T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU UZAY ZAMANDA HAWKING RADYASYONU VE ENTROPİ

İremi Kevser KURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fizik Anabilim Dalı
Fizik Programı

Danışman
Prof. Dr. Reyhan KAYA

Temmuz, 2025

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU UZAY ZAMANDA HAWKING RADYASYONU VE ENTROPİ

İremi Kevser KURT tarafından hazırlanan tez çalışması 07.07.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Fizik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Reyhan KAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Reyhan KAYA, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Arzu ÇİLLİ, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER, Üye
İstanbul Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Reyhan KAYA sorumluluğunda tarafımca hazırlanan ÜÇ BOYUTLU UZAY ZAMANDA HAWKING RADYASYONU VE ENTROPİ başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İremi Kevser KURT

İmza

Bu çalışmayı, her koşulda yanımda olan aileme ithaf ediyorum.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans sürecim boyunca bilgi birikimini ve kıymetli zamanını benimle cömertçe paylaşan, beni bu alanda yönlendiren ve daima yapıcı geri bildirimleriyle destekleyen değerli danışmanım Prof. Dr. Reyhan KAYA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Her daim arkamda bir dağ gibi duran, yalnızca maddi değil manevi olarak da varlığıyla bana güç veren canım annem Zeliha DEMİR'e sonsuz minnettarım.

Destekleriyle gücümü pekiştiren kıymetli babam Faruk Hamza KURT ve dedem Nurbay KURT'a; hayatım boyunca ikinci bir anne gibi yanımda olan, sevgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen halalarım Şengül KURT ve Elif Beyhan ALTUN'a; Evlerinin kapısını da, kalplerini de açarak yanımda olan amcam Akif Sait KURT, kıymetli eşi Canan KURT'a ve desteğini daima hissettiren amcalarım Süleyman KURT ve Mehmet Ali KURT'a; her daim yanımda olduklarını hissettiren anneannem Gülhanım DEMİR, dayılarım Cihat DEMİR ve Cahit DEMİR ile biricik teyzelerim Meliha GÜNEŞ ve Zahide BAHÇECİ'ye teşekkür ederim.

Her zaman bir kız kardeş sıcaklığıyla yanımda olan kuzenim Gizemnur KIŞLA ve kalbimin dostlukla tamamladığı Tuğba ÖZDEMİR KIZILAY'a; yüzümü her zaman güldüren kardeşim Nurbay Emre KURT ve içtenliğiyle bana küçük bir kardeşin sıcaklığını hissettiren kuzenim kuzenim Elif Sima KURT ve bu yolculuğun en sessiz ama en sadık yol arkadaşım olan kedim Hürrem'e de gönülden teşekkür ederim.

Ayrıca, Yıldız Teknik Üniversitesi'nde yollarımızın kesiştiği ve bu süreci dostluklarıyla güzelleştiren sevgili arkadaşlarım Ramazan Bilal YAMAN, Türkan Eliz ÇİÇEK ve Yusuf Ahmet YÜCE'ye de teşekkür ederim. Varlığınız bu yolu daha anlamlı kıldı.

Bu yolculuk yalnız yürünmüyordu; iyi ki vardınız.

İremi Kevser KURT

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **vi**

ÖZET **vii**

ABSTRACT **ix**

1 GİRİŞ **1**

2 ÜÇ BOYUTLU KARA DELİK **6**

3 TERMODİNAMİK ÖZELLİKLER **13**

3.1 Dönmeyen Üç Boyutlu Kara Delik 14

3.2 Dönen Üç Boyutlu Kara Delik 18

4 SONUÇ **24**

KAYNAKÇA **26**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **27**

SİMGE LİSTESİ

r	Radyal koordinat
t	Zaman koordinatı
ϕ	Açısal koordinat
l	Anti-de Sitter eğrilik yarıçapı
M	Kara deliğin kütlesi
J	Kara deliğin açısal momentumu
$g_{\mu\nu}$	Metrik tensör
r_+	Dış olay ufku yarıçapı
r_-	İç olay ufku yarıçapı
$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$	Christoffel sembolü
$R_{\mu\nu}$	Ricci tensörü
R	Ricci skaleri
ω	Parçacığın enerjisi
Γ	Tünelleme olasılığı
H	Hamiltonyen fonksiyonu
T_H	Hawking radyasyonu
S_{bh}	Kara deliğin entropisi
T	Kara deliğin sıcaklığı

ÖZET

Üç Boyutlu Uzay Zamanda Hawking Radyasyonu ve Entropi

İremi Kevser KURT

Fizik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Reyhan KAYA

Bu yüksek lisans tezinde (2+1) boyutlu negatif kozmolojik sabite sahip bir uzay-zamanda standart Einstein teorisinin bir çözümü olan BTZ kara deliklerin analitik olarak çözümü ele alınmıştır. Düşük boyutlarda Hawking radyasyonunu ve entropisini karmaşık olmayan bir sistemle analiz etmek daha iyi sonuçlar vermektedir. Amacımız, kuantum düzeyinde etkileri ile ortaya çıkan radyasyonu, tünelleme olayı aracılığıyla modellenmesini incelemektir. Bu modelle analizler yapılırken, hem dönmeyen $(J = 0)$ hem de dönen $(J \neq 0)$ BTZ kara deliğinin entropisi ve Hawking radyasyonu incelenmiştir.

Bu çalışmada, KKW metodu kullanılarak tünelleme süreci ele alınmıştır ve Painlevé koordinat dönüşümünden de yararlanılmıştır. Painlevé koordinat dönüşümleri sayesinde metrikteki tekillik ortadan kaldırılmıştır ve böylece bu dönüşüm de tünelleme sürecinin analizini basitleştirmiştir. Hamiltonyen yaklaşımı kullanılarak imajiner eylem bulunmuştur ve bu imajiner eylem kontur integral olarak elde edilmiştir. Bu integralin hesaplanmasının ardından yarı-klasik WKB yaklaşımı yardımıyla tünelleme olasılığı imajiner S ile bağıntılı matematiksel bir ifade bulunmuştur. Bu ifadeden sıcaklık ve entropi terimleri elde edilmiştir. Yayımlanan kütlesiz parçacıkların önceki ve sonraki entropisindeki değişimi veren ΔS_{BH} ifadesinden kara deliğin entropisi belirlenmiştir. Diğer bir yarı-klasik yaklaşım ele alınarak sıcaklık ifadesi bulunmuştur. Hem dönmeyen hem de dönen üç boyutlu BTZ kara deliği için aynı işlem basamakları uygulanmıştır. Dönmeyen durum için $\omega = 0$, dönen durum için de $\omega = 0$ etrafında seri açılımı yapılmıştır.

Seri açılımı için Mathematica yazılımı kullanılmıştır. Diğer işlemler de hem el ile analiz edilmiştir hem de aynı yazılıma başvurulmuştur. Seri açılımı ile Hawking radyasyonuna ulaşılmıştır.

Sonuçlar kıyaslanırken, $(J = 0)$ için hesaplanan entropi, eğrilik yarıçapı l ve kara delik kütlesi M'ye bağlı iken $(J \neq 0)$ için bulunan entropi değeri ilk durumla aynı değerlere sahip ama Hawking-Bekenstein entropisine ve kara delik açısal momentumuna bağlı olduğu bulunmuştur. Aynı şekilde Hawking radyasyonu analizinde de görülmektedir ki, $(J = 0)$ durumunda kara delik kütlesine, parçacık enerjisine ve eğrilik yarıçapına bağlıdır. Fakat $(J \neq 0)$ durumda aynı değerlerle birlikte kara delik açısal momentumuna da bağlı olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: AdS Kara Delik, Hawking Radyasyonu, Entropi.

