T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA PROBLEMİNE İTERATİF BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Sema AKIN BAŞ

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Beyza AHLATCIOĞLU ÖZKÖK

Eylül, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA PROBLEMİNE İTERATİF BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Sema AKIN BAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 08.09.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Beyza AHLATCIOĞLU ÖZKÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Beyza AHLATCIOĞLU ÖZKÖK, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Hale GONCE KÖÇKEN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Neslihan FİDAN KEÇECİ, Üye
İstanbul Üniveritesi _____

Prof. Dr. Fatma TİRYAKİ, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üyesi Meltem UZUN, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Beyza AHLATCIOĞLU ÖZKÖK sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemine İteratif Bir Çözüm Önerisi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Sema AKIN BAŞ

İmza

Canım Aileme İthafen...

TEŞEKKÜR

Matematiğin uygulanabilir bir bilim olduğu ve çeşitli alanlarda çalışmalar yaparak katma değerini görebilme imkanıyla katkı sağlayabildiğim için keyif alarak üretebilmenin haklı gururunu yaşadığımı belirterek başlamak isterim. Çalışmamı tamamlarken destek ve yardımlarını esirgemeyen herkese teşekkür ederim. Ayrıca tezimin tamamlanmasında büyük öneme sahip olan kişilere minnettarlığımı sunuyorum.

Öncelikle, tez danışmanım Prof. Dr. Beyza AHLATCIOĞLU ÖZKÖK'e derin şükranlarımı iletmek istiyorum. Gerek akademik gerekse psikolojik destekleriyle bana yol gösterici rehberliği, değerli öneri ve eleştirileriyle bu tezin kalitesini artırmama ve tüm süreci daha sağlıklı yürütmeme yardımcı oldu. Sabrı ve desteği için kendisine minnettarım. Ayrıca tez konumu belirlemedeki rehberliği ve süreç boyunca değerli görüş ve önerileri için Prof. Dr. Mehmet AHLATCIOĞLU'na teşekkürü borç bilirim. Tez jürimde bulunan ve kıymetli önerileriyle tezimi geliştirmemi sağlayan değerli hocalarım Doç. Dr. Hale GONCE KÖÇKEN ve Doç. Dr. Neslihan FİDAN KEÇECİ'ye teşekkür ederim.

Canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunmak istiyorum. Onların maddi ve manevi destekleri, motive edici sözleri ve inançları sayesinde bu uzun yolculuğu başarıyla tamamladım. Biricik annemin, canım babamın ve tüm ailemin sevgi dolu desteği olmasaydı, bu tez hiçbir zaman gerçekleşemezdi.

Son olarak, sevgili arkadaşlarıma teşekkür etmek istiyorum. Sıkılmadan, yorulmadan yanımda oldular, moral verdiler ve hayatın diğer renklerini hatırlattılar. Onların varlığı, akademik çabanın ötesinde gerçek bir hazine oldu.

Her biriniz, bu tezin ortaya çıkmasında önemli bir rol oynadınız ve sizlerle birlikte bunu başardığım için gurur duyuyorum. İlgi ve katkılarınız için hepinize ayrı ayrı teşekkür ederim.

Sema AKIN BAŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ ix

TABLO LİSTESİ x

ÖZET xi

ABSTRACT xiii

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 3

1.2 Tezin Amacı 6

1.3 Orijinal Katkı 7

2 ÖN BİLGİLER 8

2.1 Çok Amaçlı Lineer Programlama 8

2.2 Taşıma Problemi 10

2.3 Araç Rotalama Problemi 11

3 LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA 14

3.1 Lineer Kesirli Programlama Problemi Çözüm Yöntemleri 15

3.2 Lineer Kesirli Programlama Problemini Çözmek için İteratif Bir Algoritma 18

4 LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA UYGULAMALARI 21

4.1 Lineer Kesirli Taşıma Problemi 21

4.2 Lineer Kesirli Araç Rotalama Problemi 24

5 ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA PROBLEMİNE ÇÖZÜM ÖNERİSİ 29

5.1 Problem Tanımı ve Ön Bilgiler 29

5.2 İteratif Bir Çözüm Önerisi 30

5.3 Önerilen Yöntemin Etkinliği 33
5.4 Açıklayıcı Örnek 35

6 SONUÇ **38**

KAYNAKÇA **40**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **44**

SİMGE LİSTESİ

ε_k	Amaçlar için belirlenen üst seviyeler
$Z_k(\mathbf{x})$	Çok amaçlı lineer programlama problemi amaç fonksiyonları
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
∇	Gradyent
CO_2	Karbondioksit
δ	Keyfi pozitif sabit
ε	Keyfi pozitif sabit
δ_k	Keyfi pozitif sabitler
$\mathbb{R}^{\mathbf{L}}$	L boyutlu reel sayılar kümesi
$\hbar_i(\mathbf{x})$	Lineer kesirli programlama probleminde kısıt fonksiyonu
ν_i	Lineer kesirli programlama probleminde sağ-taraf sabitleri
$Z(\mathbf{x})$	Lineer programlama problemi amaç fonksiyonu
$\mathbf{A}$	Lineer programlama probleminde katsayılar matrisi
$\mathbf{b}$	Lineer programlama probleminde sağ-taraf sabitleri
$\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$	m boyutlu reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{m\times n}$	$m \times n$ boyutlu reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$	n boyutlu reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	Pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
T	Transpoz
$\triangle$	Uygun çözümler bölgesi

KISALTMA LİSTESİ

ARP	Araç Rotalama Problemi
AKS	Arz Kısıt Sayısı
CPU	Central Processing Unit
ÇALKP	Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama
ÇALKPP	Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi
ÇALP	Çok Amaçlı Lineer Programlama
ÇALPP	Çok Amaçlı Lineer Programlama Problemi
DM	Dağıtım Merkezi
GAMS	The General Algebraic Modeling System
GPS	Global Positioning System
KDS	Karar Değişkeni Sayısı
KS	Kısıt Sayısı
LKARP	Lineer Kesirli Araç Rotalama Problemi
LKP	Lineer Kesirli Programlama
LKPP	Lineer Kesirli Programlama Problemi
LKTP	Lineer Kesirli Taşıma Problemi
LP	Lineer Programlama
LPP	Lineer Programlama Problemi
MB	Müşteri Bölgesi
RAM	Random Access Memory
TKS	Talep Kısıt Sayısı
TP	Taşıma Problemi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 5.1 Önerilen algoritmanın akış şeması 34

TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1 Dağıtım Merkezi (DM)'den Müşteri Bölgesi (MB)'e bir birim ürünün taşıma kârı 23
Tablo 4.2 Dağıtım Merkezi (DM)'den Müşteri Bölgesi (MB)'e bir birim ürünün taşımasından kaynaklanan CO_2 emisyon miktarı 23
Tablo 4.3 Rastgele oluşturulan lineer kesirli taşıma problemleri için elde edilen sonuçlar 24
Tablo 4.4 Günlere göre müşteri ve araç sayılarına ilişkin veriler 26
Tablo 4.5 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Pazartesi & Cuma) 26
Tablo 4.6 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Salı) 26
Tablo 4.7 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Çarşamba & Cumartesi) . . . 27
Tablo 4.8 Mesafelere ilişkin verilerin devamı (Çarşamba & Cumartesi) . . . 27
Tablo 4.9 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Perşembe) 27
Tablo 4.10 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Cuma) 28
Tablo 4.11 Mevcut ve elde edilen rotaların karşılaştırılması 28
Tablo 5.1 Örnek için karşılaştırma sonuçları 36
Tablo 5.2 Rastgele oluşturulan çok amaçlı lineer kesirli programlama problemleri için önerilen algoritma ile elde edilen sonuçlar 37

ÖZET

Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemine İteratif Bir Çözüm Önerisi

Sema AKIN BAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Beyza AHLATCIOĞLU ÖZKÖK

İnsan aktiviteleri ve çeşitli dallarda matematiksel modellemelerde kesirli programlama ve uygulamaları yaygın olarak kullanılmaktadır. Amacın iki fonksiyonun oranı olarak ifade edildiği optimizasyon problemleri, son 50 yılda yöneylem araştırmasında, yönetim biliminde ve ekonomide çeşitli karar süreçlerinin modellenmesindeki kullanışlılığı nedeniyle kayda değer ilgi çekmektedir. Bu tezde, yöneylem araştırmasının ana konuları arasında olan taşıma problemi ve araç rotalama probleminin özel türleri olarak matematiksel modellemesinin hem optimizasyon literatürüne hem de ticari pazara katkısı tartışılmaz olan lineer kesirli taşıma problemi ve lineer kesirli araç rotalama problemi ele alınmıştır. Lineer kesirli taşıma ve araç rotalama problemlerine herhangi bir değişken dönüşümü yapılmadan eşdeğer bir lineer programlama problemi yardımıyla iteratif olarak çözüm aranmıştır. Küçük ölçekli veriler ile ele alınan lineer kesirli taşıma problemi için çözüm adım adım gösterilerek, rastgele oluşturulmuş büyük ölçekli problemler ile gerçekleştirilen testlerden elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Diğer yandan, İstanbul ilinde perakende sektöründe faaliyet gösteren zincir marketlere dağıtım yapan ve müşteri grubuna ürün dağıtan bir yumurta toptancı firması ele alınarak lineer kesirli araç rotalama modeli oluşturulmuştur. Gerçek hayat problemleri için geliştirilen metodoloji kullanılarak minimum maliyet/yük hedefi ile araç(lar) için en uygun güzergâhlar belirlenerek optimum dağıtım planı bulunmuş ve firmanın mevcut rotasıyla karşılaştırmalı bir analiz sunulmuştur. Ayrıca, çalışılan lineer kesirli taşıma ve araç rotalama problemleri sürdürülebilirlik ve çevrecilik açısından ele alınarak kaynakların verimli kullanılması sağlanırken çevre dostu bir lojistik

sistemin oluşturulmasına yardımcı olunmaktadır.

Gerçek karar verme durumlarında karar vericilerin birçok kriteri göz önünde bulundurması gerekebildiğinden ve çeşitli oranların birlikte optimize edilmesi beklenebildiğinden, bu çalışma ile modellemede basitlik ve gerçekçilik ön planda tutularak çok amaçlı lineer kesirli programlama problemine yeni bir çözüm yöntemi önerilmiştir. Önerilen prosedürünün temel fikri, değişken dönüşümünden kaçınmayı sağlayan, geleneksel sürekliliğin tanımı ve ağırlıklı toplamlar yaklaşımıdır. Çok amaçlı lineer kesirli programlama probleminin tüm kesirli amaç fonksiyonları karar uzayının her çözümünde sürekli olduğundan, elde edilen yakınsama koşulu ve tüm kesirli amaç fonksiyonları ilişkilendirilerek amaçlara bağlı birer kısıt oluşturulmaktadır. Çok amaçlı lineer kesirli programlama problemi için etkin çözüm, herhangi bir değişken dönüştürme tekniği kullanılmadan eşdeğer lineer programlama probleminin iteratif olarak optimizasyonuyla elde edilmiştir. Metodun etkinliği gösterilmek üzere literatürden alınan sayısal örnek çözülmüş ve sonuçlar diğer mevcut prosedürlerle birlikte analiz edilmiştir. Ayrıca, önerilen yaklaşımın gerçek hayat uygulamalarındaki performansı rastgele büyük ölçekli test senaryoları oluşturularak değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli programlama, lineer kesirli taşıma problemi, lineer kesirli araç rotalama problemi, çok amaçlı lineer kesirli programlama, süreklilik

ABSTRACT

An Iterative Solution Proposal to Multiobjective Linear Fractional Programming Problem

Sema AKIN BAŞ

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Beyza AHLATCIOGLU OZKOK

Fractional programming and its applications are widely used in mathematical models of human activities and various branches. Optimization problems, where the objective is expressed as the ratio of two functions, have attracted considerable attention in the last 50 years due to their usefulness in modeling various decision processes in operations research, management science, and economics. In this thesis, linear fractional transportation problems and linear fractional vehicle routing problems, whose mathematical modeling is indisputable contributions to both optimization literature and commercial market, as special types of transportation problems and vehicle routing problems, which are among the main topics of operations research, are discussed. An iterative solution has been sought for linear fractional transportation and vehicle routing problems with the help of an equivalent linear programming problem without any variable transformation. The solution for the linear fractional transportation problem, which is handled with small-scale data, is shown step by step, and the results obtained from the tests performed with randomly generated large-scale problems are presented. On the other hand, a linear fractional vehicle routing model has been created by considering an egg wholesaler company that distributes products to chain markets operating in the retail sector in Istanbul and distributes products to customer groups. By using the methodology developed for real-life problems, the optimum distribution plan has been found by determining the most suitable routes for the vehicle(s) with the minimum cost/load objective, and a comparative analysis with the current route of the company has been presented. In addition, linear fractional transportation and vehicle routing problems

are handled in terms of sustainability and environmentalism, helping to create an environmentally friendly logistics system while ensuring efficient use of resources.

