\sqrt{5})}{5}$$
$$= \frac{(\alpha\beta)^m (\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})}{\sqrt{5}}$$
$$= (-1)^m F_{n-m}$$

şeklinde elde edilir.

29) $F_n F_{m+r} - F_{n+r} F_m = (-1)^m F_{n-m} F_r$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

(2.4) denklemi kullanılırsa,

$$F_n F_{m+r} - F_{n+r} F_m = \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{m+r} - \beta^{m+r}}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= \frac{\left(\alpha^{n+m+r} + \beta^{n+m+r} - \alpha^n \beta^{m+r} - \alpha^{m+r}\beta^n\right) - \left(\alpha^{n+m+r} + \beta^{n+m+r} - \alpha^{n+r}\beta^m - \alpha^m \beta^{n+r}\right)}{5}$$
$$= \frac{-\alpha^n \beta^{m+r} - \alpha^{m+r}\beta^n + \alpha^{n+r}\beta^m + \alpha^m \beta^{n+r}}{5}$$
$$= \frac{\alpha^n \beta^m (-\beta^r + \alpha^r) + \alpha^m \beta^n (-\alpha^r + \beta^r)}{5}$$
$$= \frac{(\alpha^r - \beta^r)(\alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n)}{5}$$
$$= \frac{(\alpha^r - \beta^r)(\alpha\beta)^m (\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})}{5}$$
$$= (\alpha\beta)^m \left(\frac{(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{(\alpha^r - \beta^r)}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= (-1)^m F_{n-m} F_r$$

şeklinde bulunur. □

2.3 Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları ve Özellikleri

Tekrarlama bağıntısını koruduğumuzu ama ilk iki terimi değiştirdiğimizi varsayalım. O halde ürettiğimiz Genelleştirilmiş Fibonacci serisi aşağıdaki şekilde tanımlanır, [6]:

Tanım 2.3 $n \geq 3$ için, genelleştirilmiş Fibonacci sayısı H_n,

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2} \tag{2.56}$$

rekürans bağıntısı ve

$$H_1 = p,\ H_2 = p + q \tag{2.57}$$

başlangıç koşulları ile tanımlanır. Burada p ve q herhangi tamsayılardır. Yani genelleştirilmiş Fibonacci serisi aşağıdaki gibidir:

$$p, p+q, 2p+q, 3p+2q, 5p+3q, 8p+5q, \ldots, H_n = (p-q)F_n + qF_{n+1}, \ldots \tag{2.58}$$

Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları bir arı kolonisinin çalışmasında ortaya çıkar, [7]. Koloni'ye q erkek ve p dişi arı ile başlayalım. O halde, Çizelge 2.2, beş nesil için soyağacı büyümelerini göstermektedir.

Çizelge 2. 2 Beş nesil soyağacı büyümesi

Nesil	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Dişi arıların sayısı	$p+q$	$2p+q$	$3p+2q$	$5p+3q$	$8p+5q$
Erkek arıların sayısı	p	$p+q$	$2p+q$	$3p+2q$	$5p+3q$
Toplam	$\mathbf{2p+q}$	$\mathbf{3p+2q}$	$\mathbf{5p+3q}$	$\mathbf{8p+5q}$	$\mathbf{13p+8q}$

Teorem 2.4 (Genelleştirilmiş Fibonacci Serisi için Binet Formülü) Genelleştirilmiş Fibonacci Serisinin $n.$ elemanını veren Binet Formülü,

$$H_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^n - m\beta^n\right) \tag{2.59}$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ve $l = 2(p - q\beta)$, $m = 2(p - q\alpha)$'dır, [6].

Ayrıca, bu eşitliklerden $l + m = 2(2p - q)$, $l - m = 2q\sqrt{5}$ ve $\frac{1}{4}lm = p^2 - pq - q^2 = e$ sonuçlarına ulaşılır, [6].

İspat $n=1$ için,

$$H_1=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^1-m\beta^1\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(2\left(p-q\beta\right)\alpha-2\left(p-q\alpha\right)\beta\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(2p\alpha-2q\beta\alpha-2p\beta+2q\alpha\beta\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(2p\alpha-2p\beta\right)=\frac{1}{2\sqrt{5}}2p\left(\alpha-\beta\right)=\frac{2p\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=p$$

elde edilir. $n=1$ için doğrudur.

$n-1$ için doğru olsun. Yani,

$$H_{n-1}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-1}-m\beta^{n-1}\right)$$

olsun. n için doğru olur mu?

$$H_n=H_{n-1}+H_{n-2}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-1}-m\beta^{n-1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-2}-m\beta^{n-2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-2}\left(\alpha+1\right)-m\beta^{n-2}\left(\beta+1\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-2}\alpha^2-m\beta^{n-2}\beta^2\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n}-m\beta^{n}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$H_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n}-m\beta^{n}\right)$$

yazılabilir. İspat tamamlanır. □

Teorem 2.5 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x^2-x-1=0$ denkleminin kökleri ve

$l = 2(p - q\beta)$, $m = 2(p - q\alpha)$, $e = \frac{1}{4}lm = p^2 - pq - q^2$ olmak üzere, aşağıdaki özellikleri (sonuçları) verebiliriz, [6]:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{H_{n-1}} = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{H_{n-i}} = \alpha^i, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{F_n} = p - qb$, (2.60)

(2) $H_{n+2} - 2H_n - H_{n-1} = 0, \quad H_{n+1} - 2H_n + H_{n-2} = 0$, (2.61)

(3) $\sum_{i=0}^{n-1} H_{2i+1} = H_{2n} - q, \quad \sum_{i=1}^{n} H_{2i} = H_{2n+1} - p$, (2.62)

(4) $\sum_{i=1}^{n} (H_{2i-1} - H_{2i}) = -H_{2n-1} + p - q$, (2.63)

(5) $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} H_i, \quad \tau_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ olmak üzere,

$$\sigma_n = H_{n+2} - H_2, \quad \tau_n = H_{n+4} - (n+2)H_2 - H_1 \text{ ,} \tag{2.64}$$

(6) $H_{n+1} = qF_n + pF_{n+1}, \quad H_{n+2} = pF_n + (p+q)F_{n+1}$, (2.65)

(7) $n \geq 3$ olmak üzere, $H_{n+r} = H_{n-1}F_r + H_nF_{r+1}$, (2.66)

(8) $H_{n-1}^2 + H_n^2 = (2p - q)H_{2n-1} - eF_{2n-1}$, (2.67)

(9) $H_{n+1}^2 - H_{n-1}^2 = (2p - q)H_{2n} - eF_{2n}$, (2.68)

(10) $H_{n-1}H_{n+1} - H_n^2 = (-1)^n e$, (2.69)

(11) $H_n^3 + H_{n+1}^3 = 2H_nH_{n+1}^2 + (-1)^n eH_{n-1}$, (2.70)

(12) $H_{n+1-r}H_{n+1+r} - H_{n+1}^2 = (-1)^{n-r} eF_r^2$, (2.71)

(13) $H_{n+1}^2 + eF_n^2 = pH_{2n+1}$, (2.72)

(14) $\{2H_{n+1}H_{n+2}\}^2 + \{H_nH_{n+3}\}^2 = \{2H_{n+1}H_{n+2} + H_n^2\}^2$, (2.73)

(15) $\frac{H_{n+r} + (-1)^r H_{n-r}}{H_n} = L_r$, (2.74)

(16) $H_{n+m} = F_{m-1}H_n + F_mH_{n+1}$, (2.75)

(17) $H_{n-m} = (-1)^m (H_nF_{m+1} - H_{n+1}F_m)$, (2.76)

(18) $H_{n+m} + (-1)^m H_{n-m} = L_mH_n$, (2.77)

(19) $H_{n+m} - (-1)^m H_{n-m} = F_m (H_{n-1} + H_{n+1})$, (2.78)

(20) $H_{n+1}H_m - H_nH_{m+1} = (-1)^n eF_{m-n}$, (2.79)

(21) $H_{n+r}H_m - H_nH_{m+r} = (-1)^n eF_rF_{m-n}$. (2.80)

İspat

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{H_{n-1}} = \alpha$ olduğunu gösterelim:

Binet formülünden,

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^n - m\beta^n\right)}{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-1} - m\beta^{n-1}\right)}$$

$$= \frac{l\alpha^n - m\beta^n}{l\alpha^{n-1} - m\beta^{n-1}}$$

$$= \frac{\alpha^n\left(l - m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{\alpha^{n-1}\left(l - m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\right)}$$

$$= \frac{\alpha\left(l - m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{\left(l - m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\right)}$$

yazılabilir. Ayrıca $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}6180$ alınarak bu değerler yerine yazılırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{H_{n-1}} = \frac{\alpha\left(l - m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{\left(l - m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\right)} \qquad "\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0",$$

$$= \frac{\alpha l}{l}$$

$$= \alpha$$

şeklinde istenen elde edilir.

Benzer şekilde,

$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{H_{n-i}}=\alpha^i$ olduğunu gösterelim:

Binet formülünden,

$$\frac{H_n}{H_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^n-m\beta^n\right)}{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-i}-m\beta^{n-i}\right)}$$
$$=\frac{l\alpha^n-m\beta^n}{l\alpha^{n-i}-m\beta^{n-i}}$$
$$=\frac{\alpha^n\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{\alpha^{n-i}\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i}\right)}$$
$$=\frac{\alpha^i\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i}\right)}$$

yazılabileceğinden,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{H_{n-i}}=\frac{\alpha^i\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i}\right)}$$
$$=\frac{\alpha^i l}{l}$$
$$=\alpha^i$$

elde edilir. Son olarak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{F_n}=p-qb$$

olduğunu gösterelim:

Binet formüllerinden,

$$\frac{H_n}{F_n}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^n-m\beta^n\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n-\beta^n\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(l\alpha^n-m\beta^n\right)}{\left(\alpha^n-\beta^n\right)}$$

$$=\frac{\alpha^n\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{2\alpha^n\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}$$

$$=\frac{\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{2\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}$$

şeklinde bulunur. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{F_n}=\frac{\left(l-m\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}{2\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}$$

$$=\frac{l}{2}$$

$$=\frac{2\left(p-q\beta\right)}{2}$$

$$=p-q\beta$$

elde edilir.

(2) $H_{n+2}-2H_n-H_{n-1}=0,\qquad H_{n+1}-2H_n+H_{n-2}=0$ eşitliklerini gösterelim:

İlk olarak, rekürans bağıntısından,

$$H_{n+2}-2H_n-H_{n-1}=H_{n+1}+H_n-2H_n-H_{n-1}$$

$$=H_{n+1}-\left(H_n+H_{n-1}\right)$$

$$=H_{n+1}-H_{n+1}$$

$$=0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} H_{n+1}-2H_n+H_{n-2} &= H_n+H_{n-1}-2H_n+H_{n-2} \\ &= -H_n+\left(H_{n-1}+H_{n-2}\right) \\ &= -H_n+H_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

(3) $\sum_{i=0}^{n-1} H_{2i+1} = H_{2n}-q, \qquad \sum_{i=1}^{n} H_{2i} = H_{2n+1}-p$ eşitliklerinin sağlandığını gösterelim:

Başlangıç koşulları ve rekürans bağıntısından,

$$\begin{aligned} &H_1 = p \\ &H_3 = H_4 - H_2 \\ &H_5 = H_6 - H_4 \\ &\vdots \\ &H_{2n-1} = H_{2n} - H_{2n-2} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu değerler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} H_{2i+1} &= H_1+H_3+H_5+\ldots+H_{2n-1} \\ &= H_{2n}+p-H_2 \\ &= H_{2n}+p-\left(p+q\right) \\ &= H_{2n}-q \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi, diğer eşitlik göz önüne alınsın. Benzer şekilde, başlangıç koşulları ve rekürans bağıntısından,

$$\begin{aligned} &H_2 = H_3 - H_1 \\ &H_4 = H_5 - H_3 \\ &H_6 = H_7 - H_5 \\ &\vdots \\ &H_{2n} = H_{2n+1} - H_{2n-1} \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{i=1}^{n} H_{2i} = H_2 + H_4 + H_6 + \ldots + H_{2n}$$
$$= H_{2n+1} - p$$

elde edilir.

(4) $\sum_{i=1}^{n} \left(H_{2i-1} - H_{2i} \right) = -H_{2n-1} + p - q$ olduğunu gösterelim:

(2.62) eşitliklerinden,

$$H_1 + H_3 + H_5 + \ldots + H_{2n-1} = H_{2n} - q$$

ve

$$H_2 + H_4 + H_6 + \ldots + H_{2n} = H_{2n+1} - p$$

yazılabilir. Buradan, eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + H_5 + \ldots + H_{2n-1} - H_{2n} = H_{2n} - q - \left(H_{2n+1} - p \right)$$
$$= H_{2n} - H_{2n+1} - q + p$$
$$= -H_{2n-1} + p - q$$

elde edilir.

(5) $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} H_i, \qquad \tau_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ olmak üzere,

$\sigma_n = H_{n+2} - H_2, \qquad \tau_n = H_{n+4} - \left(n+2 \right) H_2 - H_1$,

eşitliklerinin sağlandığını gösterelim:

İlk olarak, rekürans bağıntısından,

$$H_1 = H_3 - H_2$$
$$H_2 = H_4 - H_3$$
$$H_3 = H_5 - H_4$$
$$\vdots$$
$$H_{n-1} = H_{n+1} - H_n$$
$$H_n = H_{n+2} - H_{n+1}$$

şeklinde yazılabileceğinden tüm eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} H_i = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots + H_{n-1} + H_n = H_{n+2} - H_2$$

elde edilir.

Şimdi, $\tau_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = H_{n+4} - (n+2)H_2 - H_1$ eşitliğine bakalım:

Yukarıdaki eşitlikten,

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = H_1 \\
&\sigma_2 = H_1 + H_2 = H_4 - H_2 \\
&\sigma_3 = H_1 + H_2 + H_3 = H_5 - H_2 \\
&\vdots \\
&\sigma_{n-1} = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots + H_{n-1} = H_{n+1} - H_2 \\
&\sigma_n = H_1 + H_2 + H_3 + \ldots + H_{n-1} + H_n = H_{n+2} - H_2
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
\tau_n &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \\
&= H_1 + H_4 + H_5 + \ldots + H_{n+1} + H_{n+2} - (n-1)H_2 \\
&= H_{n+4} - H_2 - H_3 - H_2 - H_1 + H_1 - (n-1)H_2 \\
&= H_{n+4} - nH_2 - H_3 \\
&= H_{n+4} - nH_2 - (H_2 + H_1) \\
&= H_{n+4} - (n+1)H_2 - H_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

(6) $H_{n+1} = qF_n + pF_{n+1}$ ve $H_{n+2} = pF_n + (p+q)F_{n+1}$ eşitliklerinin sağlandığını

gösterelim:

$n = 1$ için,

$$H_1 = p = qF_0 + pF_1$$

şeklinde yazılabileceğinden $n = 1$ için doğrudur. n için de doğru olsun. Yani,

$$H_n = qF_{n-1} + pF_n$$

eşitliği sağlansın. $n+1$ için doğru mudur?

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= H_n + H_{n-1} \\ &= qF_{n-1} + pF_n + qF_{n-2} + pF_{n-1} \\ &= q\left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) + p\left(F_n + F_{n-1}\right) \\ &= qF_n + pF_{n+1} \end{aligned}$$

yazılabileceğinden, $n+1$ içinde doğrudur. İspat tamamlanır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} H_{n+2} &= H_{n+1} + H_n \\ &= qF_n + pF_{n+1} + qF_{n-1} + pF_n \\ &= q\left(F_n + F_{n-1}\right) + pF_{n+1} + pF_n \\ &= pF_n + \left(p+q\right)F_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

(7) $n \geq 3$ olmak üzere, $H_{n+r} = H_{n-1}F_r + H_nF_{r+1}$ olduğunu gösterelim:

$n = 3$ için, (2.62) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} H_{3+r} &= \left(p+q\right)F_r + \left(2p+q\right)F_{r+1} \\ &= H_2F_r + H_3F_{r+1} \end{aligned}$$

yazılabileceğinden eşitlik sağlanır.

n için doğru olduğu kabul edilsin. Yani, $H_{n+r} = H_{n-1}F_r + H_nF_{r+1}$ olsun. Bu durumda $n+1$ için doğruluğu incelenirse,

$$\begin{aligned} H_{n+1+r} &= H_{n+r} + H_{n+r-1} \\ &= H_{n-1}F_r + H_nF_{r+1} + H_{n-2}F_r + H_{n-1}F_{r+1} \\ &= F_r\left(H_{n-1} + H_{n-2}\right) + F_{r+1}\left(H_n + H_{n-1}\right) \\ &= H_nF_r + H_{n+1}F_{r+1} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $n+1$ için de doğrudur. Sonuç olarak,

$$H_{n+r} = H_{n-1}F_r + H_nF_{r+1}$$

yazılabilir.

(8) $H_{n-1}^2 + H_n^2 = \left(2p-q\right)H_{2n-1} - eF_{2n-1}$ olduğunu gösterelim:

(2.59) eşitliği ile verilen Binet formülünden,

$$H_{n-1}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-1}-m\beta^{n-1}\right) \text{ ve } H_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n}-m\beta^{n}\right)$$

yazılabileceğinden, bu ifadelerin kareleri alınırsa,

$$\begin{aligned}H_{n-1}^2&=\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-1}-m\beta^{n-1}\right)\right)^2\\&=\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2}-2lm\left(\alpha\beta\right)^{n-1}+m^2\beta^{2n-2}\right)\\&=\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2}-2lm\left(-1\right)^{n-1}+m^2\beta^{2n-2}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}H_{n}^2&=\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n}-m\beta^{n}\right)\right)^2\\&=\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n}-2lm\left(\alpha\beta\right)^{n}+m^2\beta^{2n}\right)\\&=\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n}-2lm\left(-1\right)^{n}+m^2\beta^{2n}\right)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}H_{n-1}^2+H_n^2&=\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2}-2lm\left(-1\right)^{n-1}+m^2\beta^{2n-2}\right)+\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n}-2lm\left(-1\right)^{n}+m^2\beta^{2n}\right)\\&=\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2}\left(\alpha^2+1\right)+m^2\beta^{2n-2}\left(\beta^2+1\right)\right)\\&=\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2}\left(\sqrt{5}\alpha\right)+m^2\beta^{2n-2}\left(-\sqrt{5}\beta\right)\right)\\&=\frac{\sqrt{5}}{20}\left(l^2\alpha^{2n-1}-m^2\beta^{2n-1}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{5}}\left(l^2\alpha^{2n-1}-m^2\beta^{2n-1}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\left(2p-q\right)H_{2n-1}-eF_{2n-1}&=\left(2p-q\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{2n-1}-m\beta^{2n-1}\right)\right)-e\left(\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}\right)\\&=\frac{l+m}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{2n-1}-m\beta^{2n-1}\right)\right)-\frac{lm}{4}\left(\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\left(l^2\alpha^{2n-1} + lm\alpha^{2n-1} - lm\beta^{2n-1} - m^2\beta^{2n-1} - lm\alpha^{2n-1} + lm\beta^{2n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\left(l^2\alpha^{2n-1} - m^2\beta^{2n-1}\right)$$

sonucuna ulaşılabilir. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

(9) $H_{n+1}^2 - H_{n-1}^2 = (2p-q)H_{2n} - eF_{2n}$ olduğunu gösterelim:

Binet formülünden,

$$H_{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-1} - m\beta^{n-1}\right) \quad \text{ve} \quad H_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n+1} - m\beta^{n+1}\right)$$

yazılabileceğinden,

$$-H_{n-1}^2 = -\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2} - 2lm(-1)^{n-1} + m^2\beta^{2n-2}\right)$$

ve

$$H_{n+1}^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n+1} - m\beta^{n+1}\right)\right)^2$$
$$= \frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n+2} - 2lm(\alpha\beta)^{n+1} + m^2\beta^{2n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n+2} - 2lm(-1)^{n+1} + m^2\beta^{2n+2}\right)$$

şeklinde bulunur. Şimdi bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$H_{n+1}^2 - H_{n-1}^2 = \frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n+2} - 2lm(-1)^{n+1} + m^2\beta^{2n+2}\right) - \frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2} - 2lm(-1)^{n-1} + m^2\beta^{2n-2}\right)$$
$$= \frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2}\left(\alpha^4+1\right) + m^2\beta^{2n-2}\left(\beta^4+1\right) + 4lm(-1)^n\right)$$
$$= \frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2}\left(\left(\alpha^2\right)^2+1\right) + m^2\beta^{2n-2}\left(\left(\beta^2\right)^2+1\right) + 4lm(-1)^n\right)$$
$$= \frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n-2}(3\alpha+3) + m^2\beta^{2n-2}(3\beta+3) + 4lm(-1)^n\right)$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$(2p-q)H_{2n}-eF_{2n}=(2p-q)\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{2n}-m\beta^{2n}\right)\right)-e\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{l+m}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{2n}-m\beta^{2n}\right)\right)-\frac{lm}{4}\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{5}}\left(l^2\alpha^{2n}+lm\alpha^{2n}-lm\beta^{2n}-m^2\beta^{2n}-lm\alpha^{2n}+lm\beta^{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{5}}\left(l^2\alpha^{2n}-m^2\beta^{2n}\right)$$

sonucuna ulaşılır. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

(10) $H_{n-1}H_{n+1}-H_n^2=(-1)^n e$ olduğunu gösterelim:

Binet formülünden,

$$H_{n-1}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-1}-m\beta^{n-1}\right),\quad H_{n+1}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n+1}-m\beta^{n+1}\right)$$

ve

$$H_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n}-m\beta^{n}\right)$$

yazılabileceğinden,

$$H_{n-1}H_{n+1}-H_n^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-1}-m\beta^{n-1}\right)\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n+1}-m\beta^{n-1}\right)\right)-\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n}-m\beta^{n}\right)\right)^2$$

$$=\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n}-lm\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-lm\alpha^{n+1}\beta^{n-1}+m^2\beta^{2n}\right)-\frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n}-2lm(\alpha\beta)^n+m^2\beta^{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{20}\left(-lm\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-lm\alpha^{n+1}\beta^{n-1}+2lm(-1)^n\right)$$

$$=\frac{1}{20}\left(-lm(\alpha\beta)^{n-1}\left(\beta^2+\alpha^2\right)+2lm(-1)^n\right)$$

$$=\frac{1}{20}\left(lm(-1)^n(\alpha+\beta+2)+2lm(-1)^n\right)$$

$$=\frac{1}{20}\left(3lm(-1)^n+2lm(-1)^n\right)$$

$$=\frac{1}{20}\left(5lm(-1)^n\right)$$

$$=\frac{1}{4}lm(-1)^n$$

$$=e(-1)^n$$

şeklinde elde edilir.

(11) $H_n^3 + H_{n+1}^3 = 2H_n H_{n+1}^2 + (-1)^n eH_{n-1}$ olduğunu gösterelim:

$$H_n^3 + H_{n+1}^3 = H_n H_n^2 + H_{n+1}^3$$

şeklinde yazılabilir. Burada, rekürans bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} H_n^3 + H_{n+1}^3 &= H_n H_n^2 + H_{n+1}^3 \\ &= (H_{n+1} - H_{n-1}) H_n^2 + H_{n+1}^3 \\ &= H_{n+1} H_n^2 - H_{n-1} H_n^2 + H_{n+1}^3 \\ &= H_{n+1} (H_n^2 + H_{n+1}^2) - H_{n-1} H_n^2 \\ &= H_{n+1} \{(H_{n+1} - H_n)^2 + 2H_{n+1} H_n\} - H_{n-1} H_n^2 \\ &= H_{n+1} \{H_{n-1}^2 + 2H_{n+1} H_n\} - H_{n-1} H_n^2 \\ &= H_{n-1} (H_{n+1} H_{n-1} - H_n^2) + 2H_{n+1}^2 H_n \end{aligned}$$

elde edilir. (2.69) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$H_n^3 + H_{n+1}^3 = 2H_n H_{n+1}^2 + (-1)^n eH_{n-1}$$

eşitliği elde edilir.

(12) $H_{n+1-r} H_{n+1+r} - H_{n+1}^2 = (-1)^{n-r} eF_r^2$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} H_{n+1-r} H_{n+1+r} - H_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}(l\alpha^{n+1-r} - m\beta^{n+1-r})\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}(l\alpha^{n+1+r} - m\beta^{n+1+r})\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}(l\alpha^{n+1} - m\beta^{n+1})\right)^2 \\ &= \frac{1}{20}(l^2\alpha^{2n+2} - lm\alpha^{n+1-r}\beta^{n+1+r} - lm\alpha^{n+1+r}\beta^{n+1-r} + m^2\beta^{2n+2}) \\ &\quad - \frac{1}{20}(l^2\alpha^{2n+2} - 2lm(\alpha\beta)^{n+1} + m^2\beta^{2n+2}) \\ &= \frac{1}{20}(-lm\alpha^{n+1-r}\beta^{n+1+r} - lm\alpha^{n+1+r}\beta^{n+1-r} + 2lm(\alpha\beta)^{n+1}) \\ &= \frac{1}{20}(-lm(\alpha\beta)^{n-r}(\alpha\beta^{2r+1} + \alpha^{2r+1}\beta - 2(\alpha\beta)^{1-r})) \\ &= (-1)^{n-r} e\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{\beta}\beta^{2r+1} - \frac{1}{\alpha}\alpha^{2r+1} + 2(\alpha\beta)^r\right) \\ &= (-1)^{n-r} eF_r^2 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

(13) $H_{n+1}^2 + eF_n^2 = pH_{2n+1}$ eşitliğini gösterelim:

Binet formülleri yardımıyla,

$$H_{n+1}^2 + eF_n^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} \left(l\alpha^{n+1} - m\beta^{n+1} \right) \right)^2 + e\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \right)^2$$

ifadesi yazılabilir. Buradan,

$$H_{n+1}^2 + eF_n^2 = \frac{1}{20}\left(l^2\alpha^{2n+2} - 2lm(\alpha\beta)^{n+1} + m^2\beta^{2n+2} \right) + \frac{lm}{4}\left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= \frac{\left(l\alpha^{2n}\left(l\alpha^2 + m \right) + m\beta^{2n}\left(m\beta^2 + l \right) \right)}{20}$$

şeklinde bulunur. Burada, $\left(l\alpha^2 + m \right)$ ve $\left(m\beta^2 + l \right)$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\left(l\alpha^2 + m \right) &= 2\left(p - q\beta \right)\left(2 - \beta \right) + 2\left(p - q\alpha \right) \\
&= 4p - 2p\beta - 4q\beta + 2q\beta^2 + 2p - 2q\alpha \\
&= 6p - 2p\beta - 4q\beta + 2q\left(\beta^2 - \alpha \right) \\
&= 6p - 2p\beta - 4q\beta + 2q\left(2 - 2\alpha \right) \\
&= 6p + 4q - 4q\left(\alpha + \beta \right) - 2p\beta \\
&= 6p + 4q - 4q - 2p\beta \\
&= 2p\left(3 - \beta \right), \qquad "3 - \beta = 3 - \left(2 - \alpha^2 \right) = \alpha^2 + 1 = \sqrt{5}\alpha" \\
&= 2\sqrt{5}p\alpha
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(l\alpha^2 + m \right) &= 2\left(p - q\alpha \right)\left(2 - \alpha \right) + 2\left(p - q\beta \right) \\
&= 4p - 2p\alpha - 4q\alpha + 2q\alpha^2 + 2p - 2q\beta \\
&= 6p - 2p\alpha - 4q\alpha + 2q\left(\alpha^2 - \beta \right) \\
&= 6p - 2p\alpha - 4q\alpha + 2q\left(2 - 2\beta \right) \\
&= 6p + 4q - 4q\left(\alpha + \beta \right) - 2p\alpha \\
&= 6p + 4q - 4q - 2p\alpha \\
&= 2p\left(3 - \alpha \right), \qquad "3 - \alpha = 3 - \left(2 - \beta^2 \right) = \beta^2 + 1 = -\sqrt{5}\beta" \\
&= -2\sqrt{5}p\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler yerlerine yazılırsa,

$$H_{n+1}^2 + eF_n^2 = \frac{\left(l\alpha^{2n}\left(2\sqrt{5}p\alpha\right) + m\beta^{2n}\left(-2\sqrt{5}p\beta\right)\right)}{20}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}p\left(l\alpha^{2n+1} - m\beta^{2n+1}\right)}{20}$$

ifadesi bulunur. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

(14) $\left\{2H_{n+1}H_{n+2}\right\}^2 + \left\{H_nH_{n+3}\right\}^2 = \left\{2H_{n+1}H_{n+2} + H_n^2\right\}^2$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
\left\{2H_{n+1}H_{n+2}\right\}^2 + \left\{H_nH_{n+3}\right\}^2 &= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2 + H_n^2H_{n+3}^2 \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2 + H_n^2\left(H_{n+1} + H_{n+2}\right)^2 \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2 + H_n^2\left(H_{n+1}^2 + H_{n+2}^2 + 2H_{n+1}H_{n+2}\right) \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2 + H_n^2\left(H_{n+1}^2 + H_{n+2}^2\right) + 2H_n^2H_{n+1}H_{n+2} \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2 + H_n^2\left(\left(H_{n+2} - H_{n+1}\right)^2 + 2H_{n+2}H_{n+1}\right) + 2H_n^2H_{n+1}H_{n+2} \\
&= 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2 + H_n^4 + 4H_n^2H_{n+1}H_{n+2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left\{2H_{n+1}H_{n+2} + H_n^2\right\}^2 = 4H_{n+1}^2H_{n+2}^2 + H_n^4 + 4H_n^2H_{n+1}H_{n+2}$$

şeklinde bulunur. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

(15) $\dfrac{H_{n+r} + (-1)^r H_{n-r}}{H_n} = L_r$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

Binet formülünden,

$$\frac{H_{n+r}+(-1)^r H_{n-r}}{H_n}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n+r}-m\beta^{n+r}\right)+\frac{1}{2\sqrt{5}}(-1)^r\left(l\alpha^{n-r}-m\beta^{n-r}\right)}{H_n}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(l\alpha^{n+r}-m\beta^{n+r}\right)+(\alpha\beta)^r\left(l\alpha^{n-r}-m\beta^{n-r}\right)\right)}{H_n}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^n\left(\alpha^r+\beta^r\right)-m\beta^n\left(\alpha^r+\beta^r\right)\right)}{H_n}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\alpha^r+\beta^r\right)\left(l\alpha^n-m\beta^n\right)}{H_n}$$

$$=\frac{\left(\alpha^r+\beta^r\right)\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^n-m\beta^n\right)}{H_n}$$

$$=\frac{\left(\alpha^r+\beta^r\right)H_n}{H_n}$$

$$=\left(\alpha^r+\beta^r\right)$$

$$=L_r$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

(16) $H_{n+m}=F_{m-1}H_n+F_mH_{n+1}$ eşitliğini gösterelim:

İlk olarak Binet formülünden,

$$H_{n+m}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n+m}-m\beta^{n+m}\right)$$

yazılabilir. Eşitliğin diğer tarafı hesaplanırsa,

$$F_{m-1}H_n+F_mH_{n+1}=\left(\frac{\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{l\alpha^n-m\beta^n}{2\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{l\alpha^{n+1}-m\beta^{n+1}}{2\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{l\alpha^{n+m-1}+m\beta^{n+m-1}-m\alpha^{m-1}\beta^n-l\alpha^n\beta^{m-1}+l\alpha^{n+m+1}+m\beta^{n+m+1}-m\alpha^m\beta^{n+1}-l\alpha^{n+1}\beta^m}{10}$$

$$=\frac{l\alpha^{n+m-1}\left(\alpha^2+1\right)+m\beta^{n+m-1}\left(\beta^2+1\right)-m\alpha^{m-1}\beta^n\left(1+\alpha\beta\right)-l\alpha^n\beta^{m-1}\left(1+\alpha\beta\right)}{10}$$

elde edilir. (2.9), (2.12) ve (2.13) denklemlerinden,

$$F_{m-1}H_n + F_mH_{n+1} = \frac{l\alpha^{n+m-1}\left(\sqrt{5}\alpha\right) + m\beta^{n+m-1}\left(-\sqrt{5}\beta\right)}{10}$$
$$= \frac{l\alpha^{n+m} - m\beta^{n+m}}{2\sqrt{5}}$$

şeklinde bulunur. İki tarafın eşitliğinden ispat tamamlanır.

(17) $H_{n-m} = (-1)^m \left(H_nF_{m+1} - H_{n+1}F_m\right)$ eşitliğini gösterelim:

İlk olarak Binet formülünden,

$$H_{n-m} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-m} - m\beta^{n-m}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin diğer tarafı hesaplanırsa,

$$(-1)^m \left(H_nF_{m+1} - H_{n+1}F_m\right) = (-1)^m \left\{\left(\frac{l\alpha^n - m\beta^n}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{l\alpha^{n+1} - m\beta^{n+1}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$
$$= (-1)^m \left\{\frac{l\alpha^{n+m+1} + m\beta^{n+m+1} - m\alpha^{m+1}\beta^n - l\alpha^n\beta^{m+1} - l\alpha^{n+m+1} - m\beta^{n+m+1} + m\alpha^m\beta^{n+1} + l\alpha^{n+1}\beta^m}{10}\right\}$$
$$= (-1)^m \left\{\frac{-m\alpha^m\beta^n(\alpha-\beta) + l\alpha^n\beta^m(\alpha-\beta)}{10}\right\}$$
$$= (-1)^m \left\{\frac{(\alpha-\beta)(\alpha\beta)^m\left(l\alpha^{n-m} - m\beta^{n-m}\right)}{10}\right\}$$
$$= (-1)^m \left\{\frac{\sqrt{5}(-1)^m\left(l\alpha^{n-m} - m\beta^{n-m}\right)}{10}\right\}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(l\alpha^{n-m} - m\beta^{n-m}\right)$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden ispat tamamlanır.

(18) $H_{n+m} + (-1)^m H_{n-m} = L_mH_n$ eşitliğini gösterelim:

(2.76) denklemi $(-1)^m$ ile çarpılarak (2.75) denklemi ile taraf tarafa toplanırsa,

$$H_{n+m} + (-1)^m H_{n-m} = F_{m-1}H_n + F_mH_{n+1} + H_nF_{m+1} - H_{n+1}F_m$$
$$= H_n\left(F_{m-1} + F_{m+1}\right)$$
$$= H_nL_m$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

(19) $H_{n+m}-(-1)^m H_{n-m}=F_m\left(H_{n-1}+H_{n+1}\right)$ eşitliğini gösterelim:

(2.76) denklemi $(-1)^m$ ile çarpılarak (2.75) denklemi ile taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}H_{n+m}-(-1)^m H_{n-m}&=F_{m-1}H_n+F_mH_{n+1}-\left(H_nF_{m+1}-H_{n+1}F_m\right)\\&=F_{m-1}H_n+F_mH_{n+1}-H_nF_{m+1}+H_{n+1}F_m\\&=H_n\left(F_{m-1}-F_{m+1}\right)+2H_{n+1}F_m\\&=-H_nF_m+2H_{n+1}F_m\\&=F_m\left(2H_{n+1}-H_n\right)\\&=F_m\left(H_{n+1}+H_{n-1}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

(20) $H_{n+1}H_m-H_nH_{m+1}=(-1)^n eF_{m-n}$ eşitliğini gösterelim:

Binet formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}H_{n+1}H_m-H_nH_{m+1}&=\left(\frac{l\alpha^{n+1}-m\beta^{n+1}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{l\alpha^m-m\beta^m}{2\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{l\alpha^n-m\beta^n}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{l\alpha^{m+1}-m\beta^{m+1}}{2\sqrt{5}}\right)\\&=\frac{l^2\alpha^{n+m+1}+m^2\beta^{n+m+1}-lm\alpha^{n+1}\beta^m-lm\alpha^m\beta^{n+1}-l^2\alpha^{n+m+1}-m^2\beta^{n+m+1}+lm\alpha^n\beta^{m+1}+lm\alpha^{m+1}\beta^n}{20}\\&=\frac{lm\left(-\alpha^{n+1}\beta^m-\alpha^m\beta^{n+1}+\alpha^n\beta^{m+1}+\alpha^{m+1}\beta^n\right)}{20}\\&=\frac{lm\left(\alpha^n\beta^m\left(-\alpha+\beta\right)+\alpha^m\beta^n\left(\alpha-\beta\right)\right)}{20}\\&=\frac{lm(\alpha-\beta)\left(\alpha^m\beta^n-\alpha^n\beta^m\right)}{20}\\&=\frac{lm}{4}\left(\frac{(\alpha\beta)^n\left(\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}\right)}{\sqrt{5}}\right)\\&=(-1)^n eF_{m-n}\end{aligned}$$

elde edilir.

(21) $H_{n+r}H_m-H_nH_{m+r}=(-1)^n eF_rF_{m-n}$ eşitliğini gösterelim:

Binet formülü kullanılırsa,

$$H_{n+r}H_m - H_nH_{m+r} = \left(\frac{l\alpha^{n+r} - m\beta^{n+r}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{l\alpha^m - m\beta^m}{2\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{l\alpha^n - m\beta^n}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{l\alpha^{m+r} - m\beta^{m+r}}{2\sqrt{5}}\right)$$

$$= \left(\frac{l^2\alpha^{n+m+r} + m^2\beta^{n+m+r} - lm\alpha^{n+r}\beta^m - lm\alpha^m\beta^{n+r} - l^2\alpha^{n+m+r} - m^2\beta^{n+m+r} + lm\alpha^n\beta^{m+r} + lm\alpha^{m+r}\beta^n}{20}\right)$$

$$= \frac{lm\left(-\alpha^{n+r}\beta^m - \alpha^m\beta^{n+r} + \alpha^n\beta^{m+r} + \alpha^{m+r}\beta^n\right)}{20}$$

$$= \frac{lm\left(\alpha^n\beta^m\left(-\alpha^r + \beta^r\right) + \alpha^m\beta^n\left(\alpha^r - \beta^r\right)\right)}{20}$$

$$= \frac{lm\left(\alpha^r - \beta^r\right)\left(\alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m\right)}{20}$$

$$= \frac{lm}{4}\left(\frac{(\alpha\beta)^n\left(\alpha^r - \beta^r\right)\left(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}\right)}{5}\right)$$

$$= \frac{lm}{4}(\alpha\beta)^n\left(\frac{\left(\alpha^r - \beta^r\right)}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\left(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}\right)}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= (-1)^n eF_rF_{m-n}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

2.4 Kompleks Fibonacci Sayıları ve Özellikleri

Tanım 2.4 Her n tamsayısı için C_n kompleks Fibonacci sayısı

$$C_n = F_n + iF_{n+1} \tag{2.81}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $i^2 = -1$ ve F_n, F_{n+1} sayıları ise, sırasıyla, $n.$ ve $(n+1).$ Fibonacci sayılarıdır, [11].