ABSTRACT

Hawking Radiation and Entropy in Three Dimensional Space Time

İremi Kevser KURT

Department of Physics
Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Reyhan KAYA

In this thesis, the analytical solution of BTZ black holes, which is a solution of the standard Einstein theory with (2+1) dimensional negative cosmological constant, is considered. Analyzing Hawking radiation and entropy in a less complex system in lower dimensions provides better results. Our aim is to consider quantum level effects and radiation arising from tunneling phenomenon. In doing these analyses, entropy and Hawking radiation of both non-rotating $(J = 0)$ and rotating $(J \neq 0)$ BTZ black holes are calculated using this model.

In this study, the tunneling process is analyzed using the KKW method and the Painlevé coordinate transformation is also utilized. The use of the Painlevé coordinate transformation simplifies the analysis of tunneling by eliminating the singularity in the metric. An imaginary action is derived using the Hamiltonian approach. The derived imaginary action, S, appears in the form of a contour integral. After calculating the integral using the semi-classical WKB approach, the mathematical expression for the tunneling probability, the imaginary S, is derived. This expression provides the temperature and entropy terms. The total entropy change of the emitted massless particles, ΔS_{BH} , gives us the entropy of the black hole. The temperature expression is obtained using another semi-classical approach. The same procedures are used for rotating and non-rotating (2+1) dimensional BTZ black holes. The series expansion is performed around $\omega = 0$ for the non-rotating case and $\omega = 0$ for the rotating case. The Mathematica software is used for this expansion. All other calculations are analyzed both manually and with the software. Hawking radiation was obtained through series expansion.

Comparing the results, it is found that the calculated entropy for the non-rotating $(J = 0)$ case depends on the radius of curvature l and the mass M of the black hole, while the calculated entropy for the rotating $(J \neq 0)$ case has the same initial value, but also depends on the Hawking-Bekenstein entropy and the angular momentum of the black hole. Furthermore, the analysis of Hawking radiation shows that for the non-rotating $(J = 0)$ case it depends on the mass of the black hole, the radiated energy and the radius of curvature, while for the rotating $(J \neq 0)$ case it depends on the angular momentum of the black hole in addition to the above-mentioned parameters.

Keywords: AdS Black Hole, Hawking radiation, Entropy.

1
GİRİŞ

Kara delik kavramının varlığı 1915 yılında Albert Einstein'ın geliştirdiği genel görelilik kuramına kadar uzanmaktadır. Einstein alan denklemlerinin ilk çözümü, 1916 yılında Karl Schwarzschild tarafından bir vakum sistemi için küresel simetrik bir kara delik metriği ile verilmiştir. O yıllarda bu çözümler sadece matematiksel bir merak olarak görülüyordu ve bu yeni çalışmalarda kara delik kavramı henüz kullanılmıyordu. Sonrasında 1967 yılında John Wheeler bu kavramı popüler hale getirmiş ve bu popüler kavramın fiziksel gerçekliği tartışma konusu olmuştur. 1970 yılına gelindiğinde gözlemler neticesinde kara deliklerin gerçekten var olabileceğine dair güçlü kanıtlar oluşmaya başlamıştır. Bundan iki sene sonra da Jacob Bekenstein kara deliklerin termodinamiğin ikinci yasasıyla tutarlı olan bir araştırma yapmıştır. Bu çalışmada kara deliklerin entropiye sahip olmaları gerektiği ve olay ufkunun alanıyla doğru orantılı olduğu gösterilmiştir [1].

Ardından Stephen Hawking kısa bir süre sonra 1974 yılında kendi adıyla anılacak olan radyasyon sürecini kuramsal olarak ortaya koyunca, Bekenstein'ın kuramsal çalışması daha tutarlı bir fikir haline gelmiştir [2]. Hawking konu ile ilgili olay ufkunda gerçekleşen kuantum dalgalanmalarının sonucunda parçacık çiftleri üretebileceğini ve çiftlerden birinin kara deliğe düşerken diğer parçacığın uzaklaşabileceğini ifade etmiştir. Kaçan parçacık bir gözlemci tarafından gözlemlendiğinde sanki kara delikten yayımlanan termal bir ışıma gibi görülecektir. Bu demektir ki kara delikler için bir sıcaklık tanımlanabilir. Termodinamiğin ikinci yasasına geldiğimizde ise bu sıcaklığın tam da entropiyle doğru orantılı bir şekilde kütlesine ve olay ufkuna bağlı olduğu ifade edilmiştir.

Bekenstein-Hawking entropi formülü, kara delik entropisinin olay ufku alanının dörtte birine eşit olduğunu ifade eder ve bu önemli bir sonuçtur. Bu çalışmalar sonucunda, termodinamik yasalarının radyasyona uygulanabildiği kara delik termodinamiği adı verilen yeni bir alan ortaya çıkmıştır.

Kara delikler, genel görelilik ve kuantum fiziğinin gizemli problemlerinden biridir.

Klasik bir bakış açısıyla bakıldığında, kara delikler olay ufku denilen sınırın içinde kalan ve ışığın bile kaçamadığı bir bölgeye sahiptir. Bu bakış açısıyla uzun bir süre kara deliklere "mutlak karanlık" ve değişmeyen nesneler olarak bakılmıştır. Fakat Stephen Hawking'in 1970'lerde yaptığı çalışmalar ile kuantum alan teorisi gelişmiştir ve kara deliklerin aslında mutlak karanlık olmadıkları, kuantum etkileri sebebiyle olay ufkundan salınım yapan ısı ışınımları yaydığı teorik olarak gösterilmiştir [3, 4]. Bu çalışma bir kara deliğin kara cisim ışıması yapması ve ışınım yayarak kütlesini yavaş yavaş kaybettiğini göstermektedir. 1974'te Hawking'in bir bulgusu da, Hawking radyasyonu adı verilen ve kara deliklerin sıcaklığa sahip olduğu gösterilmiştir. Bu bulgu ile kara deliklere termodinamik bir sistem olarak bakılması gerektiği düşünülmüştür. Bu bağlamda kara deliklerin termodinamik sistemlerde incelenirken entropilerinin de olması gerektiği gösterilmiştir. 1972 yılında Jacob Bekenstein, öne sürülen entropi için kara deliğin olay ufku alanıyla orantılı olduğu kuramsal bir çalışma geliştirmiştir [1]. Bu çalışma Hawking'in çalışmasıyla birlikte tekrar ele alınmasıyla kara deliklerin termodinağinin temelini oluşturmuştur. Bu çalışmalar sayesinde kara delikler hakkında önemli bir bilgiye sahip olunmuştur. Artık kara deliklerin kütle, açısal momentum ve elektrik yükünün yanı sıra sıcaklık ve entropi ifadeleriyle de karakterize edilebileceği keşfedilmiştir. Hawking radyasyonu ve Bekenstein-Hawking entropisi, günümüzün teorik fiziğinde son derece önemli iki fiziksel niceliktir.

(2+1) boyutlu uzay ve zamanda Hawking radyasyonu ve entropi konusunu seçilmesinin nedeni, kara delik fizik termodinamiğine daha basitleştirilmiş bir model sunmaktır. Klasik olarak incelenen termodinamik ve entropi, tünelleme problemi olarak ele alınarak çözüm sunulmaktadır.