Since decision-makers may need to consider many criteria in real decision-making situations and various ratios can be expected to be optimized together, a new solution method to the multi-objective linear fractional programming problem has been proposed by prioritizing simplicity and realism in modeling. The basic idea of the proposed procedure is the traditional definition of continuity and the weighted sum approach, which allows for avoiding variable transformation. Since all the fractional objective functions of the multi-objective linear fractional programming problem are continuous in every solution of the decision space, the obtained convergence condition and all the fractional objective functions are correlated to form a constraint depending on the objectives. An efficient solution for the multi-objective linear fractional programming problem is obtained by iterative optimization of the equivalent linear programming problem without using any variable conversion technique. A numerical example from the literature has been solved to demonstrate the effectiveness of the method and the results have been analyzed together with other available procedures. Furthermore, the performance of the proposed approach in real-life applications has been evaluated by generating random large-scale test scenarios.

Keywords: Fractional programming, linear fractional transportation problem, linear fractional vehicle routing problem, multi-objective linear fractional programming, continuity

1
GİRİŞ

İnsanlar yaşamları boyunca belirledikleri amaçlar doğrultusunda hareket etmeye çalışırlar ve bu amaçlara ulaşmak için çaba gösterirler. Bazı amaçlar için yapılacak tercih ve davranışları tespit etmek kolayken, bazı amaçlar içinse farklı analizler gerekli olabilmektedir. Amaçlara mümkün olduğunca hızlı, makul seviyede ve en iyi şekilde ulaşabilmek, optimizasyon kavramının basit bir tanımı olarak verilebilir. Yaşantıyı etkileyen her türlü konu ile ilgili en iyi çözüm arayışı, bir optimizasyon problemi bakış açısıyla ele alınabilir. Optimize edilmesi istenen amacın veya amaçların matematiksel karmaşıklık seviyesine ve problemin barındırabileceği durumlara bağlı olarak çok sayıda optimizasyon modelleri ve çözüm teknikleri geliştirilmiştir.

Lineer Programlama Problemi (LPP) amacın ve kısıtların lineer olarak tanımlandığı, negatif olmayan karar değişkenlerinden oluşan temel bir optimizasyon modelidir. Karar değişkenlerine özel kısıtlar getirilmesi durumunda çeşitli modeller kurulabilmektedir. LPP, amaç sayısı dikkate alınarak tek amaçlı veya çok amaçlı başlıkları ile sınıflandırılabilmektedir. Bununla birlikte, iki lineer amacın oranlanması ve kısıtların da yine lineer olarak tanımlanması ile Lineer Kesirli Programlama Problemi (LKPP) elde edilir. LKPP, iki amacın birbirleriyle bağlantılı olduğu ve paydaki amaç ile paydadaki amacın ters doğrultularda optimize edilmesine olanak sağlayan özel bir kesirli programlama problemi türüdür. Ayrıca pay ve paydadaki amaçların bağlantılı olmaları sebebiyle amaçların oranlamalarında işaret değişikliklerinin de etkileri değerlendirilebilmektedir.

Taşımacılık sistemi, ürünlerin üretim merkezinden müşterilere ulaşmasına kadar pek çok bileşen içermektedir. Herhangi bir bileşende meydana gelebilecek aksaklıklar tüm kademeleri olumsuz etkileyebilmektedir. Dolayısıyla, sorunların öngörülmesi ve engellenebilmesi taşımacılık için kritik bir konu olup, optimizasyon çalışmalarında da önemli bir yere sahiptir. Taşımacılıkta bu çalışmalar, en basit haliyle, Taşıma Problemi (TP) olarak merkezlerden depolara yapılacak dengeli

dağıtım probleminin minimum maliyetli olması problemiyle düşünülebilirken, tedarik zinciri yönetimi ile daha kapsamlı şekilde de ele alınmaktadır.

Bir lokasyondan başka bir lokasyona birden fazla rota ile gitmek mümkün olabilir. Ancak, kullanılacak rotanın en kısa mesafeye sahip olması, en hızlı rota olması veya yakıt tüketiminin en az olacağı rotanın istenilmesi, literatürde Araç Rotalama Problemi (ARP) olarak bilinmektedir. ARP'yi verimli bir şekilde çözmek, nakliye maliyetlerini düşürmeye, teslimat sürelerini kısaltmaya, müşteri memnuniyetini artırmaya ve çevreye olumsuz etkiyi en aza indirmeye yardımcı olabilmektedir. Verimli bir yönetim için ARP'nin hedefleri sadece maliyetleri düşürmek değil, aynı zamanda karbon ayak izini azaltmak ve doğal kaynakları korumak olmalıdır. ARP; araçların kapasiteleri, süre, mesafe, çevre kirliliğini en düşük seviyede tutması gibi kısıtlar altında incelenebilmektedir. Bu problem için geliştirilen matematiksel modeller özellikle çevresel olarak sürdürülebilir bir ulaşım sistemi oluşturmak için gereklidir. İlgili ürünlerin arz noktalarından talep noktalarına daha kısa yol uzunlukları ile taşınması ve dolayısıyla daha az yakıt kullanılmasının karbondioksit emisyonlarının azaltılmasına yardımcı olacağı açıktır. Bu bakış açısıyla oluşturulacak dağıtım güzergahları çevreye olan olumsuz etkileri azaltacak ve daha temiz ulaşım sağlayacaktır.

Taşıma ve araç rotalama problemleri, maliyetlerin düşürülmesi ve en iyi hizmeti verme açısından lojistik ve tedarik zinciri yönetiminde büyük öneme sahip kararları içermektedir. Bu noktadan hareketle sunulan tez çalışmasında gerçek hayat problemlerine uygulama olarak sırasıyla, kâr/toplam CO_2 emisyonu olarak ifade edilen lojistik oranının maksimizasyonunun amaçlandığı Lineer Kesirli Taşıma Problemi (LKTP) ve toplam maliyet/yük oranını minimize eden Lineer Kesirli Araç Rotalama Problemi (LKARP) ile mal ve hizmet teslimatları optimize edilmeye çalışılmıştır. Modellenen LKTP ve LKARP için optimal çözümler, herhangi bir değişken dönüştürme tekniği kullanılmadan eşdeğer LPP'nin iteratif olarak optimize edilmesiyle elde edilmiştir.