O halde kompleks Fibonacci sayı dizisi aşağıdaki gibidir:

$$1+i,\ 1+2i,\ 2+3i,\ 3+5i,\ 5+8i,\ 8+13i,...,\ F_n + iF_{n+1},... \tag{2.82}$$

Teorem 2.6 $e_c = 2 + i$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır, [11]:

1. $C_{n+2} = C_{n+1} + C_n$ (2.83)
2. $C_{n-1}C_{n+1} - C_n^2 = (-1)^n e_c,$ (2.84)
3. $C_n^2 + C_{n+1}^2 = ie_cF_{2n+2},$ (2.85)
4. $C_{n+1}^2 - C_{n-1}^2 = ie_cF_{2n+1},$ (2.86)

5. $\left(2C_{n+1}C_{n+2}\right)^2+\left(C_nC_{n+3}\right)^2=\left(2C_{n+1}C_{n+2}+C_n^2\right)^2$, (2.87)

6. $\dfrac{C_{n+r}+\left(-1\right)^r C_{n-r}}{C_n}=F_{r+1}+F_{r-1}=\alpha^r+\beta^r$. (2.88)

İspat

1. $C_{n+2}=C_{n+1}+C_n$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

Kompleks Fibonacci sayısının tanımından,

$$\begin{aligned}C_{n+2}&=F_{n+2}+iF_{n+3}\\&=F_{n+1}+F_n+i\left(F_{n+2}+F_{n+1}\right)\\&=\left(F_{n+1}+iF_{n+2}\right)+\left(F_n+iF_{n+1}\right)\\&=C_{n+1}+C_n\end{aligned}$$

istenen elde edilir.

2. $C_{n-1}C_{n+1}-C_n^2=\left(-1\right)^n e_c$, ifadesinin sağlandığını gösterelim:

Kompleks Fibonacci sayısının tanımından,

$C_{n-1}=F_{n-1}+iF_n$, $C_n=F_n+iF_{n+1}$, $C_{n+1}=F_{n+1}+iF_{n+2}$ yazılabilir. Bu eşitlikler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}C_{n-1}C_{n+1}-C_n^2&=\left(F_{n-1}+iF_n\right)\left(F_{n+1}+iF_{n+2}\right)-\left(F_n+iF_{n+1}\right)^2\\&=F_{n-1}F_{n+1}-F_nF_{n+2}+i\left(F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_{n+2}\right)-F_n^2+F_{n+1}^2-2iF_nF_{n+1}\\&=\left(F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2\right)+\left(F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}\right)+i\left(F_{n-1}F_{n+2}-F_nF_{n+1}\right)\\&=\left(-1\right)^n+\left(-1\right)^n+i\left(-1\right)^{n+1}F_{n-1-(n+1)}\\&=2\left(-1\right)^n+i\left(-1\right)^n\left(-1\right)F_{-2}\\&=2\left(-1\right)^n+i\left(-1\right)^nF_2\\&=\left(-1\right)^n\left(2+i\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$C_{n-1}C_{n+1}-C_n^2=\left(-1\right)^n e_c$

elde edilir.

3. $C_n^2+C_{n+1}^2=ie_cF_{2n+2}$, eşitliğini gösterelim:

Kompleks Fibonacci sayısının tanımından,

$$
\begin{aligned}
C_n^2 + C_{n+1}^2 &= \left(F_n + iF_{n+1}\right)^2 + \left(F_{n+1} + iF_{n+2}\right)^2 \\
&= F_n^2 - F_{n+1}^2 + 2iF_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 + 2iF_{n+1}F_{n+2} \\
&= F_n^2 - F_{n+2}^2 + 2i\left(F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2}\right) \\
&= -F_{2n+2} + 2i\left(F_{2n+2}\right) \\
&= F_{2n+2}\left(-1+2i\right) \\
&= F_{2n+2}i\left(2+i\right) \\
&= ie_cF_{2n+2}
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

4. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
C_{n+1}^2 - C_{n-1}^2 &= \left(F_{n+1} + iF_{n+2}\right)^2 - \left(F_{n-1} + iF_n\right)^2 \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 + 2iF_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}^2 + F_n^2 - 2iF_{n-1}F_n \\
&= F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 - F_{n-1}^2 + F_n^2 + 2i\left(F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n\right) \\
&= \left(F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2\right) - \left(F_{n+2}^2 - F_n^2\right) + 2i\left(F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n\right) \\
&= F_{2n} - F_{2n+2} + 2i\left(F_{2n+1}\right) \\
&= -F_{2n+1} + 2i\left(F_{2n+1}\right) \\
&= F_{2n+1}\left(-1+2i\right) \\
&= F_{2n+1}i\left(2+i\right) \\
&= ie_cF_{2n+1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan, $C_{n+1}^2 - C_{n-1}^2 = ie_cF_{2n+1}$ ifadesi elde edilir.

5. $\left(2C_{n+1}C_{n+2}\right)^2 + \left(C_nC_{n+3}\right)^2 = \left(2C_{n+1}C_{n+2} + C_n^2\right)^2$, eşitliğini gösterelim:

Eşitliğin sağ tarafındaki kareler hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
\left(2C_{n+1}C_{n+2}\right)^2 + \left(C_nC_{n+3}\right)^2 &= 4C_{n+1}^2C_{n+2}^2 + C_n^2C_{n+3}^2 \\
&= 4C_{n+1}^2C_{n+2}^2 + C_n^2\left(C_{n+2} + C_{n+1}\right)^2
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\left(2C_{n+1}C_{n+2}\right)^2 + \left(C_nC_{n+3}\right)^2 &= 4C_{n+1}^2C_{n+2}^2 + C_n^2\left(2C_{n+1} + C_n\right)^2 \\
&= 4C_{n+1}^2C_{n+2}^2 + C_n^2\left(4C_{n+1}^2 + 4C_{n+1}C_n + C_n^2\right) \\
&= 4C_{n+1}^2C_{n+2}^2 + 4C_n^2C_{n+1}^2 + 4C_n^2C_{n+1}C_n + C_n^4 \\
&= 4C_{n+1}^2C_{n+2}^2 + 4C_n^2C_{n+1}\left(C_{n+1} + C_n\right) + C_n^4 \\
&= 4C_{n+1}^2C_{n+2}^2 + 4C_n^2C_{n+1}C_{n+2} + C_n^4
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$
\left(2C_{n+1}C_{n+2} + C_n^2\right)^2 = 4C_{n+1}^2C_{n+2}^2 + 4C_n^2C_{n+1}C_{n+2} + C_n^4
$$

yazılabilir. Her iki tarafın eşitliğinden, istenen elde edilir.

6. $\dfrac{C_{n+r}+(-1)^r C_{n-r}}{C_n} = F_{r+1}+F_{r-1} = \alpha^r + \beta^r$ eşitliğini gösterelim:

Rekürans bağıntısından,

$$\begin{aligned}
\frac{C_{n+r}+(-1)^r C_{n-r}}{C_n} &= \frac{F_{n+r}+iF_{n+r+1}+(-1)^r\left(F_{n-r}+iF_{n-r+1}\right)}{F_n+iF_{n+1}} \\
&= \frac{\left(F_{n+r}+(-1)^r F_{n-r}\right)+i\left(F_{n+r+1}+(-1)^r iF_{n-r+1}\right)}{F_n+iF_{n+1}} \\
&= \frac{\left(F_{n+r}+(-1)^r F_{n-r}\right)+i\left(F_{n+r+1}+(-1)^r F_{n-r+1}\right)}{F_n+iF_{n+1}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}+(-1)^r\dfrac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)+i\left(\dfrac{\alpha^{n+r+1}-\beta^{n+r+1}}{\alpha-\beta}+(-1)^r\dfrac{\alpha^{n-r+1}-\beta^{n-r+1}}{\alpha-\beta}\right)}{F_n+iF_{n+1}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}+(\alpha\beta)^r\dfrac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)+i\left(\dfrac{\alpha^{n+r+1}-\beta^{n+r+1}}{\alpha-\beta}+(\alpha\beta)^r\dfrac{\alpha^{n-r+1}-\beta^{n-r+1}}{\alpha-\beta}\right)}{F_n+iF_{n+1}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{\alpha^n\left(\alpha^r+\beta^r\right)+\beta^n\left(-\alpha^r-\beta^r\right)}{\alpha-\beta}\right)+i\left(\dfrac{\alpha^{n+1}\left(\alpha^r+\beta^r\right)+\beta^{n+1}\left(-\alpha^r-\beta^r\right)}{\alpha-\beta}\right)}{F_n+iF_{n+1}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{\left(\alpha^r+\beta^r\right)\left(\alpha^n-\beta^n\right)}{\alpha-\beta}\right)+i\left(\dfrac{\left(\alpha^r+\beta^r\right)\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)}{\alpha-\beta}\right)}{F_n+iF_{n+1}} \\
&= \frac{\left(\alpha^r+\beta^r\right)\left(\dfrac{\left(\alpha^n-\beta^n\right)}{\alpha-\beta}+i\dfrac{\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)}{\alpha-\beta}\right)}{F_n+iF_{n+1}}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\frac{C_{n+r}+(-1)^r C_{n-r}}{C_n} &= \frac{\left(\alpha^r+\beta^r\right)\left(F_n+iF_{n+1}\right)}{F_n+iF_{n+1}} \\
&= \left(\alpha^r+\beta^r\right) \\
&= L_r \\
&= F_{r+1}+F_{r-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca, kompleks Fibonacci sayısının modülü için, $\left|C_n\right|^2 = c_n$ yazılırsa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir, [11]:

$c_n = F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$,

$c_n - c_{n-1} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}.$

Başka, bir deyişle, $F_1, F_2, F_3, F_4, ..., F_{2n}, F_{2n+1}, ...$ Fibonacci serisi, sırasıyla,

$$c_0, c_1 - c_0, c_1, c_2 - c_1, ..., c_n - c_{n-1}, c_n, ... \tag{2.89}$$

şeklinde de ifade edilebilir, [11].

2.5 Genelleştirilmiş Kompleks Fibonacci Sayıları

Tanım 2.5 Her n tamsayısı için C_n genelleştirilmiş kompleks Fibonacci sayıları

$$C_n = H_n + iH_{n+1} \tag{2.90}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $i^2 = -1$ ve H_n, H_{n+1} sayıları ise, sırasıyla, $n.$ ve $(n+1).$ genelleştirilmiş Fibonacci sayılarıdır, [11].

2.6 Fibonacci Vektörler

Bu bölümde öncelikle Fibonacci $3-$vektörlerin, $4-$vektörlerin ve $7-$vektörlerin tanımı verilmiş ve bu vektörler için Öklid anlamında iç çarpıma yer değinilmiştir. Ardından, Fibonacci $r-$vektörlerden ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca E. Salter'in [2] "Fibonacci Vectors" adlı tez çalışmasının bir parçası olan, Fibonacci vektörler ile $x^2 - x - 1$ denkleminin özdeğerleri ve özvektörleri arasındaki ilişki incelenerek, Öklid anlamında iç çarpıma farklı bir bakış açısı verilmiştir.

2.6.1 Fibonacci $3-$Vektörler

Tanım 2.6 F_n , $n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere, $\vec{F}_n$ Fibonacci $3-$vektörü veya Fibonacci sıralı üçlüsü veya Fibonacci 3×1 tipindeki sütun matrisi

$$\vec{F}_n = (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}) \tag{2.91}$$

veya

$$\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times1} \tag{2.92}$$

şeklinde tanımlanır, [1]. Bu durumda, Fibonacci $3-$vektörler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$\overrightarrow{F}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}_{3\times1},\overrightarrow{F}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_{3\times1},\overrightarrow{F}_3=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}_{3\times1},\overrightarrow{F}_4=\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}_{3\times1},\overrightarrow{F}_5=\begin{bmatrix}5\\8\\13\end{bmatrix}_{3\times1},\overrightarrow{F}_6=\begin{bmatrix}8\\13\\21\end{bmatrix}_{3\times1},\ldots,\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1},\ldots$$

Not 2.1 Fibonacci $3-$ vektörlerinin tamamı $z=x+y$ düzlemi üzerinde yatar.

2.6.1.1 Fibonacci $3-$ Vektörler için Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm

Tanım 2.7 $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix}F_m\\F_{m+1}\\F_{m+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ birer Fibonacci $3-$ vektör olmak üzere, bu

iki vektörün Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n,\overrightarrow{F}_m\right\rangle=\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_m=F_nF_m+F_{n+1}F_{m+1}+F_{n+2}F_{m+2} \tag{2.93}$$

şeklinde tanımlanır, [1]. Burada T, $\overrightarrow{F}_n$ Fibonacci $3-$ vektörün transpozudur.

Teorem 2.7 $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix}F_m\\F_{m+1}\\F_{m+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ birer Fibonacci $3-$ vektör olmak üzere, bu

iki vektörün Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n,\overrightarrow{F}_m\right\rangle=F_nF_m+F_{n+m+3} \tag{2.94}$$

şeklindedir, [3].

İspat (2.50) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{F}_n,\overrightarrow{F}_m\right\rangle&=\left(\overrightarrow{F}_n\right)^t\overrightarrow{F}_m\\&=\begin{bmatrix}F_n & F_{n+1} & F_{n+2}\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}F_m\\F_{m+1}\\F_{m+2}\end{bmatrix}_{3\times1}\\&=F_nF_m+F_{n+1}F_{m+1}+F_{n+2}F_{m+2}\\&=F_nF_m+F_{n+m+3}\end{aligned}$$

şekilde elde edilir.

Teorem 2.8 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$ vektörler için, bu vektörlerin Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle = -F_n F_{m-1} + F_{n+2} F_{m+3} \tag{2.95}$$

şeklindedir.

İspat Rekürans bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle &= \left(\overrightarrow{F}_n\right)^t \overrightarrow{F}_m \\
&= \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} \\
&= F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} \\
&= F_n F_m + \left(F_{n+2} - F_n\right) F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} \\
&= F_n F_m + F_{n+2} F_{m+1} - F_n F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} \\
&= F_n \left(F_m - F_{m+1}\right) + F_{n+2} \left(F_{m+1} + F_{m+2}\right) \\
&= -F_n F_{m-1} + F_{n+2} F_{m+3}
\end{aligned}$$

şekilde elde edilir.

Tezin devamında ispatlar rekürans bağıntısı kullanılarak elde edilen iç çarpım sonucu kullanılarak yapılacaktır.

Örnek 2.1 $\overrightarrow{F}_3, \overrightarrow{F}_5$ vektörleri birer Fibonacci $3-$ vektör olmak üzere, $\left\langle \overrightarrow{F}_3, \overrightarrow{F}_5 \right\rangle$ değerini Öklid anlamında iç çarpım tanımından, Teorem 2.7'den ve Teorem 2.8'den ayrı ayrı hesaplayarak aynı olduklarını gösteriniz.

Çözüm $\left\langle \overrightarrow{F}_3, \overrightarrow{F}_5 \right\rangle$ değeri ilk olarak Öklid anlamında iç çarpımın tanımı gereğince hesaplanırsa,

$$\left\langle \vec{F}_3, \vec{F}_5 \right\rangle = \left(\vec{F}_3\right)^t \vec{F}_5$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$= 10 + 24 + 65$$

$$= 99$$

elde edilir. Şimdi, $\left\langle \vec{F}_3, \vec{F}_5 \right\rangle$ değeri Teorem 2.7'den ve Teorem 2.8'den ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\left\langle \vec{F}_3, \vec{F}_5 \right\rangle = F_3 F_5 + F_{3+5+3}$$
$$= 2.5 + 89$$
$$= 99$$

ve

$$\left\langle \vec{F}_3, \vec{F}_5 \right\rangle = -F_3 F_{5-1} + F_{3+2} F_{5+3}$$
$$= -2.3 + 5.21$$
$$= -6 + 105 = 99$$

şeklinde bulunur. Eşitliklerin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

Teorem 2.9 Her $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$ vektörü için,

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_{n+1} \right\rangle = -F_n^2 + F_{n+2} F_{n+4} \tag{2.96}$$

şeklindedir.

İspat

İç çarpım tanımından,

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_{n+1} \right\rangle = \left(\vec{F}_n\right)^t \vec{F}_{n+1}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_{n+1} \right\rangle = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$
$$= F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_{n+2} + F_{n+2} F_{n+3}$$
$$= F_n F_{n+1} + \left(F_{n+2} - F_n\right) F_{n+2} + F_{n+2} F_{n+3}$$
$$= F_n F_{n+1} + F_{n+2} F_{n+2} - F_n F_{n+2} + F_{n+2} F_{n+3}$$
$$= F_n \left(F_{n+1} - F_{n+2}\right) + F_{n+2} \left(F_{n+2} + F_{n+3}\right)$$
$$= -F_n F_n + F_{n+2} F_{n+4}$$
$$= -F_n^2 + F_{n+2} F_{n+4}$$

şeklinde bulunur.

Not 2.2 Eğer (2.94) eşitliği ile verilen Öklid anlamında iç çarpım kullanılırsa, her $\vec{F}_n$ Fibonacci $3-$ vektörü için, $\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_{n+1} \right\rangle = F_n F_{n+1} + F_{2n+4}$ şeklinde bulunabilir, [3].

Tanım 2.8 $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ bir Fibonacci $3-$ vektör olmak üzere, bu vektörün **normu,**

$$\left\| \vec{F}_n \right\| = \sqrt{\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_n \right\rangle} \tag{2.97}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.10 Her $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$ vektör için,

$$\left\| \vec{F}_n \right\| = \sqrt{-F_n F_{n-1} + F_{n+2} F_{n+3}} \tag{2.98}$$

şeklindedir.

İspat Norm tanımından,

$$\left\| \vec{F}_n \right\| = \sqrt{\left(\vec{F}_n\right)^t \vec{F}_n}$$
$$= \sqrt{\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\left\|\vec{F}_n\right\| &= \sqrt{F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2} \\ &= \sqrt{F_n^2 + \left(F_{n+2} - F_n\right)F_{n+1} + F_{n+2}^2} \\ &= \sqrt{F_n^2 + F_{n+2}F_{n+1} - F_nF_{n+1} + F_{n+2}^2} \\ &= \sqrt{F_n\left(F_n - F_{n+1}\right) + F_{n+2}\left(F_{n+1} + F_{n+2}\right)} \\ &= \sqrt{-F_nF_{n-1} + F_{n+2}F_{n+3}}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Not 2.3 (2.94) eşitliği ile verilen Öklid anlamında iç çarpım kullanılırsa, her Fibonacci $3-$ vektörü için, $\left\|\vec{F}_n\right\| = \sqrt{F_n^2 + F_{2n+3}}$ olacaktır, [3].

2.6.1.2 Fibonacci 3 – Vektörler için Öklid Anlamında Vektörel ve Karma Çarpım

Tanım 2.9 $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\vec{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı,

$$\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \end{vmatrix} \tag{2.99}$$

ile hesaplanır. Burada, $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$, $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının ortonormal bazıdır, [1].

Teorem 2.11 Bütün $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\vec{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$vektörler için, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı,

$$\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m = (-1)^m F_{n-m}\left(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) = (-1)^m F_{n-m}(-1,-1,1) = (-1)^m F_{n-m}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \tag{2.100}$$

şeklindedir, [1].

İspat $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ birer Fibonacci $3-$vektör olmak üzere, Öklid anlamında vektörel çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_1\left(F_{n+1}F_{m+2} - F_{m+1}F_{n+2}\right) - \vec{e}_2\left(F_nF_{m+2} - F_mF_{n+2}\right) + \vec{e}_3\left(F_nF_{m+1} - F_mF_{n+1}\right) \\
&= \vec{e}_1\left((-1)^{m+1}F_{n+1-(m+1)}\right) - \vec{e}_2\left(F_n\left(F_{m+1}+F_m\right) - F_m\left(F_{n+1}+F_n\right)\right) + \vec{e}_3\left((-1)^m F_{n-m}\right) \\
&= -\vec{e}_1\left((-1)^m F_{n-m}\right) - \vec{e}_2\left(F_nF_{m+1} + F_nF_m - F_mF_{n+1} - F_nF_m\right) + \vec{e}_3\left((-1)^m F_{n-m}\right) \\
&= -\vec{e}_1\left((-1)^m F_{n-m}\right) - \vec{e}_2\left(F_nF_{m+1} - F_mF_{n+1}\right) + \vec{e}_3\left((-1)^m F_{n-m}\right) \\
&= -e_1\left((-1)^m F_{n-m}\right) - \vec{e}_2\left((-1)^m F_{n-m}\right) + \vec{e}_3\left((-1)^m F_{n-m}\right) \\
&= (-1)^m F_{n-m}\left(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) \\
&= (-1)^m F_{n-m}\left(-1,-1,1\right) \\
&= (-1)^m F_{n-m}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.12 Her $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$vektörü için,

$$\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_{n+1} = (-1)^n\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3\right) = (-1)^n\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir, [1].

İspat $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$vektörü olmak üzere, (2.100) eşitliğinden,

$$\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_{n+1} = (-1)^{n+1} F_{n-(n+1)} \left(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_{n+1} &= (-1)^{n+1} F_{-1} \left(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) \\ &= -(-1)^n 1\left(-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) \\ &= (-1)^n \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3\right)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.2 $\overrightarrow{F}_3, \overrightarrow{F}_5$ vektörleri birer Fibonacci $3-$ vektör olmak üzere, $\overrightarrow{F}_3 \wedge \overrightarrow{F}_5$ değerini hesaplayınız.

Çözüm Fibonacci $3-$ vektörleri $\overrightarrow{F}_3 = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_5 = \begin{bmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ için,

Öklid anlamında vektörel çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_3 \wedge \overrightarrow{F}_5 &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 13 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1(3.13 - 8.5) - \vec{e}_2(2.13 - 5.5) + \vec{e}_3(8.2 - 5.3) \\ &= (-1, -1, 1)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, (2.100) eşitliğinden de aynı sonucun elde edilebileceği açıktır.

Örnek 2.3 $\overrightarrow{F}_2, \overrightarrow{F}_7$ vektörleri birer Fibonacci $3-$ vektör olmak üzere, $\overrightarrow{F}_2 \wedge \overrightarrow{F}_7$ değerini hesaplayınız.

Çözüm Fibonacci $3-$ vektörleri $\overrightarrow{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_7 = \begin{bmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \\ 34 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ için,

Öklid anlamında vektörel çarpımın tanımından,

$$\overrightarrow{F}_2 \wedge \overrightarrow{F}_7 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 13 & 21 & 34 \end{vmatrix}$$

yazılabilir. Bu determinant hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 \wedge \vec{F}_7 &= \vec{e}_1\left(2.34-3.21\right)-\vec{e}_2\left(1.34-3.13\right)+\vec{e}_3\left(1.21-2.13\right)\\ &=\left(5,5,-5\right)\\ &=\begin{bmatrix}5\\5\\-5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, (2.100) eşitliğinden,

$$\vec{F}_2 \wedge \vec{F}_7 = \left(-1\right)^7 F_{2-7}\left(-\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)=\left(-1\right)^7 F_{-5}\left(-1,-1,1\right)=-5\left(-1,-1,1\right)=\left(5,5,-5\right)=\begin{bmatrix}5\\5\\-5\end{bmatrix}$$

şeklinde aynı sonuca ulaşılabilir.

Teorem 2.13 $\vec{F}_n=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$, $\vec{F}_m=\begin{bmatrix}F_m\\F_{m+1}\\F_{m+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ ve $\vec{F}_k=\begin{bmatrix}F_k\\F_{k+1}\\F_{k+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ birer Fibonacci $3-$vektör olmak üzere, bu vektörlerin **Öklid anlamında karma çarpımı** sıfırdır. Yani,

$$\left\langle \vec{F}_n \wedge \vec{F}_m , \vec{F}_k \right\rangle = 0 \qquad (2.101)$$

dır, [3].

İspat Bütün $\vec{F}_n=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ ve $\vec{F}_m=\begin{bmatrix}F_m\\F_{m+1}\\F_{m+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ Fibonacci $3-$vektörleri için bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı (2.100) eşitliğinden,

$$\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m = \left(-1\right)^m F_{n-m}\left(-e_1-e_2+e_3\right)=\left(-1\right)^m F_{n-m}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_k \right\rangle = \left(\begin{bmatrix} -(-1)^m F_{n-m} \\ -(-1)^m F_{n-m} \\ (-1)^m F_{n-m} \end{bmatrix}_{3\times 1} \right)^t \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

yazılabilir. Bu iç çarpım değeri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_k \right\rangle &= \begin{bmatrix} -(-1)^m F_{n-m} & -(-1)^m F_{n-m} & (-1)^m F_{n-m} \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} \\ &= (-1)^m F_{n-m} \left(-F_k - F_{k+1} + F_{k+2} \right) \\ &= (-1)^m F_{n-m} \left(-\left(F_k + F_{k+1} \right) + F_{k+2} \right) \\ &= (-1)^m F_{n-m} \left(-F_{k+2} + F_{k+2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 2.2 Fibonacci $3-$ vektörler ile bir paralelyüzlü elde edilemez, [3].

İspat $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gibi üç vektörün belirlediği paralelyüzlünün hacmi, $V = \left| \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle \right|$ ile hesaplanabilir. Öyleyse, $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_k = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$ vektörler ile bir paralelyüzlü oluşturulsun. Bu durumda, bu paralelyüzlünün hacmi

$$V = \left| \left\langle \overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_k \right\rangle \right| = 0$$

olacaktır. Hacmin 0 olması çelişki olacağından Fibonacci $3-$ vektörler ile bir paralelyüzlü elde edilemez.

2.6.2 Fibonacci $4-$ Vektörler

Bu bölümde elde edilen sonuçlar herhangi bir kaynakta yer almayıp orijinal elde edilen sonuçlardır.

Tanım 2.10 $F_n,\ n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere, bir $\overrightarrow{F}_n$ Fibonacci $4-$ vektörü veya sıralı dörtlüsü veya 4×1 tipindeki sütun matrisi

$$\overrightarrow{F}_n = \left(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}\right) \tag{2.102}$$

veya

$$\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1} \tag{2.103}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan, Fibonacci $4-$ vektörler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

$$\overrightarrow{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{4\times 1}, \overrightarrow{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{4\times 1}, \overrightarrow{F}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}_{4\times 1}, \overrightarrow{F}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}_{4\times 1}, \ldots, \overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}, \ldots$$

2.6.2.1 Fibonacci $4-$ Vektörler için Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm

Tanım 2.11 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$, $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ Fibonacci $4-$ vektörler olmak üzere, bu iki vektörün Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle = \left(\overrightarrow{F}_n\right)^t \overrightarrow{F}_m = F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3} \tag{2.104}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.14 Bütün Fibonacci $4-$ vektörler $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ için, bu vektörlerin Öklid anlamında iç çarpımları,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle = -F_n F_{m-1} + F_{n+4} F_{m+3} \tag{2.105}$$

şeklindedir.

İspat Öklid anlamında iç çarpımın tanımından,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle = \left(\overrightarrow{F}_n\right)^t \overrightarrow{F}_m$$

yazılabilir. Rekürans bağıntısı yardımıyla hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle &= F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} \\
&= F_n F_m + \left(F_{n+2} - F_n\right)F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} \\
&= F_n F_m + F_{n+2}F_{m+1} - F_n F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} \\
&= F_n\left(F_m - F_{m-1}\right) + F_{n+2}\left(F_{m+1} + F_{m+2}\right) + F_{n+3}F_{m+3} \\
&= -F_n F_{m-1} + F_{n+2}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+3} \\
&= -F_n F_{m-1} + \left(F_{n+2} + F_{n+3}\right)F_{m+3} \\
&= -F_n F_{m-1} + F_{n+4}F_{m+3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.15 Her Fibonacci $4-$ vektör $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ için,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_{n+1} \right\rangle = -F_n^2 + F_{n+4}^2 \tag{2.106}$$

şeklindedir.

İspat

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_{n+1} \right\rangle &= \left(\overrightarrow{F}_n\right)^t \overrightarrow{F}_{n+1} \\
&= F_n F_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_{n+3} + F_{n+3}F_{n+4} \\
&= F_n F_{n+1} + \left(F_{n+2} - F_n\right)F_{n+2} + F_{n+2}(F_{n+4} - F_{n+2}) + F_{n+3}F_{n+4} \\
&= F_n F_{n+1} + F_{n+2}F_{n+2} - F_n F_{n+2} + F_{n+2}F_{n+4} - F_{n+2}F_{n+2} + F_{n+3}F_{n+4} \\
&= F_n\left(F_{n+1} - F_{n+2}\right) + F_{n+4}\left(F_{n+2} + F_{n+3}\right) \\
&= -F_n F_n + F_{n+4}F_{n+4} \\
&= -F_n^2 + F_{n+4}^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.12 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$, Fibonacci $4-$ vektör olmak üzere, bu vektörün **normu,**

$$\left\| \overrightarrow{F}_n \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{F}_n , \overrightarrow{F}_n \right\rangle} \tag{2.107}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.16 Her $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ Fibonacci $4-$ vektör için,

$$\left\| \overrightarrow{F}_n \right\| = \sqrt{F_{n+3}F_{n+4} - F_{n-1}F_n} \tag{2.108}$$

şeklindedir.

İspat Normun tanımından,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}_n &= \sqrt{\left\langle \overrightarrow{F}_n , \overrightarrow{F}_n \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left(\overrightarrow{F}_n \right)^T \overrightarrow{F}_m} \\ &= \sqrt{F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n+3} F_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} F_i^2} \\ &= \sqrt{F_{n+3}F_{n+4} - F_{n-1}F_n} \end{aligned}$$

bulunur. □

2.6.3 Fibonacci $7-$ Vektörler

Bu bölümde elde edilen sonuçlar, hiçbir kaynakta yer almayıp orijinal sonuçlardır.

Tanım 2.13 $F_n,\ n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere, bir $\overrightarrow{F}_n$ Fibonacci $7-$ vektörü veya sıralı yedilisi veya 7×1 tipindeki sütun matrisi

$$\overrightarrow{F}_n = \left(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, F_{n+4}, F_{n+5}, F_{n+6}\right) \tag{2.109}$$

veya

$$\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1} \tag{2.110}$$

şeklinde tanımlanır. Fibonacci $7-$vektörler aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

$$\overrightarrow{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}_{7\times 1}, \overrightarrow{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 21 \end{bmatrix}_{7\times 1}, \overrightarrow{F}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 21 \\ 34 \end{bmatrix}_{7\times 1}, \ldots, \overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}, \ldots$$

2.6.3.1 Fibonacci $7-$Vektörler için Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm

Tanım 2.14 $\overrightarrow{F}_n$, $\overrightarrow{F}_m$ birer Fibonacci $7-$vektör olmak üzere, bu iki vektörün Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle = \left(\overrightarrow{F}_n\right)^t \overrightarrow{F}_m = \sum_{i=0}^{6} F_{n+i} F_{m+i} \tag{2.111}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.17 Her n ve m tamsayısı için, $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $7-$ vektörlerin Öklid iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle = -F_n F_{m-1} + F_{n+6} F_{m+7} \tag{2.112}$$

şeklindedir.

İspat Öklid anlamında iç çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle &= \left(\overrightarrow{F}_n\right)^t \overrightarrow{F}_m \\ &= F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} + F_{n+4}F_{m+4} + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle &= F_n F_m + \left(F_{n+2} - F_n\right)F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} + F_{n+4}F_{m+4} + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6} \\ &= F_n F_m + F_{n+2}F_{m+1} - F_n F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} + F_{n+4}F_{m+4} + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6} \\ &= F_n\left(F_m - F_{m+1}\right) + F_{n+2}\left(F_{m+1} + F_{m+2}\right) + F_{n+3}F_{m+3} + F_{n+4}F_{m+4} + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{m+3}\left(F_{n+2} + F_{n+3}\right) + F_{n+4}F_{m+4} + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{n+4}\left(F_{m+3} + F_{m+4}\right) + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{m+5}\left(F_{n+4} + F_{n+5}\right) + F_{n+6}F_{m+6} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{n+6}\left(F_{m+5} + F_{m+6}\right) \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{n+6}F_{m+7}\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Örnek 2.4 $\overrightarrow{F}_1$ ve $\overrightarrow{F}_4$ birer Fibonacci $7-$vektör ise $\left\langle \overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_4 \right\rangle$ Öklid anlamında iç çarpımın sonucunu bulunuz.

Çözüm $\overrightarrow{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}_{7\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 21 \\ 34 \\ 55 \end{bmatrix}_{7\times 1}$ Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere, bu iki vektörün Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_4 \right\rangle &= -F_1 F_{4-1} + F_{1+6}F_{4+7} \\ &= -1.2 + 13.89 \\ &= 1155\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.18 Her $\overrightarrow{F}_n$ Fibonacci $7-$vektör için, $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_{n+1} \right\rangle = -F_n^2 + F_{n+6}F_{n+8}$ şeklindedir.

İspat

Öklid anlamında iç çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_{n+1} \right\rangle &= \left(\vec{F}_n\right)^t \vec{F}_{n+1} \\ &= F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_{n+3} + F_{n+3}F_{n+4} + F_{n+4}F_{n+5} + F_{n+5}F_{n+6} + F_{n+6}F_{n+7} \\ &= F_nF_{n+1} + \left(F_{n+2} - F_n\right)F_{n+2} + F_{n+2}F_{n+3} + F_{n+3}F_{n+4} + F_{n+4}F_{n+5} + F_{n+5}F_{n+6} + F_{n+6}F_{n+7} \\ &= F_n\left(F_{n+1} - F_{n+2}\right) + F_{n+2}\left(F_{n+2} + F_{n+3}\right) + F_{n+3}F_{n+4} + F_{n+4}F_{n+5} + F_{n+5}F_{n+6} + F_{n+6}F_{n+7} \\ &= -F_nF_n + F_{n+4}\left(F_{n+2} + F_{n+3}\right) + F_{n+4}F_{n+5} + F_{n+5}F_{n+6} + F_{n+6}F_{n+7} \\ &= -F_n^2 + F_{n+4}\left(F_{n+4} + F_{n+5}\right) + F_{n+5}F_{n+6} + F_{n+6}F_{n+7} \\ &= -F_n^2 + F_{n+6}\left(F_{n+4} + F_{n+5}\right) + F_{n+6}F_{n+7} \\ &= -F_n^2 + F_{n+6}\left(F_{n+6} + F_{n+7}\right) \\ &= -F_n^2 + F_{n+6}F_{n+8}\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.15 Her $\vec{F}_n$ Fibonacci $7-$vektör için, bu vektörün **normu,**

$$\left\|\vec{F}_n\right\| = \sqrt{\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_n \right\rangle} \tag{2.113}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.19 Her $7-$ Fibonacci vektör $\vec{F}_n$ için,

$$\left\|\vec{F}_n\right\| = \sqrt{F_{n+6}F_{n+7} - F_{n-1}F_n} \tag{2.114}$$

şeklindedir.

İspat $\vec{F}_n$, $7-$ Fibonacci vektör olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\left\|\vec{F}_n\right\| &= \sqrt{\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_n \right\rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^{6} F_{n+i}^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n+6} F_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} F_i^2} \\ &= \sqrt{F_{n+6}F_{n+7} - F_{n-1}F_n}\end{aligned}$$

elde edilir. □

2.6.4 Fibonacci $r-$ Vektörler

Tanım 2.16 $F_n,\ n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere Fibonacci $r-$ vektörü,

$$\vec{F}_n=\left(F_n,F_{n+1},F_{n+2},\ldots,F_{n+r-2},F_{n+r-1}\right) \tag{2.115}$$

veya

$$\vec{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ \vdots \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1} \tag{2.116}$$

şeklinde tanımlanır, [2].

Not 2.4 $L_n,\ n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere $r-$ Lucas vektörü

$$\vec{L}_n=\left(L_n,L_{n+1},L_{n+2},\ldots,L_{n+r-2},L_{n+r-1}\right)$$

veya

$$\vec{L}_n=\begin{bmatrix} L_n \\ L_{n+1} \\ L_{n+2} \\ \vdots \\ L_{n+r-2} \\ L_{n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

şeklinde tanımlanır, [2].

2.6.4.1 Fibonacci $r-$ Vektörlerin Özellikleri

Bu bölümde Fibonacci sayılarının özellikleri baz alınarak, benzer şekilde $3-$ Fibonacci vektörler için verilen [1] özellikler genelleştirilerek Fibonacci $r-$vektörler için gösterilmiştir. Aşağıda bu özelliklerden birkaçı sıralanmıştır:

Teorem 2.20 $\vec{F}_n$, Fibonacci $r-$ vektör ve $\vec{L}_n$, Lucas $r-$ vektör olmak üzere,

1. $\vec{F}_{n+2} = \vec{F}_{n+1} + \vec{F}_n$, (2.117)

2. $\vec{L}_{n+2} = \vec{L}_{n+1} + \vec{L}_n$, (2.118)

3. $\vec{L}_n = \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_{n+1}$, (2.119)

4. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_{n+2} - \vec{F}_2$, (2.120)

5. $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots + \vec{L}_{n-1} + \vec{L}_n = \vec{L}_{n+2} - \vec{L}_2$, (2.121)

6. $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 + \ldots + \vec{F}_{2n-1} = \vec{F}_{2n} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2$, (2.122)

7. $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 + \vec{F}_6 + \ldots + \vec{F}_{2n} = \vec{F}_{2n+1} - \vec{F}_1$, (2.123)

8. $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_{2n-1} - \vec{F}_{2n} = -\vec{F}_2 - \vec{F}_{2n-1}$, (2.124)

9. $\vec{F}_{2n} = F_{n-1}\vec{F}_n + F_n\vec{F}_{n+1}$, (2.125)

10. $\vec{L}_{2n} = L_{n-1}\vec{F}_n + L_n\vec{F}_{n+1}$ (2.126)

özellikleri sağlanır.

İspat $\vec{F}_n$, $n.$ Fibonacci $r-$ vektör ve $\vec{L}_n$, $n.$ Lucas $r-$ vektör olsun.

1. Fibonacci $r-$ vektörün tanımından,

$$\vec{F}_{n+2} = \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ \vdots \\ F_{n+r} \\ F_{n+r+1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\vec{F}_{n+1}+\vec{F}_n=\begin{bmatrix}F_{n+1}\\F_{n+2}\\F_{n+3}\\\vdots\\F_{n+r-1}\\F_{n+r}\end{bmatrix}_{r\times 1}+\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\\\vdots\\F_{n+r-2}\\F_{n+r-1}\end{bmatrix}_{r\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix}F_{n+1}+F_n\\F_{n+2}+F_{n+1}\\F_{n+3}+F_{n+2}\\\vdots\\F_{n+r-1}+F_{n+r-2}\\F_{n+r}+F_{n+r-1}\end{bmatrix}_{r\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix}F_{n+2}\\F_{n+3}\\F_{n+4}\\\vdots\\F_{n+r}\\F_{n+r+1}\end{bmatrix}_{r\times 1}$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden ispat tamamlanır. Bu özelliğe Fibonacci vektörler için Rekürans bağıntısı denilebilir.