Gerçek evrende kara delikler (3+1) boyutunda olgulardır ve bu boyutlarda çalışmak analitik olarak çok karmaşıktır. Daha düşük boyutlarda çalışmak hem pratik, hem de fiziksel olayları anlamak açısından anlamını yitirmez. İki uzay bir zaman boyutlu bir evrende ortaya çıkan kara delik analizleri, matematiksel olarak daha basit olmalarına rağmen fiziksel öngörüler açısından kısıtlayıcı değildir.

BTZ kara delik metriği özel bir önem taşımaktadır. 1992 yılında üç bilim insanı olan Máximo Bañados, Claudio Teitelboim ve Jorge Zanelli'nin çalışmalarıyla Anti-de Sitter uzayında kara deliklerin var olabileceği keşfedilmiştir.

Anti-de Sitter uzayı, negatif kozmolojik sabitli üç boyutlu bir evrendir. Kara delik analizleri o yıllarda genel görelilik çerçevesinde analizleri yapılırken, kozmolojik sabitin sıfır ve uzay zamanın düz olduğu biliniyordu. Fakat AdS uzayı ile negatif

bir kozmolojik sabite sahip, uzay ve zamanı büken bir kara delik oluşumu vardır. Genel görelilikte Schwarzchild ve Kerr kara deliklerine bazı açılardan benzerlik yakalanabilir. Mesela olay ufku ve tekilliği vardır, kütle ve açısal momentuma sahiptir ve en önemlisi Hawking radyasyonu yayarak sıcaklık ve entropisi vardır.

Bu yüksek lisans tez konusunun seçilmesindeki en önemli sebep, daha yüksek boyutlarda çalışabilmek için karmaşık olan problemleri daha basite indirgemek için bir temel oluşturmayı sağlamaktır.

Üç boyutlu kara deliklerin keşfi ve incelenmesiyle Bañados, Teitelboim ve Zanelli'nin yayınladıkları makalede [5, 6], (2+1) boyutlu AdS uzayında vakum çözümleri aslında BTZ kara deliğini tanımlamaktadır. Bu çalışma ile bilim insanları daha düşük boyutlarda entropi ve Hawking radyasyonu için hesaplamalar yapabilme şansı olmuştur. Steven Carlip gibi araştırmacılar, BTZ kara deliğinin entropisini açıklamak için AdS/CFT dualitesini kullanarak iki boyutlu CFT yöntemleri elde etmiş ve Bekenstein-Hawking entropisiyle uyumlu sonuçlar bulmuştur. Bunun gibi benzer araştırmalar, sadece teorik bir meraktan ziyade istatistiksel kökenine dair ip uçları vermeyi amaçlamaktadır.

1990'ların ortalarına gelince Keski-Vakkuri, Kraus ve Wilczek öncü çalışmalarıyla [7–9] KKW yaklaşımını düzenlemişlerdir. Bu yaklaşım yayımlanan parçacığın istatistiklerini çıkartırken, kara deliğin kütlesindeki azalmayı da hesaba katmaktadır. Parçacık tünelleme sürecini ele alan bu uygulama kara deliğin kütlesindeki azalmayı bu süreç içerisinde incelemektedir. Hawking radyasyonunun sadece sabit bir geometriden değil, kendiliğinden etkileşen bir süreçten kaynaklandığını öne sürmektedir. 2000 yılına gelindiğinde M. Parikh ve F. Wilczek çalışmasında benzer tünelleme sürecini ele alarak Schwarzchild kara deliği için Hawking radyasyonunu ve yayımlanan emisyon olasılığını basit bir şekilde hesaplamışlardır [10]. Klasik Schwarzchild metriği için Painlevé dönüşüm koordinatları uygulanarak zaman koordinatını yeniden tanımlayarak, kara deliğin tekillik içermemesini sağlamışlardır. Bu sayede bir parçacığın toplam eylemi hesaplanabilmiştir. Yarı-klasik bir uygulama olan WKB metodunu ele alarak tünelleme ve yayımlanan emisyon oranı arasındaki ilişkiyi incelemiş ve enerji korunumu şartını da dahil etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında yoğun bir şekilde yararlanılan literatür kaynaklar yukarıda bahsedilen temel çalışmalardır. Konunun teorik arka planını Hawking'in 1974 yılında paylaştığı makalesi oluştururken, 1992 tarihli BTZ kara deliğinin keşfiyle Bañados ve arkadaşlarının yayınladığı makale çalışmanın merkezindeki (2+1) boyutlu kara delik çözümünü tanımlayan ana kaynaktır.

Yöntemsel temeli ise 1995 yılında Kraus ve Wilczek'in makaleleri ve 2000 yılında tünelleme yaklaşımı makalesi ile oluşturmuştur. Bununla birlikte Elias C. Vagenas'ın 2003 yılında kara delikler için genelleştirilmiş KKW metodu makalesinden ve aynı yazarın 2002 yılında BTZ kara deliği için çalışmış olduğu yarı-klasik çözümleri olduğu entropi çalışmasından da yararlanılmıştır [11, 12].

Kısacası, bu tez çalışması ile geçmişteki bu önemli çalışmaların bir sentezi yapılmaktadır ve (2+1) boyutlu uzay ve zamanda Hawking radyasyonu ve entropisi konusu ele alınmaktadır [12].

Bu çalışmanın amacı, (2+1) boyutlu AdS uzayında BTZ kara deliğinin Hawking radyasyonu ve entropisini tünelleme süreci adı altında ayrıntılı bir şekilde incelemektir. Bu inceleme ile kara delik termodinamiği hakkında daha anlaşılabilir olması ve daha basit çözümler türetmek amaçlanır. BTZ kara deliği için çıkan parçacığı tünelleme süreci olarak yaklaşılır ve Hawking radyasyonu hesaplanır.

Üç boyutlu bir kara deliğin Hawking sıcaklığının hangi parametrelere bağlı olduğu belirlenir. Entropi hesaplaması yapılırken ise Bekenstein-Hawking entropisini, çalışmada ele alınan yöntem çerçevesinde doğrulamak alt amaçlarımızdan biridir. Ayrıca, kullanılan yöntem içerisinde kuantum düzeltmeleri ile özgün bir sonuca ulaşılmak istenir. Yöntemin katkılarının gösterilmesi ve bu yaklaşım içerisinde ele alacağımız KKW metodu, Hamiltonyen yaklaşım, Painlevé koordinat dönüşümü ve WKB yarı-klasik yaklaşım kullanılarak BTZ geometrisinde bir model uyarlamak hedeflenir [11, 12].

Bu tez tamamen kuramsal bir çalışmadır. Giriş bölümünün ardından gelen Bölüm 2'de, BTZ kara deliğinin metrik yapısı ve temel özellikleri incelenecektir. Bu dönüşümün ardından BTZ metrik için $J = 0$ için zaman koordinatı, $J \neq 0$ için ise hem zaman hem de radyal koordinatı yeniden tanımlanacaktır. Bu koordinat dönüşümleri tünelleme hesabı için uygun bir zemin hazırlamaktadır.