Öte yandan, Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi (ÇALKPP), çoklu amaçların oransal olarak ele alınarak karar verme süreçlerinin karmaşıklığının daha basit modellenmesini sağlayan önemli bir matematiksel optimizasyon yaklaşımıdır. Bu yaklaşım, birçok gerçek dünya problemini çözme ve karar vericilere farklı amaçları dengeli bir şekilde optimize etme fırsatı sunarak karmaşık karar verme problemlerini çözmek için güçlü bir matematiksel araçtır. Sunulan tezde; oyunlar teorisi, rotalama, portföy seçimi, üretim planlama ve yöneylem araştırmasındaki çok sayıda karar problemi gibi uygulamalı matematiğin birçok alanında sıklıkla karşılaşılan ÇALKPP üzerine çalışılmıştır.

Sunulan tez, şu şekilde organize edilmiştir. 2. bölümde, çalışmaya temel oluşturan çok amaçlı lineer programlama, TP ve ARP ile ilgili tanımlar ve bazı ön bilgiler verilmiştir. Bölüm 3'te LKPP ve çözüm yöntemleri sunulmuştur. Bölüm 4'te LKPP gerçek hayat uygulamalarına çözüm aranmıştır. 5. bölümde ÇALKPP için bir çözüm metodolojisi önerilmiştir. Son olarak, Bölüm 6 tez çalışmasında elde edilen sonuçları ve yorumları içermektedir.

1.1 Literatür Özeti

Optimizasyon, bir sürecin veya sistemin en iyi sonucunu elde etmeyi sağlayan önemli bir kavramdır. Zaman içinde optimizasyon problemlerinin çözümü için, değişik pek çok matematiksel programlama problemleri ortaya atılmış ve kendilerine has pek çok farklı yöntem literatüre kazandırılmıştır. Bu teknikler, kaynakların etkin ve verimli bir şekilde kullanılmasını sağlama, maliyetleri azaltma, zamanı en iyi şekilde kullanma ve kaliteyi artırma gibi amaçlara hizmet etmektedir. Kesirli programlama, gerçek hayatta karşılaşılan birçok karmaşık problemin matematiksel olarak modellenmesine ve çözülmesine yardımcı olan özel bir programlama türü olup birçok endüstri, ekonomi ve mühendislik uygulamalarında büyük öneme sahiptir.

Literatürde ilk olarak, 1956'da Isbell ve Marlow [1] tarafından ele alınan kesirli programlama, çeşitli faaliyetlerin çeşitli kaynakları belirli oranlarda kullandığı problemlerin gerçeğe yakın olarak modellenmesinde ve çözülmesinde yararlı olmaktadır. Amacın verilen fonksiyonların oranları şeklinde ifade edildiği optimizasyon problemlerine kesirli programlama problemleri denilmektedir. Literatürdeki sınıflandırmalara göre, kesirli programlama probleminde amaç fonksiyonunun pay ve paydası, kısıtlar lineer birer fonksiyon ve bir sabitin toplamı şeklindeyse probleme LKPP denilmektedir [2]. Çalışmamıza temel olan LKPP'ler, ilk defa 1960'ta Macar matematikçi Martos [3] tarafından hiperbolik programlama problemleri olarak formüle edilmiştir. Literatürde LKPP'nin çözümü için önerilmiş birçok metot / algoritma mevcuttur. Martos [4]'un simpleks yöntem tabanlı algoritması, Charnes ve Cooper [5]'ın değişken dönüşümü yöntemi, Dinkelbach [6]'ın parametrik yaklaşıma dayanan iteratif prosedürü, Bitran ve Novaes [7]'in gradyent hesabına dayanan algoritması LKPP'ler için önerilmiş yapı taşı niteliğindeki çözüm metotlarıdır. Swarup [8], LKPP'ye doğrudan (LPP'ye indirgemeden) çözüm bulabilmek için uygun temel çözümden başlayarak ve çözümün hangi koşullar altında iyileştirilebileceğini göstererek simpleks yöntem tabanlı bir algoritma önermiştir. Wolf [9], LKPP'nin optimal çözümünü, problemin altında yatan karar problemiyle yakından ilgili olan lineer bir ikame probleminin

parametrik analizini yaparak belirlemiştir. Ayrıca, analiz ile karar vericiye temeldeki karar problemi hakkında ek öngörü ve değerli bilgiler sağlamıştır. Nesterov ve Nemirovskii [10], LKPP için iç nokta polinom-zaman algoritması geliştirmişlerdir. Tantawy [11], LKPP'yi, dualite kavramını kullanarak cebirsel olarak çözmeye dayanan ve problem boyutuna daha az duyarlı olan bir yöntem önermiştir. Tantawy [12], eşlenik gradyent izdüşüm yöntemine dayanan bir dizi nokta aracılığıyla amaç fonksiyonunu artıran yönde uygun bölgede ilerleyerek iteratif bir yöntem aracılığıyla LKPP'lere çözüm bulmayı hedeflemiştir. Feng ve diğerleri [13], minimum-maks ve maksimum-min LKPP'nin eşdeğer problemini iki fazlı lineer gevşeme tekniği ile gevşetme LPP'i kurarak çözmüşlerdir. Pandian ve Jayalakshmi [14], LKPP'leri çözmek için ayrıştırma ilkesi ve payda amaç kısıtlamasıyla, Charnes-Cooper [5] değişken dönüşümü ve Swarup [8]'un simpleks yönteminden farklılaşan, simpleks yönteme dayalı yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Zhang ve Wang [15], LKPP'yi eşdeğer bir probleme çevirerek önerdikleri yeni bir lineer gevşetme tekniği ile eşdeğer problemi bir LPP'ler dizisine indirgeyerek yeni bir dallanma ve azaltma yaklaşımı sunmuşlardır. Ozkok [16], sürekliliğin (ϵ, δ)-tanımı tabanlı yeni bir iteratif algoritma ile LKPP'ye çözüm bulmuştur. Bennani ve diğerleri [17], eşdeğer bir LPP çözmeyi mümkün kılan iç nokta yöntemlerine ve eşdeğer bir varyasyonel eşitsizlik problemini etkin bir projeksiyon yöntemiyle çözmeye dayanan iki farklı yaklaşımla LKPP'yi çözmüşlerdir. Koçken ve diğerleri [18], sürekliliğin geleneksel tanımına dayanarak, her hangi büyük M katsayılarına bağlı olmayan, LKPP çözümü için tam iteratif bir algoritma geliştirmişlerdir.