2. Benzer şekilde Lucas içinde ispat yapılabilir. □

3. Lucas vektörün tanımından,

$$\vec{L}_n=\begin{bmatrix}L_n\\L_{n+1}\\L_{n+2}\\\vdots\\L_{n+r-2}\\L_{n+r-1}\end{bmatrix}_{r\times 1}$$

şeklinde olacaktır. Diğer taraftan,

$$\vec{F}_{n-1}+\vec{F}_{n+1}=\begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \\ F_{n+1} \\ \vdots \\ F_{n+r-3} \\ F_{n+r-2} \end{bmatrix}_{r\times 1}+\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ \vdots \\ F_{n+r-1} \\ F_{n+r} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix} F_{n-1}+F_{n+1} \\ F_n+F_{n+2} \\ F_{n+1}+F_{n+3} \\ \vdots \\ F_{n+r-3}+F_{n+r-1} \\ F_{n+r-2}+F_{n+r} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix} L_n \\ L_{n+1} \\ L_{n+2} \\ \vdots \\ L_{n+r-2} \\ L_{n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

bulunur. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

4. Rekürans bağıntısından,

$$\vec{F}_1=\vec{F}_3-\vec{F}_2$$
$$\vec{F}_2=\vec{F}_4-\vec{F}_3$$
$$\vec{F}_3=\vec{F}_5-\vec{F}_4$$
$$\vdots$$
$$\vec{F}_n=\vec{F}_{n+2}-\vec{F}_{n+1}$$

yazılabilir. Buradan eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\ldots+\vec{F}_{n-1}+\vec{F}_n=\vec{F}_{n+2}-\vec{F}_2$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

5. Benzer şekilde gösterilebilir. □

6. Rekürans bağıntısından,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1$$
$$\vec{F}_3 = \vec{F}_4 - \vec{F}_2$$
$$\vec{F}_5 = \vec{F}_6 - \vec{F}_4$$
$$\vec{F}_7 = \vec{F}_8 - \vec{F}_6$$
$$\vdots$$
$$\vec{F}_{2n-1} = \vec{F}_{2n} - \vec{F}_{2n-2}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 + \ldots + \vec{F}_{2n-1} = \vec{F}_{2n} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

7. Rekürans bağıntısından,

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_3 - \vec{F}_1$$
$$\vec{F}_4 = \vec{F}_5 - \vec{F}_3$$
$$\vec{F}_6 = \vec{F}_7 - \vec{F}_5$$
$$\vdots$$
$$\vec{F}_{2n} = \vec{F}_{2n+1} - \vec{F}_{2n-1}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan,

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_4 + \vec{F}_6 + \ldots + \vec{F}_{2n} = \vec{F}_{2n+1} - \vec{F}_1$$

elde edilir.

8. (2.122) ve (2.123) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 - \vec{F}_2 + \vec{F}_3 - \vec{F}_4 + \vec{F}_5 - \vec{F}_6 + \ldots + \vec{F}_{2n-1} - \vec{F}_{2n} &= \vec{F}_{2n} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 - \left(\vec{F}_{2n+1} - \vec{F}_1\right) \\ &= \vec{F}_{2n} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 - \vec{F}_{2n+1} + \vec{F}_1 \\ &= -\vec{F}_{2n-1} - \vec{F}_2\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

9. $\vec{F}_{2n} = F_{n-1}\vec{F}_n + F_n\vec{F}_{n+1}$ eşitliğini gösterelim:

Fibonacci $r-$ vektörün tanımından,

$$\overrightarrow{F}_{2n}=\begin{bmatrix} F_{2n} \\ F_{2n+1} \\ F_{2n+2} \\ \vdots \\ F_{2n+r-2} \\ F_{2n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

yazılabilir. Diğer taraf (2.53) eşitliği kullanılarak hesaplanırsa,

$$F_{n-1}\overrightarrow{F}_n+F_n\overrightarrow{F}_{n+1}=F_{n-1}\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ \vdots \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}+F_n\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ \vdots \\ F_{n+r-1} \\ F_{n+r} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix} F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1} \\ F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_{n+2} \\ F_{n-1}F_{n+2}+F_nF_{n+3} \\ \vdots \\ F_{n-1}F_{n+r-2}+F_nF_{n+r-1} \\ F_{n-1}F_{n+r-1}+F_nF_{n+r} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix} F_{2n} \\ F_{2n+1} \\ F_{2n+2} \\ \vdots \\ F_{2n+r-2} \\ F_{2n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

10. $\overrightarrow{L}_{2n}=L_{n-1}\overrightarrow{F}_n+L_n\overrightarrow{F}_{n+1}$ olduğunu gösterelim:

Lucas vektörün tanımından,

$$\overrightarrow{L}_{2n}=\begin{bmatrix} L_{2n} \\ L_{2n+1} \\ L_{2n+2} \\ \vdots \\ L_{2n+r-2} \\ L_{2n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$L_{n-1}\overrightarrow{F}_n + L_n\overrightarrow{F}_{n+1} = L_{n-1}\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ \vdots \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1} + L_n\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ \vdots \\ F_{n+r-1} \\ F_{n+r} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{n-1}F_n + L_nF_{n+1} \\ L_{n-1}F_{n+1} + L_nF_{n+2} \\ L_{n-1}F_{n+2} + L_nF_{n+3} \\ \vdots \\ L_{n-1}F_{n+r-2} + L_nF_{n+r-1} \\ L_{n-1}F_{n+r-1} + L_nF_{n+r} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca,

$$L_n = L_mF_{n-m+1} + L_{m-1}F_{n-m}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$L_{n-1}\overrightarrow{F}_n + L_n\overrightarrow{F}_{n+1} = \begin{bmatrix} L_{2n} \\ L_{2n+1} \\ L_{2n+2} \\ \vdots \\ L_{2n+r-2} \\ L_{2n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1} = \overrightarrow{L}_{2n}$$

elde edilir. □

2.6.4.2 Fibonacci $r-$Vektörler Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm

Tanım 2.17 Her n ve m tamsayısı için, $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $r-$vektörlerin Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle = \sum_{i=0}^{r-1} F_{n+i}F_{m+i} \tag{2.127}$$

şeklinde tanımlanır.

Fibonacci $2-$vektörler için, Öklid iç çarpımının sonucu,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle &= F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} \\ &= F_n F_m + \left(F_{n+2} - F_n\right) F_{m+1} \\ &= F_n \left(F_m - F_{m+1}\right) + F_{n+2} F_{m+1} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{n+2} F_{m+1}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Fibonacci $3-$vektörler için, (2.95) eşitliğinden $\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle = -F_n F_{m-1} + F_{n+2} F_{m+3}$ ve

Fibonacci $4-$vektörler için, (2.105) eşitliğinden $\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle = -F_n F_{m-1} + F_{n+4} F_{m+3}$ olduğu görülebilir.

Fibonacci $5-$vektörler için,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle &= F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3} + F_{n+4} F_{m+4} \\ &= F_n F_m + \left(F_{n+2} - F_n\right) F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3} + F_{n+4} F_{m+4} \\ &= F_n \left(F_m - F_{m+1}\right) + F_{n+2} \left(F_{m+1} + F_{m+2}\right) + F_{n+3} F_{m+3} + F_{n+4} F_{m+4} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{m+3} \left(F_{n+2} + F_{n+3}\right) + F_{n+4} F_{m+4} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{n+4} \left(F_{m+3} + F_{m+4}\right) \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{n+4} F_{m+5}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Fibonacci $6-$vektörler için,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle &= F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3} + F_{n+4} F_{m+4} + F_{n+5} F_{m+5} \\ &= F_n F_m + \left(F_{n+2} - F_n\right) F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3} + F_{n+4} F_{m+4} + F_{n+5} F_{m+5} \\ &= F_n \left(F_m - F_{m+1}\right) + F_{n+2} \left(F_{m+1} + F_{m+2}\right) + F_{n+3} F_{m+3} + F_{n+4} F_{m+4} + F_{n+5} F_{m+5} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{m+3} \left(F_{n+2} + F_{n+3}\right) + F_{n+4} F_{m+4} + F_{n+5} F_{m+5} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{n+4} \left(F_{m+3} + F_{m+4}\right) + F_{n+5} F_{m+5} \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{m+5} \left(F_{n+4} + F_{n+5}\right) \\ &= -F_n F_{m-1} + F_{n+6} F_{m+5}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Fibonacci $7-$vektörler için, (2.112) eşitliğinden $\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle = -F_n F_{m-1} + F_{n+6} F_{m+7}$ olduğu açıktır.

$\vdots$

Bu şekilde devam edilirse, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.3 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ \vdots \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ \vdots \\ F_{m+r-2} \\ F_{m+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$ Fibonacci $r-$ vektörler olmak üzere, bu iki vektörün Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle = \begin{cases} -F_n F_{m-1} + F_{n+r} F_{m+r-1} & , \ r \text{ çift ise} \\ -F_n F_{m-1} + F_{n+r-1} F_{m+r} & , \ r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.128}$$

şeklindedir.

2.6.5 Fibonacci Vektörlerin $\mathbf{x^2 - x - 1 = 0}$ Denklemine ait Özdeğerlerle ve Özvektörlerle İlişkisi

Bu bölümde, E. Salter'in [2] "Fibonacci vectors" adlı tezi incelenmiş ve Fibonacci vektörler için Öklid iç çarpımı, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin özdeğerleri ve özvektörleri ile ilişkilendirilmiştir.

Hatırlatma 2.1 (2.117) eşitliği göz önüne alınırsa**,** $\forall n$ tamsayı değeri için, Fibonacci $2-$ vektör $\overrightarrow{F}_n$,

$$\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} \tag{2.129}$$

şeklinde tanımlanabilir, [2].

Teorem 2.21 Fibonacci $2-$ vektörler için rekürans bağıntısı sağlanır. Yani,

$$\overrightarrow{F}_{n+1} = \overrightarrow{F}_{n-1} + \overrightarrow{F}_n$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Fibonacci $2-$vektörün tanımı gereğince, $\overrightarrow{F}_{n+1}=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_{n+2}\end{bmatrix}^T$ şeklindedir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_{n+1} &= \overrightarrow{F}_{n-1}+\overrightarrow{F}_n \\ &= \begin{bmatrix}F_{n-1} & F_n\end{bmatrix}^T+\begin{bmatrix}F_n & F_{n+1}\end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix}F_{n-1}+F_n & F_n+F_{n+1}\end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix}F_{n+1} & F_{n+2}\end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde, her iki tarafın eşitliğinden rekürans bağıntısı sağlanır.

Teorem 2.22 T matrisi, [10],

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{2.130}$$

şeklinde verilsin. $\forall n$ tamsayı değeri için,

$$\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix}F_n & F_{n+1}\end{bmatrix}^T$$

olmak üzere,

$$\overrightarrow{F}_{n+1}=T\overrightarrow{F}_n \tag{2.131}$$

eşitliği yazılabilir. Özel olarak $\forall k$ tamsayısı için

$$\overrightarrow{F}_{n+1}=T^{n-k+1}\overrightarrow{F}_k \tag{2.132}$$

eşitliği de sağlanır.

İspat $\forall n$ tamsayı değeri için, $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix}F_n & F_{n+1}\end{bmatrix}^T$ olduğundan,

$$\overrightarrow{F}_{n+1}=\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_{n+2}\end{bmatrix}^T$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}T\overrightarrow{F}_n &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_n & F_{n+1}\end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_n\\ F_{n+1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$T\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}^T$$

şeklinde bulunur. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

Şimdi ise, $\overrightarrow{F}_{n+1} = T^{n-k+1}\overrightarrow{F}_k$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$T^{n-k+1}\overrightarrow{F_k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-k+1} \begin{bmatrix} F_k & F_{k+1} \end{bmatrix}^T$ olacağından, ilk olarak $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-k+1}$ matrisinin sonucu bulunursa,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{bmatrix}$$
$$T^2 = TT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$
$$T^3 = T^2T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_3 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}$$
$$T^4 = T^3T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4 & F_5 \end{bmatrix}$$
$$T^5 = T^4T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 & F_5 \\ F_5 & F_6 \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$T^{n-k+1} = \begin{bmatrix} F_{n-k} & F_{n-k+1} \\ F_{n-k+1} & F_{n-k+2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde,

$$T^{n-k+1}\overrightarrow{F}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n-k+1} \begin{bmatrix} F_k & F_{k+1} \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} F_{n-k} & F_{n-k+1} \\ F_{n-k+1} & F_{n-k+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$T^{n-k+1}\vec{F}_k = \begin{bmatrix} F_{n-k}F_k + F_{n-k+1}F_{k+1} \\ F_{n-k+1}F_k + F_{n-k+2}F_{k+1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} \qquad \text{“(2.47) denkleminden”}$$
$$= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}^T$$
$$= \vec{F}_{n+1}$$

elde edilir.

Lemma 2.6 (2.123) eşitliği ile verilen T matrisi $x^2 - x - 1$ karakteristik polinomuna sahiptir. Bu yüzden, özdeğerleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ değerleridir. Ayrıca, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler, sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \qquad (2.133)$$

şeklindedir.

İspat Öncelikle, T matrisinin karakteristik polinomunu gösterelim:

$$P_T(x) = \det(xI_2 - T)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}$$
$$= x(x-1) - 1$$
$$= x^2 - x - 1.$$

Karakteristik polinomunun kökleri özdeğerler olacağından, gerçekten $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ T matrisinin özdeğerleridir. Şimdi, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım:

İlk olarak $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü hesaplansın.

Özvektör olması için, $TX = \lambda X$ iken $X \neq \vec{0}$ olmalıdır. O zaman, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$TX = \lambda X$ eşitliğindeki tüm ifadeler yerlerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bulunan bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} x_1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} x_2 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Buradan,

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x_1$$

ve

$$x_1 + x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} x_2$$

elde edilir. x_2 değeri denklemde yerine yazılırsa,

$$x_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} x_1 \right)$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} x_1$$

eşitliği bulunur. Bu durumda, tek bir parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır. O halde,

$$x_1 = t$$

yazılırsa,

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} t$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak,

$$X=\begin{bmatrix} t \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}t \end{bmatrix}$$

olacaktır. $t=1$ için,

$$X=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, diğer özvektörde hesaplanırsa, $X=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}$ elde edilir. □

Lemma 2.7 $\forall n$ tamsayısı için,

$$\vec{F}_n=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^n\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}-\beta^n\begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}\right) \tag{2.134}$$

ve

$$\vec{L}_n=\alpha^n\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}+\beta^n\begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \tag{2.135}$$

şeklindedir. Bu formüller, sırasıyla Fibonacci vektörler ve Lucas vektörler için **Binet Formülü** şeklinde adlandırabilir, [2].

İspat $n=0$ için,

$$\begin{aligned}\vec{F}_0&=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^0\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}-\beta^0\begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}\right)\\ &=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}\right)\\ &=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha-\beta \end{bmatrix}\right)\\ &=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\overrightarrow{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\overrightarrow{F}_n = T^n \overrightarrow{F}_0$$

yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_n &= \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\begin{bmatrix} \alpha^n \\ \alpha^{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta^n \\ \beta^{n+1} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\alpha^n \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} - \beta^n \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer ispat Lucas vektörü için de yapılabilir. □

Şimdi r sabit pozitif tam sayısı için genelleştirme verilecektir.

Tanım 2.18 $r \times r$ tipindeki T matrisi,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{r \times r} \tag{2.136}$$

şeklinde tanımlanır, [2].

Lemma 2.8 (2.136) denklemi ile tanımlanan T matrisinin karakteristik polinomu,

$$x^{r-1}\left(x^2-x-1\right) \tag{2.137}$$

dir. Bu sebepten T matrisinin sıfırdan farklı özdeğerleri $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$'dir.

O halde, bu karakteristik uzay, sırasıyla,

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\ \alpha\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^{r-1}\end{bmatrix}_{r\times 1} \quad \text{ve} \quad \vec{b}=\begin{bmatrix}1\\ \beta\\ \beta^2\\ \vdots\\ \beta^{r-1}\end{bmatrix}_{r\times 1} \tag{2.138}$$

vektörleri ile gerilir, [2].

İspat

Karakteristik polinom hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
P_T(x) &= \det\left(xI_r-T\right)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix}x&0&0&\cdots&0&0\\0&x&0&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&0\\0&0&0&\cdots&0&x\end{bmatrix}_{r\times r}-\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&1&1\end{bmatrix}_{r\times r}\right)\\
&= \begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&-1&0&0\\0&0&\cdots&0&x&-1&0\\0&0&\cdots&0&0&x&-1\\0&0&\cdots&0&0&-1&x-1\end{vmatrix}\\
&= x^{r-1}\left(x(x-1)-1\right)\\
&= x^{r-1}\left(x^2-x-1\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Öyleyse, bu karakteristik polinomun sıfırdan farklı özdeğerleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$'dir. α ve β özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler ise, sırasıyla,

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1} \quad \text{ve} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^{r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}$$

şeklinde elde edilir.

Lemma 2.9 $c \neq 1$ olmak üzere, bütün r pozitif tamsayı değerleri için,

$$\sum_{j=0}^{r-1} c^j = \frac{c^r - 1}{c-1} \tag{2.139}$$

eşitliği sağlanır, [2].

İspat $r = 1$ için,

$c^0 = 1$ ve $\frac{c^1 - 1}{c-1} = 1$ olacağından doğrudur.

$r = k$ için doğru olsun. Yani, $\sum_{j=0}^{k-1} c^j = \frac{c^k - 1}{c-1}$ eşitliği sağlansın. Şimdi, $r = k+1$ içinde doğru olduğunu gösterelim:

$$\sum_{j=0}^{k} c^j = \sum_{j=0}^{k-1} c^j + c^k = \frac{c^k - 1}{c-1} + c^k = \frac{c^k - 1 + c^{k+1} - c^k}{c-1} = \frac{c^{k+1} - 1}{c-1}.$$

İstenen elde edilir. O halde, bütün r pozitif tamsayı değeri için, $\sum_{j=0}^{r-1} c^j = \frac{c^r - 1}{c-1}$ eşitliği sağlanır.

Lemma 2.10 r pozitif tamsayı olmak üzere, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri için,

$$\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = \begin{cases} F_r(\alpha - \beta)\alpha^{r-1} & , r \text{ çift ise} \\ L_r \alpha^{r-1} & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.140}$$

$$\left\langle \vec{b},\vec{b} \right\rangle = \begin{cases} -F_r\left(\alpha-\beta\right)\beta^{r-1} & , r \text{ çift ise} \\ L_r\beta^{r-1} & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.141}$$

$$\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle = \begin{cases} 0 & , r \text{ çift ise} \\ 1 & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.142}$$

eşitlikleri sağlanır, [2].

İspat

İç çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{a},\vec{a} \right\rangle &= \sum_{j=0}^{r-1}\alpha^{2j} \\ &= \sum_{j=0}^{r-1}\left(\alpha^2\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{r-1}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^j \\ &= \frac{\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^r-1}{\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)-1} \\ &= \frac{\left(-1\right)^r\frac{\alpha^r}{\beta^r}-1}{\frac{-\alpha-\beta}{\beta}} \\ &= \frac{\left(-1\right)^r\alpha^r-\beta^r}{-\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta^{r-1}}\right) \\ &= \frac{1}{\beta^{r-1}}\left(\left(-1\right)^{r-1}\alpha^r+\beta^r\right) \\ &= \left(-1\right)^{r-1}\alpha^{r-1}\left(\left(-1\right)^{r-1}\alpha^r+\beta^r\right) \\ &= \alpha^{r-1}\left(\alpha^r-\left(-1\right)^r\beta^r\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Farz edelim ki r çift olsun. Bu durumda,

$$\left\langle \vec{a},\vec{a} \right\rangle = \alpha^{r-1}\left(\alpha^r-\beta^r\right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{a},\vec{a}\right\rangle &= \alpha^{r-1}\left(\alpha^{r}-\beta^{r}\right)\\ &= \alpha^{r-1}\left(\alpha-\beta\right)\left(\frac{\alpha^{r}-\beta^{r}}{\alpha-\beta}\right)\\ &= \alpha^{r-1}\left(\alpha-\beta\right)F_{r}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Şimdi ise r tek olsun.

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{a},\vec{a}\right\rangle &= \alpha^{r-1}\left(\alpha^{r}+\beta^{r}\right)\\ &= \alpha^{r-1}L_{r}\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{b},\vec{b}\right\rangle &= \sum_{j=0}^{r-1}\beta^{2j}\\ &= \sum_{j=0}^{r-1}\left(\beta^{2}\right)^{j}\\ &= \sum_{j=0}^{r-1}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{j}\\ &= \frac{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{r}-1}{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)-1}\\ &= \frac{\left(-1\right)^{r}\frac{\beta^{r}}{\alpha^{r}}-1}{\frac{-\alpha-\beta}{\alpha}}\\ &= \frac{1}{\alpha^{r-1}}\frac{\left(-1\right)^{r}\beta^{r}-\alpha^{r}}{-\alpha-\beta}\\ &= \left(-1\right)^{r-1}\beta^{r-1}\left(\left(-1\right)^{r-1}\beta^{r}+\alpha^{r}\right)\\ &= \beta^{r-1}\left(\beta^{r}-\left(-1\right)^{r}\alpha^{r}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. İlk olarak r'nin çift olması durumu incelenirse,

$$\left\langle \vec{b},\vec{b}\right\rangle = \beta^{r-1}\left(\beta^{r}-\left(-1\right)^{r}\alpha^{r}\right)$$

olmak üzere,

$$\left\langle \vec{b},\vec{b} \right\rangle = \beta^{r-1}\left(\beta^{r}-\alpha^{r}\right)$$
$$= -\beta^{r-1}\left(\alpha-\beta\right)\left(\frac{\alpha^{r}-\beta^{r}}{\alpha-\beta}\right)$$
$$= -\beta^{r-1}\left(\alpha-\beta\right)F_{r}$$

elde edilir. r'nin tek olması durumunda ise,

$$\left\langle \vec{b},\vec{b} \right\rangle = \beta^{r-1}\left(\alpha^{r}+\beta^{r}\right)$$
$$= \beta^{r-1}L_{r}$$

şeklinde olur. Son olarak, $\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle$ iç çarpımına bakılırsa,

$$\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle = \sum_{j=0}^{r-1}\alpha^{j}\beta^{j}$$
$$= \sum_{j=0}^{r-1}\left(\alpha\beta\right)^{j}$$
$$= \sum_{j=0}^{r-1}\left(-1\right)^{j}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{, r çift ise} \\ 1 & \text{, r tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Lemma 2.11 r pozitif tamsayı değerleri için,

$$\left\|\vec{a}\right\| = \begin{cases} \sqrt{F_{r}\left(\alpha-\beta\right)\alpha^{r-1}} & \text{, } r \text{ çift ise} \\ \sqrt{L_{r}\alpha^{r-1}} & \text{, } r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.143}$$

$$\left\|\vec{b}\right\| = \begin{cases} \sqrt{-F_{r}\left(\alpha-\beta\right)\beta^{r-1}} & \text{, } r \text{ çift ise} \\ \sqrt{L_{r}\beta^{r-1}} & \text{, } r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.144}$$

$$\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| = \begin{cases} F_{r}\left(\alpha-\beta\right) & \text{, } r \text{ çift ise} \\ L_{r} & \text{, } r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.145}$$

eşitlikleri yazılabilir, [2].

İspat:

(2.140) ve (2.141) eşitliklerinden, $\left\|\vec{a}\right\|$ ve $\left\|\vec{b}\right\|$ aşikârdır.

$$\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| = \begin{cases} \sqrt{F_r\left(\alpha-\beta\right)\alpha^{r-1}\left(-F_r\left(\alpha-\beta\right)\beta^{r-1}\right)} & , r \text{ çift ise} \\ \sqrt{L_r\alpha^{r-1}L_r\beta^{r-1}} & , r \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{-\left(F_r\right)^2\left(\alpha-\beta\right)^2\left(\alpha\beta\right)^{r-1}} & , r \text{ çift ise} \\ \sqrt{\left(L_r\right)^2\left(\alpha\beta\right)^{r-1}} & , r \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_r\left(\alpha-\beta\right) & , r \text{ çift ise} \\ L_r & , r \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi elde edilen eşitlikler kullanılarak Fibonacci vektörler için Öklid iç çarpımına farklı bir bakış açısı verilecektir.

Hatırlatma 2.2 $\forall r$ pozitif tamsayısı ve n tamsayısı için, Fibonacci $r-$vektör ve Lucas $r-$vektör, sırasıyla,

$$\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ \vdots \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1}, \qquad \vec{L}_n = \begin{bmatrix} L_n \\ L_{n+1} \\ L_{n+2} \\ \vdots \\ L_{n+r-2} \\ L_{n+r-1} \end{bmatrix}_{r\times 1} \tag{2.146}$$

şeklinde tanımlandığı (2.117) eşitliğinden tekrardan söylenebilir.

Lemma 2.12 T (2.136) denklemindeki matris; Fibonacci $r-$vektör ve Lucas $r-$vektör, sırasıyla, $\overrightarrow{F}_n$ ve $\vec{L}_n$ olsun. Her n tamsayısı için,

$$\overrightarrow{F}_{n+1} = T\overrightarrow{F}_n, \qquad \vec{L}_{n+1} = T\vec{L}_n \tag{2.147}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan, $\forall k \geq n+1$ tamsayısı, Fibonacci $r-$vektörler ve Lucas $r-$vektörler için, sırasıyla,

$$\overrightarrow{F}_{n+1} = T^{n-k+1}\overrightarrow{F}_k, \qquad \vec{L}_{n+1} = T^{n-k+1}\vec{L}_k \tag{2.148}$$

eşitlikleri yazılabilir, [2].

İspat $\overrightarrow{F}_n$ Fibonacci $r-$vektörün tanımından,

$$\overrightarrow{F}_{n+1}=\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ \vdots \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \\ F_{n+r} \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} T\overrightarrow{F}_n &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ \vdots \\ F_{n+r-3} \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ \vdots \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \\ F_{n+r-2}+F_{n+r-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ \vdots \\ F_{n+r-2} \\ F_{n+r-1} \\ F_{n+r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabileceğinden, iki tarafın eşitliği kolaylıkla görülebilir. İspat tamamlanır.

Benzer işlemler, Lucas eşitliği içinde yapılabilir. □

Teorem 2.23 Bütün Fibonacci $r-$vektörler ve Lucas $r-$vektörler için, sırasıyla,

$$\overrightarrow{F}_n=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^n\vec{a}-\beta^n\vec{b}\right) \tag{2.149}$$

ve

$$\vec{L}_n = \alpha^n \vec{a} + \beta^n \vec{b} \tag{2.150}$$

eşitlikleri yazılabilir, [2]. Bu eşitlikler **Binet Formülleri** olarak adlandırılır. Bilhassa $\vec{F}_n$ ve $\vec{L}_n$ vektörleri $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri tarafından gerilen düzlem üzerinde yatarlar.

İspat $\vec{F}_n$ Fibonacci $r-$vektörünün $j.$ elemanı,

$$F_{n+j-1} = \frac{\alpha^{n+j-1} - \beta^{n+j-1}}{\alpha - \beta}$$

dir. Diğer taraftan, $\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^n \vec{a} - \beta^n \vec{b}\right)$'nin $j.$ elemanı,

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^n \alpha^{j-1} - \beta^n \beta^{j-1}\right)$$

şeklindedir. Her j için eşitliğin iki tarafı da birbirine eşit olacağından ispat tamamlanır. Benzer şekilde Lucas vektörü içinde ispat yapılabilir. □

Lemma 2.13 Bütün Fibonacci $r-$vektörler için,

$$\begin{aligned} \alpha^n \vec{a} &= \alpha \vec{F}_n + \vec{F}_{n-1} \\ \beta^n \vec{b} &= \beta \vec{F}_n + \vec{F}_{n-1} \end{aligned} \tag{2.151}$$

eşitlikleri yazılabilir, [2].

Teorem 2.24 Her $\vec{F}_n$ ve $\vec{F}_m$ Fibonacci $r-$vektörler için, bu iki vektörün **Öklid anlamında iç çarpımı**,

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle = \begin{cases} F_r F_{n+m+r-1} & , r \text{ çift ise} \\ \frac{1}{5}\left(L_r L_{n+m+r-1} - (-1)^n L_{m-n}\right) & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.152}$$

şeklindedir, [2].

Sonuç 2.4 $\forall r$ pozitif tamsayısı ve $\forall n$ tamsayısı için,

$$\left\|\vec{F}_n\right\|^2 = \begin{cases} F_r F_{2n+r-1} & , r \text{ çift ise} \\ \frac{1}{5}\left(L_r L_{2n+r-1} - 2(-1)^n\right) & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.153}$$

eşitlikleri sağlanır, [2].

Teorem 2.25 Her $\vec{L}_n$ ve $\vec{L}_m$ Lucas $r-$vektörler için, bu iki vektörün **Öklid anlamında iç çarpımı,**

$$\left\langle \vec{L}_n, \vec{L}_m \right\rangle = \begin{cases} 5F_r F_{n+m+r-1} & , r \text{ çift ise} \\ L_r L_{n+m+r-1} + (-1)^n L_{m-n} & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.154}$$

şeklindedir, [2].

Sonuç 2.5 $\forall r$ pozitif tamsayısı ve $\forall n$ tamsayısı için,

$$\left\| \vec{L}_n \right\|^2 = \begin{cases} 5F_r F_{2n+r-1} & , r \text{ çift ise} \\ L_r L_{2n+r-1} + 2(-1)^n & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.155}$$

eşitlikleri sağlanır, [2].

Sonuç 2.6 $\forall r$ pozitif tamsayısı, $\forall n$ ve m tamsayısı için,

$$\left\langle \vec{L}_n, \vec{L}_m \right\rangle = 5\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \tag{2.156}$$

dir, [2].

Teorem 2.26 Her $\vec{F}_n$ Fibonacci $r-$vektör ve $\vec{L}_m$ Lucas $r-$vektör için, bu iki vektörün **Öklid anlamında iç çarpımı,**

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{L}_m \right\rangle = \begin{cases} 5F_r L_{n+m+r-1} & , r \text{ çift ise} \\ L_r F_{n+m+r-1} + (-1)^{n+1} F_{m-n} & , r \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.157}$$

şeklindedir, [2].

2.7 Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$Vektörler

Bu alt bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektörlerin Öklid geometrisi incelenmiştir.

Tanım 2.19 H_n, genelleştirilmiş $n.$ Fibonacci sayısı olmak üzere, genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektör $\vec{H}_n$,

$$\vec{H}_n = \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \\ H_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} \tag{2.158}$$

şeklinde tanımlanır, [5]. O halde, genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektörler aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

$$\overrightarrow{H_1}=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\\H_3\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}p\\p+q\\2p+q\end{bmatrix}_{3\times1},\overrightarrow{H_2}=\begin{bmatrix}p+q\\2p+q\\3p+2q\end{bmatrix}_{3\times1},\overrightarrow{H_3}=\begin{bmatrix}2p+q\\3p+2q\\5p+3q\end{bmatrix}_{3\times1},\ldots,\overrightarrow{H_n}=\begin{bmatrix}H_n\\H_{n+1}\\H_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1},\cdots$$

Teorem 2.27 $\overrightarrow{H_n}=\begin{bmatrix}H_n\\H_{n+1}\\H_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ Fibonacci $3-$vektör olmak üzere, bu vektör

$$\overrightarrow{H_n}=F_n\begin{bmatrix}(p-q)\\q\\p\end{bmatrix}_{3\times1}+F_{n+1}\begin{bmatrix}q\\p\\(p+q)\end{bmatrix}_{3\times1}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

İspat $\overrightarrow{H_n}=\begin{bmatrix}H_n\\H_{n+1}\\H_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ Fibonacci $3-$vektör olsun. (2.58) ve (2.65) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H_n}&=\begin{bmatrix}(p-q)F_n+qF_{n+1}\\qF_n+pF_{n+1}\\pF_n+(p+q)F_{n+1}\end{bmatrix}_{3\times1}\\&=F_n\begin{bmatrix}(p-q)\\q\\p\end{bmatrix}_{3\times1}+F_{n+1}\begin{bmatrix}q\\p\\(p+q)\end{bmatrix}_{3\times1}\end{aligned}$$

yazılabilir. İstenen elde edilir. □

2.7.1 Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$Vektörler için Öklid Anlamında İç Çarpım ve Norm

Tanım 2.20 $\overrightarrow{H_n}$ ve $\overrightarrow{H_m}$ genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, bu iki vektörün Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle\overrightarrow{H_n},\overrightarrow{H_m}\right\rangle=\left(\overrightarrow{H_n}\right)^T\overrightarrow{H_m}=\sum_{i=0}^{2}H_{n+i}H_{m+i}=H_nH_m+H_{n+1}H_{m+1}+H_{n+2}H_{m+2}\qquad(2.159)$$

şeklinde tanımlanır, [5].

Teorem 2.28 Herhangi iki genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektör $\overrightarrow{H}_n=\begin{bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \\ H_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\overrightarrow{H}_m=\begin{bmatrix} H_m \\ H_{m+1} \\ H_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ için, bu vektörlerin Öklid anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{H}_n, \overrightarrow{H}_m \right\rangle = -H_n H_{m-1} + H_{n+2} H_{m+3} \tag{2.160}$$

şeklindedir.

İspat Öklid iç çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{H}_n, \overrightarrow{H}_m \right\rangle &= \left(\overrightarrow{H}_n\right)^T \overrightarrow{H}_m \\ &= \begin{bmatrix} H_n & H_{n+1} & H_{n+2} \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} H_m \\ H_{m+1} \\ H_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} \\ &= H_n H_m + H_{n+1} H_{m+1} + H_{n+2} H_{m+2} \\ &= H_n H_m + \left(H_{n+2} - H_n\right) H_{m+1} + H_{n+2} H_{m+2} \\ &= H_n H_m + H_{n+2} H_{m+1} - H_n H_{m+1} + H_{n+2} H_{m+2} \\ &= H_n \left(H_m - H_{m+1}\right) + H_{n+2}\left(H_{m+1} + H_{m+2}\right) \\ &= -H_n H_{m-1} + H_{n+2} H_{m+3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Not 2.5 $\overrightarrow{H}_n$ ve $\overrightarrow{H}_m$ genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Öklid anlamında iç çarpımı, rekürans bağıntısı yerine genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının özellikleri kullanılarak hesaplanırsa,

$$\left\langle \overrightarrow{H}_n, \overrightarrow{H}_m \right\rangle = (p-q)^2\left(F_{n+m+3} + F_n F_m\right) + q(p-q)\left(2F_{n+m+2} + F_{n+2}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+2}\right) + q^2\left(F_{n+m+5} + F_{n+1}F_{m+1}\right)$$

şeklinde elde edilir, [5].

Teorem 2.29 $\overrightarrow{H}_n=\begin{bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \\ H_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$, genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektör olmak üzere,

$$\left\langle \overrightarrow{H}_n, \overrightarrow{H}_{n+1} \right\rangle = H_{n+2}H_{n+4} - H_n^2 \tag{2.161}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Öklid anlamında iç çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{H}_n, \overrightarrow{H}_{n+1} \right\rangle &= \left(\overrightarrow{H}_n\right)^T \overrightarrow{H}_{n+1} \\
&= \begin{bmatrix} H_n & H_{n+1} & H_{n+2} \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} H_{n+1} \\ H_{n+2} \\ H_{n+3} \end{bmatrix}_{3\times 1} \\
&= H_nH_{n+1} + H_{n+1}H_{n+2} + H_{n+2}H_{n+3} \\
&= H_n\left(H_{n+2} - H_n\right) + H_{n+1}H_{n+2} + H_{n+2}H_{n+3} \\
&= H_nH_{n+2} - H_nH_n + H_{n+1}H_{n+2} + H_{n+2}H_{n+3} \\
&= H_{n+2}\left(H_n + H_{n+1}\right) - H_n^2 + H_{n+2}H_{n+3} \\
&= H_{n+2}H_{n+2} - H_n^2 + H_{n+2}H_{n+3} \\
&= H_{n+2}\left(H_{n+2} + H_{n+3}\right) - H_n^2 \\
&= H_{n+2}H_{n+4} - H_n^2
\end{aligned}$$

Tanım 2.21 $\overrightarrow{H}_n$, genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektör olmak üzere, bu vektörün **Öklid anlamında normu**,

$$\left\|\overrightarrow{H}_n\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{H}_n, \overrightarrow{H}_n \right\rangle} \tag{2.162}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.30 Herhangi bir genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektör $\overrightarrow{H}_n = \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \\ H_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ olmak üzere,

$$\left\|\overrightarrow{H}_n\right\| = \sqrt{H_{n+2}H_{n+3} - H_{n-1}H_n} \tag{2.163}$$

eşitliği sağlanır.

İspat Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$vektör $\overrightarrow{H_n}$ için, Öklid anlamında normun tanımından,

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{H_n}\right\| &= \sqrt{\left\langle \overrightarrow{H_n}, \overrightarrow{H_n} \right\rangle} \\
&= \sqrt{\left(\overrightarrow{H_n}\right)^T \overrightarrow{H}_{n+1}} \\
&= \sqrt{\begin{bmatrix} H_n & H_{n+1} & H_{n+2} \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \\ H_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}} \\
&= \sqrt{H_n^2 + H_{n+1}^2 + H_{n+2}^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n+2} H_i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} H_i^2} \\
&= \sqrt{H_{n+2}H_{n+3} - H_0H_1 - \left(H_{n-1}H_n - H_0H_1\right)} \\
&= \sqrt{H_{n+2}H_{n+3} - H_0H_1 - H_{n-1}H_n + H_0H_1} \\
&= \sqrt{H_{n+2}H_{n+3} - H_{n-1}H_n}
\end{aligned}$$

yazılabilir. İstenen elde edilir.

2.7.2 Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$Vektörler için Öklid Anlamında Vektörel Çarpım

Tanım 2.22 $\overrightarrow{H_n}$ ve $\overrightarrow{H_m}$ genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ vektörler olmak üzere, bu iki vektörün Öklid anlamında vektörel çarpımı

$$\overrightarrow{H_n} \wedge \overrightarrow{H_m} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ H_n & H_{n+1} & H_{n+2} \\ H_m & H_{m+1} & H_{m+2} \end{vmatrix} \tag{2.164}$$

ile hesaplanır. Burada $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ E^3 Öklid uzayının ortonormal bazıdır, [5].

Teorem 2.31 Bütün $\overrightarrow{H_n} = \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \\ H_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\overrightarrow{H_m} = \begin{bmatrix} H_m \\ H_{m+1} \\ H_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ vektörler için, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_m = (-1)^m eF_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = (-1)^m eF_{n-m}(-1,-1,1) \tag{2.165}$$

şeklindedir, [5]. Burada $e = p^2 - pq - q^2$ 'dir.