Üçüncü bölüm ise çalışmanın ana metodu KKW hakkında ayrıntılarını içermektedir. Öncelikle dönmeyen BTZ kara delik ele alınacak ardından aynı adımlarla dönen kara delik için takip edilecektir. Olay ufkundaki tekilliği düzgün bir biçimde ortadan kaldırmak için Painlevé koordinat dönüşümüne başvurulacaktır. Painlevé koordinat dönüşümünün nasıl yapıldığı gösterilecek ve Hamiltonyen hareket denklemleri kurulacaktır. Bu adımlar ile Hawking radyasyonu bir tünelleme süreci olarak ele alındığı için, tünelleyen parçacığın toplam eylemi hesaplanacaktır. Burada hesaplanan eylem imajinerdir. Bu eylemin hesaplanması Hamiltonyen denklemleri ile sağlanacaktır. Parçacık ve kara delik sisteminin birleştirildiği ve enerji korunumu altında gerçekleşen bu sürecin olasılığı

elde edilecektir. Bu yaklaşım, kara deliğin kütle kaybetmesini denklemlerle ifade edecektir. Hamiltonyen formalizmi kurulmasıyla eylemin imajiner kısmı ile tünelleme olasılığı arasında orantıya yarı-klasik bir yaklaşım olan WKB yaklaşımına başvurulacaktır. WKB yaklaşımın bu çalışmadaki fiziksel anlamı, parçacığın olay ufkunu geçmesi sırasında dalga fonksiyonunun fazından kaynaklı imajiner katkıyı yani tünelleme olasılığını hesaplamaktır. $\Gamma = \exp[-2ImS]$ şeklinde tünelleme olasılığı verilecektir. Bu olasılık ile hem entropi hem de sıcaklık ile orantı kurulacaktır. İmajiner eylemin kapalı bir integralle çözülmesinin ardından seri açılımları yapılacak ve analizler hesaplanacaktır. BTZ kara deliği entropisinin ve Hawking radyasyonun hesaplanması ise sonuç bölümünde yorumlanacaktır.

Tezin sonuç bölümünde yapılan çalışmanın kısa bir özetini sunulacaktır. Burada entropi ve Hawking radyasyonu için üç boyutta çalışmanın ne gibi avantajları olacağından bahsedilecektir. Sonuçların nelere bağlı olduğu belirlenecektir.

Bu tez çalışmasında üç boyutlu metrik $(-,+,+)$ şeklinde alınmıştır.

2
ÜÇ BOYUTLU KARA DELİK

Bu bölümde üç boyutlu uzay zamanda Bañados, Teitelboim ve Zanelli tarafından literatüre kazandırılan BTZ kara delik çözümü [5, 6] ele alınacaktır. Bu çözüm (2+1) uzay zamanda negatif kozmolojik sabite sahiptir. Çözüm hem dönmeyen ($J = 0$) hem de dönen durumlar ($J \neq 0$) için geçerlidir. Bu bağlamda, kara deliğin geometrik özellikleri incelenecektir ve ardından iç ve dış olay ufukları türetilecektir.

BTZ kara deliğine çizgi elemanı

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada t, r ve ϕ koordinat aralıkları $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$ ve $0 \leq \phi \leq 2\pi$ olarak tanımlanır.

$N^2(r)$ ve $N^\phi(r)$ fonksiyonları ise,

$$N^2(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \tag{2.2}$$

$$N^\phi(r) = -\frac{J}{2r^2} \tag{2.3}$$

şeklinde verilir. Burada M, ADM kütlesini ve J açısal momentumu temsil eder. l ise negatif kozmolojik sabit ile ilişkili olan AdS yarıçapıdır. Bu metrik form hem dönmeyen, hem de dönen kara delik çözümünü kapsamaktadır.

(2.1) çizgi elemanının $g_{\mu\nu}$ metrik tensörü

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -N^2 + r^2(N^\phi)^2 & 0 & r^2 N^\phi \\ 0 & N^{-2} & 0 \\ r^2 N^\phi & 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

ifadesi ile verilir.

Kontravaryant metrik $g^{\mu\nu}$ ise $g_{\mu k}\, g^{\mu l} = \delta^l_k$ koşulundan,

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{N^2} & 0 & \frac{N\phi}{N^2} \\ 0 & N^2 & 0 \\ \frac{N\phi}{N^2} & 0 & \frac{1}{r^2} - \frac{(N^\phi)^2}{N^2} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece BTZ metriğinin içinde bulunduğu uzayın geometrisi tanımlanır.

Olay ufuklarının ifadesi metrik tensörün kontravaryant bileşeni g^{rr} teriminin $g^{rr} = N^2(r) = 0$ eşitliğinden elde edilir.

Dönmeyen kara delik $J = 0$ için olay ufkunun ifadesi

$$r_\pm = \pm l\sqrt{M} \tag{2.4}$$

şeklinde hesaplanır. Fiziksel olarak ele aldığımız için yalnızca $r_+ = l\sqrt{M}$ anlamlıdır.

Dönen BTZ kara delik durumda $J \neq 0$, $g^{rr} = 0$ denklemi çözülerek dış olay ufku,

$$r_+ = l\left\{\frac{M}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2}\right]\right\}^{1/2} \tag{2.5}$$

ve iç olay ufku,

$$r_- = l\left\{\frac{M}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2}\right]\right\}^{1/2} \tag{2.6}$$

elde edilir.

Fiziksel bir çözüm elde edilebilmesi için,

$$\left(\frac{J}{Ml}\right)^2 < 1. \tag{2.7}$$

koşulu sağlanır. BTZ kara deliğinin iç ve dış ufukları bu şekilde elde edilmiştir.

Christoffel sembolleri ifadesinden

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left[\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right] \tag{2.8}$$

$J = 0$ için BTZ kara deliğinin Christoffel sembolleri hesaplanırsa,

$$\Gamma^{t}_{tr} = -\frac{r}{Ml^2 - r^2} \tag{2.9}$$

$$\Gamma^{r}_{tt} = -\frac{Ml^2 r - r^3}{l^4} \tag{2.10}$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{r}{Ml^2 - r^2} \tag{2.11}$$

$$\Gamma^{r}_{\phi\phi} = \frac{Ml^2 r - r^3}{l^2} \tag{2.12}$$

$$\Gamma^{\phi}_{r\phi} = \frac{1}{r} \tag{2.13}$$

ve $J \neq 0$ için BTZ kara deliğinin Christoffel sembolleri hesaplanırsa,

$$\Gamma^{r}_{tr} = \frac{(-4Mr^2 + J^2)l^2 + 4r^4}{4rl^4} \tag{2.14}$$

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{4r^3}{4Mr^2l^2 + j^2l^2 + 4r^4} \tag{2.15}$$

$$\Gamma^{\phi}_{tr} = \frac{2Jr}{-4Mr^2l^2 + 4r^4 + J^2l^2} \tag{2.16}$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{-4r^4 + J^2l^2}{r(-4Mr^2l^2 + J^2l^2 + 4r^4)} \tag{2.17}$$

$$\Gamma^{t}_{r\phi} = -\frac{2Jl^2r}{-4Mr^2l^2 + J^2l^2 + 4r^4} \tag{2.18}$$

$$\Gamma^{\phi}_{r\phi} = -\frac{4r(Ml^2 - r^2)}{-4Mr^2l^2 + j^2l^2 + 4r^4} \tag{2.19}$$

$$\Gamma^{r}_{\phi\phi} = \frac{4Ml^2r^2 - J^2l^2 - 4r^4}{4l^2r} \tag{2.20}$$

elde edilir.