İnsan aktivitelerinde, lojistik yönetiminde ve ekonominin çeşitli dallarında kesirli programlama uygulamaları kullanılmaktadır. Günümüze kadar özellikle iş dünyasında yer bulan LKPP'lerin çeşitli uygulama alanlarına (ve bu alanlardaki olabilecek amaçlarına) örnek olarak; finansal ve kurumsal planlama (borç/özsermaye oranını minimize etmek), yatırım seçimi (kazanç veya kâr/risk oranını maksimize etmek), üretim planlama (envanter/satış oranını minimize etmek, çıktı/çalışan oranını maksimize etmek), kaynak dağıtımı (kâr/sermaye oranını yani yatırım kazancını maksimize etmek), rotalama (maliyet/zaman oranını minimize etmek), üniversite planlaması (öğretmen/öğrenci, maliyet/kazanç oranlarını minimize etmek), sağlık ve hastane planlaması (hemşire/hasta oranını minimize etmek) vs. verilebilir.

LKPP'nin uygulama alanlarından kesirli amaçlı TP, kâr/maliyet, gelir/sermaye, kâr/emek, toplam fiili taşıma maliyeti/toplam standart taşıma maliyeti ve risk varlıkları/sermaye vb. oranlara sahip yaygın olarak kullanılan bir LKPP'dir. Kesirli amaçlı bir TP'yi, ilk olarak Swarup [19], paydanın her zaman pozitif olduğu

varsayımı ile ele almıştır. Moanta [20], iki pozitif lineer fonksiyonun oranı olarak amaç fonksiyonuna sahip üç boyutlu LKTP için simpleks yöntemi ile optimum bir çözüm elde etmeye çalışmıştır. Güzel ve diğerleri [21], çalışmalarında 1. dereceden Taylor polinom serisini çok değişkenliye genişleterek aralık katsayılı LKTP'yi klasik bir TP'ye dönüştürmüşlerdir. Raina ve diğerleri [22], LKTP'yi nakliye süresi boyunca bir miktar indirimli maliyetle ele alarak ve Karush-Kuhn-Tucker optimallik algoritmasını kullanarak optimum çözümü test etmişlerdir. Sheikhi ve diğerleri [23], iki amaçlı LKTP'lere bir etkin çözüm kümesi bularak karar vericilerin ekonomik faaliyetleri değerlendirmesine ve tatmin edici yönetimsel kararlar almalarına olanak tanıyan yeni bir yöntem önermişlerdir. Bas ve diğerleri [24], LKTP'nin lineer ve asimptotik durumlarını dikkate alarak iteratif bir yaklaşımla çözüm elde etmişlerdir.

LKPP'nin uygulama alanlarından bir diğeri de LKARP olup, gerçek hayattaki araç rotalama kararlarında karar vericiler çeşitli sınırlamalarla birlikte maliyet/yük, kar/zaman vb. optimize etme kararıyla karşı karşıya kalabilmektedir. Bu bakış açısıyla LKARP, e-ticaret, sağlık ve gıda dağıtımı gibi çeşitli sektörlerdeki pratik önemi nedeniyle son zamanlarda ilgi konusu haline gelmiştir. Fakat, LKARP'yi çözmek için literatürde çok az yöntem mevcut olup bunlar genellikle sınırlı hesaplama verimliliğinden veya yetersiz çözüm kalitesinden muzdariptir. Benoist ve diğerleri [25], lojistik oranı en aza indirmek için sıvıların tankerler tarafından uzun vadeli teslimatının optimizasyonundan başlayarak gerçek bir rotalama ve çizelgeleme problemini çözmek için rastgele bir yerel arama tekniği geliştirmişlerdir. Fransa'daki bir taksiyle yolculuk probleminde, Garaix ve diğerleri [26], araçların toplam seyahat süresinin yolcuların yolculuk sürelerinin toplamına bölünmesiyle hesaplanan oranın maksimize edilmesini araştırmışlardır. Bir küme bölümleme modelinin sürekli gevşemesinin çözümü için Charnes ve Cooper dönüşümüne [5] ve Dinkelbach algoritmasına [6] dayalı iki teknik geliştirmişlerdir. Archetti ve diğerleri [27], stok yönlendirmesine dayalı bir lojistik oranın çözümü için Dinkelbach algoritmasının [6] bir modifikasyonu olan bir yaklaşım önermişlerdir. Baldacci ve diğerleri [28], LKARP'nin kapsamlı bir incelemesini sunarak her iterasyonda Dinkelbach yönteminde [6] yanıtlanan tamsayı problemlerinin değişken sayısını azaltmak için bir rota numaralandırma şeması içindeki sınırlayıcı süreçlere dayanan bir yöntem önermişlerdir.

Gerçek hayattaki karar verme durumlarında, karar vericilerin birçok kriteri göz önünde bulundurması gerekmektedir. Ayrıca çeşitli oranların birlikte optimize edilebilmesi de beklenebildiğinden, matematiksel programlama çalışan pek çok araştırmacı modellemede basitliği ve gerçekçiliği ön planda tutarak ÇALKP'ye yönelmiştir. Yöneylem araştırması bünyesinde yer alan envanter kontrolü, üretim,