İspat $\overrightarrow{H}_n$ ve $\overrightarrow{H}_m$ genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ vektörler için, Öklid anlamında vektörel çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_m &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ H_n & H_{n+1} & H_{n+2} \\ H_m & H_{m+1} & H_{m+2} \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_1 \left(H_{n+1}H_{m+2} - H_{m+1}H_{n+2} \right) - \vec{e}_2 \left(H_nH_{m+2} - H_mH_{n+2} \right) + \vec{e}_3 \left(H_nH_{m+1} - H_mH_{n+1} \right) \\
&= \vec{e}_1 \left((-1)^{m+1} eF_{n+1-(m+1)} \right) - \vec{e}_2 \left(H_n \left(H_{m+1} + H_m \right) - H_m \left(H_{n+1} + H_n \right) \right) + \vec{e}_3 \left((-1)^m eF_{n-m} \right) \\
&= -\vec{e}_1 \left((-1)^m eF_{n-m} \right) - \vec{e}_2 \left(H_nH_{m+1} + H_nH_m - H_mH_{n+1} - H_nH_m \right) + \vec{e}_3 \left((-1)^m eF_{n-m} \right) \\
&= -\vec{e}_1 \left((-1)^m eF_{n-m} \right) - \vec{e}_2 \left(H_nH_{m+1} - H_mH_{n+1} \right) + \vec{e}_3 \left((-1)^m eF_{n-m} \right) \\
&= -\vec{e}_1 \left((-1)^m eF_{n-m} \right) - \vec{e}_2 \left((-1)^m eF_{n-m} \right) + \vec{e}_3 \left((-1)^m eF_{n-m} \right) \\
&= (-1)^m eF_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \\
&= (-1)^m eF_{n-m}(-1,-1,1)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Öyleyse,

$$\overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_m = (-1)^m eF_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = (-1)^m eF_{n-m}(-1,-1,1)$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 2.32 Her $\overrightarrow{H}_n$, genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ vektör için,

$$\overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_{n+1} = (-1)^n e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = (-1)^n e(1,1,-1) \tag{2.166}$$

eşitliği sağlanır, [5].

İspat $\overrightarrow{H_n}$, genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ vektör olmak üzere, Öklid anlamında vektörel çarpımın tanımı gereğince,

$$\overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_{n+1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ H_n & H_{n+1} & H_{n+2} \\ H_{n+1} & H_{n+2} & H_{n+3} \end{vmatrix}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_{n+1} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ H_n & H_{n+1} & H_{n+2} \\ H_{n+1} & H_{n+2} & H_{n+3} \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_1\left(H_{n+1}H_{n+3} - H_{n+2}H_{n+2}\right) - \vec{e}_2\left(H_nH_{n+3} - H_{n+1}H_{n+2}\right) + \vec{e}_3\left(H_nH_{n+2} - H_{n+1}H_{n+1}\right) \\
&= \vec{e}_1\left((-1)^{n+2} eF_{n+1-(n+2)}\right) - \vec{e}_2\left(H_n\left(H_{n+2} + H_{n+1}\right) - H_{n+1}\left(H_{n+1} + H_n\right)\right) + \vec{e}_3\left((-1)^{n+1} eF_{n-(n+1)}\right) \\
&= \vec{e}_1\left((-1)^{n} eF_{-1}\right) - \vec{e}_2\left(H_nH_{n+2} + H_nH_{n+1} - H_{n+1}H_{n+1} - H_nH_{n+1}\right) + \vec{e}_3\left(-(-1)^{n} eF_{-1}\right) \\
&= \vec{e}_1\left((-1)^{n} e\right) - \vec{e}_2\left(H_nH_{n+2} - H_{n+1}H_{n+1}\right) - \vec{e}_3\left((-1)^{n} e\right) \\
&= \vec{e}_1\left((-1)^{n} e\right) - \vec{e}_2\left((-1)^{n+1} eF_{n-(n+1)}\right) - \vec{e}_3\left((-1)^{n} e\right) \\
&= (-1)^{n} e\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3\right) \\
&= (-1)^{n} e\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{n} e(1,1,-1)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.33 $\overrightarrow{H_n} = \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \\ H_{n+2} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{H_m} = \begin{bmatrix} H_m \\ H_{m+1} \\ H_{m+2} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{H_k} = \begin{bmatrix} H_k \\ H_{k+1} \\ H_{k+2} \end{bmatrix}$, genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ vektörler olmak üzere, bu vektörlerin **Öklid anlamında karma çarpımı** sıfırdır. Yani,

$$\left\langle \overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_m, \overrightarrow{H}_k \right\rangle = 0 \tag{2.167}$$

dır, [5].

İspat Her $\overrightarrow{H_n}$ ve $\overrightarrow{H_m}$ genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ vektörler için, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımının,

$$\overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_m = (-1)^m \, eF_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{H}_n \wedge \overrightarrow{H}_m, \overrightarrow{H}_k \right\rangle &= (-1)^m \, eF_{n-m} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} \right)^T \begin{bmatrix} H_k \\ H_{k+1} \\ H_{k+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} \\
&= (-1)^m \, eF_{n-m} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} H_k \\ H_{k+1} \\ H_{k+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} \\
&= (-1)^m \, eF_{n-m} \left(-H_k - H_{k+1} + H_{k+2} \right) \\
&= (-1)^m \, F_{n-m} \left(-\left(H_k + H_{k+1} \right) + H_{k+2} \right) \\
&= (-1)^m \, F_{n-m} \left(-H_{k+2} + H_{k+2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 2.7 Genelleştirilmiş Fibonacci $3-$ vektörler ile bir paralelyüzlü elde edilemez.

İspat (2.167) denklemi göz önüne alınırsa, ispat aşikârdır. □

BÖLÜM 3

ANTİ-SİMETRİK MATRİS YARDIMIYLA VEKTÖREL ÇARPIM

Tezin ilk orijinal bölümü olan bu kısımda, ilk olarak 2. bölümde verilen Fibonacci $3-$ vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım, anti-simetrik matris yardımıyla tekrar elde edilecek ve bu vektörel çarpıma ait özellikler verilecektir. Ayrıca, Fibonacci $4-$ vektörler ve $7-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpımın tanımı yapılarak, $7-$ Fibonacci vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım, anti-simetrik matris yardımıyla tekrar elde edilecektir.

3.1 Fibonacci $3-$Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Öklid Anlamında Vektörel Çarpım

Bölüm 2'de (2.100) eşitliği ile verilen Öklid anlamında vektörel çarpım, bu alt bölümde anti-simetrik matris yardımıyla tekrar elde edilecektir. Bunun için ilk olarak, ihtiyacımız olan anti-simetrik matris tanımlanarak ardından Öklid anlamında vektörel çarpımın bir diğer bulunuşu verilecektir. Her $\overrightarrow{F}_n$ Fibonacci $3-$vektörüne 3×3 tipinde bir anti-simetrik matris karşılık gelir. Bu matris aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 3.1 Herhangi bir $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ Fibonacci $3-$vektörü için, bu vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris,

$$S_{\overrightarrow{F}_n}=\mathbb{F}_n=\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix}F_m\\F_{m+1}\\F_{m+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere $\lambda\overrightarrow{F}_n+\mu\overrightarrow{F}_m$ vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris $\lambda\mathbb{F}_n+\mu\mathbb{F}_m$ matrisidir.

İspat $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere $\lambda\overrightarrow{F}_n+\mu\overrightarrow{F}_m$ vektörü,

$$\begin{aligned}\lambda\overrightarrow{F}_n+\mu\overrightarrow{F}_m&=\lambda\begin{bmatrix}F_n & F_{n+1} & F_{n+2}\end{bmatrix}^T+\mu\begin{bmatrix}F_m & F_{m+1} & F_{m+2}\end{bmatrix}^T\\&=\begin{bmatrix}\lambda F_n+\mu F_m & \lambda F_{n+1}+\mu F_{m+1} & \lambda F_{n+2}+\mu F_{m+2}\end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. O halde, bu yeni vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris;

$$\begin{bmatrix}0 & -(\lambda F_{n+2}+\mu F_{m+2}) & \lambda F_{n+1}+\mu F_{m+1}\\ \lambda F_{n+2}+\mu F_{m+2} & 0 & -(\lambda F_n+\mu F_m)\\ -(\lambda F_{n+1}+\mu F_{m+1}) & \lambda F_n+\mu F_m & 0\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}0 & -\lambda F_{n+2} & \lambda F_{n+1}\\ \lambda F_{n+2} & 0 & -\lambda F_n\\ -\lambda F_{n+1} & \lambda F_n & 0\end{bmatrix}_{3\times3}+\begin{bmatrix}0 & -\mu F_{m+2} & \mu F_{m+1}\\ \mu F_{m+2} & 0 & -\mu F_m\\ -\mu F_{m+1} & \mu F_m & 0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$=\lambda\begin{bmatrix}0 & -F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+2} & 0 & -F_n\\ -F_{n+1} & F_n & 0\end{bmatrix}_{3\times3}+\mu\begin{bmatrix}0 & -F_{m+2} & F_{m+1}\\ F_{m+2} & 0 & -F_m\\ -F_{m+1} & F_m & 0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$=\lambda\mathbb{F}_n+\mu\mathbb{F}_m$$

şeklinde elde edilir. İspat tamamlanır. □

Teorem 3.2 $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix}F_m\\F_{m+1}\\F_{m+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı, birinci vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris ile ikinci vektörün çarpımına eşittir. Yani,

$$\overrightarrow{F}_n\wedge\overrightarrow{F}_m=\mathbb{F}_{\mathrm{n}}\overrightarrow{F}_m \tag{3.2}$$

şeklindedir.

İspat

(2.100) eşitliğinden,

$$\overrightarrow{F}_n\wedge\overrightarrow{F}_m=(-1)^m F_{n-m}\begin{bmatrix}-\vec{e}_1\\-\vec{e}_2\\\vec{e}_3\end{bmatrix}=(-1)^m F_{n-m}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $\mathbb{F}_{\mathrm{n}}\vec{F}_m$ matrisi hesaplanırsa,

$$\mathbb{F}_n\vec{F}_m=\begin{bmatrix}0 & -F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+2} & 0 & -F_n\\ -F_{n+1} & F_n & 0\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}F_m\\ F_{m+1}\\ F_{m+2}\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+2}\\ F_{n+2}F_m-F_nF_{m+2}\\ -F_mF_{n+1}+F_nF_{m+1}\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)^{m+1}F_{n+1-(m+1)}\\ (F_{n+1}+F_n)F_m-F_n(F_{m+1}+F_m)\\ (-1)^mF_{n-m}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-(-1)^mF_{n-m}\\ F_{n+1}F_m+F_nF_m-F_nF_{m+1}-F_nF_m\\ (-1)^mF_{n-m}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-(-1)^mF_{n-m}\\ -(F_nF_{m+1}-F_{n+1}F_m)\\ (-1)^mF_{n-m}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-(-1)^mF_{n-m}\\ -(-1)^mF_{n-m}\\ (-1)^mF_{n-m}\end{bmatrix}$$

$$=(-1)^mF_{n-m}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden,

$$\vec{F}_n\wedge\vec{F}_m=\mathbb{F}_{\mathrm{n}}\vec{F}_m$$

sonucuna ulaşılır.

3.1.1 Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Elde Edilen Öklid Anlamında Vektörel Çarpımın Özellikleri

Teorem 3.3 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times1}$, $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times1}$, $\overrightarrow{F}_k = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}_{3\times1}$, $\overrightarrow{F}_t = \begin{bmatrix} F_t \\ F_{t+1} \\ F_{t+2} \end{bmatrix}_{3\times1}$ ve

$\overrightarrow{F}_r = \begin{bmatrix} F_r \\ F_{r+1} \\ F_{r+2} \end{bmatrix}_{3\times1}$ birer Fibonacci $3-$vektör ve $\mathbb{F}_n$, 3×3 tipinde (3.1) eşitliği ile verilen bir anti-simetrik matris olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\overrightarrow{F}_n \left(\overrightarrow{F}_n\right)^T = \left\|\overrightarrow{F}_n\right\|^2 \mathrm{I}_3 + \mathbb{F}_n{}^2$, (3.3)

2. $\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m = \mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m = -\mathbb{F}_m \overrightarrow{F}_n = -\overrightarrow{F}_m \wedge \overrightarrow{F}_n$, (3.4)

3. $\mathbb{F}_n = -\mathbb{F}_n{}^T$, (3.5)

4. $\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_n = \mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, (3.6)

5. $\mathbb{F}_n \mathbb{F}_m = \overrightarrow{F}_m \left(\overrightarrow{F}_n\right)^T - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_m\right) \mathrm{I}_3$, (3.7)

6. $\left(\mathbb{F}_n \mathbb{F}_m\right)^T = \mathbb{F}_m \mathbb{F}_n$, (3.8)

7. $\mathbb{F}_n \mathbb{F}_m \mathbb{F}_k = \mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_k \left(\overrightarrow{F}_m\right)^T - \left(\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T \overrightarrow{F}_k\right) \mathbb{F}_n$, (3.9)

8. $\mathbb{F}_n \mathbb{F}_m \mathbb{F}_n = -\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_m\right) \mathbb{F}_n$, (3.10)

9. $\mathbb{F}_n{}^3 = -\left\|\overrightarrow{F}_n\right\|^2 \mathbb{F}_n$, (3.11)

10. $\left(\overrightarrow{F}_k\right)^T \mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m = \left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \mathbb{F}_m \overrightarrow{F}_k = \left(\overrightarrow{F}_m\right)^T \mathbb{F}_k \overrightarrow{F}_n$, (3.12)

11. $\mathbb{F}_n \mathbb{F}_m \overrightarrow{F}_k = \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_k\right) \overrightarrow{F}_m - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_m\right) \overrightarrow{F}_k = \overrightarrow{F}_n \wedge \left(\overrightarrow{F}_m \wedge \overrightarrow{F}_k\right)$, (3.13)

12. $\left(\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m\right)^T \mathbb{F}_k \overrightarrow{F}_r = \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_k\right)\left(\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T \overrightarrow{F}_r\right) - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_r\right)\left(\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T \overrightarrow{F}_k\right) = \left(\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m\right)^T \left(\overrightarrow{F}_k \wedge \overrightarrow{F}_r\right)$, (3.14)

13. $\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m$ vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris S olmak üzere,

$$S = \overrightarrow{F}_m \left(\overrightarrow{F}_n\right)^T - \overrightarrow{F}_n \left(\overrightarrow{F}_m\right)^T = \mathbb{F}_n \mathbb{F}_m - \mathbb{F}_m \mathbb{F}_n \quad (3.15)$$

şeklindedir.

İspat

1. $\vec{F}_n\left(\vec{F}_n\right)^T = \left\|\vec{F}_n\right\|^2 \mathrm{I}_3 + \mathbb{F}_n^{\,2}$ eşitliğini ispat edelim:

$$\vec{F}_n\left(\vec{F}_n\right)^T = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_nF_{n+2} \\ F_{n+1}F_n & F_{n+1}^2 & F_{n+1}F_{n+2} \\ F_{n+2}F_n & F_{n+2}F_{n+1} & F_{n+2}^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left\|\vec{F}_n\right\|^2 \mathrm{I}_3 = \left(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\mathbb{F}_n^{\,2} = \mathbb{F}_n\mathbb{F}_n = \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 & F_nF_{n+1} & F_nF_{n+2} \\ F_nF_{n+1} & -F_{n+2}^2 - F_n^2 & F_{n+1}F_{n+2} \\ F_nF_{n+2} & F_{n+1}F_{n+2} & -F_{n+1}^2 - F_n^2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\left\|\vec{F}_n\right\|^2 \mathrm{I}_3 + \mathbb{F}_n^{\,2} = \begin{bmatrix} F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 & F_nF_{n+1} & F_nF_{n+2} \\ F_nF_{n+1} & -F_{n+2}^2 - F_n^2 & F_{n+1}F_{n+2} \\ F_nF_{n+2} & F_{n+1}F_{n+2} & -F_{n+1}^2 - F_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 & F_nF_{n+1} & F_nF_{n+2} \\ F_nF_{n+1} & F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 - F_{n+2}^2 - F_n^2 & F_{n+1}F_{n+2} \\ F_nF_{n+2} & F_{n+1}F_{n+2} & F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 - F_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_n^2 & F_nF_{n+1} & F_nF_{n+2} \\ F_{n+1}F_n & F_{n+1}^2 & F_{n+1}F_{n+2} \\ F_{n+2}F_n & F_{n+2}F_{n+1} & F_{n+2}^2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu iki eşitlikten,

$$\vec{F}_n\left(\vec{F}_n\right)^T = \left\|\vec{F}_n\right\|^2 \mathrm{I}_3 + \mathbb{F}_n^{\,2}$$

elde edilir.

2. $\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m = \mathbb{F}_n \vec{F}_m = -\mathbb{F}_m \vec{F}_n = -\vec{F}_m \wedge \vec{F}_n$ özelliğinin sağlandığını gösterelim:

$$\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m = \mathbb{F}_n \vec{F}_m = \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} \\ F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} \end{bmatrix}$$

Diğer taraftan,

$$-\vec{F}_m \wedge \vec{F}_n = -\mathbb{F}_m \vec{F}_n = -\begin{bmatrix} 0 & -F_{m+2} & F_{m+1} \\ F_{m+2} & 0 & -F_m \\ -F_{m+1} & F_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} +F_{n+2}F_{m+1} - F_{n+1}F_{m+2} \\ -F_{n+2}F_m + F_nF_{m+2} \\ +F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} \\ F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

3. $\mathbb{F}_n = -\mathbb{F}_n^{\,T}$ eşitliğini gösterelim:

$$\mathbb{F}_n = \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & F_{n+2} & -F_{n+1} \\ -F_{n+2} & 0 & F_n \\ F_{n+1} & -F_n & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{F}_n^{\,T}$$

elde edilir.

4. $\vec{F}_n \wedge \vec{F}_n = \mathbb{F}_n \vec{F}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$\vec{F}_n \wedge \vec{F}_n = \mathbb{F}_n \vec{F}_n = \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2} \\ F_{n+2}F_n - F_nF_{n+2} \\ -F_{n+1}F_n + F_nF_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

5. $\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m = \overrightarrow{F}_m\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_m\right)\mathrm{I}_3$ eşitliğini gösterelim:

İlk olarak, eşitliğin sağ tarafı hesaplanırsa,

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m = \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -F_{m+2} & F_{m+1} \\ F_{m+2} & 0 & -F_m \\ -F_{m+1} & F_m & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+2} - F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m \\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2} - F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1} \\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1} - F_nF_m \end{bmatrix}$$

elde edilir. Şimdi, eşitliğin sol tarafındaki ifadeler ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\overrightarrow{F}_m\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_mF_n & F_mF_{n+1} & F_mF_{n+2} \\ F_{m+1}F_n & F_{m+1}F_{n+1} & F_{m+1}F_{n+2} \\ F_{m+2}F_n & F_{m+2}F_{n+1} & F_{m+2}F_{n+2} \end{bmatrix}$$

ve

$$-\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_m\right)\mathrm{I}_3 = -\left(\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= -\left(F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -F_nF_m - F_{n+1}F_{m+1} - F_{n+2}F_{m+2} & 0 & 0 \\ 0 & -F_nF_m - F_{n+1}F_{m+1} - F_{n+2}F_{m+2} & 0 \\ 0 & 0 & -F_nF_m - F_{n+1}F_{m+1} - F_{n+2}F_{m+2} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\overrightarrow{F}_m\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_m\right)\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} -F_{n+1}F_{m+1} - F_{n+2}F_{m+2} & F_mF_{n+1} & F_mF_{n+2} \\ F_{m+1}F_n & -F_nF_m - F_{n+2}F_{m+2} & F_{m+1}F_{n+2} \\ F_{m+2}F_n & F_{m+2}F_{n+1} & -F_nF_m - F_{n+1}F_{m+1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak iki tarafın eşitliğinden,

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m = \overrightarrow{F}_m\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_m\right)\mathrm{I}_3$$

yazılabilir.

6. $\left(\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\right)^T=\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n$ olduğunu gösterelim:

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m=\begin{bmatrix}0 & -F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+2} & 0 & -F_n\\ -F_{n+1} & F_n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -F_{m+2} & F_{m+1}\\ F_{m+2} & 0 & -F_m\\ -F_{m+1} & F_m & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m\\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2}-F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1}\\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1}-F_nF_m\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\left(\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\right)^T=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+1} & F_nF_{m+1} & F_nF_{m+2}\\ F_{n+1}F_m & -F_{n+2}F_{m+2}-F_nF_m & F_{n+1}F_{m+2}\\ F_{n+2}F_m & F_{n+2}F_{m+1} & -F_{n+1}F_{m+1}-F_nF_m\end{bmatrix}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n=\begin{bmatrix}0 & -F_{m+2} & F_{m+1}\\ F_{m+2} & 0 & -F_m\\ -F_{m+1} & F_m & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+2} & 0 & -F_n\\ -F_{n+1} & F_n & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-F_{m+2}F_{n+2}-F_{m+1}F_{n+1} & F_{m+1}F_n & F_{m+2}F_n\\ F_mF_{n+1} & -F_{m+2}F_{n+2}-F_mF_n & F_{m+2}F_{n+1}\\ F_mF_{n+2} & F_{m+1}F_{n+2} & -F_{m+1}F_{n+1}-F_mF_n\end{bmatrix}$$

elde edilir. Öyleyse, iki tarafın eşitliğinden,

$$\left(\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\right)^T=\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n$$

olduğu görülür.

7. $\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\mathbb{F}_k=\mathbb{F}_n\overrightarrow{F}_k\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T-\left(\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T\overrightarrow{F}_k\right)\mathbb{F}_n$ olduğunu gösterelim:

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m\\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2}-F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1}\\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1}-F_nF_m\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\mathbb{F}_k=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m\\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2}-F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1}\\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1}-F_nF_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -F_{k+2} & F_{k+1}\\ F_{k+2} & 0 & -F_k\\ -F_{k+1} & F_k & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}F_{n+1}F_mF_{k+2}-F_{n+2}F_mF_{k+1} & F_{n+2}F_{m+2}F_{k+2}+F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2}+F_{n+2}F_mF_k & -F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1}-F_{n+1}F_{m+1}F_{k+1}-F_{n+1}F_mF_k\\ -F_{n+2}F_{m+2}F_{k+2}-F_nF_mF_{k+2}-F_{n+2}F_{m+1}F_{k+1} & -F_nF_{m+1}F_{k+2}-F_{n+2}F_{m+1}F_k & F_nF_{m+1}F_{k+1}+F_{n+2}F_{m+2}F_k+F_nF_mF_k\\ F_{n+1}F_{m+2}F_{k+2}+F_{n+1}F_{m+1}F_{k+1}+F_nF_mF_{k+1} & -F_nF_{m+2}F_{k+2}-F_{n+1}F_{m+1}F_k-F_nF_mF_k & F_nF_{m+2}F_{k+1}-F_{n+1}F_{m+2}F_k\end{bmatrix}$$

elde edilir. Eşitliğin diğer tarafı hesaplanırsa,

$$\mathbb{F}_n\vec{F}_k\left(\vec{F}_m\right)^T=\begin{bmatrix}0 & -F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+2} & 0 & -F_n\\ -F_{n+1} & F_n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_k\\ F_{k+1}\\ F_{k+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_m & F_{m+1} & F_{m+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{k+1}+F_{n+1}F_{k+2}\\ F_{n+2}F_k-F_nF_{k+2}\\ -F_{n+1}F_k+F_nF_{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_m & F_{m+1} & F_{m+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{k+1}F_m+F_{n+1}F_{k+2}F_m & -F_{n+2}F_{k+1}F_{m+1}+F_{n+1}F_{k+2}F_{m+1} & -F_{n+2}F_{k+1}F_{m+2}+F_{n+1}F_{k+2}F_{m+2}\\ F_{n+2}F_kF_m-F_nF_{k+2}F_m & F_{n+2}F_kF_{m+1}-F_nF_{k+2}F_{m+1} & F_{n+2}F_kF_{m+2}-F_nF_{k+2}F_{m+2}\\ -F_{n+1}F_kF_m+F_nF_{k+1}F_m & -F_{n+1}F_kF_{m+1}+F_nF_{k+1}F_{m+1} & -F_{n+1}F_kF_{m+2}+F_nF_{k+1}F_{m+2}\end{bmatrix}$$

bulunur. Ayrıca,

$$-\left(\left(\vec{F}_m\right)^T\vec{F}_k\right)\mathbb{F}_n=-\left(\begin{bmatrix}F_m & F_{m+1} & F_{m+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_k\\ F_{k+1}\\ F_{k+2}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & -F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+2} & 0 & -F_n\\ -F_{n+1} & F_n & 0\end{bmatrix}$$

$$=-\left(F_mF_k+F_{m+1}F_{k+1}+F_{m+2}F_{k+2}\right)\begin{bmatrix}0 & -F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+2} & 0 & -F_n\\ -F_{n+1} & F_n & 0\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Öyleyse, $\left(\left(\vec{F}_m\right)^T\vec{F}_k\right)\mathbb{F}_n$ matrisi,

$$\begin{bmatrix}0 & F_mF_kF_{n+2}+F_{m+1}F_{k+1}F_{n+2}+F_{m+2}F_{k+2}F_{n+2} & -F_mF_kF_{n+1}-F_{m+1}F_{k+1}F_{n+1}-F_{m+2}F_{k+2}F_{n+1}\\ -F_mF_kF_{n+2}-F_{m+1}F_{k+1}F_{n+2}-F_{m+2}F_{k+2}F_{n+2} & 0 & -F_mF_kF_n-F_{m+1}F_{k+1}F_n-F_{m+2}F_{k+2}F_n\\ F_mF_kF_{n+1}+F_{m+1}F_{k+1}F_{n+1}+F_{m+2}F_{k+2}F_{n+1} & F_mF_kF_n+F_{m+1}F_{k+1}F_n+F_{m+2}F_{k+2}F_n & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\mathbb{F}_n \vec{F}_k \left(\vec{F}_m\right)^T - \left(\left(\vec{F}_m\right)^T \vec{F}_k\right)\mathbb{F}_n$$

$$= \begin{bmatrix} F_{n+1}F_mF_{k+2} - F_{n+2}F_mF_{k+1} & F_{n+2}F_{m+2}F_{k+2} + F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2} + F_{n+2}F_mF_k & -F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+1} - F_{n+1}F_mF_k \\ -F_{n+2}F_{m+2}F_{k+2} - F_nF_mF_{k+2} - F_{n+2}F_{m+1}F_{k+1} & -F_nF_{m+1}F_{k+2} - F_{n+2}F_{m+1}F_k & F_nF_{m+1}F_{k+1} + F_{n+2}F_{m+2}F_k + F_nF_mF_k \\ F_{n+1}F_{m+2}F_{k+2} + F_{n+1}F_{m+1}F_{k+1} + F_nF_mF_{k+1} & -F_nF_{m+2}F_{k+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_k - F_nF_mF_k & F_nF_{m+2}F_{k+1} - F_{n+1}F_{m+2}F_k \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & F_mF_kF_{n+2} + F_{m+1}F_{k+1}F_{n+2} + F_{m+2}F_{k+2}F_{n+2} & -F_mF_kF_{n+1} - F_{m+1}F_{k+1}F_{n+1} - F_{m+2}F_{k+2}F_{n+1} \\ -F_mF_kF_{n+2} - F_{m+1}F_{k+1}F_{n+2} - F_{m+2}F_{k+2}F_{n+2} & 0 & -F_mF_kF_n - F_{m+1}F_{k+1}F_n - F_{m+2}F_{k+2}F_n \\ F_mF_kF_{n+1} + F_{m+1}F_{k+1}F_{n+1} + F_{m+2}F_{k+2}F_{n+1} & F_mF_kF_n + F_{m+1}F_{k+1}F_n + F_{m+2}F_{k+2}F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{k+1}F_m + F_{n+1}F_{k+2}F_m & -F_{n+2}F_{k+1}F_{m+1} + F_{n+1}F_{k+2}F_{m+1} & -F_{n+2}F_{k+1}F_{m+2} + F_{n+1}F_{k+2}F_{m+2} \\ F_{n+2}F_kF_m - F_nF_{k+2}F_m & F_{n+2}F_kF_{m+1} - F_nF_{k+2}F_{m+1} & F_{n+2}F_kF_{m+2} - F_nF_{k+2}F_{m+2} \\ -F_{n+1}F_kF_m + F_nF_{k+1}F_m & -F_{n+1}F_kF_{m+1} + F_nF_{k+1}F_{m+1} & -F_{n+1}F_kF_{m+2} + F_nF_{k+1}F_{m+2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden ispat tamamlanır.

8. $\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n = -\left(\left(\vec{F}_n\right)^T \vec{F}_m\right)\mathbb{F}_n$ eşitliğini gösterelim:

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m = \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+2} - F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m \\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2} - F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1} \\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1} - F_nF_m \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n = \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+2} - F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m \\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2} - F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1} \\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1} - F_nF_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{n+1}F_mF_{n+2} - F_{n+2}F_mF_{n+1} & F_{n+2}F_{m+2}F_{n+2} + F_{n+1}F_{m+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_mF_n & -F_{n+2}F_{m+2}F_{n+1} - F_{n+1}F_{m+1}F_{n+1} - F_{n+1}F_mF_n \\ -F_{n+2}F_{m+2}F_{n+2} - F_nF_mF_{n+1} - F_{n+2}F_{m+1}F_{n+1} & -F_nF_{m+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_{m+1}F_n & F_nF_{m+1}F_{n+1} + F_{n+2}F_{m+2}F_n + F_nF_mF_n \\ F_{n+1}F_{m+2}F_{n+2} + F_{n+1}F_{m+1}F_{n+1} + F_nF_mF_{n+1} & -F_nF_{m+2}F_{n+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_n - F_nF_mF_n & F_nF_{m+2}F_{n+1} - F_{n+1}F_{m+2}F_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & F_{n+2}F_{m+2}F_{n+2} + F_{n+1}F_{m+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_mF_n & -F_{n+2}F_{m+2}F_{n+1} - F_{n+1}F_{m+1}F_{n+1} - F_{n+1}F_mF_n \\ -F_{n+2}F_{m+2}F_{n+2} - F_nF_mF_{n+1} - F_{n+2}F_{m+1}F_{n+1} & 0 & F_nF_{m+1}F_{n+1} + F_{n+2}F_{m+2}F_n + F_nF_mF_n \\ F_{n+1}F_{m+2}F_{n+2} + F_{n+1}F_{m+1}F_{n+1} + F_nF_mF_{n+1} & -F_nF_{m+2}F_{n+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_n - F_nF_mF_n & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$-\left(\left(\vec{F}_n\right)^T \vec{F}_m\right)\mathbb{F}_n = -\left(\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\left(F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2}\right)\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Öyleyse, $-\left(\left(\vec{F}_n\right)^T \vec{F}_m\right)\mathbb{F}_n$ matrisi,

$$\begin{bmatrix} 0 & F_{n+2}F_{m+2}F_{n+2} + F_{n+1}F_{m+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_mF_n & -F_{n+2}F_{m+2}F_{n+1} - F_{n+1}F_{m+1}F_{n+1} - F_{n+1}F_mF_n \\ -F_{n+2}F_{m+2}F_{n+2} - F_nF_mF_{n+1} - F_{n+2}F_{m+1}F_{n+1} & 0 & F_nF_{m+1}F_{n+1} + F_{n+2}F_{m+2}F_n + F_nF_mF_n \\ F_{n+1}F_{m+2}F_{n+2} + F_{n+1}F_{m+1}F_{n+1} + F_nF_mF_{n+1} & -F_nF_{m+2}F_{n+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_n - F_nF_mF_n & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir. Yani,

$$\mathbb{F}_n \mathbb{F}_m \mathbb{F}_n = -\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_m\right)\mathbb{F}_n$$

eşitliği sağlanır.

9. $\mathbb{F}_n^{\,3} = -\left\|\overrightarrow{F}_n\right\|^2 \mathbb{F}_n$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

(3.1) eşitliği kullanılarak $\mathbb{F}_n^{\,3}$ matrisi hesaplanırsa,

$$\mathbb{F}_n^{\,3} = \left(\mathbb{F}_n \mathbb{F}_n\right)\mathbb{F}_n = \begin{bmatrix} -F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 & F_n F_{n+1} & F_n F_{n+2} \\ F_n F_{n+1} & -F_{n+2}^2 - F_n^2 & F_{n+1} F_{n+2} \\ F_n F_{n+2} & F_{n+1} F_{n+2} & -F_{n+1}^2 - F_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_n F_{n+1} F_{n+2} - F_n F_{n+2} F_{n+1} & F_{n+1}^2 F_{n+2} + F_{n+2}^2 F_{n+2} + F_n F_{n+2} F_n & -F_{n+1}^2 F_{n+1} - F_{n+2}^2 F_{n+1} - F_n F_{n+1} F_n \\ -F_{n+2}^2 F_{n+2} - F_n^2 F_{n+2} - F_{n+1} F_{n+2} F_{n+1} & -F_n F_{n+1} F_{n+2} + F_{n+1} F_{n+2} F_n & F_n F_{n+1} F_{n+1} + F_{n+2}^2 F_n - F_n^2 F_n \\ F_{n+1} F_{n+2} F_{n+2} + F_{n+1}^2 F_{n+1} + F_n^2 F_{n+1} & -F_n F_{n+2} F_{n+2} - F_{n+1}^2 F_n - F_n^2 F_n & F_n F_{n+2} F_{n+1} - F_{n+1} F_{n+2} F_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & F_{n+1}^2 F_{n+2} + F_{n+2}^2 F_{n+2} + F_n F_{n+2} F_n & -F_{n+1}^2 F_{n+1} - F_{n+2}^2 F_{n+1} - F_n F_{n+1} F_n \\ -F_{n+2}^2 F_{n+2} - F_n^2 F_{n+2} - F_{n+1} F_{n+2} F_{n+1} & 0 & F_n F_{n+1} F_{n+1} + F_{n+2}^2 F_n - F_n^2 F_n \\ F_{n+1} F_{n+2} F_{n+2} + F_{n+1}^2 F_{n+1} + F_n^2 F_{n+1} & -F_n F_{n+2} F_{n+2} - F_{n+1}^2 F_n - F_n^2 F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2\right) \begin{bmatrix} 0 & F_{n+2} & -F_{n+1} \\ -F_{n+2} & 0 & F_n \\ F_{n+1} & -F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\left(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2\right) \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\left\|\overrightarrow{F}_n\right\|^2 \mathbb{F}_n$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

10. $\left(\overrightarrow{F}_k\right)^T \mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m = \left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \mathbb{F}_m \overrightarrow{F}_k = \left(\overrightarrow{F}_m\right)^T \mathbb{F}_k \overrightarrow{F}_n$ eşitliklerini gösterelim:

$$\left(\overrightarrow{F}_k\right)^T \mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_k & F_{k+1} & F_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{k+1} F_{n+2} - F_{k+2} F_{n+1} & -F_k F_{n+2} + F_{k+2} F_n & F_k F_{n+1} - F_{k+1} F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{k+1} F_{n+2} F_m - F_{k+2} F_{n+1} F_m - F_k F_{n+2} F_{m+1} + F_{k+2} F_n F_{m+1} + F_k F_{n+1} F_{m+2} - F_{k+1} F_n F_{m+2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \mathbb{F}_m \overrightarrow{F}_k = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F_{m+2} & F_{m+1} \\ F_{m+2} & 0 & -F_m \\ -F_{m+1} & F_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+2}F_{m+1} & -F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m & F_nF_{m+1} - F_{n+1}F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{n+1}F_{m+2}F_k - F_{n+2}F_{m+1}F_k - F_nF_{m+2}F_{k+1} + F_{n+2}F_mF_{k+1} + F_nF_{m+1}F_{k+2} - F_{n+1}F_m\,F_{k+2} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca,

$$\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T \mathbb{F}_k \overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+2} & 0 & -F_k \\ -F_{k+1} & F_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{k+2} - F_{m+2}F_{k+1} & -F_mF_{k+2} + F_{m+2}F_k & F_mF_{k+1} - F_{m+1}F_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{k+2}F_n - F_{m+2}F_{k+1}F_n - F_mF_{k+2}F_{n+1} + F_{m+2}F_kF_{n+1} + F_mF_{k+1}F_{n+2} - F_{m+1}F_k\,F_{n+2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. O halde,

$$\left(\overrightarrow{F}_k\right)^T \mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m = \left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \mathbb{F}_m \overrightarrow{F}_k = \left(\overrightarrow{F}_m\right)^T \mathbb{F}_k \overrightarrow{F}_n$$

yazılabilir.

11. $\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m \overrightarrow{F}_k = \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_k\right)\overrightarrow{F}_m - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_m\right)\overrightarrow{F}_k = \overrightarrow{F}_n \wedge \left(\overrightarrow{F}_m \wedge \overrightarrow{F}_k\right)$ eşitliklerinin

sağlandığını gösterelim:

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m \overrightarrow{F}_k = \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+2} - F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m \\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2} - F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1} \\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1} - F_nF_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+2}F_k - F_{n+1}F_{m+1}F_k + F_{n+1}F_mF_{k+1} + F_{n+2}F_mF_{k+2} \\ F_nF_{m+1}F_k - F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1} - F_nF_mF_{k+1} + F_{n+2}F_{m+1}F_{k+2} \\ F_nF_{m+2}F_k + F_{n+1}F_{m+2}F_{k+1} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2} - F_nF_mF_{k+2} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan,

$$\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_k\right)\overrightarrow{F}_m = \left(\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$$

$$= \left(F_nF_k + F_{n+1}F_{k+1} + F_{n+2}F_{k+2}\right)\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_nF_kF_m + F_{n+1}F_{k+1}F_m + F_{n+2}F_{k+2}F_m \\ F_nF_kF_{m+1} + F_{n+1}F_{k+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{k+2}F_{m+1} \\ F_nF_kF_{m+2} + F_{n+1}F_{k+1}F_{m+2} + F_{n+2}F_{k+2}F_{m+2} \end{bmatrix}$$

ve

$$-\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_m\right)\overrightarrow{F}_k = -\left(\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$= -\left(F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2}\right)\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_nF_mF_k - F_{n+1}F_{m+1}F_k - F_{n+2}F_{m+2}F_k \\ -F_nF_mF_{k+1} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+1} - F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1} \\ -F_nF_mF_{k+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2} - F_{n+2}F_{m+2}F_{k+2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_k\right)\overrightarrow{F}_m - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_m\right)\overrightarrow{F}_k = \begin{bmatrix} F_nF_kF_m + F_{n+1}F_{k+1}F_m + F_{n+2}F_{k+2}F_m \\ F_nF_kF_{m+1} + F_{n+1}F_{k+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{k+2}F_{m+1} \\ F_nF_kF_{m+2} + F_{n+1}F_{k+1}F_{m+2} + F_{n+2}F_{k+2}F_{m+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_nF_mF_k - F_{n+1}F_{m+1}F_k - F_{n+2}F_{m+2}F_k \\ -F_nF_mF_{k+1} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+1} - F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1} \\ -F_nF_mF_{k+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2} - F_{n+2}F_{m+2}F_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{n+1}F_{k+1}F_m + F_{n+2}F_{k+2}F_m - F_{n+1}F_{m+1}F_k - F_{n+2}F_{m+2}F_k \\ F_nF_kF_{m+1} + F_{n+2}F_{k+2}F_{m+1} - F_nF_mF_{k+1} - F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1} \\ F_nF_kF_{m+2} + F_{n+1}F_{k+1}F_{m+2} - F_nF_mF_{k+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\overrightarrow{F}_k = \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_k\right)\overrightarrow{F}_m - \left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T \overrightarrow{F}_m\right)\overrightarrow{F}_k$$

yazılabilir. Şimdi $\overrightarrow{F}_n \wedge \left(\overrightarrow{F}_m \wedge \overrightarrow{F}_k\right)$ ifadesini hesaplayalım.

$$\vec{F}_n \wedge \left(\vec{F}_m \wedge \vec{F}_k\right) = \vec{F}_n \wedge \left(\begin{bmatrix} 0 & -F_{m+2} & F_{m+1} \\ F_{m+2} & 0 & -F_m \\ -F_{m+1} & F_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \overrightarrow{F_n} \wedge \left(F_{m+1}F_{k+2} - F_{m+2}F_{k+1}, -F_mF_{k+2} + F_kF_{m+2}, F_mF_{k+1} - F_kF_{m+1}\right)$$

$$= \left(F_{n+1}\left(F_mF_{k+1} - F_kF_{m+1}\right) - F_{n+2}\left(-F_mF_{k+2} + F_kF_{m+2}\right),\right.$$
$$-F_n\left(F_mF_{k+1} - F_kF_{m+1}\right) - F_{n+2}\left(F_{m+1}F_{k+2} - F_{m+2}F_{k+1}\right),$$
$$\left.F_n\left(-F_mF_{k+2} + F_kF_{m+2}\right) - F_{n+1}\left(F_{m+1}F_{k+2} - F_{m+2}F_{k+1}\right)\right)$$

$$= \left(F_{n+1}F_mF_{k+1} - F_{n+1}F_kF_{m+1} + F_{n+2}F_mF_{k+2} - F_{n+2}F_kF_{m+2},\right.$$
$$-F_nF_mF_{k+1} + F_nF_kF_{m+1} - F_{n+2}F_{m+1}F_{k+2} + F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1},$$
$$\left.-F_nF_mF_{k+2} + F_nF_kF_{m+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2} + F_{n+1}F_{m+2}F_{k+1}\right)$$

şeklinde bulunur. O halde, bu vektöre karşılık gelen sütun matris yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} F_{n+1}F_mF_{k+1} - F_{n+1}F_kF_{m+1} + F_{n+2}F_mF_{k+2} - F_{n+2}F_kF_{m+2} \\ -F_nF_mF_{k+1} + F_nF_kF_{m+1} - F_{n+2}F_{m+1}F_{k+2} + F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1} \\ -F_nF_mF_{k+2} + F_nF_kF_{m+2} - F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2} + F_{n+1}F_{m+2}F_{k+1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan,

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m\vec{F}_k = \left(\left(\vec{F}_n\right)^T\vec{F}_k\right)\vec{F}_m - \left(\left(\vec{F}_n\right)^T\vec{F}_m\right)\vec{F}_k = \vec{F}_n \wedge \left(\vec{F}_m \wedge \vec{F}_k\right)$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür. İspat tamamlanır.