(2.9)-(2.13) ile (2.14)-(2.20) eşitlikleri kullanılarak ayrı ayrı Christoffel sembolleri ve (2.21) eşitliği ile $R_{\mu\nu}$ ifadesinden

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{2.21}$$

metriğin Ricci tensörleri elde edilir. $J = 0$ için,

$$R_{tt} = -\frac{2(Ml^2 - r^2)}{l^4} \tag{2.22}$$

$$R_{rr} = \frac{2}{Ml^2 - r^2} \tag{2.23}$$

$$R_{\phi\phi} = -\frac{2r^2}{l^2} \tag{2.24}$$

ve $J \neq 0$ için

$$R_{tt} = -\frac{-2M}{l^2} + \frac{2r^2}{l^4} \tag{2.25}$$

$$R_{t\phi} = \frac{J}{l^2} \tag{2.26}$$

$$R_{rr} = \frac{8r^2}{J^2l^2 - 4l^2Mr^2 + 4r^4} \tag{2.27}$$

$$R_{\phi\phi} = \frac{-2r^2}{l^2} \tag{2.28}$$

hesaplanır. Hesaplanan Ricci tensörleri kullanılarak (2+1) boyutlu AdS metriğinin eğriliğini veren Ricci skaleri

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{2.29}$$

ifadesinden hesaplanarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$R = \frac{-6}{l^2}. \tag{2.30}$$

Kretschmann skalerinin hesaplanması ise şu şekilde ifade edilir:

$$K = R_{\mu\nu\alpha\rho}R^{\mu\nu\alpha\rho} \tag{2.31}$$

ve Riemann tensörleri aşağıdaki şekilde hesaplanır. $J = 0$ için Riemann tensörleri:

$$R^t_{rtr} = \frac{1}{Ml^2 - r^2} \tag{2.32}$$

$$R^t_{\phi t\phi} = -\frac{r^2}{l^2} \tag{2.33}$$

$$R^r_{ttr} = \frac{Ml^2 - r^2}{l^4} \tag{2.34}$$

$$R^r_{\phi r\phi} = -\frac{r^2}{l^2} \tag{2.35}$$

$$R^\phi_{tt\phi} = \frac{Ml^2 - r^2}{l^4} \tag{2.36}$$

$$R^{\phi}_{rr\phi} = -\frac{1}{Ml^2 - r^2} \tag{2.37}$$

ve $J \neq 0$ için Riemann tensörleri,

$$R^{t}_{tt\phi} = \frac{J}{2l^2} \tag{2.38}$$

$$R^{t}_{rtr} = \frac{4r^2}{4Ml^2r^2 - J^2l^2 - 4r^4} \tag{2.39}$$

$$R^{t}_{\phi t\phi} = -\frac{r^2}{l^2} \tag{2.40}$$

$$R^{r}_{ttr} = \frac{Ml^2 - r^2}{l^4} \tag{2.41}$$

$$R^{r}_{tr\phi} = \frac{J}{2l^2} \tag{2.42}$$

$$R^{r}_{\phi tr} = -\frac{J}{2l^2} \tag{2.43}$$

$$R^{r}_{\phi r\phi} = -\frac{r^2}{l^2} \tag{2.44}$$

$$R^{\phi}_{tt\phi} = \frac{Ml^2 - r^2}{l^2} \tag{2.45}$$

$$R^{\phi}_{rr\phi} = -\frac{4r^2}{4Ml^2r^2 - J^2l^2 - 4r^2} \tag{2.46}$$

$$R^{\phi}_{\phi t\phi} = -\frac{J}{2l^2} \tag{2.47}$$

hesaplanır ve sonuç olarak

$$K = \frac{12}{l^4} \tag{2.48}$$

elde edilir.

Bir sonraki bölümde bu geometrik ifadeler kullanılarak kara deliğin entropi, sıcaklık ve tünelleme olasılığı gibi termodinamik büyüklükleri hesaplanacaktır.

3
TERMODİNAMİK ÖZELLİKLER

Bu bölümde Painlevé dönüşümü altında KKW metodu kullanılarak BTZ metriğinin entropisi hesaplanacaktır ve tünelleme olasılığı hesaplanarak kara deliğin Hawking sıcaklığı bulunacaktır [7–9].

$N^2(r)$ ve $N^\phi(r)$ fonksiyonları (2.1) metriğinde yerine konulup düzenlenirse;

$$ds^2 = -\left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2})} + r^2 d\Omega^2, \tag{3.1}$$

elde edilir. Burada

$$d\Omega = d\phi - \frac{J}{2r^2} dt \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yukarıdaki metrik (3.1)

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.3}$$

olarak yazılır. Burada F(r) fonksiyonu

$$F(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1 Dönmeyen Üç Boyutlu Kara Delik

Dönmeyen BTZ kara deliği için çözümler yapılacaktır [13]. $J = 0$ için denklem (3.3) tekrar düzenlenir ve $F(r)$ fonksiyonu ile karıştırılmaması için bu fonksiyonu $G(r)$

$$G(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} \tag{3.5}$$

şeklinde yeniden tanımlanır. $G(r)$ fonksiyonu metrikte yerine yazılırsa

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + G(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{3.6}$$

düzenlenir ve metriği tekillikten kurtarmak için Painlevé dönüşümü uygulanır[11].

$$\sqrt{G(r)}dt = \sqrt{G(r)}d\tau - \sqrt{\frac{1-G(r)}{G(r)}}dr \tag{3.7}$$

ve bu dönüşüm sonucunda

$$ds^2 = -G(r)d\tau^2 + 2\sqrt{1-G(r)}d\tau dr + dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{3.8}$$

metriği elde edilir.

Siyah cisim radyasyonu bulunması için, $ds = 0$, ve $d\phi = 0$ alınır ve (3.8) denklemi ile gelen ve giden parçacıkların hareket denklemi

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm 1 - \sqrt{1-G(r)} \tag{3.9}$$

olarak elde edilir.

Giden parçacığın hareket denklemi

$$\frac{dr}{d\tau} = 1 - \sqrt{1-G(r)} \tag{3.10}$$

şeklinde ifade edilir.

Giden parçacık ω enerjisini kara delikten alırsa kara delik kütlesi $M - \omega$ kadar

azalacaktır. O halde (3.10) ifadesi aşağıdaki gibi

$$\frac{dr}{d\tau} = 1 - \sqrt{1 - G(r, M - \omega)} \tag{3.11}$$

yeniden yazılabilir.

Bir kanonik Hamiltonyen yaklaşımı, bir sistemin toplam eylemi için matematiksel gösterimi [7]

$$S = \int d\tau \left[p_\tau + \frac{dr}{d\tau} p_r \right] \tag{3.12}$$

olarak tanımlanır. τ ve r, Painlevé koordinatları olup p_τ ve p_r ise bunlara karşılık gelen momentumlardır. Denklem (3.12)'ye geri dönersek, burada imajiner kısma sadece ikinci terim katkı verir.

KKW yöntemini ele alarak eylemin imajiner kısmı,

$$ImS = Im \int \frac{dr}{d\tau} p_r d\tau \tag{3.13}$$

$$ImS = Im \int_{r_+(M)}^{r_+(M-\omega)} p_r dr \tag{3.14}$$

elde edilir. Eylemin imajiner kısmını hesaplamak için, klasik mekanikte temel bir yöntem olan Hamiltonyen formalizmi kullanılır. Bu yaklaşımda, sistemin dinamikleri Hamilton fonksiyonu (H) aracılığıyla tanımlanır ve bu fonksiyon genellikle toplam enerjiyle ilişkilidir. Burada momentum değişkeninden enerji değişkenine geçiş yapmak istenir; yayınım yapan parçacığın enerjisi, ω, kara deliğin sıcaklığı ve entropisiyle doğrudan ilişkilidir.