taşıma, finans, bilgi teorisi, oyun teorisi ve Markov yenileme süreçleri gibi birçok alanda ÇALKP'nin uygulamasına sıklıkla rastlanmaktadır. Bu çalışmanın da temelini oluşturan optimizasyon problemi, çok kriterli Lineer Kesirli Programlama (LKP), ilk olarak Choo'nun 1980 yılında tamamladığı doktora çalışmasıyla [29] literatüre konu olmuştur. Kornbluth ve Steuer [30]'in, Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama (ÇALKP)'nın temel özelliklerini, zorluklarını ve Çok Amaçlı Lineer Programlama (ÇALP)'dan farklılıklarını sundukları çalışmaları ÇALKP üzerine temel, ilham verici bir çalışma olarak değerlendirilebilir. Nykowski ve Zołkiewski [31], bazı durumlarda ÇALKPP'de optimumluğun tanımı olarak z-etkin (zayıf etkin) kavramından kaçınabilmeyi sağlayan Kornbluth ve Steuer'in yöntemine [30] dayalı olarak karar vericinin tercih edilen basılamaz çözümü seçebilmesi için uzlaşma prosedürü önermişlerdir. Costa [32], bazı dal ve sınır (branch and bound) tekniklerini ve Charnes-Cooper değişken dönüşümünü [5] kullanarak, ÇALKP probleminin çözümü için ihtiyaç duyulan hesaplama çabasını önemli ölçüde azaltan ve karar vericiye tercih ettiği çözümlerin seçiminde rehberlik eden yeni bir etkileşimli yöntem geliştirmiştir. Guzel ve Sivri [33], ÇALKPP'nin uygun bölgedeki her bir amaç fonksiyonunun bireysel çözümü ile elde edilen optimal noktalarında, ilgili amaç fonksiyonlarını 1. Taylor polinom serisine genişleterek oluşturulan Çok Amaçlı Lineer Programlama Problemi (ÇALPP) ve ağırlıklı toplam yaklaşımı ile ÇALKPP'ye çözüm bulmuşlardır. Costa [34], basılamaz bölgeyi iki alt bölgeye bölerek ve Charnes-Cooper dönüşümü [5] kullanarak ÇALKPP'de amaç fonksiyonlarının ağırlıklı toplamının maksimumunu hesaplamak için bir arama ağacı tekniği önermiştir. Wang ve diğerleri [35], iki seviyeli LKPP'yi bir dizi LKPP'ye dönüştürerek çözüm aramışlardır. Valipour ve diğerleri [36], makul hata değeri ve amaçlar için ağırlıklar ile birlikte verilen ÇALKPP'nin basılamaz çözüm kümesine yaklaşmak için bir yöntem sunmuşlardır. Nayak ve Ojha [37], karar vericinin sonlandırma sabitleri ile kendi tolerans değerlerini belirlediği bir ÇALKPP'yi parametrik fonksiyonları kullanarak iteratif olarak çözmüşlerdir. Moulaï ve Mekhilef [38], sürekli tek amaçlı ikinci dereceden fonksiyonlar için aramanın hızlandırılmasına ve bir kesme düzlemi yardımıyla optimize edilmesine dayalı bir algoritma kullanarak ÇALKPP'ye çözüm aramışlardır.

1.2 Tezin Amacı

Tezde, LKPP'nin gerçek hayat uygulamaları olarak LKTP ve LKARP ele alınacak olup makul sürede çözüm üretilmeye çalışılacaktır. Tezin diğer bir amacı, birbiriyle çelişebilen birçok amacı olan ÇALKPP'leri amaçların önem ağırlıklarını kullanarak optimize eden yeni bir algoritma önermektir.

1.3 Orijinal Katkı

Literatürde, belirli bir LKPP türü olan LKTP'nin çözümü için iteratif yaklaşımlarla ilgili yeterince çalışma yoktur. Ayrıca, çoğu matris işlemlerine dayanan bazı yöntemlerin çalışma stratejileri, problem boyutu arttıkça işlem sayılarının ve hesaplama sürelerinin ciddi oranda artması nedeniyle çözümsel etkinliklerini kaybetmelerine neden olmaktadır. Öte yandan, gerçek hayat uygulaması çözümünde kullanılan yöntem, Lineer Programlama (LP) temelli iteratif bir prosedür olduğundan, hesaplama açısından bu eksikliği başarılı bir şekilde gidermektedir.

Ayrıca, LKARP ile ilgili az sayıda çalışma olduğu gibi, yine herhangi bir değişkeni dönüştürmeden doğrudan LKARP'leri çözebilen bir yöntem veya algoritma ile ilgili literatürde eksik bulunmaktadır. Bu durumdan hareketle, çalışmada gerçek verilerle ele alınan LKARP'nin literatürde önemli bir yere sahip olacağı aşikardır.

Ek olarak, incelendiği kadarıyla ÇALKPP'leri herhangi bir değişkeni dönüştürmeden doğrudan çözebilecek bir yöntem veya algoritma konusunda da literatürde bir boşluk bulunmaktadır. Bu bağlamda, tezde önerilen ve literatürdeki birçok makalenin aksine değişken dönüşümünden kaçınmayı sağlayan yeni algoritma ile literatüre ciddi katkı sağlanacaktır. Sunulan yöntemin, gerçek dünya senaryolarında finans ve ulaşım yönetiminin verimliliğini ve etkinliğini geliştirme potansiyeline sahip olarak çalışmanın bu alanlarda daha fazla araştırmaya ilham vereceği umulmaktadır.

2
ÖN BİLGİLER

2.1 Çok Amaçlı Lineer Programlama

Birbiriyle çelişebilen ve aynı anda optimize edilemeyen birden fazla lineer amaca sahip, literatürde vektör-minimizasyon (veya vektör-maksimizasyon) problemi olarak da adlandırılan Çok Amaçlı Lineer Programlama Problemi (ÇALPP) aşağıdaki gibi formüle edilir:

$$\begin{aligned} &\min\ (Z_1, \ldots, Z_p) \\ &\mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{2.1}$$

Burada T transpozu göstermek üzere lineer yapıdaki k. $Z_k(\mathbf{x}) = \mathbf{c_k}^T\mathbf{x}$ $(\mathbf{c_k} \in \mathbb{R}^n$ ve $k = 1, 2, \ldots, p)$ 'dir. Karar uzayı veya uygun çözümler bölgesi $\triangle = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\}$ boş olmayan, kompakt bir kümedir.

Tanım 2.1 (İdeal Çözüm). Her $k = 1, \ldots, p$ için ${Z_k}^* = \{Z_k(\mathbf{x}^*) \mid \mathbf{x}^* \in \triangle\}$ amaçların optimal değerleri olmak üzere $\mathbf{{Z_k}^*} = ({Z_1}^*, \ldots, {Z_p}^*)$ ideal noktasına karşılık gelen $\mathbf{x}^*$ çözümü tam-optimal çözüm veya ideal çözümdür.