12. $\left(\mathbb{F}_n\vec{F}_m\right)^T\mathbb{F}_k\vec{F}_r = \left(\left(\vec{F}_n\right)^T\vec{F}_k\right)\left(\left(\vec{F}_m\right)^T\vec{F}_r\right) - \left(\left(\vec{F}_n\right)^T\vec{F}_r\right)\left(\left(\vec{F}_m\right)^T\vec{F}_k\right) = \left(\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m\right)^T\left(\vec{F}_k \wedge \vec{F}_r\right)$

eşitliklerinin sağlandığını gösterelim:

$$\left(\mathbb{F}_n\vec{F}_m\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times1}\right)^T$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} \\ F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} \end{bmatrix}_{3\times1}\right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} & F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} & -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} \end{bmatrix}_{1\times3}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\mathbb{F}_n\,\overrightarrow{F}_m\right)^T\mathbb{F}_k=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+2} & F_{n+2}F_m-F_nF_{m+2} & -F_{n+1}F_m+F_nF_{m+1}\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}0 & -F_{k+2} & F_{k+1}\\ F_{k+2} & 0 & -F_k\\ -F_{k+1} & F_k & 0\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}F_{n+2}F_mF_{k+2}-F_nF_{m+2}F_{k+2}+F_{n+1}F_mF_{k+1}-F_nF_{m+1}F_{k+1}\\ F_{n+2}F_{m+1}F_{k+2}-F_{n+1}F_{m+2}F_{k+2}-F_{n+1}F_mF_k+F_nF_{m+1}F_k\\ -F_{n+2}F_{m+1}F_{k+1}+F_{n+1}F_{m+2}F_{k+1}-F_{n+2}F_mF_k+F_nF_{m+2}F_k\end{bmatrix}_{1\times3}$$

bulunur. Son olarak, $\left(\mathbb{F}_n\,\overrightarrow{F}_m\right)^T\mathbb{F}_k\,\overrightarrow{F}_r$ değeri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{F}_n\,\overrightarrow{F}_m\right)^T\mathbb{F}_k\,\overrightarrow{F}_r=\;&F_{n+2}F_mF_{k+2}F_r-F_nF_{m+2}F_{k+2}F_r+F_{n+1}F_mF_{k+1}F_r-F_nF_{m+1}F_{k+1}F_r\\&+F_{n+2}F_{m+1}F_{k+2}F_{r+1}-F_{n+1}F_{m+2}F_{k+2}F_{r+1}-F_{n+1}F_mF_kF_{r+1}+F_nF_{m+1}F_kF_{r+1}\\&-F_{n+2}F_{m+1}F_{k+1}F_{r+2}+F_{n+1}F_{m+2}F_{k+1}F_{r+2}-F_{n+2}F_mF_kF_{r+2}+F_nF_{m+2}F_kF_{r+2}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_k\right)\left(\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T\overrightarrow{F}_r\right)-\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_r\right)\left(\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T\overrightarrow{F}_k\right)$ ifadesini hesaplayalım:

Öncelikle, $\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_k$ değeri hesaplanırsa,

$$\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_k=\begin{bmatrix}F_n & F_{n+1} & F_{n+2}\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}F_k\\F_{k+1}\\F_{k+2}\end{bmatrix}_{3\times1}=F_nF_k+F_{n+1}F_{k+1}+F_{n+2}F_{k+2}$$

şeklinde bulunur. Diğer ifadeler benzer şekilde bulunup eşitlikte yerine yazılırsa, $\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_k\right)\left(\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T\overrightarrow{F}_r\right)-\left(\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T\overrightarrow{F}_r\right)\left(\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T\overrightarrow{F}_k\right)$ ifadesi,

$$\begin{aligned}&\left(F_nF_k+F_{n+1}F_{k+1}+F_{n+2}F_{k+2}\right)\left(F_mF_r+F_{m+1}F_{r+1}+F_{m+2}F_{r+2}\right)\\&-\left(F_nF_r+F_{n+1}F_{r+1}+F_{n+2}F_{r+2}\right)\left(F_mF_k+F_{m+1}F_{k+1}+F_{m+2}F_{k+2}\right)\\&=F_nF_kF_mF_r+F_nF_kF_{m+1}F_{r+1}+F_nF_kF_{m+2}F_{r+2}+F_{n+1}F_{k+1}F_mF_r\\&\quad+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+1}F_{r+1}+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+2}F_{r+2}+F_{n+2}F_{k+2}F_mF_r+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+1}F_{r+1}\\&\quad+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+2}F_{r+2}-F_nF_rF_mF_k-F_nF_rF_{m+1}F_{k+1}-F_nF_rF_{m+2}F_{k+2}-F_{n+1}F_{r+1}F_mF_k\\&\quad-F_{n+1}F_{r+1}F_{m+1}F_{k+1}-F_{n+1}F_{r+1}F_{m+2}F_{k+2}-F_{n+2}F_{r+2}F_mF_k-F_{n+2}F_{r+2}F_{m+1}F_{k+1}-F_{n+2}F_{r+2}F_{m+2}F_{k+2}\\&=F_nF_kF_{m+1}F_{r+1}+F_nF_kF_{m+2}F_{r+2}+F_{n+1}F_{k+1}F_mF_r+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+2}F_{r+2}\\&\quad+F_{n+2}F_{k+2}F_mF_r+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+1}F_{r+1}-F_nF_rF_{m+1}F_{k+1}-F_nF_rF_{m+2}F_{k+2}\\&\quad-F_{n+1}F_{r+1}F_mF_k-F_{n+1}F_{r+1}F_{m+2}F_{k+2}-F_{n+2}F_{r+2}F_mF_k-F_{n+2}F_{r+2}F_{m+1}F_{k+1}\\&=F_{n+2}F_mF_{k+2}F_r-F_nF_{m+2}F_{k+2}F_r+F_{n+1}F_mF_{k+1}F_r-F_nF_{m+1}F_{k+1}F_r\\&\quad+F_{n+2}F_{m+1}F_{k+2}F_{r+1}-F_{n+1}F_{m+2}F_{k+2}F_{r+1}-F_{n+1}F_mF_kF_{r+1}+F_nF_{m+1}F_kF_{r+1}\\&\quad-F_{n+2}F_{m+1}F_{k+1}F_{r+2}+F_{n+1}F_{m+2}F_{k+1}F_{r+2}-F_{n+2}F_mF_kF_{r+2}+F_nF_{m+2}F_kF_{r+2}\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan iki ifadenin eşitliği kolaylıkla görülebilir. Son olarak, $\left(\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m\right)^T \left(\vec{F}_k \wedge \vec{F}_r\right)$ ifadesini hesaplayalım:

$\left(\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m\right)^T$ ifadesi hesaplanırsa,

$$\left(\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m\right)^T = \left(\mathbb{F}_n \vec{F}_m\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}\right)^T$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} \\ F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} \end{bmatrix}_{3\times 1}\right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} & F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} & -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

bulunur. Ayrıca Öklid anlamında vektörel çarpımın tanımı gereğince,

$$\left(\vec{F}_k \wedge \vec{F}_r\right) = \mathbb{F}_k \vec{F}_r = \begin{bmatrix} 0 & -F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+2} & 0 & -F_k \\ -F_{k+1} & F_k & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} F_r \\ F_{r+1} \\ F_{r+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{k+2}F_{r+1} + F_{k+1}F_{r+2} \\ F_{k+2}F_r - F_kF_{r+2} \\ -F_{k+1}F_r + F_kF_{r+1} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

yazılabilir. Bu iki ifade çarpılırsa,

$$\left(\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m\right)^T \left(\vec{F}_k \wedge \vec{F}_r\right) = \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} & F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} & -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} -F_{k+2}F_{r+1} + F_{k+1}F_{r+2} \\ F_{k+2}F_r - F_kF_{r+2} \\ -F_{k+1}F_r + F_kF_{r+1} \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$= \left(-F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2}\right)\left(-F_{k+2}F_{r+1} + F_{k+1}F_{r+2}\right) + \left(F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2}\right)\left(F_{k+2}F_r - F_kF_{r+2}\right) + \left(-F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1}\right)\left(-F_{k+1}F_r + F_kF_{r+1}\right)$$

$$= F_{n+2}F_{m+1}F_{k+2}F_{r+1} - F_{n+2}F_{m+1}F_{k+1}F_{r+2} - F_{n+1}F_{m+2}F_{k+2}F_{r+1} + F_{n+1}F_{m+2}F_{k+1}F_{r+2}$$
$$+ F_{n+2}F_mF_{k+2}F_r - F_{n+2}F_mF_kF_{r+2} - F_nF_{m+2}F_{k+2}F_r + F_nF_{m+2}F_kF_{r+2}$$
$$+ F_{n+1}F_mF_{k+1}F_r - F_{n+1}F_mF_kF_{r+1} - F_nF_{m+1}F_{k+1}F_r + F_nF_{m+1}F_kF_{r+1}$$

elde edilir. Buradan tüm eşitliklerin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Sonuç olarak,

$$\left(\mathbb{F}_n \vec{F}_m\right)^T \mathbb{F}_k \vec{F}_r = \left(\left(\vec{F}_n\right)^T \vec{F}_k\right)\left(\left(\vec{F}_m\right)^T \vec{F}_r\right) - \left(\left(\vec{F}_n\right)^T \vec{F}_r\right)\left(\left(\vec{F}_m\right)^T \vec{F}_k\right) = \left(\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m\right)^T \left(\vec{F}_k \wedge \vec{F}_r\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

13. $\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m$ vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris S olmak üzere,

$$S = \overrightarrow{F}_m \left(\overrightarrow{F}_n\right)^T - \overrightarrow{F}_n \left(\overrightarrow{F}_m\right)^T = \mathbb{F}_n \mathbb{F}_m - \mathbb{F}_m \mathbb{F}_n$$

dir.

$$\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} \\ F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Öyleyse bu sütun matrisine karşılık gelen vektör

$$\left(-F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2}\ , F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2}\ , -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1}\right)$$

şeklindedir. Bu vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris S olmak üzere,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1} & F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} & 0 & F_{n+2}F_{m+1} - F_{n+1}F_{m+2} \\ -F_{n+2}F_m + F_nF_{m+2} & -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Diğer taraftan,

$$\overrightarrow{F}_m \left(\overrightarrow{F}_n\right)^T = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_mF_n & F_mF_{n+1} & F_mF_{n+2} \\ F_{m+1}F_n & F_{m+1}F_{n+1} & F_{m+1}F_{n+2} \\ F_{m+2}F_n & F_{m+2}F_{n+1} & F_{m+2}F_{n+2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{F}_n \left(\overrightarrow{F}_m\right)^T &= -\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} F_nF_m & F_nF_{m+1} & F_nF_{m+2} \\ F_{n+1}F_m & F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_{m+2} \\ F_{n+2}F_m & F_{n+2}F_{m+1} & F_{n+2}F_{m+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -F_nF_m & -F_nF_{m+1} & -F_nF_{m+2} \\ -F_{n+1}F_m & -F_{n+1}F_{m+1} & -F_{n+1}F_{m+2} \\ -F_{n+2}F_m & -F_{n+2}F_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulunan bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$\vec{F}_m\left(\vec{F}_n\right)^T-\vec{F}_n\left(\vec{F}_m\right)^T=\begin{bmatrix}F_mF_n & F_mF_{n+1} & F_mF_{n+2}\\ F_{m+1}F_n & F_{m+1}F_{n+1} & F_{m+1}F_{n+2}\\ F_{m+2}F_n & F_{m+2}F_{n+1} & F_{m+2}F_{n+2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-F_nF_m & -F_nF_{m+1} & -F_nF_{m+2}\\ -F_{n+1}F_m & -F_{n+1}F_{m+1} & -F_{n+1}F_{m+2}\\ -F_{n+2}F_m & -F_{n+2}F_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}F_mF_n-F_nF_m & F_mF_{n+1}-F_nF_{m+1} & F_mF_{n+2}-F_nF_{m+2}\\ F_{m+1}F_n-F_{n+1}F_m & F_{m+1}F_{n+1}-F_{n+1}F_{m+1} & F_{m+1}F_{n+2}-F_{n+1}F_{m+2}\\ F_{m+2}F_n-F_{n+2}F_m & F_{m+2}F_{n+1}-F_{n+2}F_{m+1} & F_{m+2}F_{n+2}-F_{n+2}F_{m+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & F_mF_{n+1}-F_nF_{m+1} & F_mF_{n+2}-F_nF_{m+2}\\ F_{m+1}F_n-F_{n+1}F_m & 0 & F_{m+1}F_{n+2}-F_{n+1}F_{m+2}\\ F_{m+2}F_n-F_{n+2}F_m & F_{m+2}F_{n+1}-F_{n+2}F_{m+1} & 0\end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde,

$$S=\vec{F}_m\left(\vec{F}_n\right)^T-\vec{F}_n\left(\vec{F}_m\right)^T$$

şeklindedir. Şimdi ikinci eşitliği gösterelim:

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m\\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2}-F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1}\\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1}-F_nF_m\end{bmatrix}$$

ve

$$-\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n=-\begin{bmatrix}-F_{m+2}F_{n+2}-F_{m+1}F_{n+1} & F_{m+1}F_n & F_{m+2}F_n\\ F_mF_{n+1} & -F_{m+2}F_{n+2}-F_mF_n & F_{m+2}F_{n+1}\\ F_mF_{n+2} & F_{m+1}F_{n+2} & -F_{m+1}F_{n+1}-F_mF_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}F_{m+2}F_{n+2}+F_{m+1}F_{n+1} & -F_{m+1}F_n & -F_{m+2}F_n\\ -F_mF_{n+1} & F_{m+2}F_{n+2}+F_mF_n & -F_{m+2}F_{n+1}\\ -F_mF_{n+2} & -F_{m+1}F_{n+2} & F_{m+1}F_{n+1}+F_mF_n\end{bmatrix}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m-\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n=\begin{bmatrix}-F_{n+2}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+1} & F_{n+1}F_m & F_{n+2}F_m\\ F_nF_{m+1} & -F_{n+2}F_{m+2}-F_nF_m & F_{n+2}F_{m+1}\\ F_nF_{m+2} & F_{n+1}F_{m+2} & -F_{n+1}F_{m+1}-F_nF_m\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}F_{m+2}F_{n+2}+F_{m+1}F_{n+1} & -F_{m+1}F_n & -F_{m+2}F_n\\ -F_mF_{n+1} & F_{m+2}F_{n+2}+F_mF_n & -F_{m+2}F_{n+1}\\ -F_mF_{n+2} & -F_{m+1}F_{n+2} & F_{m+1}F_{n+1}+F_mF_n\end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m-\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n=\begin{bmatrix} 0 & F_{n+1}F_m-F_{m+1}F_n & F_{n+2}F_m-F_{m+2}F_n \\ F_nF_{m+1}-F_mF_{n+1} & 0 & F_{n+2}F_{m+1}-F_{m+2}F_{n+1} \\ F_nF_{m+2}-F_mF_{n+2} & F_{n+1}F_{m+2}-F_{m+1}F_{n+2} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden,

$$S=\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m-\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$S=\overrightarrow{F}_m\left(\overrightarrow{F}_n\right)^T-\overrightarrow{F}_n\left(\overrightarrow{F}_m\right)^T=\mathbb{F}_n\mathbb{F}_m-\mathbb{F}_m\mathbb{F}_n$$

elde edilir. □

3.2 Fibonacci $4-$Vektörler için Öklid Anlamında Vektörel Çarpım

Tanım 3.2 $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_k=\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \end{bmatrix}$ Fibonacci $4-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{F}_n\otimes\overrightarrow{F}_m\otimes\overrightarrow{F}_k=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix} \tag{3.16}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right\}$ E^4 Öklid uzayının standart ortonormal bazıdır.

Teorem 3.4 $\forall n,m$ ve k tamsayıları için, $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_k=\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \end{bmatrix}$

Fibonacci $4-$vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı sıfırdır. Yani,

$$\overrightarrow{F}_n\otimes\overrightarrow{F}_m\otimes\overrightarrow{F}_k=\vec{0} \tag{3.17}$$

dır.

İspat $\overrightarrow{F}_n$, $\overrightarrow{F}_m$ ve $\overrightarrow{F}_k$ Fibonacci $4-$vektörler olsun. Bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı tanım gereğince,

$$\overrightarrow{F}_n \otimes \overrightarrow{F}_m \otimes \overrightarrow{F}_k = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} F_n & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+3} \end{vmatrix} - \vec{e}_4 \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Her bir determinant ayrı ayrı hesaplanırsa, birinci determinant,

$$\vec{e}_1 \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+1}+F_{n+2} \\ F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+1}+F_{m+2} \\ F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+1}+F_{k+2} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 \left(\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+1} \\ F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+2} \\ F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+2} \\ F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+2} \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde bulunur. Determinantta herhangi bir satır veya sütun aynı ise o determinantın sonucu 0 olacağından,

$$\vec{e}_1 \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix} = \vec{e}_1 (0+0) = \vec{0}$$

elde edilir. Benzer şekilde ikinci determinant hesaplanırsa,

$$-\vec{e}_2 \begin{vmatrix} F_n & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix} = -\vec{e}_2 \begin{vmatrix} F_n & F_{n+2} & F_{n+1}+F_{n+2} \\ F_m & F_{m+2} & F_{m+1}+F_{m+2} \\ F_k & F_{k+2} & F_{k+1}+F_{k+2} \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{e}_2 \left(\begin{vmatrix} F_n & F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_m & F_{m+2} & F_{m+1} \\ F_k & F_{k+2} & F_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_n & F_{n+2} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+2} & F_{m+2} \\ F_k & F_{k+2} & F_{k+2} \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde elde edilir. Burada, birinci determinantın $2.$ sütunu lineer bağımlı olduğundan bu determinantın sonucu sıfır olacaktır. İkinci determinantta ise $2.$ ve $3.$ sütunlar aynı olduğundan yine bu determinantında sonucu sıfır olacaktır. Sonuç olarak,

$$-\vec{e}_2\begin{vmatrix} F_n & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

bulunur. Benzer işlemler üçüncü determinant için yapılırsa,

$$\vec{e}_3\begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+3} \end{vmatrix} = \vec{e}_3\begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+1}+F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+1}+F_{m+2} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+1}+F_{k+2} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_3\left(\begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+1} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+1} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} \end{vmatrix}\right)$$

$$= \vec{e}_3\left(0+0\right) = \vec{0}$$

elde edilir. Son olarak, dördüncü determinant değeri,

$$-\vec{e}_4\begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} \end{vmatrix} = \vec{e}_4\begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_n+F_{n+1} \\ F_m & F_{m+1} & F_m+F_{m+1} \\ F_k & F_{k+1} & F_k+F_{k+1} \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_4\left(\begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_n \\ F_m & F_{m+1} & F_m \\ F_k & F_{k+1} & F_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+1} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+1} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+1} \end{vmatrix}\right)$$

$$= \vec{e}_4\left(0+0\right) = \vec{0}$$

şeklinde bulunur. Bulunan tüm değerler yerine yazılırsa,

$$\vec{F}_n \otimes \vec{F}_m \otimes \vec{F}_k = \vec{0}$$

elde edilir.

Teorem 3.5 $\forall n,m,k$ ve r tamsayıları için, $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}$, $\vec{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}$, $\vec{F}_k = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \end{bmatrix}$ ve

$\vec{F}_r = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \end{bmatrix}$ Fibonacci $4-$vektörler olmak üzere,

$$\det\left(\overrightarrow{F}_n,\overrightarrow{F}_m,\overrightarrow{F}_k,\overrightarrow{F}_r\right)=0 \tag{3.18}$$

dır.

İspat $\overrightarrow{F}_n$, $\overrightarrow{F}_m$, $\overrightarrow{F}_k$ ve $\overrightarrow{F}_r$ Fibonacci $4-$vektörler olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{F}_n,\overrightarrow{F}_m,\overrightarrow{F}_k,\overrightarrow{F}_r\right) &= \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+3} \\ F_r & F_{r+1} & F_{r+2} & F_{r+3} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_n+F_{n+1} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_m+F_{m+1} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_k+F_{k+1} & F_{k+3} \\ F_r & F_{r+1} & F_r+F_{r+1} & F_{r+3} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_n & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_m & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_k & F_{k+3} \\ F_r & F_{r+1} & F_r & F_{r+3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+1} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+1} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+1} & F_{k+3} \\ F_r & F_{r+1} & F_{r+1} & F_{r+3} \end{vmatrix} \\
&= 0+0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, yine determinant fonksiyonunun özellikleri kullanılmıştır.

Teorem 3.6 $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{F}_k=\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_r=\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \end{bmatrix}$ Fibonacci $4-$ vektörler olmak üzere, bu vektörlerin **Öklid anlamında karma çarpımı** sıfırdır. Yani,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n \otimes \overrightarrow{F}_m \otimes \overrightarrow{F}_k, \overrightarrow{F}_r \right\rangle = 0 \tag{3.19}$$

dır.

İspat (3.17) eşitliğinden, ispat aşikârdır.

Üç Fibonacci $4-$vektörün Öklid anlamında vektörel çarpımının sıfır olmasından dolayı anti-simetrik matris yardımıyla yeniden elde edilmesine gerek duyulmamıştır.

3.3 Fibonacci $7-$Vektörler için Öklid Anlamında Vektörel Çarpım

Bu alt bölümde, Fibonacci $7-$vektörler için Öklid anlamında vektörel çarpım ve karma çarpım incelenecektir.

Tanım 3.3 $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}$ Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{F_n}\times\overrightarrow{F_m}=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}\times\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+2}-F_{n+4}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+4}-F_{n+5}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+5} \\ -F_nF_{m+2}+F_{n+2}F_m-F_{n+5}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+5}-F_{n+6}F_{m+4}+F_{n+4}F_{m+6} \\ -F_{n+1}F_m+F_nF_{m+1}-F_{n+6}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+6}-F_{n+4}F_{m+5}+F_{n+5}F_{m+4} \\ -F_nF_{m+4}+F_{n+4}F_m-F_{n+2}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+5}+F_{n+5}F_{m+1} \\ -F_{n+3}F_m+F_nF_{m+3}-F_{n+1}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+1}-F_{n+5}F_{m+2}+F_{n+2}F_{m+5} \\ -F_{n+6}F_m+F_nF_{m+6}-F_{n+3}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+3}-F_{n+2}F_{m+4}+F_{n+4}F_{m+2} \\ -F_nF_{m+5}+F_{n+5}F_m-F_{n+4}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+4}-F_{n+3}F_{m+2}+F_{n+3}F_{m+2} \end{bmatrix}_{7\times 1} \quad (3.20)$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.7 $\forall n$ ve m tamsayıları için, $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}$ Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m = (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

şeklindedir.

İspat $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$, Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere, bu iki vektörün Öklid anlamında vektörel çarpımı, tanımdan,

$$\overrightarrow{F_n} \times \overrightarrow{F_m} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1} \times \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+4}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+4} - F_{n+5}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+5} \\ -F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m - F_{n+5}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+5} - F_{n+6}F_{m+4} + F_{n+4}F_{m+6} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} - F_{n+6}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+6} - F_{n+4}F_{m+5} + F_{n+5}F_{m+4} \\ -F_nF_{m+4} + F_{n+4}F_m - F_{n+2}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+2} - F_{n+1}F_{m+5} + F_{n+5}F_{m+1} \\ -F_{n+3}F_m + F_nF_{m+3} - F_{n+1}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+1} - F_{n+5}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+5} \\ -F_{n+6}F_m + F_nF_{m+6} - F_{n+3}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+3} - F_{n+2}F_{m+4} + F_{n+4}F_{m+2} \\ -F_nF_{m+5} + F_{n+5}F_m - F_{n+4}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+4} - F_{n+3}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+2} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

şeklinde olacaktır. Her bir bileşen (2.51) ve (2.52) eşitlikleri yardımıyla ayrı ayrı hesaplanırsa,

1.bileşen,

$$\begin{aligned} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+4}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+4} - F_{n+5}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+5} \\ &= (F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+2}F_{m+1}) + (F_{n+3}F_{m+4} - F_{n+4}F_{m+3}) - (F_{n+5}F_{m+6} - F_{n+6}F_{m+5}) \\ &= \left((-1)^{m+1} F_{n+1-(m+1)}\right) + \left((-1)^{m+3} F_{n+3-(m+3)}\right) - \left((-1)^{m+5} F_{n+5-(m+5)}\right) \\ &= (-1)^m F_{n-m}(-1-1+1) \\ &= -(-1)^m F_{n-m} \end{aligned}$$

2.bileşen,

$$
\begin{aligned}
&-F_nF_{m+2}+F_{n+2}F_m-F_{n+5}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+5}-F_{n+6}F_{m+4}+F_{n+4}F_{m+6}\\
&\quad=-\left(F_nF_{m+2}-F_{n+2}F_m\right)+\left(F_{n+3}F_{m+5}-F_{n+5}F_{m+3}\right)+\left(F_{n+4}F_{m+6}-F_{n+6}F_{m+4}\right)\\
&\quad=-\left((-1)^m F_2F_{n-m}\right)+\left((-1)^{m+3} F_2F_{n+3-(m+3)}\right)+\left((-1)^{m+4} F_2F_{n+4-(m+4)}\right)\\
&\quad=(-1)^m F_{n-m}(-F_2-F_2+F_2)\\
&\quad=-(-1)^m F_2F_{n-m}\\
&\quad=-(-1)^m F_{n-m}
\end{aligned}
$$

3.bileşen,

$$
\begin{aligned}
&-F_{n+1}F_m+F_nF_{m+1}-F_{n+6}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+6}-F_{n+4}F_{m+5}+F_{n+5}F_{m+4}\\
&\quad=\left(F_nF_{m+1}-F_{n+1}F_m\right)+\left(F_{n+3}F_{m+6}-F_{n+6}F_{m+3}\right)-\left(F_{n+4}F_{m+5}-F_{n+5}F_{m+4}\right)\\
&\quad=\left((-1)^m F_{n-m}\right)+\left((-1)^{m+3} F_3F_{n+3-(m+3)}\right)-\left((-1)^{m+4} F_{n+4-(m+4)}\right)\\
&\quad=(-1)^m F_{n-m}(+1-F_3-1)\\
&\quad=(-1)^m (+1-2-1)F_{n-m}\\
&\quad=-2(-1)^m F_{n-m}
\end{aligned}
$$

4.bileşen,

$$
\begin{aligned}
&-F_nF_{m+4}+F_{n+4}F_m-F_{n+2}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+5}+F_{n+5}F_{m+1}\\
&\quad=-\left(F_nF_{m+4}-F_{n+4}F_m\right)-\left(F_{n+2}F_{m+6}-F_{n+6}F_{m+2}\right)-\left(F_{n+1}F_{m+5}-F_{n+5}F_{m+1}\right)\\
&\quad=-\left((-1)^m F_4F_{n-m}\right)-\left((-1)^{m+2} F_4F_{n+2-(m+2)}\right)-\left((-1)^{m+1} F_4F_{n+1-(m+1)}\right)\\
&\quad=(-1)^m F_{n-m}(-F_4-F_4+F_4)\\
&\quad=-(-1)^m F_4F_{n-m}\\
&\quad=-3(-1)^m F_{n-m}
\end{aligned}
$$

5.bileşen,

$$
\begin{aligned}
&-F_{n+3}F_m+F_nF_{m+3}-F_{n+1}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+1}-F_{n+5}F_{m+2}+F_{n+2}F_{m+5}\\
&\quad=\left(F_nF_{m+3}-F_{n+3}F_m\right)-\left(F_{n+1}F_{m+6}-F_{n+6}F_{m+1}\right)+\left(F_{n+2}F_{m+5}-F_{n+5}F_{m+2}\right)\\
&\quad=\left((-1)^m F_3F_{n-m}\right)-\left((-1)^{m+1} F_5F_{n+1-(m+1)}\right)+\left((-1)^{m+2} F_3F_{n+2-(m+2)}\right)\\
&\quad=(-1)^m F_{n-m}(F_3+F_5+F_3)\\
&\quad=(-1)^m (2+5+2)F_{n-m}\\
&\quad=9(-1)^m F_{n-m}
\end{aligned}
$$

6.bileşen,

$$
\begin{aligned}
&-F_{n+6}F_m + F_nF_{m+6} - F_{n+3}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+3} - F_{n+2}F_{m+4} + F_{n+4}F_{m+2} \\
&\quad = \left(F_nF_{m+6} - F_{n+6}F_m\right) + \left(F_{n+1}F_{m+3} - F_{n+3}F_{m+1}\right) - \left(F_{n+2}F_{m+4} - F_{n+4}F_{m+2}\right) \\
&\quad = \left((-1)^m F_6F_{n-m}\right) + \left((-1)^{m+1} F_2F_{n+1-(m+1)}\right) - \left((-1)^{m+2} F_2F_{n+2-(m+2)}\right) \\
&\quad = (-1)^m F_{n-m}(F_6 - F_2 - F_2) \\
&\quad = (-1)^m (8-1-1)F_{n-m} \\
&\quad = 6(-1)^m F_{n-m}
\end{aligned}
$$

7.bileşen,

$$
\begin{aligned}
&-F_nF_{m+5} + F_{n+5}F_m - F_{n+4}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+4} - F_{n+3}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+3} \\
&\quad = -\left(F_nF_{m+5} - F_{n+5}F_m\right) + \left(F_{n+1}F_{m+4} - F_{n+4}F_{m+1}\right) + \left(F_{n+2}F_{m+3} - F_{n+3}F_{m+2}\right) \\
&\quad = -\left((-1)^m F_5F_{n-m}\right) + \left((-1)^{m+1} F_3F_{n+1-(m+1)}\right) + \left((-1)^{m+2} F_{n+2-(m+2)}\right) \\
&\quad = (-1)^m F_{n-m}(-F_5 - F_3 + 1) \\
&\quad = (-1)^m (-5-2+1)F_{n-m} \\
&\quad = -6(-1)^m F_{n-m}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. O halde, tüm bu bileşenler yerlerine yazılırsa sonuç olarak,

$$
\vec{F}_n \times \vec{F}_m = (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}
$$

elde edilir. □

3.3.1 Fibonacci $7-$Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımıyla Öklid Anlamında Vektörel Çarpım

Bu kısımda, Fibonacci $7-$vektörler için (3.20) eşitliğiyle verilen Öklid anlamında vektörel çarpım, anti-simetrik matris yardımıyla tekrar elde edilerek vektörel çarpıma ait özellikler verilecektir.

Her $\overrightarrow{F}_n$ Fibonacci $7-$vektörüne 7×7 tipinde bir anti-simetrik matris karşılık gelir. Bu matris aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 3.4 Her $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}$ Fibonacci $7-$vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris,

$$S_{\overrightarrow{F}_n}=\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n & -F_{n+5} & -F_{n+6} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+1} & F_n & 0 & -F_{n+6} & F_{n+5} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} & 0 & -F_n & -F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} & F_n & 0 & F_{n+2} & -F_{n+1} \\ -F_{n+6} & -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} & 0 & F_n \\ F_{n+5} & -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} & -F_n & 0 \end{bmatrix}_{7\times 7} \tag{3.22}$$

şeklindedir.

Teorem 3.8 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}$ Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere,

$\lambda\overrightarrow{F}_n+\mu\overrightarrow{F}_m$ vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris $\lambda S_{\overrightarrow{F}_n}+\mu S_{\overrightarrow{F}_m}$'dir.

İspat $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ve $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci vektörleri olmak üzere $\lambda\overrightarrow{F}_n+\mu\overrightarrow{F}_m$ vektörünün karşılığını bulalım.

$$\lambda\overrightarrow{F}_n+\mu\overrightarrow{F}_m=\lambda\begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} \end{bmatrix}^T+\mu\begin{bmatrix} F_m & F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+3} & F_{m+4} & F_{m+5} & F_{m+6} \end{bmatrix}^T$$
$$=\begin{bmatrix} \lambda F_n+\mu F_m & \lambda F_{n+1}+\mu F_{m+1} & \lambda F_{n+2}+\mu F_{m+2} & \lambda F_{n+3}+\mu F_{m+3} & \lambda F_{n+4}+\mu F_{m+4} & \lambda F_{n+5}+\mu F_{m+5} & \lambda F_{n+6}+\mu F_{m+6} \end{bmatrix}^T$$

O halde bu yeni vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris;

$$S_{\vec{F}_n}=\begin{bmatrix} 0 & -\lambda F_{n+2}-\mu F_{m+2} & \lambda F_{n+1}+\mu F_{m+1} & -\lambda F_{n+4}-\mu F_{m+4} & \lambda F_{n+3}+\mu F_{m+3} & \lambda F_{n+6}+\mu F_{m+6} & -\lambda F_{n+5}-\mu F_{m+5} \\ \lambda F_{n+2}+\mu F_{m+2} & 0 & -\lambda F_n-\mu F_m & -\lambda F_{n+5}-\mu F_{m+5} & -\lambda F_{n+6}-\mu F_{m+6} & -\lambda F_{n+4}-\mu F_{m+4} & \lambda F_{n+4}+\mu F_{m+4} \\ -\lambda F_{n+1}-\mu F_{m+1} & \lambda F_n+\mu F_m & 0 & -\lambda F_{n+6}-\mu F_{m+6} & \lambda F_{n+5}+\mu F_{m+5} & -\lambda F_{n+4}-\mu F_{m+4} & \lambda F_{n+3}+\mu F_{m+3} \\ \lambda F_{n+4}+\mu F_{m+4} & \lambda F_{n+5}+\mu F_{m+5} & \lambda F_{n+6}+\mu F_{m+6} & 0 & -\lambda F_n-\mu F_m & -\lambda F_{n+1}-\mu F_{m+1} & -\lambda F_{n+2}-\mu F_{m+2} \\ -\lambda F_{n+3}-\mu F_{m+3} & \lambda F_{n+6}+\mu F_{m+6} & -\lambda F_{n+5}-\mu F_{m+5} & \lambda F_n+\mu F_m & 0 & F_{n+2}+\mu F_{m+2} & -\lambda F_{n+1}-\mu F_{m+1} \\ -\lambda F_{n+6}-\mu F_{m+6} & -\lambda F_{n+3}-\mu F_{m+3} & \lambda F_{n+4}+\mu F_{m+4} & \lambda F_{n+1}+\mu F_{m+1} & -\lambda F_{n+2}-\mu F_{m+2} & 0 & \lambda F_n+\mu F_m \\ \lambda F_{n+5}+\mu F_{m+5} & -\lambda F_{n+4}-\mu F_{m+4} & -\lambda F_{n+3}-\mu F_{m+3} & \lambda F_{n+2}+\mu F_{m+2} & \lambda F_{n+1}+\mu F_{m+1} & -\lambda F_n-\mu F_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -\lambda F_{n+2} & \lambda F_{n+1} & -\lambda F_{n+4} & \lambda F_{n+3} & \lambda F_{n+6} & -\lambda F_{n+5} \\ \lambda F_{n+2} & 0 & -\lambda F_n & -\lambda F_{n+5} & -\lambda F_{n+6} & \lambda F_{n+3} & \lambda F_{n+4} \\ -\lambda F_{n+1} & \lambda F_n & 0 & -\lambda F_{n+6} & \lambda F_{n+5} & -\lambda F_{n+4} & \lambda F_{n+3} \\ \lambda F_{n+4} & \lambda F_{n+5} & \lambda F_{n+6} & 0 & -\lambda F_n & -\lambda F_{n+1} & -\lambda F_{n+2} \\ -\lambda F_{n+3} & \lambda F_{n+6} & -\lambda F_{n+5} & \lambda F_n & 0 & \lambda F_{n+2} & -\lambda F_{n+1} \\ -\lambda F_{n+6} & -\lambda F_{n+3} & \lambda F_{n+4} & \lambda F_{n+1} & -\lambda F_{n+2} & 0 & \lambda F_n \\ \lambda F_{n+5} & -\lambda F_{n+4} & -\lambda F_{n+3} & \lambda F_{n+2} & \lambda F_{n+1} & -\lambda F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & -\mu F_{m+2} & \mu F_{m+1} & -\mu F_{m+4} & \mu F_{m+3} & \mu F_{m+6} & -\mu F_{m+5} \\ \mu F_{m+2} & 0 & -\mu F_m & -\mu F_{m+5} & -\mu F_{m+6} & \mu F_{m+3} & \mu F_{m+4} \\ -\mu F_{m+1} & \mu F_m & 0 & -\mu F_{m+6} & \mu F_{m+5} & -\mu F_{m+4} & \mu F_{m+3} \\ \mu F_{m+4} & \mu F_{m+5} & \mu F_{m+6} & 0 & -\mu F_m & -\mu F_{m+1} & -\mu F_{m+2} \\ -\mu F_{m+3} & \mu F_{m+6} & -\mu F_{m+5} & \mu F_m & 0 & \mu F_{m+2} & -\mu F_{m+1} \\ -\mu F_{m+6} & -\mu F_{m+3} & \mu F_{m+4} & \mu F_{m+1} & -\mu F_{m+2} & 0 & \mu F_m \\ \mu F_{m+5} & -\mu F_{m+4} & -\mu F_{m+3} & \mu F_{m+2} & \mu F_{m+1} & -\mu F_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\lambda\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n & -F_{n+5} & -F_{n+6} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+1} & F_n & 0 & -F_{n+6} & F_{n+5} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} & 0 & -F_n & -F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} & F_n & 0 & F_{n+2} & -F_{n+1} \\ -F_{n+6} & -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} & 0 & F_n \\ F_{n+5} & -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} & -F_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\mu\begin{bmatrix} 0 & -F_{m+2} & F_{m+1} & -F_{m+4} & F_{m+3} & F_{m+6} & -F_{m+5} \\ F_{m+2} & 0 & -F_m & -F_{m+5} & -F_{m+6} & F_{m+3} & F_{m+4} \\ -F_{m+1} & F_m & 0 & -F_{m+6} & F_{m+5} & -F_{m+4} & F_{m+3} \\ F_{m+4} & F_{m+5} & F_{m+6} & 0 & -F_m & -F_{m+1} & -F_{m+2} \\ -F_{m+3} & F_{m+6} & -F_{m+5} & F_m & 0 & F_{m+2} & -F_{m+1} \\ -F_{m+6} & -F_{m+3} & F_{m+4} & F_{m+1} & -F_{m+2} & 0 & F_m \\ F_{m+5} & -F_{m+4} & -F_{m+3} & F_{m+2} & F_{m+1} & -F_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\lambda S_{\vec{F}_n}+\mu S_{\vec{F}_m}$$

elde edilir.