Hamilton'un hareket denkleminden

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dH}{dp_r} \\ &= \frac{d(M - \omega)}{dp_r} \end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilen

$$dp_r = \frac{(M-\omega)}{\dot{r}}. \tag{3.16}$$

ifade (3.16) kullanılarak, denklem (3.14) şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$ImS = Im \int_{r_+(M)}^{r_+(M-\omega)} \int_0^{p_r} dp_r' dr \tag{3.17}$$

ve

$$ImS = Im \int_{r_+(M)}^{r_+(M-\omega)} \int_0^{+\omega} \frac{(M-\omega')}{\dot{r}} dr \tag{3.18}$$

elde edilir. Bulunan imajiner eylem ifadesi genelleştirilmiş bir gösterimdir. Hem $J = 0$ durumu hem de $J \neq 0$ durumu için denklem (3.18) kullanılacaktır.

Kara deliğin değişen entropisi,

$$\Delta S = S(M-\omega) - S(M) \tag{3.19}$$

şeklindedir. İmajiner eylem olan ImS yukarıda belirtilen entropi değişimi ile ilişkilendirilir:

$$-2ImS = \Delta S. \tag{3.20}$$

ImS ifadesi, kara deliğin imajiner eylemini temsil etmektedir. İmajiner eylemin özelliği, sistemin mikroskobik özelliklerinin nasıl değiştiğini analiz etmek için kullanılır. Burada ise Hawking radyasyonu ile ilişkili entropi değişimlerini incelemek için kullanılır. Bu integral sayesinde kara deliklerin kuantum etkilerinin fiziksel değişimlere nasıl etki ettiğini anlamamız kolaylaşır. O halde ImS şu şekilde ifade edilir:

$$ImS = \int_{r_+(M)}^{r_+(M-\omega)} \int_0^{\omega} \frac{-d\omega' dr}{1 - \sqrt{1 + M - \omega' - \frac{r^2}{l^2}}}. \tag{3.21}$$

İntegraldeki ω' ifadesi kara deliğin kütle kaybetmesine yol açan enerji miktarını verirken, başlangıç sınır koşulu 0 ile son sınır koşulu ω arasında değiştiği söylemektedir. Diğer bir koşul ise r'ye bağlıdır. Bu ifadenin sınır koşulları bize $r_+(M)$ ve $r_+(M-\omega)$ ile belirtilmiştir. Alt sınır koşulu olan $r_+(M)$, kara deliğin olay ufkunun başlangıç noktasındaki mesafeyi ifade ederken, $r_+(M-\omega)$ bize kara deliğin enerji kaybettikten sonraki yeni olay ufku noktasını ifade eder. O halde bu integral çözülürse:

$$ImS = -2\pi(l\sqrt{M-\omega} - l\sqrt{M}) \tag{3.22}$$

elde edilir. Kara deliğin entropisi

$$S_{BH} = 4\pi l\sqrt{M} \tag{3.23}$$

sonucunu verir. Kara deliğin entropisindeki değişim

$$\Delta S_{BH} = 4\pi(l\sqrt{M-\omega} - l\sqrt{M}) \tag{3.24}$$

şeklinde ifade edilir.

Tünelleme olasılığı, dışa doğru hareket eden pozitif enerjili bir parçacığın eyleminin imajiner kısmı üzerinden yarı klasik (WKB) yaklaşımı yardımıyla matematiksel olarak,

$$\Gamma = \exp[-2ImS] \tag{3.25}$$

ifade edilir. Yukarıda belirtilen tünelleme olasılığı Γ ayrıca

$$\Gamma = \exp[-\frac{\omega}{T}] = \exp[\Delta S_{BH}] \tag{3.26}$$

ifadesi ile verilir ve burada ΔS_{BH},

$$\Delta S_{BH} = S_{BH}(M-\omega) - S_{BH}(M) \tag{3.27}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki ifade kara delikten enerjisi ω olarak yayımlanan kütlesiz parçacıkların önceki ve sonraki entropisindeki değişimi göstermektedir. Denklem (3.26) ile denklem (3.27) sonuçlar ile kıyaslanarak tekrar çözülür ve emisyon oranı şu şekilde ifade edilir:

$$\Gamma = \exp[4\pi(l\sqrt{M-\omega} - l\sqrt{M})] = \exp\left(-\frac{\omega}{T}\right) \tag{3.28}$$

Kara deliğin sıcaklığı için denklem (3.26)'a dönelim. Burada tünelleme olasılığı ve sıcaklık arasındaki ilişki kullanırsa

$$T_H = -\frac{\omega}{4\pi}(l\sqrt{M-\omega} - l\sqrt{M})^{-1} \tag{3.29}$$

hesaplanır.

$\omega = 0$ etrafında seri açılımı yapılırsa

$$T_H = \frac{\sqrt{M}}{2\pi l} \tag{3.30}$$

sonucuna ulaşılır. Bu çözüm ile $J = 0$ için entropi ve Hawking radyasyonu bulunur.

3.2 Dönen Üç Boyutlu Kara Delik

Çalışmanın diğer bir analizi olan dönen durumlar $J \neq 0$ için aynı analitik çözüm işlemleri tekrarlanacaktır. Denklem (3.1) metriğine geri dönülür.

Zaman koordinatı için τ_p,

$$dt = d\tau_p - \sqrt{\frac{1-F(r)}{F^2(r)}}dr \tag{3.31}$$

ve açısal koordinat için ϕ_p,

$$d\phi = d\phi_p - \frac{J}{2r^2}\sqrt{\frac{1-F(r)}{F^2(r)}}dr \tag{3.32}$$

dönüşümleri yapılır.

İşlemleri kolaylaştırmak için yukarıdaki iki dönüşümün karesini alınır

$$dt^2 = d\tau_p^2 + \left[\frac{1-F(r)}{F^2(r)}\right] dr^2 - 2\sqrt{\frac{1-F(r)}{F^2(r)}} d\tau_p dr, \tag{3.33}$$

$$d\phi^2 = d\phi_p^2 + \frac{J^2}{4r^4}\left[\frac{1-F(r)}{F^2(r)}\right] dr^2 - \frac{J}{r^2}\sqrt{\frac{1-F(r)}{F^2(r)}} d\phi dr \tag{3.34}$$

ve birbirleriyle çarpılırsa

$$\begin{aligned} dtd\phi =& d\tau_p d\phi_p - \frac{J}{2r^2}\sqrt{\frac{1-F(r)}{F^2(r)}} d\tau_p dr - \sqrt{\frac{1-F(r)}{F^2(r)}} d\phi_p dr \\ &+ \frac{J}{2r^2}\left[\frac{1-F(r)}{F^2(r)}\right] dr^2 \end{aligned} \tag{3.35}$$

ifadeleri elde edilir.

Bu denklemleri ds^2 içerisinde yerine konulur ve düzenlenirse

$$ds^2 = -F(r)d\tau_p^2 + \frac{J^2}{4r^2} d\tau_p^2 + dr^2 + r^2 d\phi_p^2 + 2\sqrt{1-F(r)} d\tau_p dr - Jd\tau d\phi_p \tag{3.36}$$

elde edilir.