Çok amaçlı programlama için optimallik kriteri, tek amaçlı programlama açısından tüm amaçları bir arada karşılayan bir kavramdır. Fakat herhangi bir ÇALP için tek bir küresel optimal çözüm genellikle mevcut olmayıp, karar uzayında bir dizi optimal çözüm bulmayı gerektirir. Bu yüzden tek amaçlı programlamadaki optimal çözüm kavramının yerine, çok amaçlı programlamada etkin (efficient) veya Pareto-optimal çözüm kavramları kullanılmaktadır. Pareto-optimallik kavramı, ÇALP minimizasyon problemi için aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 2.2 (Pareto-optimal çözüm). Eğer her $k = 1, \ldots, p$ için $Z_k(\mathbf{y}) \leq Z_k(\mathbf{x}^*)$ ve en az bir k için $k = 1, \ldots, p$ için $Z_k(\mathbf{y}) < Z_k(\mathbf{x}^*)$ olacak şekilde karar uzayında bir başka $\mathbf{y}$ çözümü yoksa uygun çözüm $\mathbf{x}^*$ Pareto-optimal çözümdür.

2.1.1 Çok Amaçlı Lineer Programlama Çözüm Yöntemleri

Literatürde ÇALPP'leri çözmek için çeşitli yöntemler mevcuttur. Bunlardan en sık kullanılanları aşağıda verilecektir.

2.1.1.1 Ölçekleme Metodları

Tanım 2.3 (**Ağırlıklı Toplamlar Yaklaşımı).** Karar vericinin tercihlerini ifade eden ağırlıklar $\omega_k > 0$ $(\sum \omega_k = 1)$ ile ÇALPP (2.1)'in amaç fonksiyonları $(Z_k, \forall k \in \mathbb{N}^+)$ birleştirilerek elde edilen

$$\min \bar{Z} = \sum_{k=1}^{p} \omega_k Z_k$$

amaç fonksiyonu (karar vericinin tercih fonksiyonu) problemin kısıtları üzerinde optimize edilir. Elde edilen çözüm $\mathbf{x}^* \in \triangle$ Pareto-optimal çözümdür.

Tanım 2.4 (**ε-Kısıt Yöntemi).** [39] p tane amaçtan birinin $(s.$ olsun) minimizasyonu için diğer amaçlar üst seviyeleri ile kısıtlara dönüştürülerek ÇALPP'e çözüm bulunur.

$$\begin{aligned} &\min \ Z_s \\ &\mathbf{c_k}^T \mathbf{x} \leq \varepsilon_k \quad k \neq s \quad k = 1, \ldots, s, \ldots, p \\ &\mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

Elde edilen çözüm $\mathbf{x}^* \in \triangle$ Pareto-optimal çözümdür.

Tanım 2.5 (**Artırılmış Ağırlıklı Chebychev Yöntemi).** [40] Karar uzayında uygun bir C_x noktasının ve $y_k^I = \min_{x \in \triangle} c_k x$ ile tanımlı ideal noktanın uzaklığı dikkate alınır. $\omega > 0$ ağırlıklar vektörü olmak üzere, $\gamma > 0$ ise

$$\min_{x \in \triangle} \max_k \omega_k (c_k x - y_k^I) + \gamma \sum_{k=1}^{p} (c_k x - y_k^I)$$

amacı doğrultusunda elde edilen $\mathbf{x}^* \in \triangle$ optimal çözümü, Pareto-optimal çözümdür.

Tanım 2.6 (**Ağırlıklı Maksimum Sıralama Yöntemi).** [41] Başlangıçta bir ölçeklendirme tekniği olarak geliştirilmemiş olsa da kombinatoryal optimizasyonla ilgili olup, karar vericinin önem derecesine göre ağırlıklandırmış olduğu amaçlardan en önemli olandan başlanarak amaç, p ağırlıklı amaçların en kötüsünü en aza indirmektir:

$$\min_{x \in \triangle} \max_k \omega_k c_k x$$

$\mathbf{x}^* \in \triangle$ optimal çözümü, Pareto-optimal çözümdür.

2.1.1.2 Hedef Programlama

1955 yılında ilk defa Charnes, Cooper ve Ferguson [42] tarafından "kısıtlı regresyon" olarak literatüre kazandırılan hedef programlama 1961 yılında bugünkü anlamıyla tanımlanmıştır [43]. Karar verici tarafından ulaşılmak istenilen her bir amaç için sayısal birer hedef değer (t_k) belirlenerek hedef değerlerden istenmeyen yöndeki sapmalar en küçüklenerek "tercih edilen çözüm" bulunmaya çalışılır. Genel olarak, amaçların hedef programlamaya adaptasyonu için karar vericiden alınan hedef seviye çeşit bilgileri

$$\begin{aligned}
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} \leq t_k && k = 1, \ldots, m \\
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} \geq t_k && k = m+1, \ldots, n \\
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} = t_k && k = n+1, \ldots, r \\
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} \in [t_k^\iota, t_k^\kappa] && k = r+1, \ldots p
\end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklindedir. d_k^+ ve d_k^- hedeflerin istenen seviyesinden sırasıyla yukarı veya aşağı sapmalarına olanak sağlayan sapma değişkenleri göstermek üzere genel olarak modelin matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
&\min\ Z = \sum_{k=1}^{p} d_k^+ + d_k^- \\
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} - d_k^+ \leq t_k && k = 1, \ldots m \\
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} + d_k^- \geq t_k && k = m+1, \ldots n \\
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} - d_k^+ + d_k^- = t_k && k = n+1, \ldots r \\
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} + d_k^- \geq t_k^\iota && k = r+1, \ldots p \\
&\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} - d_k^+ \leq t_k^\kappa && k = r+1, \ldots p \\
&\mathbf{x} \in \triangle
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Elde edilen çözüm $\mathbf{x}^* \in \triangle$ Pareto-optimal çözümdür.