Teorem 3.10 $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}$ Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı, birinci vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris ile ikinci vektörün çarpımına eşittir. Yani,

$$\overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m = S_{\overrightarrow{F}_n} \overrightarrow{F}_m \tag{3.23}$$

şeklindedir.

İspat $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1} \times \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

olmak üzere, (3.20) eşitliğinden,

$$\overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+2}-F_{n+4}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+4}-F_{n+5}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+5} \\ -F_nF_{m+2}+F_{n+2}F_m-F_{n+5}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+5}-F_{n+6}F_{m+4}+F_{n+4}F_{m+6} \\ -F_{n+1}F_m+F_nF_{m+1}-F_{n+6}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+6}-F_{n+4}F_{m+5}+F_{n+5}F_{m+4} \\ -F_nF_{m+4}+F_{n+4}F_m-F_{n+2}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+5}+F_{n+5}F_{m+1} \\ -F_{n+3}F_m+F_nF_{m+3}-F_{n+1}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+1}-F_{n+5}F_{m+2}+F_{n+2}F_{m+5} \\ -F_{n+6}F_m+F_nF_{m+6}-F_{n+3}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+3}-F_{n+2}F_{m+4}+F_{n+4}F_{m+2} \\ -F_nF_{m+5}+F_{n+5}F_m-F_{n+4}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+4}-F_{n+3}F_{m+2}+F_{n+3}F_{m+2} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

şeklindedir. Diğer taraftan, $S_{\overrightarrow{F}_n} \overrightarrow{F}_m$ matrisi hesaplanırsa,

$$S_{\vec{F}_n}\vec{F}_m=\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n & -F_{n+5} & -F_{n+6} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+1} & F_n & 0 & -F_{n+6} & F_{n+5} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} & 0 & -F_n & -F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} & F_n & 0 & F_{n+2} & -F_{n+1} \\ -F_{n+6} & -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} & 0 & F_n \\ F_{n+5} & -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} & -F_n & 0 \end{bmatrix}_{7\times 7}\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

$$=\begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+2}-F_{n+4}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+4}-F_{n+5}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+5} \\ -F_nF_{m+2}+F_{n+2}F_m-F_{n+5}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+5}-F_{n+6}F_{m+4}+F_{n+4}F_{m+6} \\ -F_{n+1}F_m+F_nF_{m+1}-F_{n+6}F_{m+3}+F_{n+3}F_{m+6}-F_{n+4}F_{m+5}+F_{n+5}F_{m+4} \\ -F_nF_{m+4}+F_{n+4}F_m-F_{n+2}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+2}-F_{n+1}F_{m+5}+F_{n+5}F_{m+1} \\ -F_{n+3}F_m+F_nF_{m+3}-F_{n+1}F_{m+6}+F_{n+6}F_{m+1}-F_{n+5}F_{m+2}+F_{n+2}F_{m+5} \\ -F_{n+6}F_m+F_nF_{m+6}-F_{n+3}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+3}-F_{n+2}F_{m+4}+F_{n+4}F_{m+2} \\ -F_nF_{m+5}+F_{n+5}F_m-F_{n+4}F_{m+1}+F_{n+1}F_{m+4}-F_{n+3}F_{m+2}+F_{n+2}F_{m+3} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

şeklinde bulunur. Bu matrise karşılık gelen vektör göz önüne alınırsa, iki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir. □

3.3.2 Fibonacci $7-$Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımıyla Elde Edilen Öklid Anlamında Vektörel Çarpımın Özellikleri

Teorem 3.11 $\forall n,m$ ve k tamsayıları için, $\vec{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}$, $\vec{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}$ ve $\vec{F}_k=\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \\ F_{k+4} \\ F_{k+5} \\ F_{k+6} \end{bmatrix}$

Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\vec{F}_n\times\left(\vec{F}_m\times\vec{F}_k\right)\neq\left\langle\vec{F}_n,\vec{F}_k\right\rangle\vec{F}_m-\left\langle\vec{F}_n,\vec{F}_m\right\rangle\vec{F}_k$, (3.24)

2. $\vec{F}_n\times\vec{F}_n=S_{\vec{F}_n}\vec{F}_n=\vec{0}$, (3.25)

3. $\vec{F}_n\times\vec{F}_m=-\vec{F}_m\times\vec{F}_n$, (3.26)

4. $\left\langle\vec{F}_n,\vec{F}_n\times\vec{F}_m\right\rangle=\left\langle\vec{F}_m,\vec{F}_n\times\vec{F}_m\right\rangle=0$, (3.27)

5. $\left\|\vec{F}_n \times \vec{F}_m\right\|^2 = \left\|\vec{F}_n\right\|^2 \left\|\vec{F}_m\right\|^2 - \left(\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle\right)^2$, (3.28)

6. $\vec{F}_n$ ve $\vec{F}_m$ lineer bağımsız olduğundan, $\vec{F}_n \times \vec{F}_m \neq \vec{0}$, (3.29)

7. $\left\langle \vec{F}_n \times \vec{F}_m, \vec{F}_k \right\rangle = \left\langle \vec{F}_m \times \vec{F}_k, \vec{F}_n \right\rangle = \left\langle \vec{F}_k \times \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle = 0$, (3.30)

8. $\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_n \times \vec{F}_m\right) = \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_n - \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_n \right\rangle \vec{F}_m$, (3.31)

9. $\left\langle \vec{F}_m, \vec{F}_n \times \vec{F}_k \right\rangle = \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_k \times \vec{F}_m \right\rangle$, (3.32)

10. $\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_m \times \vec{F}_k\right) + \vec{F}_m \times \left(\vec{F}_n \times \vec{F}_k\right) = \left\langle \vec{F}_m, \vec{F}_k \right\rangle \vec{F}_n + \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_k \right\rangle \vec{F}_m - 2\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_k$, (3.33)

İspat

1. Her $\vec{F}_n$, $\vec{F}_m$, $\vec{F}_k$ Fibonacci $7-$vektörleri için,

$\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_m \times \vec{F}_k\right) \neq \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_k \right\rangle \vec{F}_m - \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_k$ olduğunu gösterelim:

$\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_m \times \vec{F}_k\right) = \vec{F_n} \times \left(S_{\vec{F}_m}\, \vec{F}_k\right)$

yazılabileceğinden ilk olarak $S_{\vec{F}_m}\, \vec{F}_k$'yı hesaplanırsa,

$$S_{\vec{F}_m}\, \vec{F}_k = \begin{bmatrix} 0 & -F_{m+2} & F_{m+1} & -F_{m+4} & F_{m+3} & F_{m+6} & -F_{m+5} \\ F_{m+2} & 0 & -F_m & -F_{m+5} & -F_{m+6} & F_{m+3} & F_{m+4} \\ -F_{m+1} & F_m & 0 & -F_{m+6} & F_{m+5} & -F_{m+4} & F_{m+3} \\ F_{m+4} & F_{m+5} & F_{m+6} & 0 & -F_m & -F_{m+1} & -F_{m+2} \\ -F_{m+3} & F_{m+6} & -F_{m+5} & F_m & 0 & F_{m+2} & -F_{m+1} \\ -F_{m+6} & -F_{m+3} & F_{m+4} & F_{m+1} & -F_{m+2} & 0 & F_m \\ F_{m+5} & -F_{m+4} & -F_{m+3} & F_{m+2} & F_{m+1} & -F_m & 0 \end{bmatrix}_{7\times 7} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \\ F_{k+4} \\ F_{k+5} \\ F_{k+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{m+2}F_{k+1} + F_{m+1}F_{k+2} - F_{m+4}F_{k+3} + F_{m+3}F_{k+4} - F_{m+5}F_{k+6} + F_{m+6}F_{k+5} \\ -F_mF_{k+2} + F_{m+2}F_k - F_{m+5}F_{k+3} + F_{m+3}F_{k+5} - F_{m+6}F_{k+4} + F_{m+4}F_{k+6} \\ -F_{m+1}F_k + F_mF_{k+1} - F_{m+6}F_{k+3} + F_{m+3}F_{k+6} - F_{m+4}F_{k+5} + F_{m+5}F_{k+4} \\ -F_mF_{k+4} + F_{m+4}F_k - F_{m+2}F_{k+6} + F_{m+6}F_{k+2} - F_{m+1}F_{k+5} + F_{m+5}F_{k+1} \\ -F_{m+3}F_k + F_mF_{k+3} - F_{m+1}F_{k+6} + F_{m+6}F_{k+1} - F_{m+5}F_{k+2} + F_{m+2}F_{k+5} \\ -F_{m+6}F_k + F_mF_{k+6} - F_{m+3}F_{k+1} + F_{m+1}F_{k+3} - F_{m+2}F_{k+4} + F_{m+4}F_{k+2} \\ -F_mF_{k+5} + F_{m+5}F_k - F_{m+4}F_{k+1} + F_{m+1}F_{k+4} - F_{m+3}F_{k+2} + F_{m+2}F_{k+3} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

elde edilir. Buradan,

$\vec{F}_n \times \left(S_{\vec{F}_m}\, \vec{F}_k\right) = S_{\vec{F}_n}\left(S_{\vec{F}_m}\, \vec{F}_k\right)$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n & -F_{n+5} & -F_{n+6} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+1} & F_n & 0 & -F_{n+6} & F_{n+5} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} & 0 & -F_n & -F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} & F_n & 0 & F_{n+2} & -F_{n+1} \\ -F_{n+6} & -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} & 0 & F_n \\ F_{n+5} & -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} & -F_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_{m+2}F_{k+1}+F_{m+1}F_{k+2}-F_{m+4}F_{k+3}+F_{m+3}F_{k+4}-F_{m+5}F_{k+6}+F_{m+6}F_{k+5} \\ -F_mF_{k+2}+F_{m+2}F_k-F_{m+5}F_{k+3}+F_{m+3}F_{k+5}-F_{m+6}F_{k+4}+F_{m+4}F_{k+6} \\ -F_{m+1}F_k+F_mF_{k+1}-F_{m+6}F_{k+3}+F_{m+3}F_{k+6}-F_{m+4}F_{k+5}+F_{m+5}F_{k+4} \\ -F_mF_{k+4}+F_{m+4}F_k-F_{m+2}F_{k+6}+F_{m+6}F_{k+2}-F_{m+1}F_{k+5}+F_{m+5}F_{k+1} \\ -F_{m+3}F_k+F_mF_{k+3}-F_{m+1}F_{k+6}+F_{m+6}F_{k+1}-F_{m+5}F_{k+2}+F_{m+2}F_{k+5} \\ -F_{m+6}F_k+F_mF_{k+6}-F_{m+3}F_{k+1}+F_{m+1}F_{k+3}-F_{m+2}F_{k+4}+F_{m+4}F_{k+2} \\ -F_mF_{k+5}+F_{m+5}F_k-F_{m+4}F_{k+1}+F_{m+1}F_{k+4}-F_{m+3}F_{k+2}+F_{m+2}F_{k+3} \end{bmatrix}$$

çarpımı hesaplanırsa, bu matrisin ilk satırı,

$$\begin{aligned}
&-F_{n+2}\left\{-\left(F_mF_{k+2}-F_{m+2}F_k\right)+\left(F_{m+3}F_{k+5}-F_{m+5}F_{k+3}\right)+\left(F_{m+4}F_{k+6}-F_{m+6}F_{k+4}\right)\right\} \\
&+F_{n+1}\left\{\left(F_mF_{k+1}-F_{m+1}F_k\right)+\left(F_{m+3}F_{k+6}-F_{m+6}F_{k+3}\right)-\left(F_{m+4}F_{k+5}-F_{m+5}F_{k+4}\right)\right\} \\
&-F_{n+4}\left\{-\left(F_mF_{k+4}-F_{m+4}F_k\right)-\left(F_{m+2}F_{k+6}-F_{m+6}F_{k+2}\right)-\left(F_{m+1}F_{k+5}-F_{m+5}F_{k+1}\right)\right\} \\
&+F_{n+3}\left\{\left(F_mF_{k+3}-F_{m+3}F_k\right)-\left(F_{m+1}F_{k+6}-F_{m+6}F_{k+1}\right)+\left(F_{m+2}F_{k+5}-F_{m+5}F_{k+2}\right)\right\} \\
&+F_{n+6}\left\{\left(F_mF_{k+6}-F_{m+6}F_k\right)+\left(F_{m+1}F_{k+3}-F_{m+3}F_{k+1}\right)-\left(F_{m+2}F_{k+4}-F_{m+4}F_{k+2}\right)\right\} \\
&-F_{n+5}\left\{-\left(F_mF_{k+5}-F_{m+5}F_k\right)+\left(F_{m+1}F_{k+4}-F_{m+4}F_{k+1}\right)+\left(F_{m+2}F_{k+3}-F_{m+3}F_{k+2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, $\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_k \right\rangle \vec{F}_m - \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_k$'yı hesaplanırsa,

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_k \right\rangle \vec{F}_m =$$

$$\left(F_nF_k+F_{n+1}F_{k+1}+F_{n+2}F_{k+2}+F_{n+3}F_{k+3}+F_{n+4}F_{k+4}+F_{n+5}F_{k+5}+F_{n+6}F_{k+6}\right)\vec{F}_m$$

$$= \begin{bmatrix} F_nF_kF_m+F_{n+1}F_{k+1}F_m+F_{n+2}F_{k+2}F_m+F_{n+3}F_{k+3}F_m+F_{n+4}F_{k+4}F_m+F_{n+5}F_{k+5}F_m+F_{n+6}F_{k+6}F_m \\ F_nF_kF_{m+1}+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+1}+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+1}+F_{n+3}F_{k+3}F_{m+1}+F_{n+4}F_{k+4}F_{m+1}+F_{n+5}F_{k+5}F_{m+1}+F_{n+6}F_{k+6}F_{m+1} \\ F_nF_kF_{m+2}+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+2}+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+2}+F_{n+3}F_{k+3}F_{m+2}+F_{n+4}F_{k+4}F_{m+2}+F_{n+5}F_{k+5}F_{m+2}+F_{n+6}F_{k+6}F_{m+2} \\ F_nF_kF_{m+3}+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+3}+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+3}+F_{n+3}F_{k+3}F_{m+3}+F_{n+4}F_{k+4}F_{m+3}+F_{n+5}F_{k+5}F_{m+3}+F_{n+6}F_{k+6}F_{m+3} \\ F_nF_kF_{m+4}+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+4}+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+4}+F_{n+3}F_{k+3}F_{m+4}+F_{n+4}F_{k+4}F_{m+4}+F_{n+5}F_{k+5}F_{m+4}+F_{n+6}F_{k+6}F_{m+4} \\ F_nF_kF_{m+5}+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+5}+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+5}+F_{n+3}F_{k+3}F_{m+5}+F_{n+4}F_{k+4}F_{m+5}+F_{n+5}F_{k+5}F_{m+5}+F_{n+6}F_{k+6}F_{m+5} \\ F_nF_kF_{m+6}+F_{n+1}F_{k+1}F_{m+6}+F_{n+2}F_{k+2}F_{m+6}+F_{n+3}F_{k+3}F_{m+6}+F_{n+4}F_{k+4}F_{m+6}+F_{n+5}F_{k+5}F_{m+6}+F_{n+6}F_{k+6}F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$$

ve

$$-\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_k =$$

$$-\left(F_nF_m+F_{n+1}F_{m+1}+F_{n+2}F_{m+2}+F_{n+3}F_{m+3}+F_{n+4}F_{m+4}+F_{n+5}F_{m+5}+F_{n+6}F_{m+6}\right)\vec{F}_k$$

$$=\begin{bmatrix}
-F_nF_mF_k-F_{n+1}F_{m+1}F_k-F_{n+2}F_{m+2}F_k-F_{n+3}F_{m+3}F_k-F_{n+4}F_{m+4}F_k-F_{n+5}F_{m+5}F_k-F_{n+6}F_{m+6}F_k \\
-F_nF_mF_{k+1}-F_{n+1}F_{m+1}F_{k+1}-F_{n+2}F_{m+2}F_{k+1}-F_{n+3}F_{m+3}F_{k+1}-F_{n+4}F_{m+4}F_{k+1}-F_{n+5}F_{m+5}F_{k+1}-F_{n+6}F_{m+6}F_{k+1} \\
-F_nF_mF_{k+2}-F_{n+1}F_{m+1}F_{k+2}-F_{n+2}F_{m+2}F_{k+2}-F_{n+3}F_{m+3}F_{k+2}-F_{n+4}F_{m+4}F_{k+2}-F_{n+5}F_{m+5}F_{k+2}-F_{n+6}F_{m+6}F_{k+2} \\
-F_nF_mF_{k+3}-F_{n+1}F_{m+1}F_{k+3}-F_{n+2}F_{m+2}F_{k+3}-F_{n+3}F_{m+3}F_{k+3}-F_{n+4}F_{m+4}F_{k+3}-F_{n+5}F_{m+5}F_{k+3}-F_{n+6}F_{m+6}F_{k+3} \\
-F_nF_mF_{k+4}-F_{n+1}F_{m+1}F_{k+4}-F_{n+2}F_{m+2}F_{k+4}-F_{n+3}F_{m+3}F_{k+4}-F_{n+4}F_{m+4}F_{k+4}-F_{n+5}F_{m+5}F_{k+4}-F_{n+6}F_{m+6}F_{k+4} \\
-F_nF_mF_{k+5}-F_{n+1}F_{m+1}F_{k+5}-F_{n+2}F_{m+2}F_{k+5}-F_{n+3}F_{m+3}F_{k+5}-F_{n+4}F_{m+4}F_{k+5}-F_{n+5}F_{m+5}F_{k+5}-F_{n+6}F_{m+6}F_{k+5} \\
-F_nF_mF_{k+6}-F_{n+1}F_{m+1}F_{k+6}-F_{n+2}F_{m+2}F_{k+6}-F_{n+3}F_{m+3}F_{k+6}-F_{n+4}F_{m+4}F_{k+6}-F_{n+5}F_{m+5}F_{k+6}-F_{n+6}F_{m+6}F_{k+6}
\end{bmatrix}_{7\times 1}$$

olmak üzere bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa elde edilen vektörün ilk satırı,

$$\begin{aligned}
&F_{n+1}F_{k+1}F_m+F_{n+2}F_{k+2}F_m+F_{n+3}F_{k+3}F_m+F_{n+4}F_{k+4}F_m \\
&\quad+F_{n+5}F_{k+5}F_m+F_{n+6}F_{k+6}F_m-F_{n+1}F_{m+1}F_k-F_{n+2}F_{m+2}F_k \\
&\quad-F_{n+3}F_{m+3}F_k-F_{n+4}F_{m+4}F_k-F_{n+5}F_{m+5}F_k-F_{n+6}F_{m+6}F_k \\
&\qquad=F_{n+1}\left(F_{k+1}F_m-F_{m+1}F_k\right)+F_{n+2}\left(F_{k+2}F_m-F_{m+2}F_k\right) \\
&\qquad\quad+F_{n+3}\left(F_{k+3}F_m-F_{m+3}F_k\right)+F_{n+4}\left(F_{k+4}F_m-F_{k+4}F_m\right) \\
&\qquad\quad+F_{n+5}\left(F_{k+5}F_m-F_{m+5}F_k\right)+F_{n+6}\left(F_{k+6}F_m-F_{m+6}F_k\right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Sağdaki işlemin ilk satırı ile soldaki işlemin ilk satırının aynı olmadığı açıkça görülür. İspat tamamlanır. □

2. Her $\vec{F}_n$ Fibonacci $7-$vektörü için $\vec{F}_n\times\vec{F}_n=\vec{0}$ olduğunu gösterelim:

$$\vec{F}_n\times\vec{F}_n=S_{\vec{F}_n}\vec{F}_n=\begin{bmatrix}
0 & -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} \\
F_{n+2} & 0 & -F_n & -F_{n+5} & -F_{n+6} & F_{n+3} & F_{n+4} \\
-F_{n+1} & F_n & 0 & -F_{n+6} & F_{n+5} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\
F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} & 0 & -F_n & -F_{n+1} & -F_{n+2} \\
-F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} & F_n & 0 & F_{n+2} & -F_{n+1} \\
-F_{n+6} & -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} & 0 & F_n \\
F_{n+5} & -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} & -F_n & 0
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\\F_{n+2}\\F_{n+3}\\F_{n+4}\\F_{n+5}\\F_{n+6}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}
-F_{n+2}F_{n+1}+F_{n+1}F_{n+2}-F_{n+4}F_{n+3}+F_{n+3}F_{n+4}-F_{n+5}F_{n+6}+F_{n+6}F_{n+5} \\
-F_nF_{n+2}+F_{n+2}F_n-F_{n+5}F_{n+3}+F_{n+3}F_{n+5}-F_{n+6}F_{n+4}+F_{n+4}F_{n+6} \\
-F_{n+1}F_n+F_nF_{n+1}-F_{n+6}F_{n+3}+F_{n+3}F_{n+6}-F_{n+4}F_{n+5}+F_{n+5}F_{n+4} \\
-F_nF_{n+4}+F_{n+4}F_n-F_{n+2}F_{n+6}+F_{n+6}F_{n+2}-F_{n+1}F_{n+5}+F_{n+5}F_{n+1} \\
-F_{n+3}F_n+F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+6}+F_{n+6}F_{n+1}-F_{n+5}F_{n+2}+F_{n+2}F_{n+5} \\
-F_{n+6}F_n+F_nF_{n+6}-F_{n+3}F_{n+1}+F_{n+1}F_{n+3}-F_{n+2}F_{n+4}+F_{n+4}F_{n+2} \\
-F_nF_{n+5}+F_{n+5}F_n-F_{n+4}F_{n+1}+F_{n+1}F_{n+4}-F_{n+3}F_{n+2}+F_{n+2}F_{n+3}
\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\vec{0}.$$

3. Her $\vec{F}_n$, $\vec{F}_m$ Fibonacci $7-$vektörleri için $\vec{F}_n\times\vec{F}_m=-\vec{F}_m\times\vec{F}_n$ olduğunu gösterelim:

(3.23) denkleminden,

$$\overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m = S_{\overrightarrow{F}_n} \overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} & -F_{n+4} & F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n & -F_{n+5} & -F_{n+6} & F_{n+3} & F_{n+4} \\ -F_{n+1} & F_n & 0 & -F_{n+6} & F_{n+5} & -F_{n+4} & F_{n+3} \\ F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} & 0 & -F_n & -F_{n+1} & -F_{n+2} \\ -F_{n+3} & F_{n+6} & -F_{n+5} & F_n & 0 & F_{n+2} & -F_{n+1} \\ -F_{n+6} & -F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+1} & -F_{n+2} & 0 & F_n \\ F_{n+5} & -F_{n+4} & -F_{n+3} & F_{n+2} & F_{n+1} & -F_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+4}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+4} - F_{n+5}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+5} \\ -F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m - F_{n+5}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+5} - F_{n+6}F_{m+4} + F_{n+4}F_{m+6} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} - F_{n+6}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+6} - F_{n+4}F_{m+5} + F_{n+5}F_{m+4} \\ -F_nF_{m+4} + F_{n+4}F_m - F_{n+2}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+2} - F_{n+1}F_{m+5} + F_{n+5}F_{m+1} \\ -F_{n+3}F_m + F_nF_{m+3} - F_{n+1}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+1} - F_{n+5}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+5} \\ -F_{n+6}F_m + F_nF_{m+6} - F_{n+3}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+3} - F_{n+2}F_{m+4} + F_{n+4}F_{m+2} \\ -F_nF_{m+5} + F_{n+5}F_m - F_{n+4}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+4} - F_{n+3}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+4}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+4} - F_{n+5}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+5} \\ -F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m - F_{n+5}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+5} - F_{n+6}F_{m+4} + F_{n+4}F_{m+6} \\ -F_{n+1}F_m + F_nF_{m+1} - F_{n+6}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+6} - F_{n+4}F_{m+5} + F_{n+5}F_{m+4} \\ -F_nF_{m+4} + F_{n+4}F_m - F_{n+2}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+2} - F_{n+1}F_{m+5} + F_{n+5}F_{m+1} \\ -F_{n+3}F_m + F_nF_{m+3} - F_{n+1}F_{m+6} + F_{n+6}F_{m+1} - F_{n+5}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+5} \\ -F_{n+6}F_m + F_nF_{m+6} - F_{n+3}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+3} - F_{n+2}F_{m+4} + F_{n+4}F_{m+2} \\ -F_nF_{m+5} + F_{n+5}F_m - F_{n+4}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+4} - F_{n+3}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+3} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & -F_{m+2} & F_{m+1} & -F_{m+4} & F_{m+3} & F_{m+6} & -F_{m+5} \\ F_{m+2} & 0 & -F_m & -F_{m+5} & -F_{m+6} & F_{m+3} & F_{m+4} \\ -F_{m+1} & F_m & 0 & -F_{m+6} & F_{m+5} & -F_{m+4} & F_{m+3} \\ F_{m+4} & F_{m+5} & F_{m+6} & 0 & -F_m & -F_{m+1} & -F_{m+2} \\ -F_{m+3} & F_{m+6} & -F_{m+5} & F_m & 0 & F_{m+2} & -F_{m+1} \\ -F_{m+6} & -F_{m+3} & F_{m+4} & F_{m+1} & -F_{m+2} & 0 & F_m \\ F_{m+5} & -F_{m+4} & -F_{m+3} & F_{m+2} & F_{m+1} & -F_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}$$

$$= -S_{\overrightarrow{F}_m} \overrightarrow{F}_n = -\overrightarrow{F}_m \times \overrightarrow{F}_n$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

4. Her $\overrightarrow{F}_n$, $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $7-$vektörleri için, $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m \right\rangle = 0$

olduğunu gösterelim:

(3.21) denkleminden,

$$\vec{F}_n \times \vec{F}_m = (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_n \times \vec{F}_m \right\rangle = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+5} & F_{n+6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -F_n - F_{n+1} - 2F_{n+2} - 3F_{n+3} + 9F_{n+4} + 6F_{n+5} - 6F_{n+6} \\ &= -F_{n+2} - 2F_{n+2} - 3F_{n+3} + 9F_{n+4} + 6F_{n+5} - 6F_{n+6} \\ &= -3F_{n+2} - 3F_{n+3} + 9F_{n+4} + 6F_{n+5} - 6F_{n+6} \\ &= -3F_{n+4} + 9F_{n+4} + 6F_{n+5} - 6F_{n+6} \\ &= +6F_{n+4} + 6F_{n+5} - 6F_{n+6} \\ &= +6F_{n+6} - 6F_{n+6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer ispatta benzer şekilde yapılabilir. □

5. $\left\| \vec{F}_n \times \vec{F}_m \right\|^2 = \left\| \vec{F}_n \right\|^2 \left\| \vec{F}_m \right\|^2 - \left(\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \right)^2$ eşitliğini gösterelim:

Her $\vec{F}_n$, $\vec{F}_m$ Fibonacci $7-$vektörleri için,

$$\vec{F}_n \times \vec{F}_m = (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\begin{aligned}\left\|\vec{F}_n \times \vec{F}_m\right\|^2 &= \left\langle \vec{F}_n \times \vec{F}_m, \vec{F}_n \times \vec{F}_m \right\rangle \\ &= \left((-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -3 & 9 & 6 & -6 \end{bmatrix}^T \right)^T (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -3 & 9 & 6 & -6 \end{bmatrix}^T \\ &= F_{n-m}^2 \left(1+1+4+9+81+36+36\right) \\ &= 168 F_{n-m}^2\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\left\|\vec{F}_n\right\|^2 \left\|\vec{F}_m\right\|^2 &= \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_n \right\rangle \left\langle \vec{F}_m, \vec{F}_m \right\rangle \\ &= \left(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 + F_{n+4}^2 + F_{n+5}^2 + F_{n+6}^2\right)\left(F_m^2 + F_{m+1}^2 + F_{m+2}^2 + F_{m+3}^2 + F_{m+4}^2 + F_{m+5}^2 + F_{m+6}^2\right) \\ &= F_n^2 F_m^2 + F_n^2 F_{m+1}^2 + F_n^2 F_{m+2}^2 + F_n^2 F_{m+3}^2 + F_n^2 F_{m+4}^2 + F_n^2 F_{m+5}^2 + F_n^2 F_{m+6}^2 \\ &\quad + F_{n+1}^2 F_m^2 + F_{n+1}^2 F_{m+1}^2 + F_{n+1}^2 F_{m+2}^2 + F_{n+1}^2 F_{m+3}^2 + F_{n+1}^2 F_{m+4}^2 + F_{n+1}^2 F_{m+5}^2 + F_{n+1}^2 F_{m+6}^2 \\ &\quad + F_{n+2}^2 F_m^2 + F_{n+2}^2 F_{m+1}^2 + F_{n+2}^2 F_{m+2}^2 + F_{n+2}^2 F_{m+3}^2 + F_{n+2}^2 F_{m+4}^2 + F_{n+2}^2 F_{m+5}^2 + F_{n+2}^2 F_{m+6}^2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + F_{n+6}^2 F_m^2 + F_{n+6}^2 F_{m+1}^2 + F_{n+6}^2 F_{m+2}^2 + F_{n+6}^2 F_{m+3}^2 + F_{n+6}^2 F_{m+4}^2 + F_{n+6}^2 F_{m+5}^2 + F_{n+6}^2 F_{m+5}^2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}-\left(\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle\right)^2 &= -\left(F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3} + F_{n+4} F_{m+4} + F_{n+5} F_{m+5} + F_{n+6} F_{m+6}\right)^2 \\ &= -F_n^2 F_m^2 - F_n F_m F_{n+1} F_{m+1} - F_n F_m F_{n+2} F_{m+2} - \ldots - F_n F_m F_{n+6} F_{m+6} \\ &\quad - F_{n+1} F_{m+1} F_n F_m - F_{n+1}^2 F_{m+1}^2 - F_{n+1} F_{m+1} F_{n+2} F_{m+2} - \ldots - F_{n+1} F_{m+1} F_{n+6} F_{m+6} \\ &\quad - F_{n+2} F_{m+2} F_n F_m - F_{n+2} F_{m+2} F_{n+1} F_{m+1} - F_{n+2}^2 F_{m+2}^2 - \ldots - F_{n+2} F_{m+2} F_{n+6} F_{m+6} \\ &\quad \vdots \\ &\quad - F_{n+6} F_{m+6} F_n F_m - F_{n+6} F_{m+6} F_{n+1} F_{m+1} - F_{n+6} F_{m+6} F_{n+2} F_{m+2} - \ldots - F_{n+6}^2 F_{m+6}^2\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\vec{F}_n\right\|^2 \left\|\vec{F}_m\right\|^2 - \left(\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle\right)^2 &= F_{n+1} F_m \left(F_{n+1} F_m - F_n F_{m+1}\right) + F_n F_{m+1} \left(F_n F_{m+1} - F_{n+1} F_m\right) \\ &\quad + F_n F_{m+2} \left(F_n F_{m+2} - F_{n+2} F_m\right) + F_{n+2} F_m \left(F_{n+2} F_m - F_n F_{m+2}\right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + F_n F_{m+6} \left(F_n F_{m+6} - F_{n+6} F_m\right) + F_{n+6} F_m \left(F_{n+6} F_m - F_n F_{m+6}\right) \\ &\quad + F_{n+1} F_{m+2} \left(F_{n+1} F_{m+2} - F_{n+2} F_{m+1}\right) + F_{n+2} F_{m+1} \left(F_{n+2} F_{m+1} - F_{n+2} F_{m+1}\right) \\ &\quad + F_{n+1} F_{m+3} \left(F_{n+1} F_{m+3} - F_{n+3} F_{m+1}\right) + F_{n+3} F_{m+1} \left(F_{n+3} F_{m+1} - F_{n+1} F_{m+3}\right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + F_{n+1} F_{m+6} \left(F_{n+1} F_{m+6} - F_{n+6} F_{m+1}\right) + F_{n+6} F_{m+1} \left(F_{n+6} F_{m+1} - F_{n+1} F_{m+6}\right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + F_{n+4} F_{m+5} \left(F_{n+4} F_{m+5} - F_{n+5} F_{m+4}\right) + F_{n+5} F_{m+4} \left(F_{n+5} F_{m+4} - F_{n+4} F_{m+5}\right) \\ &\quad + F_{n+4} F_{m+6} \left(F_{n+4} F_{m+6} - F_{n+6} F_{m+4}\right) + F_{n+6} F_{m+4} \left(F_{n+6} F_{m+4} - F_{n+4} F_{m+6}\right) \\ &\quad + F_{n+5} F_{m+6} \left(F_{n+5} F_{m+6} - F_{n+6} F_{m+5}\right) + F_{n+6} F_{m+5} \left(F_{n+6} F_{m+5} - F_{n+5} F_{m+6}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\left\|\vec{F}_n\right\|^2\left\|\vec{F}_m\right\|^2-\left(\left\langle\vec{F}_n,\vec{F}_m\right\rangle\right)^2=\left(F_nF_{m+1}-F_{n+1}F_m\right)^2+\left(F_nF_{m+2}-F_{n+2}F_m\right)^2+\ldots+\left(F_nF_{m+6}-F_{n+6}F_m\right)^2$$
$$+\left(F_{n+1}F_{m+2}-F_{n+2}F_{m+1}\right)^2+\left(F_{n+1}F_{m+3}-F_{n+3}F_{m+1}\right)^2+\ldots+\left(F_{n+1}F_{m+6}-F_{n+6}F_{m+1}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$+\left(F_{n+4}F_{m+5}-F_{n+5}F_{m+4}\right)^2+\left(F_{n+4}F_{m+6}-F_{n+6}F_{m+4}\right)^2+\left(F_{n+6}F_{m+4}-F_{n+4}F_{m+6}\right)^2$$
$$+\left(F_{n+5}F_{m+6}-F_{n+6}F_{m+5}\right)^2+\left(F_{n+6}F_{m+5}-F_{n+5}F_{m+6}\right)^2$$

şeklinde bulunur. (2.54) ve (2.55) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa,

$$\left\|\vec{F}_n\right\|^2\left\|\vec{F}_m\right\|^2-\left(\left\langle\vec{F}_n,\vec{F}_m\right\rangle\right)^2=168F_{n-m}^2$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left\|\vec{F}_n\times\vec{F}_m\right\|^2=\left\|\vec{F}_n\right\|^2\left\|\vec{F}_m\right\|^2-\left(\left\langle\vec{F}_n,\vec{F}_m\right\rangle\right)^2$$

eşitliği yazılabilir.

6. $\vec{F}_n$ ve $\vec{F}_m$ lineer bağımsız olduğundan $\vec{F}_n\times\vec{F}_m\neq\vec{0}$ olduğunu gösterelim:

$\vec{F}_n$ ve $\vec{F}_m$ vektörleri lineer bağımsız olduğunu gösterelim:

$\vec{F}_n$ ve $\vec{F}_m$ vektörleri lineer bağımlı olsunlar. Bu durumda,

$$\vec{F}_n=\lambda\vec{F}_m$$

yazılabilir. Öyleyse,

$$\vec{F}_n=\lambda\vec{F}_m$$
$$\vec{F}_n-\lambda\vec{F}_m=\vec{0}$$
$$\left(F_n,F_{n+1},\ldots,F_{n+6}\right)-\lambda\left(F_m,F_{m+1},\ldots,F_{m+6}\right)=\vec{0}$$
$$\left(F_n-\lambda F_m,F_{n+1}-\lambda F_{m+1},\ldots,F_{n+6}-\lambda F_{m+6}\right)=\vec{0}$$

elde edilir. Buradan,

$$F_n-\lambda F_m=0$$
$$F_{n+1}-\lambda F_{m+1}=0$$
$$\vdots$$
$$F_{n+6}-\lambda F_{m+6}=0$$

yazılabilir. O halde,

$\lambda=1$ olmalıdır. Yani, $\vec{F}_n$ ve $\vec{F}_m$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Bu durumda, vektörel çarpımın tanımından,

$$\vec{F}_n\times\vec{F}_m\neq\vec{0}$$

olduğu açıktır. İspat tamamlanır.