$F(r)$ kısımları denklem (3.4)'ten alınarak yerine yazılır:

$$\begin{aligned} ds^2 =& -\left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right) d\tau_p^2 + dr^2 + r^2 d\phi_p^2 \\ &+ 2\sqrt{1 - \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}\right)} d\tau_p dr - Jd\tau d\phi_p \end{aligned} \tag{3.37}$$

şeklinde sonucuna ulaşılır. Siyah cisim ışımasını elde etmek için, $ds^2 = 0$, $d\phi = 0$ alınır.

Kütlesiz gelen ve giden parçacıkların hareket denklemi

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm\sqrt{1 - \frac{J^2}{4r^2}} - \sqrt{1 + M - \frac{r^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r^2}} \tag{3.38}$$

şeklinde hesaplanır. Burada ilgilenilen giden parçacık olduğundan pozitif kısım incelenir.

Kara deliğin ω parçacık enerjisi aldığında, kara deliğin kütlesi $M - \omega$ kadar azalacaktır. Buna göre denklem (3.38)'den bu durum benzer bir şekilde yazılabilir.

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{1 - \frac{J^2}{4r^2}} - \sqrt{1 + (M - \omega) - \frac{r^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r^2}} \tag{3.39}$$

Bununla birlikte ds^2 ifadesini $M - \omega$ göre yazılır:

$$\begin{aligned} ds^2 = &- \left(- (M - \omega) + \frac{r^2}{l^2} \right) d\tau_p^2 + dr^2 + r^2 d\phi_p^2 \\ &+ 2\sqrt{1 - \left(- (M - \omega) + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right)} d\tau_p dr - J d\tau d\phi_p. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Kara deliğe yaklaşan bir parçacığın olay ufkuna ulaşmadan önceki uzaklığı $r_+(M)$ kara delikten yayılan bir parçacığın olay ufku ötesindeki noktayı $r_+(M - \omega)$

$$\begin{aligned} r_+(M) =& l \left\{ \frac{M}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right] \right\}^{1/2} \\ r_+(M - \omega) =& l \left\{ \frac{(M - \omega)}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{J}{(M - \omega)l} \right)^2} \right] \right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{3.41}$$

ile ifade edilir.

Kütlesiz bir parçacık tarafından takip edilen radyal jeodezik denklemi olan denklem (3.39), denklem (3.18)'te kullanılırsa

$$ImS = Im \int_{r_+(M)}^{r_+(M-\omega)} \int_0^{+\omega} \frac{-d\omega'}{+\sqrt{1-\frac{J^2}{4r^2}} - \sqrt{1+(M-\omega')-\frac{r^2}{l^2}-\frac{J^2}{4r^2}}} dr \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada eylemin hayali kısmını hesaplarken karşımıza çıkan eksi işareti, Hamiltonyen'in sistemin enerjisinden yayılan enerjisinin çıkarılmasıyla elde edilen $H = M - \omega$ biçiminde tanımlanmasından kaynaklanmaktadır. Bu tanım, sistemin toplam enerjisinden dışa yayılan kütlesiz parçacığın enerji kaybıyla tutarlı fiziksel bir çerçeve sunar. Bu durumun fiziksel bir çelişki yaratmadığı, $r(M) > r(M-\omega)$ koşulunun sağladığı dikkate alındığında açıkça görülmektedir. Çünkü parçacık, olay ufkunu içeriden dışarı doğru geçerken, iç ve dış yarıçaplar arasında pozitif yönlü bir geçiş söz konusudur.

İlgili hesaplamalar, özellikle kompleks düzlemde yapılan kontur integrasyonu sonucu eylemin imajiner kısmına ulaşılmasını sağlar. Bu yaklaşım, yarı-klasik (WKB) yöntemiyle elde edilen yayılma olasılığı ve buna bağlı olarak kara deliğin sıcaklığı ve entropisindeki değişimle doğrudan ilişkili olup

$$\begin{aligned} ImS =& 2\pi \Bigg\{ \left[r_+(M)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M)}} - \frac{J}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M)-J^2}}{J}\right)\right] \\ &- \left[r_+(M-\omega)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M-\omega)}} \right. \\ &\left. - \frac{J}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M-\omega)-J^2}}{J}\right)\right] \Bigg\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

şeklinde çözüme ulaşılır. Denklem (3.25)'e geri dönülür ve denklem (3.43) kullanılırsa:

$$\Gamma = \exp\left[4\pi\left\{\left[r_+(M-\omega)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M-\omega)}}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{J}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M-\omega)-J^2}}{J}\right)\right]\right.$$
$$\left. - \left[r_+(M)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M)}} - \frac{J}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M)-J^2}}{J}\right)\right]\right\}\Bigg] \tag{3.44}$$

Denklem (3.25) ile denklem (3.26) karşılaştırılırsa, kara delikten ω parçacık enerjisi olarak yayımlanan kütlesiz parçacığın önceki ve sonraki entropisindeki değişim ΔS_{BH},

$$\Delta S_{BH} = 4\pi\left\{\left[r_+(M-\omega)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M-\omega)}}\right.\right.$$
$$\left. - \frac{J}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M-\omega)-J^2}}{J}\right)\right]$$
$$\left. - \left[r_+(M)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M)}} - \frac{J}{2}\arctan\left(\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M)-J^2}}{J}\right)\right]\right\} \tag{3.45}$$

olarak bulunur. Denklem (3.46) kullanılırsa

$$-2ImS = S(M-\omega) - S(M) \tag{3.46}$$

(2+1) boyutlu AdS kara deliğin entropisi

$$S_{BH} = 4\pi r_+(M)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M)}} - 2\pi J\arctan\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M)-J^2}}{J}\right) \tag{3.47}$$

elde edilir. Yukarıdaki ilk terimin olay ufkunun alanı ile orantılı olduğu görülür.

Denklem (3.26) kullanılırsa

$$S(M-\omega)-S(M)=-\frac{\omega}{T} \tag{3.48}$$

Hawking sıcaklığı

$$\begin{aligned} T_H=\omega\Bigg[4\pi\Bigg\{\Bigg[r_+(M)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M)}}-\frac{J}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M)-J^2}}{J}\right)\Bigg] \\ -\Bigg[r_+(M-\omega)\sqrt{1-\frac{J^2}{4r_+^2(M-\omega)}} \\ -\frac{J}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{4r_+^2(M-\omega)-J^2}}{J}\right)\Bigg]\Bigg\}\Bigg]^{-1} \end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. T_H ifadesi $\omega=0$ etrafında seriye açılır

$$T_H\approx\frac{\left(4r_+^2(M)-J^2\right)^{3/2}\sqrt{M^2-\frac{J^2}{l^2}}}{\pi\left(J^4-4J^2r_+^2(M)+4r_+^2(M)(4r_+^2(M)-J^2)\right)}+\vartheta(\omega) \tag{3.50}$$

ve bu terim düzenlenirse (3.51) eşitliği elde edilir:

$$T_H\approx\frac{\sqrt{M^2l^2-J^2}}{\pi l\sqrt{4r_+^2(M)-J^2}}+\vartheta(\omega) \tag{3.51}$$

Düşük boyutlarda BTZ kara deliğinin $J\neq 0$ durumu için analizi yapılarak entropisi, tünelleme olasılığı ve Hawking radyasyon sonucuna ulaşılır.