7. $\left\langle \vec{F}_n \times \vec{F}_m , \vec{F}_k \right\rangle = \left\langle \vec{F}_m \times \vec{F}_k , \vec{F}_n \right\rangle = \left\langle \vec{F}_k \times \vec{F}_n , \vec{F}_m \right\rangle = 0$ eşitliklerini gösterelim:

Her $\vec{F}_n$, $\vec{F}_m$ ve $\vec{F}_k$ Fibonacci $7-$vektörler için, Öklid anlamında karma çarpım sıfır olduğundan, ispat tamamlanır. □

8. $\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_n \times \vec{F}_m \right) = \left\langle \vec{F}_n , \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_n - \left\langle \vec{F}_n , \vec{F}_n \right\rangle \vec{F}_m$ eşitliğini gösterelim:

Bu ispat ilk bileşen ile yapılacak olup diğer bileşenler benzer şekilde gösterilebilir. Vektörel çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_n \times \vec{F}_m \right) = \{ & -F_{n+2} \left(-F_n F_{m+2} + F_{n+2} F_m - F_{n+5} F_{m+3} + F_{n+3} F_{m+5} - F_{n+6} F_{m+4} + F_{n+4} F_{m+6} \right) \\
& + F_{n+1} \left(-F_{n+1} F_m + F_n F_{m+1} - F_{n+6} F_{m+3} + F_{n+3} F_{m+6} - F_{n+4} F_{m+5} + F_{n+5} F_{m+4} \right) \\
& - F_{n+4} \left(-F_n F_{m+4} + F_{n+4} F_m - F_{n+2} F_{m+6} + F_{n+6} F_{m+2} - F_{n+1} F_{m+5} + F_{n+5} F_{m+1} \right) \\
& + F_{n+3} \left(-F_{n+3} F_m + F_n F_{m+3} - F_{n+1} F_{m+6} + F_{n+6} F_{m+1} - F_{n+5} F_{m+2} + F_{n+2} F_{m+5} \right) \\
& - F_{n+5} \left(-F_n F_{m+5} + F_{n+5} F_m - F_{n+4} F_{m+1} + F_{n+1} F_{m+4} - F_{n+3} F_{m+2} + F_{n+2} F_{m+3} \right) \\
& + F_{n+6} \left(-F_{n+6} F_m + F_n F_{m+6} - F_{n+3} F_{m+1} + F_{n+1} F_{m+3} - F_{n+2} F_{m+4} + F_{n+4} F_{m+2} \right) \}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_n \times \vec{F}_m \right) = \{ & -F_{n+2} \left(-F_n F_{m+2} + F_{n+2} F_m - F_{n+5} F_{m+3} + F_{n+3} F_{m+5} - F_{n+6} F_{m+4} + F_{n+4} F_{m+6} \right. \\
& \left. - F_{n+4} F_{m+6} - F_{n+3} F_{m+5} + F_{n+5} F_{m+3} + F_{n+6} F_{m+4} \right) \\
& + F_{n+1} \left(-F_{n+1} F_m + F_n F_{m+1} - F_{n+6} F_{m+3} + F_{n+3} F_{m+6} - F_{n+4} F_{m+5} + F_{n+5} F_{m+4} \right. \\
& \left. + F_{n+4} F_{m+5} - F_{n+3} F_{m+6} - F_{n+5} F_{m+4} + F_{n+6} F_{m+3} \right) \\
& - F_{n+4} \left(-F_n F_{m+4} + F_{n+4} F_m + F_{n+6} F_{m+2} + F_{n+5} F_{m+1} - F_{n+5} F_{m+1} - F_{n+6} F_{m+2} \right) \\
& + F_{n+3} \left(-F_{n+3} F_m + F_n F_{m+3} + F_{n+6} F_{m+1} - F_{n+5} F_{m+2} + F_{n+5} F_{m+2} - F_{n+6} F_{m+1} \right) \\
& - F_{n+5} \left(-F_n F_{m+5} + F_{n+5} F_m \right) + F_{n+6} \left(-F_{n+6} F_m + F_n F_{m+6} \right) \} \\
= & F_{n+1} \left(F_{m+1} F_n - F_{n+1} F_m \right) + F_{n+2} \left(F_{m+2} F_n - F_{n+2} F_m \right) + F_{n+3} \left(F_{m+3} F_n - F_{n+3} F_m \right) \\
& + F_{n+4} \left(F_{m+4} F_n - F_{n+4} F_m \right) + F_{n+5} \left(F_{m+5} F_n - F_{n+5} F_m \right) + F_{n+6} \left(F_{m+6} F_n - F_{n+6} F_m \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{F}_n , \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_n &= \left(F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3} + F_{n+4} F_{m+4} + F_{n+5} F_{m+5} + F_{n+6} F_{m+6} \right) \vec{F}_n \\
&= F_n F_m F_n + F_{n+1} F_{m+1} F_n + F_{n+2} F_{m+2} F_n + F_{n+3} F_{m+3} F_n + F_{n+4} F_{m+4} F_n + F_{n+5} F_{m+5} F_n + F_{n+6} F_{m+6} F_n
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
-\left\langle \vec{F}_n , \vec{F}_n \right\rangle \vec{F}_m &= -\left(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 + F_{n+4}^2 + F_{n+5}^2 + F_{n+6}^2 \right) \vec{F}_m \\
&= -F_n^2 F_m - F_{n+1}^2 F_m - F_{n+2}^2 F_m - F_{n+3}^2 F_m - F_{n+4}^2 F_m - F_{n+5}^2 F_m - F_{n+6}^2 F_m
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden, bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_n - \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_n \right\rangle \vec{F}_m = F_{n+1}\left(F_{m+1}F_n - F_{n+1}F_m\right) + F_{n+2}\left(F_{m+2}F_n - F_{n+2}F_m\right) + F_{n+3}\left(F_{m+3}F_n - F_{n+3}F_m\right)$$
$$+ F_{n+4}\left(F_{m+4}F_n - F_{n+4}F_m\right) + F_{n+5}\left(F_{m+5}F_n - F_{n+5}F_m\right) + F_{n+6}\left(F_{m+6}F_n - F_{n+6}F_m\right)$$

şeklinde bulunur. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

9. $\left\langle \vec{F}_m, \vec{F}_n \times \vec{F}_k \right\rangle = \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_k \times \vec{F}_m \right\rangle = 0$ olduğunu gösterelim:

Her Her $\vec{F}_n$, $\vec{F}_m$ ve $\vec{F}_k$ Fibonacci $7-$vektörler için, Öklid anlamında karma çarpım sıfır olduğundan, ispat tamamlanır. □

10. $\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_m \times \vec{F}_k\right) + \vec{F}_m \times \left(\vec{F}_n \times \vec{F}_k\right) = \left\langle \vec{F}_m, \vec{F}_k \right\rangle \vec{F}_n + \left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_k \right\rangle \vec{F}_m - 2\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle \vec{F}_k$

eşitliğini gösterelim:

Bu ispat ilk bileşen ile yapılacak olup diğer bileşenler benzer şekilde gösterilebilir. Vektörel çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_m \times \vec{F}_k\right) = \{ & -F_{n+2}\left(-F_mF_{k+2} + F_{m+2}F_k - F_{m+5}F_{k+3} + F_{m+3}F_{k+5} - F_{m+6}F_{k+4} + F_{m+4}F_{k+6}\right) \\ & + F_{n+1}\left(-F_{m+1}F_k + F_mF_{k+1} - F_{m+6}F_{k+3} + F_{m+3}F_{k+6} - F_{m+4}F_{k+5} + F_{m+5}F_{k+4}\right) \\ & - F_{n+4}\left(-F_mF_{k+4} + F_{m+4}F_k - F_{m+2}F_{k+6} + F_{m+6}F_{k+2} - F_{m+1}F_{k+5} + F_{m+5}F_{k+1}\right) \\ & + F_{n+3}\left(-F_{m+3}F_k + F_mF_{k+3} - F_{m+1}F_{k+6} + F_{m+6}F_{k+1} - F_{m+5}F_{k+2} + F_{m+2}F_{k+5}\right) \\ & - F_{n+5}\left(-F_mF_{k+5} + F_{m+5}F_k - F_{m+4}F_{k+1} + F_{m+1}F_{k+4} - F_{m+3}F_{k+2} + F_{m+2}F_{k+3}\right) \\ & + F_{n+6}\left(-F_{m+6}F_k + F_mF_{k+6} - F_{m+3}F_{k+1} + F_{m+1}F_{k+3} - F_{m+2}F_{k+4} + F_{m+4}F_{k+2}\right)\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\vec{F}_m \times \left(\vec{F}_n \times \vec{F}_k\right) = \{ & -F_{m+2}\left(-F_nF_{k+2} + F_{n+2}F_k - F_{n+5}F_{k+3} + F_{n+3}F_{k+5} - F_{n+6}F_{k+4} + F_{n+4}F_{k+6}\right) \\ & + F_{m+1}\left(-F_{n+1}F_k + F_nF_{k+1} - F_{n+6}F_{k+3} + F_{n+3}F_{k+6} - F_{n+4}F_{k+5} + F_{n+5}F_{k+4}\right) \\ & - F_{m+4}\left(-F_nF_{k+4} + F_{n+4}F_k - F_{n+2}F_{k+6} + F_{n+6}F_{k+2} - F_{n+1}F_{k+5} + F_{n+5}F_{k+1}\right) \\ & + F_{m+3}\left(-F_{n+3}F_k + F_nF_{k+3} - F_{n+1}F_{k+6} + F_{n+6}F_{k+1} - F_{n+5}F_{k+2} + F_{n+2}F_{k+5}\right) \\ & - F_{m+5}\left(-F_nF_{k+5} + F_{n+5}F_k - F_{n+4}F_{k+1} + F_{n+1}F_{k+4} - F_{n+3}F_{k+2} + F_{n+2}F_{k+3}\right) \\ & + F_{m+6}\left(-F_{n+6}F_k + F_nF_{k+6} - F_{n+3}F_{k+1} + F_{n+1}F_{k+3} - F_{n+2}F_{k+4} + F_{n+4}F_{k+2}\right)\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}\vec{F}_n \times \left(\vec{F}_m \times \vec{F}_k\right) + \vec{F}_m \times \left(\vec{F}_n \times \vec{F}_k\right) = \{ & F_{n+2}\left(F_mF_{k+2} - 2F_{m+2}F_k\right) + F_{n+1}\left(F_mF_{k+1} - 2F_{m+1}F_k\right) \\ & + F_{n+4}\left(F_mF_{k+4} - 2F_{m+4}F_k\right) + F_{n+3}\left(F_mF_{k+3} - 2F_{m+3}F_k\right) \\ & + F_{n+5}\left(F_mF_{k+5} - 2F_{m+5}F_k\right) + F_{n+6}\left(F_mF_{k+6} - 2F_{m+6}F_k\right)\}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Şimdi eşitliğin diğer tarafındaki değerler ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_k \right\rangle \overrightarrow{F}_n = \left(F_m F_k + F_{m+1}F_{k+1} + F_{m+2}F_{k+2} + F_{m+3}F_{k+3} + F_{m+4}F_{k+4} + F_{m+5}F_{k+5} + F_{m+6}F_{k+6}\right)\left(F_n, F_{n+1}, ..., F_{n+5}, F_{n+6}\right)$$
$$= F_m F_k F_n + F_{m+1}F_{k+1}F_n + F_{m+2}F_{k+2}F_n + F_{m+3}F_{k+3}F_n + F_{m+4}F_{k+4}F_n + F_{m+5}F_{k+5}F_n + F_{m+6}F_{k+6}F_n$$

ve benzer şekilde,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_k \right\rangle \overrightarrow{F}_m = \left(F_n F_k + F_{n+1}F_{k+1} + F_{n+2}F_{k+2} + F_{n+3}F_{k+3} + F_{n+4}F_{k+4} + F_{n+5}F_{k+5} + F_{n+6}F_{k+6}\right)\left(F_m, F_{m+1}, ..., F_{m+5}, F_{m+6}\right)$$
$$= F_n F_k F_m + F_{n+1}F_{k+1}F_m + F_{n+2}F_{k+2}F_m + F_{n+3}F_{k+3}F_m + F_{n+4}F_{k+4}F_m + F_{n+5}F_{k+5}F_m + F_{n+6}F_{k+6}F_m$$

bulunur. Ayrıca,

$$-2\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle \overrightarrow{F}_k = \left(F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} + F_{n+4}F_{m+4} + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6}\right)\left(F_k, F_{k+1}, ..., F_{k+5}, F_{k+6}\right)$$
$$= -2F_n F_m F_k - 2F_{n+1}F_{m+1}F_k - 2F_{n+2}F_{m+2}F_k - 2F_{n+3}F_{m+3}F_k - 2F_{n+4}F_{m+4}F_k - 2F_{n+5}F_{m+5}F_k - 2F_{n+6}F_{m+6}F_k$$

yazılabileceğinden, bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_k \right\rangle \overrightarrow{F}_n + \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_k \right\rangle \overrightarrow{F}_m - 2\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle \overrightarrow{F}_k = \left\{F_n\left(F_m F_k + F_m F_k + F_{m+1}F_{k+1} - 2F_m F_k\right) + F_{n+1}\left(F_m F_{k+1} - 2F_{m+1}F_k\right)\right.$$
$$+ F_{n+2}\left(F_m F_{k+2} - 2F_{m+2}F_k\right)$$
$$+ F_{n+4}\left(F_m F_{k+4} - 2F_{m+4}F_k\right) + F_{n+3}\left(F_m F_{k+3} - 2F_{m+3}F_k\right)$$
$$\left. + F_{n+5}\left(F_m F_{k+5} - 2F_{m+5}F_k\right) + F_{n+6}\left(F_m F_{k+6} - 2F_{m+6}F_k\right)\right\}$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden ispat tamamlanır. □

BÖLÜM 4

KOMPLEKS FIBONACCI VEKTÖRLER

Orijinal olan bu bölümde, kompleks Fibonacci $3-$vektörler tanımlanmış, kompleks anlamda vektörel çarpım anti-simetrik matris yardımıyla tanımlanarak, vektörel çarpıma ait özellikler verilmiştir.

4.1 Kompleks Fibonacci $3-$Vektörler

Tanım 4.1 $C_n = F_n + iF_{n+1}$ $n.$ kompleks Fibonacci sayısı olmak üzere bir kompleks Fibonacci $3-$vektör $\vec{C}_n$,

$$\vec{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right) \tag{4.1}$$

şekilde tanımlanır.

Teorem 4.1 Herhangi bir kompleks Fibonacci $3-$vektör $\vec{C}_n$, Fibonacci $3-$vektörler ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\vec{C}_n = \vec{F}_n + i\vec{F}_{n+1}. \tag{4.2}$$

İspat $\vec{C}_n$ kompleks Fibonacci $3-$vektör olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \vec{C}_n &= \left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right) \\ &= \left(F_n + iF_{n+1}, F_{n+1} + iF_{n+2}, F_{n+2} + iF_{n+3}\right) \\ &= \left(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}\right) + i\left(F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}\right) \\ &= \vec{F}_n + i\vec{F}_{n+1} \end{aligned}$$

yazılabilir. İstenen elde edilir. □

4.1.1 Kompleks Fibonacci $3-$Vektörler için Hermit Anlamında İç Çarpım ve Norm

Tanım 4.2 $\vec{C}_n=\begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}=\left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right)$ ve $\vec{C}_m=\begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}=\left(C_m, C_{m+1}, C_{m+2}\right)$

kompleks Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, bu iki kompleks Fibonacci $3-$vektörün Hermit anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_m \right\rangle = \left(\vec{C}_n\right)^T \left(\overline{\vec{C}_m}\right) \tag{4.3}$$

veya

$$\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_m \right\rangle = \sum_{i=0}^{2} C_{n+i}.\overline{C_{m+i}} \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\left(\overline{\vec{C}_m}\right)$ ile $\vec{C}_m=\begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ kompleks Fibonacci $3-$vektörün kompleks eşleniği ifade edilmektedir. Ayrıca (1.1) denklemindeki $\overline{C_{m+i}}$'ler ise C_{m+i} ($0\le i\le 2$) kompleks Fibonacci sayılarının eşlenikleridir.

Teorem 4.2 Bütün kompleks Fibonacci $3-$vektörler $\vec{C}_n=\begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}=\left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right)$ ve

$\vec{C}_m=\begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}=\left(C_m, C_{m+1}, C_{m+2}\right)$ için, bu vektörlerin Hermit anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_m \right\rangle = \left(F_{n+m+1}+F_{n+m+3}+F_{n+m+5}\right)-i\left(-1\right)^m F_{n-m} \tag{4.5}$$

şeklindedir.

İspat $\vec{C}_n$ ve $\vec{C}_m$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler olsun. O halde bu iki vektörün Hermit iç çarpımı,

$$\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_m \right\rangle = \sum_{i=0}^{2} C_{n+i}.\overline{C_{m+i}}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_m \right\rangle &= C_n \overline{C_m} + C_{n+1}\overline{C_{m+1}} + C_{n+2}\overline{C_{m+2}} \\ &= \left(F_n + iF_{n+1}\right)\left(\overline{F_m + iF_{m+1}}\right) + \left(F_{n+1} + iF_{n+2}\right)\left(\overline{F_{m+1} + iF_{m+2}}\right) + \left(F_{n+2} + iF_{n+3}\right)\left(\overline{F_{m+2} + iF_{m+3}}\right) \\ &= \left(F_n + iF_{n+1}\right)\left(F_m - iF_{m+1}\right) + \left(F_{n+1} + iF_{n+2}\right)\left(F_{m+1} - iF_{m+2}\right) + \left(F_{n+2} + iF_{n+3}\right)\left(F_{m+2} - iF_{m+3}\right) \\ &= F_nF_m - iF_nF_{m+1} + iF_{n+1}F_m - i^2F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+1} - iF_{n+1}F_{m+2} + iF_{n+2}F_{m+1} - i^2F_{n+2}F_{m+2} \\ &\quad + F_{n+2}F_{m+2} - iF_{n+2}F_{m+3} + iF_{n+3}F_{m+2} - i^2F_{n+3}F_{m+3} \\ &= \left(F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3}\right) \\ &\quad + i\left(-F_nF_{m+1} + F_{n+1}F_m - F_{n+1}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+1} - F_{n+2}F_{m+3} + F_{n+3}F_{m+2}\right) \\ &= \left(F_{n+m+1} + F_{n+m+3} + F_{n+m+5}\right) + i\left(-(-1)^m F_{n-m} - (-1)^{m+1} F_{n-m} - (-1)^{m+2} F_{n-m}\right) \\ &= \left(F_{n+m+1} + F_{n+m+3} + F_{n+m+5}\right) + i\left(-(-1)^m F_{n-m} + (-1)^m F_{n-m} - (-1)^m F_{n-m}\right) \\ &= \left(F_{n+m+1} + F_{n+m+3} + F_{n+m+5}\right) - i(-1)^m F_{n-m}\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.3 $\vec{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right)$, kompleks Fibonacci $3-$ vektör olmak üzere,

bu vektörün **Hermit anlamında normu**,

$$\left\|\vec{C}_n\right\| = \sqrt{\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_n \right\rangle} \tag{4.6}$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.3 Herhangi bir $\vec{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right)$ kompleks Fibonacci $3-$ vektörün Hermit anlamında normu,

$$\left\|\vec{C}_n\right\| = \sqrt{F_{2n+1} + F_{2n+3} + F_{2n+5}} \tag{4.7}$$

şeklindedir.

İspat Hermit normun tanımından,

$$\left\|\vec{C}_n\right\| = \sqrt{\left\langle \vec{C_n}, \vec{C_n} \right\rangle}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\sum_{i=0}^{2} C_{n+i}.\overline{C_{n+i}}} \\
&= \sqrt{C_n\overline{C_n} + C_{n+1}\overline{C_{m+1}} + C_{n+2}\overline{C_{m+2}}} \\
&= \sqrt{\left(F_n + iF_{n+1}\right)\left(\overline{F_n + iF_{n+1}}\right) + \left(F_{n+1} + iF_{n+2}\right)\left(\overline{F_{n+1} + iF_{n+2}}\right) + \left(F_{n+2} + iF_{n+3}\right)\left(\overline{F_{n+2} + iF_{n+3}}\right)} \\
&= \sqrt{\left(F_n + iF_{n+1}\right)\left(F_n - iF_{n+1}\right) + \left(F_{n+1} + iF_{n+2}\right)\left(F_{n+1} - iF_{n+2}\right) + \left(F_{n+2} + iF_{n+3}\right)\left(F_{n+2} - iF_{n+3}\right)} \\
&= \sqrt{F_n^2 - iF_nF_{n+1} + iF_{n+1}F_n - i^2F_{n+1}^2 + F_{n+1}^2 - iF_{n+1}F_{n+2} + iF_{n+2}F_{n+1} - i^2F_{n+2}^2 + F_{n+2}^2 - iF_{n+2}F_{n+3} + iF_{n+3}F_{n+2} - i^2F_{n+3}^2} \\
&= \sqrt{\left(F_n^2 + 2F_{n+1}^2 + 2F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2\right)} \\
&= \sqrt{F_{2n+1} + F_{2n+3} + F_{2n+5}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4.1.2 Kompleks Fibonacci $3-$Vektörlerin Anti-Simetrik Matris Yardımıyla Vektörel Anlamda Çarpımı

Her $\overrightarrow{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right)$ kompleks Fibonacci $3-$vektörüne 3×3 tipinde bir anti-simetrik matris karşılık gelir. Bu matris aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.4 $\overrightarrow{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right)$ bir kompleks Fibonacci $3-$vektörü olmak üzere, bu vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris

$$
\mathbb{C}_n = \begin{bmatrix} 0 & -C_{n+2} & C_{n+1} \\ C_{n+2} & 0 & -C_n \\ -C_{n+1} & C_n & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}
$$

şeklindedir.

Teorem 4.4 $\overrightarrow{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left(C_n, C_{n+1}, C_{n+2}\right)$ şeklinde bir kompleks Fibonacci $3-$vektör olmak üzere, bu vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris şu şekilde de ifade edilebilir:

$$
\mathbb{C}_n = \mathbb{F}_n + i\mathbb{F}_{n+1}. \tag{4.9}
$$

İspat $\vec{C}_n$, kompleks Fibonacci $3-$vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matrisi ele alınırsa,

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_n &= \begin{bmatrix} 0 & -C_{n+2} & C_{n+1} \\ C_{n+2} & 0 & -C_n \\ -C_{n+1} & C_n & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2}-iF_{n+3} & F_{n+1}+iF_{n+2} \\ F_{n+2}+iF_{n+3} & 0 & -F_n-iF_{n+1} \\ -F_{n+1}-iF_{n+2} & F_n+iF_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+2} & 0 & -F_n \\ -F_{n+1} & F_n & 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 & -F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+3} & 0 & -F_{n+1} \\ -F_{n+2} & F_{n+1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbb{F}_n + i\mathbb{F}_{n+1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.5 $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ve $\vec{C}_n$, $\vec{C}_m$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler için, $\lambda\vec{C}_n + \mu\vec{C}_m$ vektörüne karşılık gelen anti-simetrik matris $\lambda\mathbb{C}_n + \mu\mathbb{C}_m$ 'dir.

İspat $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ve $\vec{C}_n$, $\vec{C}_m$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, $\lambda\vec{C}_n + \mu\vec{C}_m$ vektörü hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\lambda\vec{C}_n + \mu\vec{C}_m &= \lambda\begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} + \mu\begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda C_n + \mu C_m \\ \lambda C_{n+1} + \mu C_{m+1} \\ \lambda C_{n+2} + \mu C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Şimdi bulunan bu vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 0 & -(\lambda C_{n+2}+\mu C_{m+2}) & \lambda C_{n+1}+\mu C_{m+1} \\ \lambda C_{n+2}+\mu C_{m+2} & 0 & -(\lambda C_n+\mu C_m) \\ -(\lambda C_{n+1}+\mu C_{m+1}) & \lambda C_n+\mu C_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda C_{n+2} & \lambda C_{n+1} \\ \lambda C_{n+2} & 0 & -\lambda C_n \\ -\lambda C_{n+1} & \lambda C_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mu C_{m+2} & \mu C_{m+1} \\ \mu C_{m+2} & 0 & -\mu C_m \\ -\mu C_{m+1} & \mu C_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\begin{bmatrix} 0 & -C_{n+2} & C_{n+1} \\ C_{n+2} & 0 & -C_n \\ -C_{n+1} & C_n & 0 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} 0 & -C_{m+2} & C_{m+1} \\ C_{m+2} & 0 & -C_m \\ -C_{m+1} & C_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\mathbb{C}_n + \mu\mathbb{C}_m$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

Tanım 4.5 $\vec{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\vec{C}_m = \begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin **vektörel anlamda çarpımı,**

$$\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m = \mathbb{C}_n \vec{C}_m \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.6 Herhangi iki $\vec{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\vec{C}_m = \begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ kompleks Fibonacci $3-$vektörün vektörel anlamda çarpımı,

$$\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m = (-1)^m e_c F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)^m e_c F_{n-m} (-1,-1,1) \tag{4.11}$$

eşittir. Burada $e_c = 2+i$ şeklindedir.

İspat $\vec{C}_n, \vec{C}_m$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler olsun. Bu durumda tanımdan yararlanarak bu iki vektörün vektörel çarpımını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m &= \mathbb{C}_n \vec{C}_m \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -C_{n+2} & C_{n+1} \\ C_{n+2} & 0 & -C_n \\ -C_{n+1} & C_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -C_{n+2}C_{m+1} + C_{n+1}C_{m+2} \\ C_{n+2}C_m - C_nC_{m+2} \\ -C_{n+1}C_m + C_nC_{m+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu ifadenin açılımına bakılırsa,

$$\begin{bmatrix} -(F_{n+2}+iF_{n+3})(F_{m+1}+iF_{m+2}) + (F_{n+1}+iF_{n+2})(F_{m+2}+iF_{m+3}) \\ (F_{n+2}+iF_{n+3})(F_m+iF_{m+1}) - (F_n+iF_{n+1})(F_{m+2}+iF_{m+3}) \\ -(F_{n+1}+iF_{n+2})(F_m+iF_{m+1}) + (F_n+iF_{n+1})(F_{m+1}+iF_{m+2}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -F_{n+2}F_{m+1}-iF_{n+2}F_{m+2}-iF_{n+3}F_{m+1}-i^2F_{n+3}F_{m+2}+F_{n+1}F_{m+2}+iF_{n+1}F_{m+3}+iF_{n+2}F_{m+2}+i^2F_{n+2}F_{m+3} \\ F_{n+2}F_m+iF_{n+2}F_{m+1}+iF_{n+3}F_m+i^2F_{n+3}F_{m+1}-F_nF_{m+2}-iF_nF_{m+3}-iF_{n+1}F_{m+2}-i^2F_{n+1}F_{m+3} \\ -F_{n+1}F_m-iF_{n+1}F_{m+1}-iF_{n+2}F_m-i^2F_{n+2}F_{m+1}+F_nF_{m+1}+iF_nF_{m+2}+iF_{n+1}F_{m+1}+i^2F_{n+1}F_{m+2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(F_{n+1}F_{m+2}-F_{n+2}F_{m+1}\right)-\left(F_{n+2}F_{m+3}-F_{n+3}F_{m+2}\right)+i\left(F_{n+1}F_{m+3}-F_{n+3}F_{m+1}\right) \\ -\left(F_nF_{m+2}-F_{n+2}F_m\right)+\left(F_{n+1}F_{m+3}-F_{n+3}F_{m+1}\right)+i\left(-\left(F_{n+1}F_{m+2}-F_{n+2}F_{m+1}\right)-\left(F_nF_{m+3}-F_{n+3}F_m\right)\right) \\ \left(F_nF_{m+1}-F_{n+1}F_m\right)-\left(F_{n+1}F_{m+2}-F_{n+2}F_{m+1}\right)+i\left(F_nF_{m+2}-F_{n+2}F_m\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-1)^{m+1}F_{n-m}-(-1)^{m+2}F_{n-m}+i(-1)^{m+1}F_2F_{n-m} \\ -(-1)^mF_2F_{n-m}+(-1)^{m+1}F_2F_{n-m}+i\left(-(-1)^{m+1}F_{n-m}-(-1)^mF_3F_{n-m}\right) \\ (-1)^mF_{n-m}-(-1)^{m+1}F_{n-m}+i(-1)^mF_2F_{n-m} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2(-1)^mF_{n-m}-i(-1)^mF_{n-m} \\ -2(-1)^mF_{n-m}+i\left((-1)^mF_{n-m}-2(-1)^mF_{n-m}\right) \\ 2(-1)^mF_{n-m}+i(-1)^mF_{n-m} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2(-1)^mF_{n-m}-i(-1)^mF_{n-m} \\ -2(-1)^mF_{n-m}-i(-1)^mF_{n-m} \\ 2(-1)^mF_{n-m}+i(-1)^mF_{n-m} \end{bmatrix}$$

$$=(-1)^mF_{n-m}\begin{bmatrix} -2-i \\ -2-i \\ 2+i \end{bmatrix}$$

$$=(-1)^me_cF_{n-m}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak, iki kompleks Fibonacci $3-$vektörün vektörel çarpımı,

$$\left(-1\right)^m e_cF_{n-m}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ifadesine eşittir.

Tanım 4.6 $\vec{C}_n$, $\vec{C}_m$ ve $\vec{C}_k$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere bu üç vektörün **Hermit anlamında karma çarpımı**,

$$\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\langle , \rangle$ Hermit anlamında iç çarpımdır.

Teorem 4.7 Bütün $\vec{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $\vec{C}_m = \begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\vec{C}_k = \begin{bmatrix} C_k \\ C_{k+1} \\ C_{k+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ kompleks Fibonacci $3-$vektörlerin Hermit anlamında karma çarpımı sıfırdır. Yani,

$$\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle = 0. \tag{4.13}$$

İspat Kompleks Fibonacci $3-$vektörler $\vec{C}_n$, $\vec{C}_m$ ve $\vec{C}_k$ olsun. Bu üç vektörün Hermit anlamında karma çarpımı (4.11) denklemi kullanılarak hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle &= \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m\right)^T \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \left\langle (-1)^m e_c F_{n-m}(-1,-1,+1), (C_k, C_{k+1}, C_{k+2}) \right\rangle \\
&= (-1)^m e_c F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C_k} \\ \overline{C_{k+1}} \\ \overline{C_{k+2}} \end{bmatrix} \\
&= (-1)^m e_c F_{n-m} \left(-\overline{C_k} - \overline{C_{k+1}} + \overline{C_{k+2}} \right) \\
&= (-1)^m e_c F_{n-m} \left(-\left(F_k - iF_{k+1}\right) - \left(F_{k+1} - iF_{k+2}\right) + \left(F_{k+2} - iF_{k+3}\right) \right) \\
&= (-1)^m e_c F_{n-m} \left(-F_k + iF_{k+1} - F_{k+1} + iF_{k+2} + F_{k+2} - iF_{k+3} \right) \\
&= (-1)^m e_c F_{n-m} \left(\left(-F_k - F_{k+1} + F_{k+2}\right) + i\left(F_{k+1} + F_{k+2} - F_{k+3}\right) \right) \\
&= (-1)^m e_c F_{n-m} \left(\left(-F_{k+2} + F_{k+2}\right) + i\left(F_{k+3} - F_{k+3}\right) \right) \\
&= (-1)^m e_c F_{n-m} (0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. İspat tamamlanır. □

4.1.3 Kompleks Fibonacci $3-$Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Elde Edilen Vektörel Çarpımın Özellikleri

Bütün $\vec{C}_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1} \\ C_{n+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $\vec{C}_m = \begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$, $\vec{C}_k = \begin{bmatrix} C_k \\ C_{k+1} \\ C_{k+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ ve $\vec{C}_t = \begin{bmatrix} C_t \\ C_{t+1} \\ C_{t+2} \end{bmatrix}_{3\times 1}$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right) + \vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_n\right) + \vec{C}_k \wedge \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m\right) = \vec{0}, \tag{4.14}$$

2. $$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_t\right)\right) = \left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_k\right) - \left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_t\right), \tag{4.15}$$

3. $\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right) = \left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_m - \left\langle \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_k$, (Grassmann eşitliği), (4.16)

4. $\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \vec{C}_k \wedge \vec{C}_t \right\rangle = \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_k \right\rangle \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_t \right\rangle - \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_t \right\rangle \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle$

$$= \begin{vmatrix} \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_k \right\rangle & \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_t \right\rangle \\ \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle & \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_t \right\rangle \end{vmatrix}, \text{ (Lagrange eşitliği)} \quad (4.17)$$

5. $\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_k\right)} \right\rangle = \left\langle \vec{C}_m \wedge \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle = \left\langle \vec{C}_k \wedge \vec{C}_n, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle = \det\left(\vec{C}_n, \vec{C}_m, \vec{C}_k\right) = 0.$ (4.18)

İspat

1. $\vec{C}_n$, $\vec{C}_m$ ve $\vec{C}_k$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere,

$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right) + \vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_n\right) + \vec{C}_k \wedge \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m\right) = \vec{0}$ olduğunu gösterelim:

İlk olarak $\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right)$ vektörel anlamında çarpımı hesaplanırsa,

$$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right) = \vec{C}_n \wedge \left(\mathbb{C}_m \vec{C}_k\right)$$

$$= \vec{C}_n \wedge \left(\begin{bmatrix} -C_{m+2}C_{k+1} + C_{m+1}C_{k+2} \\ C_{m+2}C_k - C_m C_{k+2} \\ -C_{m+1}C_k + C_m C_{k+1} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -C_{n+2} & C_{n+1} \\ C_{n+2} & 0 & -C_n \\ -C_{n+1} & C_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_{m+2}C_{k+1} + C_{m+1}C_{k+2} \\ C_{m+2}C_k - C_m C_{k+2} \\ -C_{m+1}C_k + C_m C_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -C_{n+2}\left(C_{m+2}C_k - C_m C_{k+2}\right) + C_{n+1}\left(-C_{m+1}C_k + C_m C_{k+1}\right) \\ C_{n+2}\left(-C_{m+2}C_{k+1} + C_{m+1}C_{k+2}\right) - C_n\left(-C_{m+1}C_k + C_m C_{k+1}\right) \\ -C_{n+1}\left(-C_{m+2}C_{k+1} + C_{m+1}C_{k+2}\right) + C_n\left(C_{m+2}C_k - C_m C_{k+2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -C_{n+2}C_{m+2}C_k + C_{n+2}C_m C_{k+2} - C_{n+1}C_{m+1}C_k + C_{n+1}C_m C_{k+1} \\ -C_{n+2}C_{m+2}C_{k+1} + C_{n+2}C_{m+1}C_{k+2} + C_n C_{m+1}C_k - C_n C_m C_{k+1} \\ C_{n+1}C_{m+2}C_{k+1} - C_{n+1}C_{m+1}C_{k+2} + C_n C_{m+2}C_k - C_n C_m C_{k+2} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Diğer vektörel çarpımlarda benzer şekilde,

$$\vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_n\right) = \begin{bmatrix} -C_{m+2}C_{k+2}C_n + C_{m+2}C_k C_{n+2} - C_{m+1}C_{k+1}C_n + C_{m+1}C_k C_{n+1} \\ -C_{m+2}C_{k+2}C_{n+1} + C_{m+2}C_{k+1}C_{n+2} + C_m C_{k+1}C_n - C_m C_k C_{n+1} \\ C_{m+1}C_{k+2}C_{n+1} - C_{m+1}C_{k+1}C_{n+2} + C_m C_{k+2}C_n - C_m C_k C_{n+2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\vec{C}_k \wedge \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m\right) = \begin{bmatrix} -C_{k+2}C_{n+2}C_m + C_{k+2}C_nC_{m+2} - C_{k+1}C_{n+1}C_m + C_{k+1}C_nC_{m+1} \\ -C_{k+2}C_{n+2}C_{m+1} + C_{k+2}C_{n+1}C_{m+2} + C_kC_{n+1}C_m - C_kC_nC_{m+1} \\ C_{k+1}C_{n+2}C_{m+1} - C_{k+1}C_{n+1}C_{m+2} + C_kC_{n+2}C_m - C_kC_nC_{m+2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu vektörel çarpımlar taraf tarafa toplanırsa,

$$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right) + \vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_n\right) + \vec{C}_k \wedge \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

şeklinde bulunur. İstenen elde edilir.

2. Her $\vec{C}_n,\ \vec{C}_m,\ \vec{C}_k$ ve $\vec{C}_t$ kompleks Fibonacci $3-$vektörler için,

$$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_t\right)\right) = \left\langle \vec{C}_t, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_k\right) - \left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_t\right)$$

özelliğinin sağlandığını gösterelim:

Üstteki ispattan,

$$\vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_t\right) = \begin{bmatrix} -C_{m+2}C_{k+2}C_t + C_{m+2}C_kC_{t+2} - C_{m+1}C_{k+1}C_t + C_{m+1}C_kC_{t+1} \\ -C_{m+2}C_{k+2}C_{t+1} + C_{m+2}C_{k+1}C_{t+2} + C_mC_{k+1}C_t - C_mC_kC_{t+1} \\ C_{m+1}C_{k+2}C_{t+1} - C_{m+1}C_{k+1}C_{t+2} + C_mC_{k+2}C_t - C_mC_kC_{t+2} \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_t\right)\right) &= \begin{bmatrix} 0 & -C_{n+2} & C_{n+1} \\ C_{n+2} & 0 & -C_n \\ -C_{n+1} & C_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_{m+2}C_{k+2}C_t + C_{m+2}C_kC_{t+2} - C_{m+1}C_{k+1}C_t + C_{m+1}C_kC_{t+1} \\ -C_{m+2}C_{k+2}C_{t+1} + C_{m+2}C_{k+1}C_{t+2} + C_mC_{k+1}C_t - C_mC_kC_{t+1} \\ C_{m+1}C_{k+2}C_{t+1} - C_{m+1}C_{k+1}C_{t+2} + C_mC_{k+2}C_t - C_mC_kC_{t+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -C_{n+2}\left(-C_{m+2}C_{k+2}C_{t+1} + C_{m+2}C_{k+1}C_{t+2} + C_mC_{k+1}C_t - C_mC_kC_{t+1}\right) + C_{n+1}\left(C_{m+1}C_{k+2}C_{t+1} - C_{m+1}C_{k+1}C_{t+2} + C_mC_{k+2}C_t - C_mC_kC_{t+2}\right) \\ C_{n+2}\left(-C_{m+2}C_{k+2}C_t + C_{m+2}C_kC_{t+2} - C_{m+1}C_{k+1}C_t + C_{m+1}C_kC_{t+1}\right) - C_n\left(C_{m+1}C_{k+2}C_{t+1} - C_{m+1}C_{k+1}C_{t+2} + C_mC_{k+2}C_t - C_mC_kC_{t+2}\right) \\ -C_{n+1}\left(-C_{m+2}C_{k+2}C_t + C_{m+2}C_kC_{t+2} - C_{m+1}C_{k+1}C_t + C_{m+1}C_kC_{t+1}\right) + C_n\left(-C_{m+2}C_{k+2}C_{t+1} + C_{m+2}C_{k+1}C_{t+2} + C_mC_{k+1}C_t - C_mC_kC_{t+1}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -C_{n+2}\left\{-C_{m+2}\left(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}\right) + C_m\left(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}\right)\right\} + C_{n+1}\left\{C_{m+1}\left(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}\right) + C_m\left(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}\right)\right\} \\ C_{n+2}\left\{-C_{m+2}\left(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}\right) - C_{m+1}\left(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}\right)\right\} - C_n\left\{C_{m+1}\left(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}\right) + C_m\left(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}\right)\right\} \\ -C_{n+1}\left\{-C_{m+2}\left(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}\right) - C_{m+1}\left(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}\right)\right\} + C_n\left\{-C_{m+2}\left(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}\right) + C_m\left(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}\right)\right\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi eşitliğin diğer tarafına bakalım:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{C}_t, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_k\right) &= \left(\vec{C}_t\right)^T \overline{\left(\left(\vec{C}_m\right)\right)} \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_k\right) \\ &= \left(C_tC_m + C_{t+1}C_{m+1} + C_{t+2}C_{m+2}\right)\left(\mathbb{C}_n \vec{C}_k\right) \\ &= \left(C_tC_m + C_{t+1}C_{m+1} + C_{t+2}C_{m+2}\right)\left(\begin{bmatrix} 0 & -C_{n+2} & C_{n+1} \\ C_{n+2} & 0 & -C_n \\ -C_{n+1} & C_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_k \\ C_{k+1} \\ C_{k+2} \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(C_tC_m + C_{t+1}C_{m+1} + C_{t+2}C_{m+2}\right)\begin{bmatrix} -C_{n+2}C_{k+1} + C_{n+1}C_{k+2} \\ C_{n+2}C_k - C_nC_{k+2} \\ -C_{n+1}C_k + C_nC_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$-\left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_t\right) = -\left(C_k C_m + C_{k+1} C_{m+1} + C_{k+2} C_{m+2}\right) \begin{bmatrix} -C_{n+2} C_{t+1} + C_{n+1} C_{t+2} \\ C_{n+2} C_t - C_n C_{t+2} \\ -C_{n+1} C_t + C_n C_{t+1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$\left\langle \vec{C}_t, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_k\right) - \left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_t\right)$ ifadesi,

$$\begin{bmatrix} -C_{n+2}\{C_m(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}) + C_{m+1}(C_{k+1}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+1}) - C_{m+2}(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2})\} + C_{n+1}\{C_m(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}) + C_{m+1}(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}) + C_{m+2}(C_{k+2}C_{t+2} - C_{k+2}C_{t+2})\} \\ C_{n+2}\{C_m(C_kC_t - C_kC_t) - C_{m+1}(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}) - C_{m+2}(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2})\} - C_n\{C_m(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}) + C_{m+1}(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}) + C_{m+2}(C_{k+2}C_{t+2} - C_{k+2}C_{t+2})\} \\ -C_{n+1}\{C_m(C_kC_t - C_kC_t) - C_{m+1}(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}) - C_{m+2}(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2})\} + C_n\{C_m(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}) + C_{m+1}(C_{k+1}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+1}) - C_{m+2}(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2})\} \end{bmatrix}$$

matrisine eşit olur. Bu matris düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} -C_{n+2}\{C_m(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1}) - C_{m+2}(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2})\} + C_{n+1}\{C_{m+1}(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}) + C_m(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2})\} \\ C_{n+2}\{-C_{m+2}(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}) - C_{m+1}(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1})\} - C_n\{C_{m+1}(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}) + C_m(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2})\} \\ -C_{n+1}\{-C_{m+2}(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}) - C_{m+1}(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1})\} + C_n\{-C_{m+2}(C_{k+2}C_{t+1} - C_{k+1}C_{t+2}) + C_m(C_{k+1}C_t - C_kC_{t+1})\} \end{bmatrix}$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden,

$$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_t\right)\right) = \left\langle \vec{C}_t, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_k\right) - \left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_t\right)$$

yazılabilir.

3. $\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right) = \left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_m - \left\langle \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_k$, Grassmann eşitliğini gösterelim:

Eşitliğin sağ tarafı,

$$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right) = \begin{bmatrix} -C_{n+2}C_{m+2}C_k + C_{n+2}C_mC_{k+2} - C_{n+1}C_{m+1}C_k + C_{n+1}C_mC_{k+1} \\ -C_{n+2}C_{m+2}C_{k+1} + C_{n+2}C_{m+1}C_{k+2} + C_nC_{m+1}C_k - C_nC_mC_{k+1} \\ C_{n+1}C_{m+2}C_{k+1} - C_{n+1}C_{m+1}C_{k+2} + C_nC_{m+2}C_k - C_nC_mC_{k+2} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Diğer taraftaki eşitlikler ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_m = \left(\vec{C}_k\right)^T \overline{\left(\left(\vec{C}_n\right)\right)} \vec{C}_m$$

$$= \left(C_kC_n + C_{k+1}C_{n+1} + C_{k+2}C_{n+2}\right) \begin{bmatrix} C_m \\ C_{m+1} \\ C_{m+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_kC_nC_m + C_{k+1}C_{n+1}C_m + C_{k+2}C_{n+2}C_m \\ C_kC_nC_{m+1} + C_{k+1}C_{n+1}C_{m+1} + C_{k+2}C_{n+2}C_{m+1} \\ C_kC_nC_{m+2} + C_{k+1}C_{n+1}C_{m+2} + C_{k+2}C_{n+2}C_{m+2} \end{bmatrix}$$

ve

$$-\left\langle \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_k = -\begin{bmatrix} C_m C_n C_k + C_{m+1} C_{n+1} C_k + C_{m+2} C_{n+2} C_k \\ C_m C_n C_{k+1} + C_{m+1} C_{n+1} C_{k+1} + C_{m+2} C_{n+2} C_{k+1} \\ C_m C_n C_{k+2} + C_{m+1} C_{n+1} C_{k+2} + C_{m+2} C_{n+2} C_{k+2} \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_m - \left\langle \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_k = \begin{bmatrix} -C_{n+2} C_{m+2} C_k + C_{n+2} C_m C_{k+2} - C_{n+1} C_{m+1} C_k + C_{n+1} C_m C_{k+1} \\ -C_{n+2} C_{m+2} C_{k+1} + C_{n+2} C_{m+1} C_{k+2} + C_n C_{m+1} C_k - C_n C_m C_{k+1} \\ C_{n+1} C_{m+2} C_{k+1} - C_{n+1} C_{m+1} C_{k+2} + C_n C_{m+2} C_k - C_n C_m C_{k+2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu vektöre karşılık gelen sütun matris göz önüne alınırsa,

$$\vec{C}_n \wedge \left(\vec{C}_m \wedge \vec{C}_k\right) = \left\langle \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_m - \left\langle \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle \vec{C}_k$$

elde edilir.

4. $\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \vec{C}_k \wedge \vec{C}_t \right\rangle = \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_k \right\rangle \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_t \right\rangle - \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_t \right\rangle \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle$

$$= \begin{vmatrix} \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_k \right\rangle & \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_t \right\rangle \\ \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle & \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_t \right\rangle \end{vmatrix},$$

Lagrange eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

Vektörel çarpımın tanımından,

$$\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m = \begin{bmatrix} -C_{n+2} C_{m+1} + C_{n+1} C_{m+2} \\ C_{n+2} C_m - C_n C_{m+2} \\ -C_{n+1} C_m + C_n C_{m+1} \end{bmatrix}$$

ve

$$\vec{C}_k \wedge \vec{C}_t = \begin{bmatrix} -C_{k+2} C_{t+1} + C_{k+1} C_{t+2} \\ C_{k+2} C_t - C_k C_{t+2} \\ -C_{k+1} C_t + C_k C_{t+1} \end{bmatrix}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan, bu matrislere karşılık gelen vektörler göz önüne alınırsa,

$$\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \vec{C}_k \wedge \vec{C}_t \right\rangle = \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m\right)^T \overline{\left(\vec{C}_k \wedge \vec{C}_t\right)}$$

olmak üzere,

$$\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \vec{C}_k \wedge \vec{C}_t \right\rangle = \left(-C_{n+2}C_{m+1} + C_{n+1}C_{m+2}\right)\overline{\left(-C_{k+2}C_{t+1} + C_{k+1}C_{t+2}\right)}$$
$$+ \left(C_{n+2}C_m - C_nC_{m+2}\right)\overline{\left(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}\right)}$$
$$+ \left(-C_{n+1}C_m + C_nC_{m+1}\right)\overline{\left(-C_{k+1}C_t + C_kC_{t+1}\right)}$$

elde edilir. Eşitliğin diğer tarafındaki Hermit iç çarpımları hesaplanırsa,

$$\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_k \right\rangle \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_t \right\rangle = \left(\vec{C}_n\right)^T \overline{\left(\vec{C}_k\right)} \left(\left(\vec{C}_m\right)^T \overline{\left(\vec{C}_t\right)}\right)$$
$$= \left(C_n\overline{C_k} + C_{n+1}\overline{C_{k+1}} + C_{n+2}\overline{C_{k+2}}\right)\left(C_m\overline{C_t} + C_{m+1}\overline{C_{t+1}} + C_{m+2}\overline{C_{t+2}}\right)$$

ve

$$-\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_t \right\rangle \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle = \left(\vec{C}_n\right)^T \overline{\left(\vec{C}_t\right)} \left(\left(\vec{C}_m\right)^T \overline{\left(\vec{C}_k\right)}\right)$$
$$= \left(C_n\overline{C_m} + C_{n+1}\overline{C_{m+1}} + C_{n+2}\overline{C_{m+2}}\right)\left(C_m\overline{C_k} + C_{m+1}\overline{C_{k+1}} + C_{m+2}\overline{C_{k+2}}\right)$$

şeklinde bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_k \right\rangle \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_t \right\rangle - \left\langle \vec{C}_n, \vec{C}_t \right\rangle \left\langle \vec{C}_m, \vec{C}_k \right\rangle = \left(-C_{n+1}C_m + C_nC_{m+1}\right)\left(-\overline{C_{k+1}}\,\overline{C_t} + \overline{C_k}\,\overline{C_{t+1}}\right)$$
$$+ \left(-C_{n+2}C_{m+1} + C_{n+1}C_{m+2}\right)\left(-\overline{C_{k+2}}\,\overline{C_{t+1}} + \overline{C_{k+1}}\,\overline{C_{t+2}}\right)$$
$$+ \left(C_{n+2}C_m - C_nC_{m+2}\right)\left(\overline{C_{k+2}}\,\overline{C_t} - \overline{C_k}\,\overline{C_{t+2}}\right)$$
$$= \left(-C_{n+2}C_{m+1} + C_{n+1}C_{m+2}\right)\overline{\left(-C_{k+2}C_{t+1} + C_{k+1}C_{t+2}\right)}$$
$$+ \left(C_{n+2}C_m - C_nC_{m+2}\right)\overline{\left(C_{k+2}C_t - C_kC_{t+2}\right)}$$
$$+ \left(-C_{n+1}C_m + C_nC_{m+1}\right)\overline{\left(-C_{k+1}C_t + C_kC_{t+1}\right)}$$

elde edilir. İki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir.

5. $\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_k\right)} \right\rangle = \left\langle \vec{C}_m \wedge \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle = \left\langle \vec{C}_k \wedge \vec{C}_n, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle = \det\left(\vec{C}_n, \vec{C}_m, \vec{C}_k\right) = 0$

olduğunu gösterelim:

İlk olarak $\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_k\right)} \right\rangle$ Hermit iç çarpımı hesaplanırsa,

$$\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_k\right)} \right\rangle = \left(\vec{C}_n \wedge \vec{C}_m\right)^T \overline{\left(\overline{\left(\vec{C}_k\right)}\right)}$$

yazılabileceğinden,

$$\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_k\right)} \right\rangle = (-1)^m e_c F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C_k} \\ \overline{C_{k+1}} \\ \overline{C_{k+2}} \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^m e_c F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k - iF_{k+1} \\ F_{k+1} - iF_{k+2} \\ F_{k+2} - iF_{k+3} \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^m e_c F_{n-m} \left((-1)\overline{(F_k - iF_{k+1})} + (-1)\overline{(F_{k+1} - iF_{k+2})} + (1)\overline{(F_{k+2} - iF_{k+3})} \right)$$

$$= (-1)^m e_c F_{n-m} \left(-F_k - iF_{k+1} - F_{k+1} - iF_{k+2} + F_{k+2} + iF_{k+3} \right)$$

$$= (-1)^m e_c F_{n-m} \left(-F_k - F_{k+1} + F_{k+2} + i\left(-F_{k+1} - F_{k+2} + F_{k+3} \right) \right)$$

$$= (-1)^m e_c F_{n-m} 0$$

$$= 0$$

elde edilir. Diğer Hermit iç çarpımları da benzer şekilde bulunabilir. Son olarak $\det\left(\vec{C}_n, \vec{C}_m, \vec{C}_k\right)$ değerini bulalım:

$$\det\left(\vec{C}_n, \vec{C}_m, \vec{C}_k\right) = \begin{vmatrix} C_n & C_{n+1} & C_{n+2} \\ C_m & C_{m+1} & C_{m+2} \\ C_k & C_{k+1} & C_{k+2} \end{vmatrix}$$

Şeklindedir. Buradan, determinant fonksiyonunun özellikleri göz önüne alınırsa,

$$\det\left(\vec{C}_n, \vec{C}_m, \vec{C}_k\right) = 0$$

elde edilir. Bu takdirde,

$$\left\langle \vec{C}_n \wedge \vec{C}_m, \overline{\left(\vec{C}_k\right)} \right\rangle = \left\langle \vec{C}_m \wedge \vec{C}_k, \overline{\left(\vec{C}_n\right)} \right\rangle = \left\langle \vec{C}_k \wedge \vec{C}_n, \overline{\left(\vec{C}_m\right)} \right\rangle = \det\left(\vec{C}_n, \vec{C}_m, \vec{C}_k\right) = 0$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

BÖLÜM 5

FIBONACCI VEKTÖRLERİN LORENTZ GEOMETRİSİ

Tezin orijinal kısımlarından olan bu bölümde, farklı boyutlarda Fibonacci vektörler Lorentz-Minkowski uzayında incelenecektir.

5.1 Fibonacci $3-$Vektörlerin Lorentz Anlamında İncelenmesi

Bu bölümde, Fibonacci $3-$vektörler Lorentz-Minkowski uzayında incelenerek Lorentz anlamında iç çarpım, Lorentz anlamında vektörel çarpım ve Lorentz anlamında karma çarpım verilecektir.

5.1.1 Fibonacci $3-$Vektörlerin Lorentz Anlamında İç Çarpımı ve Normu

Tanım 5.1 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörler olsun. Bu iki vektörün Lorentz anlamında iç çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = -F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2}. \tag{5.1}$$

Teorem 5.1 $\forall n,m$ tamsayıları için $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Lorentz anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = F_{n+2}F_{m+1} + F_{n+1}F_{m+2} \tag{5.2}$$

şeklindedir.

İspat $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, Lorentz anlamında iç çarpımın tanımından,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L &= -F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} \\ &= -F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + \left(F_n + F_{n+1}\right)\left(F_m + F_{m+1}\right) \\ &= -F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m + F_nF_{m+1} + F_{n+1}F_m + F_{n+1}F_{m+1} \\ &= F_{n+1}\left(F_m + F_{m+1}\right) + F_{m+1}\left(F_n + F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+1}F_{m+2} + F_{n+2}F_{m+1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.2 Herhangi bir Fibonacci $3-$vektör $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ için, bu vektörün **Lorentz anlamında normu**,

$$\left\| \overrightarrow{F}_n \right\|_L = \sqrt{\left| \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \right\rangle_L \right|} = \sqrt{\left| 2F_{n+1}F_{n+2} \right|} \tag{5.3}$$

şeklindedir.

İspat (5.2) denkleminden kolaylıkla görülebilir. □

Teorem 5.3 Her Fibonacci $3-$vektör $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ için,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_{n+1} \right\rangle_L = {F_{n+2}}^2 + F_{n+1}F_{n+3} \tag{5.4}$$

şeklindedir.

Not 5.1

i. Lorentz anlamında iç çarpımın tanımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = F_nF_m - F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2}$$

şeklinde seçilirse, $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $3-$vektörlerinin Lorentz anlamında iç çarpımı, $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = F_nF_{m+2} + F_{n+2}F_m$ şeklinde bulunabilir.

ii. Lorentz anlamında iç çarpımın tanımı,

$$\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle_L = F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} - F_{n+2} F_{m+2}$$

şeklinde seçilirse, $\vec{F}_n$ ve $\vec{F}_m$ Fibonacci $3-$vektörlerinin Lorentz anlamında iç çarpımı, $\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_m \right\rangle_L = -F_n F_{m+1} - F_{n+1} F_m$ şeklinde bulunabilir.

5.1.2 Fibonacci $3-$Vektörler için Lorentz Anlamında Vektörel Çarpım

Tanım 5.2 $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ ve $\vec{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörler ve $\mathbb{J}_3$ matrisi,

$$\mathbb{J}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

şeklinde verilen 3×3 tipinde bir matris olsun. Bu durumda, $\vec{F}_n$ ve $\vec{F}_m$ vektörlerinin Lorentz anlamında vektörel çarpımı,

$$\vec{F}_n \wedge_L \vec{F}_m = \mathbb{J}_3 . (\vec{F}_n \wedge \vec{F}_m) \tag{5.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\wedge$ (2.100) eşitliğinde verilen Öklid anlamında vektörel çarpımdır.

Teorem 5.4 $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ ve $\vec{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörlerinin Lorentz anlamında vektörel çarpımı, aşağıda verilen sanal determinant ile hesaplanabilir:

$$\vec{F}_n \wedge_L \vec{F}_m = \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \end{vmatrix} = (F_{n+2}F_{m+1} - F_{n+1}F_{m+2}, F_{n+2}F_m - F_n F_{m+2}, F_n F_{m+1} - F_{n+1}F_m). \tag{5.7}$$

Burada,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad \vec{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Teorem 5.5 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, bu vektörlerin Lorentz anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m = (-1)^m F_{n-m}(1,-1,1) = (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

şeklindedir.

İspat Herhangi iki Fibonacci $3-$vektör $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ olsun. Bu vektörlerin Lorentz anlamında vektörel çarpımı (5.8) eşitliği yardımıyla hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m &= \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \end{vmatrix} \\ &= (F_{n+2}F_{m+1} - F_{n+1}F_{m+2}, F_{n+2}F_m - F_nF_{m+2}, F_nF_{m+1} - F_{n+1}F_m) \\ &= (-(-1)^{m+1} F_{n-m}, -(-1)^m F_{n-m}, (-1)^m F_{n-m}) \\ &= (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

Teorem 5.6 $\overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m$ Lorentz anlamında vektörel çarpım ile oluşan yeni vektör, $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörlerine Lorentz anlamında ortogonaldir.

Yani,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{F}_n, \mathbb{J}_3.(\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m) \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m \right\rangle = 0, \tag{5.9}$$

$$\left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{F}_m, \mathbb{J}_3.(\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m) \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m \right\rangle = 0. \tag{5.10}$$

Burada, $\langle , \rangle$ (2.93) denklemiyle verilen Öklid anlamında iç çarpımı ve $\wedge$ ise (2.99) eşitliğinde verilen Öklid anlamında vektörel çarpımı ifade etmektedir.

İspat $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, ilk olarak $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L$ Lorentz anlamında iç çarpımı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L &= \left\langle \overrightarrow{F}_n, \mathbb{J}_3.(\overrightarrow{F}_n \wedge \overrightarrow{F}_m) \right\rangle_L \\ &= \left\langle \left(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}\right), (-1)^m F_{n-m}(+1,-1,+1) \right\rangle_L \\ &= (-1)^m F_{n-m}\left(-F_n - F_{n+1} + F_{n+2}\right) \\ &= (-1)^m F_{n-m}\left(-F_{n+2} + F_{n+2}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitlikte ispatlanabilir. □

Teorem 5.7 $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $3-$vektörler olsunlar. O halde,

$$\overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m = \mathbb{J}_3.(\overrightarrow{F}_m) \wedge \mathbb{J}_3.(\overrightarrow{F}_n) \tag{5.11}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 5.8 Eğer, $\overrightarrow{F}_n$, $\overrightarrow{F}_m$, $\overrightarrow{F}_k$ ve $\overrightarrow{F}_t$ Fibonacci $3-$vektörler ise, bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- $\overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m = -\overrightarrow{F}_m \wedge_L \overrightarrow{F}_n,$ (5.12)
- $\left\langle \overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_k \right\rangle_L = \begin{vmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} \end{vmatrix} = 0,$ (5.13)
- $\overrightarrow{F}_n \wedge_L \left(\overrightarrow{F}_m \wedge_L \overrightarrow{F}_k\right) = \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L \overrightarrow{F}_k - \left\langle \overrightarrow{F}_k, \overrightarrow{F}_n \right\rangle_L \overrightarrow{F}_m,$ (5.14)
- $\left\langle \left(\overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m\right), \left(\overrightarrow{F}_k \wedge_L \overrightarrow{F}_t\right) \right\rangle_L = \begin{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_t \right\rangle_L & \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_k \right\rangle_L \\ \left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_t \right\rangle_L & \left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_k \right\rangle_L \end{vmatrix}.$ (5.15)

Burada ikinci özellikte dikkat edilmesi gereken, $\overrightarrow{F}_n$, $\overrightarrow{F}_m$, ve $\overrightarrow{F}_k$ Fibonacci $3-$vektörlerinin **Lorentz anlamında karma çarpımının** sıfır olmasıdır.

5.1.3 Fibonacci $3-$Vektörlerin Lorentz Anlamında Vektörel Çarpımının Anti-Simetrik

Matris Yardımı ile Tekrar Elde Edilmesi

Orijinal olan bu alt bölümde, $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere, (3.1) eşitliğiyle verilen anti-simetrik matris ve (5.6) eşitliğinde verilen $\mathbb{J}_3$ matrisi yardımıyla bu iki vektörün Lorentz anlamında vektörel çarpımı yeniden ele alınacaktır.

Teorem 5.9 Bütün $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörler için, bu vektörlerin Lorentz anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m = \mathbb{J}_3.(\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m) \tag{5.16}$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $3-$vektörler olsun. (3.3) denkleminin ispatından $\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m$ çarpımının eşiti,

$$(-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan, $\mathbb{J}_3.(\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m)$ ifadesi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_3.\left(\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m\right) &= \mathbb{J}_3.\left(\left(-1\right)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\left(-1\right)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(-1\right)^m F_{n-m} \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden,

$$\mathbb{J}_3.\left(\mathbb{F}_n \overrightarrow{F}_m\right) = (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.9) denkleminden,

$$\overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m = (-1)^m F_{n-m}(1,-1,1) = (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan, iki tarafın eşitliğinden istenen elde edilir. □

Örnek 5.1 $\overrightarrow{F}_3$ ve $\overrightarrow{F}_8$ Fibonacci $3-$vektörler için, $\overrightarrow{F}_3 \wedge_L \overrightarrow{F}_8$ ifadesini bulunuz.

Çözüm $\overrightarrow{F}_3 = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{F}_8 = \begin{bmatrix} F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 34 \\ 55 \end{bmatrix}$ Fibonacci $3-$vektörler olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}_3 \wedge_L \overrightarrow{F}_8 &= \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ F_3 & F_4 & F_5 \\ F_8 & F_9 & F_{10} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 21 & 34 & 55 \end{vmatrix} \\ &= (5,-5,5) \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $\overrightarrow{F}_3 \wedge_L \overrightarrow{F}_8$ ifadesi,

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_3.\left(\mathbb{F}_3 \overrightarrow{F}_8\right) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 34 \\ 55 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -5.34+3.55 \\ 5.21-2.55 \\ -3.21+2.34 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde de bulunabilir.

Not 5.2 Öklid anlamında vektörel çarpımın özelliklerine benzer olarak Fibonacci $3-$ vektörler için, Lorentz anlamında vektörel çarpıma özellikler de kolaylıkla araştırılabilir.

5.2 Fibonacci $4-$Vektörlerin Lorentz Anlamında İncelenmesi

Orijinal olan bu kısımda, Fibonacci $4-$vektörler Lorentz-Minkowski uzayında incelenecektir.

5.2.1 Fibonacci $4-$Vektörlerin Lorentz Anlamında İç Çarpımı ve Normu

Tanım 5.3 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ Fibonacci $4-$vektörler olmak üzere, bu iki vektörün Lorentz anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = -F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} \tag{5.17}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.10 Herhangi iki Fibonacci $4-$vektör $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ için,

bu vektörlerin Lorentz anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = -F_n F_{m+2} + F_{n+4}F_{m+3} \tag{5.18}$$

ifadesine eşittir.

İspat $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $4-$vektörler olsun. Lorentz anlamında iç çarpım tanımından,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L &= -F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} \\
&= -F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1} + \left(F_n + F_{n+1}\right)\left(F_m + F_{m+1}\right) + (F_{n+4} - F_{n+2})F_{m+3} \\
&= F_{n+1}\left(F_m + F_{m+1}\right) + F_{m+1}\left(F_n + F_{n+1}\right) + F_{n+4}F_{m+3} - F_{n+2}F_{m+3} \\
&= F_{n+2}(F_{m+1} - F_{m+3}) + F_{n+1}F_{m+2} + F_{n+4}F_{m+3} \\
&= -F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+1}F_{m+2} + F_{n+4}F_{m+3} \\
&= F_{m+2}(F_{n+1} - F_{n+2}) + F_{n+4}F_{m+3}
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = -F_n F_{m+2} + F_{n+4} F_{m+3}$$

elde edilir.

Teorem 5.11 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ Fibonacci $4-$vektörün **Lorentz anlamında normu,**

$$\left\| \overrightarrow{F}_n \right\|_L = \sqrt{\left| \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \right\rangle_L \right|} = \sqrt{\left| -F_n F_{n+2} + F_{n+4} F_{n+3} \right|} \tag{5.19}$$

ifadesine eşittir.

İspat (5.19) denkleminden kolaylıkla görülebilir. □

Not 5.3 $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_{n+1} \right\rangle_L$ ifadesinin eşiti $-F_n F_{n+3} + {F_{n+4}}^2$.

Not 5.4

i. Lorentz anlamında iç çarpımın tanımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = F_n F_m - F_{n+1} F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3}$$

şeklinde seçilirse, $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $4-$vektörlerinin Lorentz anlamında iç çarpımı, $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = F_n F_{m+2} + F_{n+2} F_m + F_{n+3} F_{m+3}$ şeklinde bulunabilir.

ii. Lorentz anlamında iç çarpımın tanımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} - F_{n+2} F_{m+2} + F_{n+3} F_{m+3}$$

şeklinde seçilirse, Fibonacci $4-$vektörler $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ için, bu vektörlerin Lorentz anlamında iç çarpımı, $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = -F_{n+1} F_m - F_n F_{m+1} + F_{n+3} F_{m+3}$ şeklinde bulunabilir.

iii. Lorentz anlamında iç çarpımın tanımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} + F_{n+2} F_{m+2} - F_{n+3} F_{m+3}$$

şeklinde seçilirse, $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $4-$vektörleri için, bu vektörlerin Lorentz anlamında iç çarpımı, $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = -F_n F_{m-1} - F_{n+1} F_{m+3}$ şeklinde bulunabilir.

5.2.2 Fibonacci $4-$Vektörlerin Lorentz Anlamında Vektörel Çarpımı

Tanım 5.4 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$, $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_k = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ Fibonacci $4-$vektörler olmak üzere, bu üç vektörün Lorentz anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{F}_n \otimes_L \overrightarrow{F}_m \otimes_L \overrightarrow{F}_k = -\begin{vmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ F_n & F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_m & F_{m+1} & F_{m+2} & F_{m+3} \\ F_k & F_{k+1} & F_{k+2} & F_{k+3} \end{vmatrix}, \tag{5.20}$$

ile tanımlanır. Burada,

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$ $\vec{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4}) \in \mathbb{R}^4$, ve

$\vec{e}_1 \otimes_L \vec{e}_2 \otimes_L \vec{e}_3 = \vec{e}_4$, $\vec{e}_2 \otimes_L \vec{e}_3 \otimes_L \vec{e}_4 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \otimes_L \vec{e}_4 \otimes_L \vec{e}_1 = \vec{e}_2$, $\vec{e}_4 \otimes_L \vec{e}_1 \otimes_L \vec{e}_2 = -\vec{e}_3$.

Teorem 5.12 Her üç Fibonacci $4-$vektörün Lorentz anlamında vektörel çarpımı sıfırdır. Yani,

$$\overrightarrow{F}_n \otimes_L \overrightarrow{F}_m \otimes_L \overrightarrow{F}_k = \vec{0}. \tag{5.21}$$

İspat Bu teoremin ispatı determinant fonksiyonunun özelliklerinden açıktır.

Teorem 5.13 Bütün Fibonacci $4-$vektörler $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$, $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$,

$\overrightarrow{F}_k=\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_t=\begin{bmatrix} F_t \\ F_{t+1} \\ F_{t+2} \\ F_{t+3} \end{bmatrix}_{4\times 1}$ için, bu vektörlerin **Lorentz anlamında karma çarpımı** sıfırdır. Yani,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n \otimes_L \overrightarrow{F}_m \otimes_L \overrightarrow{F}_k, \overrightarrow{F}_t \right\rangle_L = 0. \tag{5.22}$$

İspat Aşikârdır.

5.3 Fibonacci $7-$Vektörlerin Lorentz Anlamında İncelenmesi

Orijinal olan bu alt bölümde, Fibonacci $7-$vektörlerin Lorentz anlamında geometrisi incelenecektir.

5.3.1 Fibonacci $7-$Vektörlerin Lorentz Anlamında İç Çarpımı ve Normu

Tanım 5.5 Her $\overrightarrow{F}_n=\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m=\begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ Fibonacci $7-$vektörleri için, bu iki vektörün Lorentz anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = -F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+3}F_{m+3} + F_{n+4}F_{m+4} + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6} \tag{5.23}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.14 Herhangi iki Fibonacci $7-$vektör $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ için, bu

vektörlerin Lorentz anlamında iç çarpımı,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = -F_{m+2}F_n + F_{n+6}F_{m+7} \tag{5.24}$$

şeklindedir.

İspat $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ iki Fibonacci $7-$vektör olsun. O halde, bu iki vektörün Lorentz anlamında iç çarpımı tanım gereğince,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_m} \right\rangle_L &= -F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} + (F_n + F_{n+1})(F_m + F_{m+1}) + (F_{n+4} - F_{n+2})F_{m+3} \\
&\quad + F_{n+4}F_{m+4} + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6} \\
&= F_{n+1}(F_{m+1} + F_m) + F_{m+1}(F_{n+1} + F_n) - F_{n+2}F_{m+3} \\
&\quad + F_{n+4}(F_{m+3} + F_{m+4}) + F_{n+5}F_{m+5} + F_{n+6}F_{m+6} \\
&= F_{n+1}F_{m+2} + F_{m+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_{m+3} + F_{m+5}(F_{n+4} + F_{n+5}) + F_{n+6}F_{m+6} \\
&= F_{n+1}F_{m+2} + F_{n+2}(F_{m+1} - F_{m+3}) + F_{n+6}(F_{m+5} + F_{m+6}) \\
&= F_{n+1}F_{m+2} - F_{n+2}F_{m+2} + F_{n+6}F_{m+7} \\
&= F_{m+2}(F_{n+1} - F_{n+2}) + F_{n+6}F_{m+7} \\
&= -F_{m+2}F_n + F_{n+6}F_{m+7}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. İspat tamamlanır. □

Teorem 5.15 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ Fibonacci $7-$vektörünün Lorentz anlamında normu,

$$\left\| \overrightarrow{F}_n \right\|_L = \sqrt{\left| \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \right\rangle_L \right|} = \sqrt{\left| -F_{n+2}F_n + F_{n+6}F_{n+7} \right|} \tag{5.25}$$

ifadesine eşittir.

Teorem 5.16 $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_{n+1} \right\rangle_L$ ifadesinin eşiti $-F_{n+3}F_n + F_{n+6}F_{n+8}$.

İspat (5.24) eşitliğinden, kolaylıkla görülebilir.

5.3.2 Fibonacci $7-$Vektörler için Anti-Simetrik Matris Yardımı ile Lorentz Anlamında Vektörel Çarpım

Tanım 5.6 $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ Fibonacci $7-$vektörler ve $\mathbb{J}_7$ matrisi,

$$\mathbb{J}_7 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

şeklinde 7×7 tipinde bir matris olsun. Bu durumda, $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $7-$vektörlerinin Lorentz anlamında vektörel çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\overrightarrow{F}_n \times_L \overrightarrow{F}_m = \mathbb{J}_7.(S_{\overrightarrow{F}_n}\overrightarrow{F}_m). \tag{5.27}$$

Burada, $S_{\overrightarrow{F}_n}$ (3.24) denkleminde verilen anti-simetrik matristir.

Teorem 5.17 Her $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ Fibonacci $7-$vektör için, bu iki vektörün Lorentz anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{F}_n \times_L \overrightarrow{F}_m = \mathbb{J}_7.\left(S_{\overrightarrow{F}_n} \overrightarrow{F}_m\right) = (-1)^m F_{n-m} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

şeklindedir.

Teorem 5.18 Herhangi iki Fibonacci $7-$vektör $\overrightarrow{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ ve $\overrightarrow{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ olmak üzere,

$$\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \times_L \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{F}_n, \mathbb{J}_7.\left(\overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m\right) \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m \right\rangle = 0, \tag{5.29}$$

$$\left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_n \times_L \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{F}_m, \mathbb{J}_7.\left(\overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m\right) \right\rangle_L = \left\langle \overrightarrow{F}_m, \overrightarrow{F}_n \times \overrightarrow{F}_m \right\rangle = 0, \tag{5.30}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden, $\overrightarrow{F}_n \wedge_L \overrightarrow{F}_m$ vektörünün $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ vektörlerine Lorentz ortogonal olduğu söylenebilir.

İspat $\overrightarrow{F}_n$ ve $\overrightarrow{F}_m$ Fibonacci $7-$vektörler olsun. (5.24) ve (5.29) denklemleri yardımıyla $\left\langle \overrightarrow{F}_n, \overrightarrow{F}_n \times_L \overrightarrow{F}_m \right\rangle_L$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{F}_n, \vec{F}_n \times_L \vec{F}_m \right\rangle_L &= \left\langle \vec{F}_n, \mathbb{J}_7.\left(\vec{F}_n \times \vec{F}_m\right) \right\rangle_L \\ &= \left\langle \left(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, F_{n+4}, F_{n+5}, F_{n+6}\right), (-1)^m F_{n-m}\left(+1,-1,-2,-3,+9,+6,-6\right) \right\rangle \\ &= (-1)^m F_{n-m}\left(-F_n - F_{n+1} - 2F_{n+2} - 3F_{n+3} + 9F_{n+4} + 6F_{n+5} - 6F_{n+6}\right) \\ &= (-1)^m F_{n-m}\left(-3F_{n+4} + 9F_{n+4} - 6F_{n+4}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitlikte gösterilebilir. □

Teorem 5.19 $\vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ F_{n+2} \\ F_{n+3} \\ F_{n+4} \\ F_{n+5} \\ F_{n+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$, $\vec{F}_m = \begin{bmatrix} F_m \\ F_{m+1} \\ F_{m+2} \\ F_{m+3} \\ F_{m+4} \\ F_{m+5} \\ F_{m+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ ve $\vec{F}_k = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k+1} \\ F_{k+2} \\ F_{k+3} \\ F_{k+4} \\ F_{k+5} \\ F_{k+6} \end{bmatrix}_{7\times 1}$ Fibonacci $7-$vektörler olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

- $\vec{F}_n \wedge_L \vec{F}_m = -\vec{F}_m \wedge_L \vec{F}_n,$ (5.31)
- $\vec{F}_n \wedge_L \vec{F}_m \neq \mathbb{J}_7.(\vec{F}_m) \wedge \mathbb{J}_7.(\vec{F}_n),$ (5.32)
- $\left\langle \vec{F}_n \wedge_L \vec{F}_m, \vec{F}_k \right\rangle_L = 0.$ (5.33)

Burada, üçüncü özelliğin **Lorentz anlamında karma çarpım** olduğuna dikkat edilmelidir.

Ayrıca, Fibonacci $7-$vektörler için, Öklid anlamında vektörel çarpımdaki özelliklere benzer olarak Lorentz anlamında vektörel çarpımının özellikleri de kolaylıkla araştırılabilir.

Örnek 5.2 $\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_4$ birer Fibonacci $7-$vektör olsun. $\vec{F}_1 \times_L \vec{F}_4$ Lorentz anlamında vektörel çarpımını hesaplayınız.

Çözüm

$\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_4$ birer Fibonacci $7-$vektör ise,

$$\overrightarrow{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{F}_4 = \begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 21 \\ 34 \\ 55 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Öyleyse bu iki vektörün Lorentz anlamında vektörel çarpımı,

$$\overrightarrow{F}_1 \times_L \overrightarrow{F}_4 = \mathbb{J}_7 . \left(S_{\overrightarrow{F}_1} \overrightarrow{F}_4 \right)$$

$$= \mathbb{J}_7 . \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -5 & 3 & 13 & -8 \\ 2 & 0 & -1 & -8 & -13 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & -13 & 8 & -5 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ -3 & 13 & -8 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -13 & -3 & 5 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 8 & -5 & -3 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 13 \\ 21 \\ 34 \\ 55 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \\ 18 \\ 12 \\ -12 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. □

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak Fibonacci sayıları ve farklı boyutlardaki Fibonacci vektörler ile alakalı temel kavramlar verilmiştir. Ardından Fibonacci $3-$vektörlerin Öklid anlamında vektörel çarpımı anti-simetrik matris yardımıyla yeniden ele alınmış ve vektörel çarpıma ait özellikler literatüre eklenmiştir. Ayrıca üç Fibonacci $4-$vektörün Öklid anlamında vektörel çarpımı tanımlanmıştır. Bunlara ek olarak, herhangi iki Fibonacci $7-$vektörün Öklid anlamında vektörel çarpımı tanımlanmış ve anti-simetrik matris yardımıyla tekrar ele alınarak bu vektörel çarpıma ait özellikler verilmiştir. Ayrıca, iki kompleks Fibonacci $3-$vektörün Hermit(kompleks) anlamında vektörel çarpımı anti-simetrik matris yardımıyla tanımlanmış ve bu vektörel çarpıma ait özellikler de verilmiştir. Son olarak, Fibonacci vektörler Lorentz-Minkowski uzayında incelenmiş, Lorentz anlamında iç çarpım ve Lorentz anlamında vektörel çarpım tanımlanarak, vektörel çarpıma ait özellikler incelenmiştir. Bu tez çalışmasından yola çıkarak farklı türdeki Fibonacci vektörler içinde anti-simetrik matris tanımı yapılarak vektörel çarpım ve özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Atanassov, K. T., Atanassova, V., Shannon, A. G., ve Turner, J. C. (2002). New visual perspectives on Fibonacci numbers, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

[2] Salter, E. (2005). Fibonacci vectors, Graduate Theses and Dissertations, University of South Florida.

[3] Güven, İ. A., ve Nurkan, S. K., (2015). "A New Approach to Fibonacci, Lucas Numbers and Dual Vectors", Advances in Applied Clifford Algebras, 25(3): 577-590.

[4] Yaşar F., (2016). Fibonacci Sayı Türleri ve Kuaterniyonlarda Kullanımı, Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.

[5] Yüce, S., ve Aydın T. F., (2016) "Generalized Dual Fibonacci Sequence", The International Journal of Science and Technoledge, 4(9): 193-200

[6] Horadam, A. F., (1961). "A generalized Fibonacci sequence", The American Mathematical Monthly, 68(5): 455-459.

[7] Koshy, T., (2001). Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley & Sons Inc., Canada.

[8] S. Vajda, (1989). Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section, Ellis Horwood Limited Publ., England.

[9] E.W.Weisstein, Fibonacci Number. MathWorld (online mathematics reference work).

[10] R. Honsberger, (1985). Mathematical Gems III, Math. Assoc. America, Washington, DC.

[11] Horadam, A. F., (1963). "Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions", The American Mathematical Monthly, 70(3): 289-291.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Kübra ÇETİNBERK

Doğum Tarihi ve Yeri : 26.10.1992 / Şişli

Yabancı Dili : İngilizce, Korece

E-posta : kubracetinberk@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Lise	Fen Bilimleri	Osmangazi Lisesi	2010

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2016-2017	Gazi MTAL	Ücretli Öğretmenlik

YAYINLARI

Bildiri

1. Çetinberk K. ve Yüce S., "On Fibonacci Vectors", 15^{th} International Geometry Symposium , Amasya Üniversitesi, 2017.