4
SONUÇ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, (2+1) boyutlu kara delik incelenmiştir. Termodinamik özellikleri incelenen negatif kozmolojik sabite sahip AdS kara delikleri için Painlevé koordinat dönüşümleri altında KKW metodu uygulanmıştır. Bu çalışmada, tünelleme süreci adı altında incelenerek tünelleme olasılığı, entropi değişimi, kara deliğin entropisi, sıcaklık ve Hawking radyasyonu hesaplanmıştır. Bu analiz, sadece tek bir durum için değil, hem dönmeyen hem de dönen durumların termodinamik özelliklerini araştırarak aralarındaki farkı göstermiştir.

İlk aşamada Bañados, Teitelboim ve Zanelli tarafından literatüre kazandırılan BTZ kara delik ve koordinatları ele alınmıştır. Çizgi elemanı (2.1) ifadesinde (2.2) ve (2.3) fonksiyonları kullanılarak üç boyutlu kara deliğin uzay ve zaman yapısı belirlendi. Burada M kara delik kütlesini, l eğrilik yarıçapını, r kara delik yarıçapını ve J açısal momentumu temsil etmektedir. Çizgi elemanı sayesinde, kovaryant metrik bileşenleri elde edilmiştir. Dönmeyen kara delik durumu, $J = 0$, ve dönen kara delik durumu, $J \neq 0$, için kara deliğin iç olay ufukları, dış olay ufukları, Christoffel sembolleri, Ricci tensörleri, Ricci skaleri, Riemann tensörleri ve Kretschmann skaleri hesaplanmıştır. Bu bilgiler ışığında kara delik parametreleri ayrıntılı olarak belirlenmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak dönmeyen kara delik metriği için ve ardından da dönen BTZ kara delik metriği için genelleştirilmiş KKW metodu uygulanmıştır. Metrikteki tekillikten kurtulmak için Painlevé koordinat dönüşümü yapılmıştır. KKW metodu kullanılarak kara delikten çıkan parçacığın hareket denklemi elde edildi. Kanonik Hamiltonyen yaklaşımı olan ve sistemin toplam eylemini ifade eden denklem (3.12) kullanılırken imajiner eyleme katkı vermeyen terim çıkarılmıştır. Düzeltilmiş denklem, Hamiltonyen hareket denklemi (3.15), (3.17) eşitliğinde yerine yazılmıştır. Bu elde edilen ifade kara deliğin değişen entropisi ile ilişkilendirilmiştir. O halde imajiner eylem integralinin çözümü ve (3.20) eşitliği kullanılarak kara deliğin entropisi ve yarı-klasik bir yaklaşım olan WKB ile de sıcaklığının hesaplanabileceği gösterilmiştir.

Dönmeyen BTZ kara delik için yapılan bu hesaplama ile entropi sonucu, kütlesi M ile eğrilik yarıçapı l'ye bağlı olduğunu denklem (3.23) gösterirken, dönen BTZ kara deliği için kütlesi M, eğrilik yarıçapı l ve açısal momentumu J'ye bağlı olduğu denklem (3.47) hesaplamalar sonucunda açıkça ifade edilmiştir.

Bu çalışma ayrıca, bir kara deliğin ω parçacık enerjisi aldığı durumları inceleyerek, kara deliğin kütlesinin değiştiği durumları analiz eder. Kara deliğin entropisindeki değişim $J = 0$ için denklem (3.24) sonucunu verirken, $J \neq 0$ için denklem (3.45) sonucuna ulaşılmıştır. Tünelleme olasılığının matematiksel gösterimi sayesinde sıcaklık ile değişen entropi arasında ilişki kurmamızı sağlar.

Daha sonra yarı-klasik bir yaklaşım olan WKB yöntemi uygulanmıştır. Denklem (3.25)'e bakıldığında, imajiner eylem ve tünelleme olasılığı arasındaki ilişki ile BTZ kara deliğinin sıcaklığı saptanabilmiştir. Denklem (3.26)'da kullanılarak, dönmeyen durum için denklem (3.29), dönen durumlar için denklem (3.49) hesaplanmıştır. Taylor seri açılımı ile ilk durum için $\omega = 0$ ve ikinci durum için de $\omega = 0$ için açılım yapılmıştır. BTZ kara deliği için çıkan sonuçlar ω cinsinden ifade edilir ve sonucu değerlendirmek açısından karmaşık olan bu ifadeyi Taylor serisi açılımı ile düzenlenmiştir. $\omega \ll M$, küçük enerji limitinde ilk birkaç tane terim fiziksel olarak anlamlı ve yeterli olmaktadır. Bu açılım neticesinde, denklem (3.30) ve denklem (3.51)'ye ulaşılır. Bu da Hawking radyasyonunu vermektedir.

(2+1) boyutlu BTZ kara deliğinin entropisi ve sıcaklığı arasındaki denklem (3.26) açıkça belirtilmiştir. Entropi ve Hawking radyasyonun sonuçlarının en önemli özelliği ise kuantum düzeyindeki davranışlarını anlamamıza yardımcı olmuştur. Bu yöntem ile kara deliklerin evrimini ve etkileşimini modellememizde önemli bir araştırmadır.

KAYNAKÇA

[1] B. H. Bekenstein, "The Second Law of Thermodynamics," *Lett. Nuovo Cim*, c. 4, s. 737, 1972.

[2] J. D. Bekenstein, "Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics," *Physical Review D*, c. 9, no. 12, s. 3292, 1974.

[3] S. Hawking, "Commun. Math. Phys.," *Commun. Math. Phys*, c. 43, s. 199, 1975.

[4] S. W. Hawking, "Black holes and thermodynamics," *Physical Review D*, c. 13, no. 2, s. 191, 1976.

[5] M. Banados, C. Teitelboim J. Zanelli, "Black hole in three-dimensional spacetime," *Physical review letters*, c. 69, no. 13, s. 1849, 1992.

[6] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim J. Zanelli, "Geometry of the 2+ 1 black hole," *Physical Review D*, c. 48, no. 4, s. 1506, 1993.

[7] P. Kraus F. Wilczek, "Self-interaction correction to black hole radiance," *Nuclear Physics B*, c. 433, no. 2, ss. 403–420, 1995.

[8] P. Kraus F. Wilczek, "Effect of self-interaction on charged black hole radiance," *Nuclear Physics B*, c. 437, no. 1, ss. 231–242, 1995.

[9] E. Keski-Vakkuri P. Kraus, "Tunneling in a time-dependent setting," *Physical Review D*, c. 54, no. 12, s. 7407, 1996.

[10] M. K. Parikh F. Wilczek, "Hawking radiation as tunneling," *Physical review letters*, c. 85, no. 24, s. 5042, 2000.

[11] E. C. Vagenas, "Generalization of the KKW analysis for black hole radiation," *Physics Letters B*, c. 559, no. 1-2, ss. 65–73, 2003.

[12] E. C. Vagenas, "Semiclassical corrections to the Bekenstein–Hawking entropy of the BTZ black hole via self-gravitation," *Physics Letters B*, c. 533, no. 3-4, ss. 302–306, 2002.

[13] M. Hortacsu, H. T. Özçelik B. Yapışkan, "Properties of solutions in 2+ 1 dimensions," *General Relativity and Gravitation*, c. 35, ss. 1209–1221, 2003.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. İremi Kevser Kurt, Reyhan Kaya, “Hawking Radiation and Entropy in Three Dimensional Space-Time”, 8th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications, May 7-9, 2025, ICOMAA-2025, Abstract Book, ISBN: 978-605-69387-7-1, https://2025.icomaas.com, p. 66.