2.2 Taşıma Problemi

İlk olarak Frank L. Hitchcock [44] tarafından 1941 yılında literatüre kazandırılan TP, üretim merkezlerinden belirli talepleri olan tüketim merkezlerine ürünlerin dağıtımını maliyeti minimum ya da kârı maksimum yapacak şekilde gerçekleştiren

bir dağıtım problemidir. Genel olarak, a_i arz miktarı ile m adet kaynağı ve b_j talep miktarıyla n adet müşteri bölgesi bulunan bir TP

$$\begin{aligned} &\min\,(\text{veya } \max)\ Z(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \ldots m \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq, b_j \quad j = 1, \ldots n \\ &\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak modellenir. Burada p_{ij} amaç fonksiyon katsayıları olup aşağıdaki varsayımlar sağlanmalıdır:

- Taşınacak ürünler aynı türe sahip birimlerle ifade edilmelidir.
- Üretim merkezlerinin arz miktarları ile tüketim merkezlerinin talep miktarları, kesin olarak bilinmeli ve bu miktarlar eşit olacak şekilde ayarlanmalıdır. Başka bir ifadeyle, aşağıdaki eşitlik (denge şartı) sağlanmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.6}$$

- Üretim merkezinden tüketim merkezlerine ürünler, aracı kullanılmadan doğrudan sevk edilmelidir.
- Her bir ürünün birim taşıma maliyeti değişmez bir değere sahip olmalıdır.

2.3 Araç Rotalama Problemi

İlk olarak George B. Dantzig ve John H. Ramser [45] tarafından 1959 yılında literatüre kazandırılan ARP, dağıtım merkezlerini hizmetlerin ve malların varış noktalarına mümkün olan en verimli şekilde bağlaması nedeniyle lojistik ve nakliye yönetimi disiplininde çok önemli bir konudur. ARP'yi yöneylem araştırması çerçevesinde ele aldığımızda, ARP'nin optimizasyon kalitesi, temel olarak ağ için oluşturulmuş etkin bir modele ve modelin amacının başarılı seçimine bağlıdır. Genel olarak, 1 depo ve geri kalanlar ise müşteri bölgeleri olup $V = \{1, \ldots, L\}$ ve $A = \{(i, j)\,|i, j \in V, i \neq j\}$ sırasıyla düğümleri ve yay (ark) kümesini belirtmek üzere $G = (V, A)$ ağı üzerinde bir ARP

$$
\begin{aligned}
&\min\ Z(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{(i,j)\in A} n_{ij} X_{ij}^{k} \\
&\sum_{k=1}^{K} X_{ij}^{k} = Y_{ij}, \quad \forall i,j \in V \\
&\sum_{i=1}^{L} Y_{ij} = 1, \quad \forall j \in V\backslash\{1\} \\
&\sum_{j=1}^{L} Y_{ij} = 1, \quad \forall i \in V\backslash\{1\} \\
&\sum_{i=1}^{L} Y_{i1} = K, \\
&\sum_{j=1}^{L} Y_{1j} = K, \\
&\sum_{i=2}^{L} \sum_{j=1}^{L} d_i X_{ij}^{k} \leq C, \quad k = \{1,\ldots,K\} \\
&\sum_{i\in Vs} \sum_{j\in Vs} Y_{ij} \leq |Vs| - 1, \quad \forall Vs \subset V\backslash\{1\} \\
&X_{ij}^{k} = \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A \text{ ve } k = \{1,\ldots K\} \\
&Y_{ij} = \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

olarak modellenir. Burada, n_{ij} amaç katsayıları olup (i,j) yayı üzerinde i müşteri bölgesinden j müşteri bölgesine k aracı tarafından taşıma yapılıp yapılmadığını ve bu iki nokta arasında araç rotası bulunup bulunmadığını gösteren ikili değişkenler sırasıyla X_{ij}^{k} ve Y_{ij}'dir. K adet aracın C kapasitesi olup d_i müşteri bölgesi talepleridir. Ayrıca Vs, çözümün kullanılan düğümlerden herhangi bir alt tur içermemesi için oluşurulan kümeye karşılık gelmektedir. Amacın belirli araçlar aracılığıyla toplam yolun minimize edilmesi olduğu, literatürde bulunan birçok araç rotalama çalışması, aşağıdaki temel varsayımları sağlamaktadır:

- Belirli bir tür ticari ürünün, talepleri önceden belirlenmiş müşterilere, yalnızca tek bir depodan dağıtımı gerçekleştirilir.
- Her müşteri talebi, aynı kapasiteye sahip yalnızca bir araç tarafından tek seferde karşılanabilir.
- Araçlar, belirli bir maksimum mesafe sınırını aşmamak kaydıyla hareket ederek önceden belirlenmiş bir zaman dilimi içerisinde müşterilere dağıtım gerçekleştirir.

Üçüncü varsayım ihmal edildiğinde, en yaygın ARP olarak kapasite kısıtlı ARP türü ortaya çıkar.

3
LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA

Amacın, uygulanan kısıtlamalara bağlı olarak mümkün olan en iyi tahsis getirisi oranını optimize etmek olduğu ve verilen fonksiyonların oranları şeklinde ifade edilen optimizasyon problemlerine kesirli programlama problemleri denilmektedir. Genel olarak,

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\mathbf{x}) = \frac{N(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} \\ & \mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

ile ifade edilmektedir. Burada kompakt $\triangle = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \hbar_i(\mathbf{x}) \leq \nu_i,\ i \in [1, m]\}$ olup uygun çözümler bölgesi $\triangle$ üzerinde $D(\mathbf{x}) > 0$'dır. Kesirli programlama problemlerini aşağıdaki gibi sınıflandırmak mümkündür [2].

- Eğer $N(\mathbf{x}),\ D(\mathbf{x})$ ve $\hbar_i(\mathbf{x})$ afin (lineer bir fonksiyon ve bir sabitin toplamı) ise problem, LKPP'dir.

- Eğer $N(\mathbf{x}),\ \ D(\mathbf{x})$ kuadratik fonksiyonlar ve $\hbar_i(\mathbf{x})$ afin ise problem, kuadratik kesirli programlama problemidir.

- Eğer $N(\mathbf{x})$ konkav, $D(\mathbf{x})$ ve $\hbar_i(\mathbf{x})$ konveks ise problem, konkav-konveks kesirli programlama problemidir.

Çalışmamıza temel olan LKPP,

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\mathbf{x}) = \frac{N(\mathbf{x})}{D(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \alpha}{\mathbf{d}^T\mathbf{x} + \beta} \\ & \mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak modellenmektedir. Burada $\mathbf{c^T} = [c_j]_{1\times n}$ ve $\mathbf{d^T} = [d_j]_{1\times n}$ sırasıyla pay ve payda lineer fonksiyonlarının katsayı vektörleri, $\mathbf{x} = [x_j]_{n\times 1}$ karar değişkenleri vektörü olup α ve β sabitleri göstermektedir. Ayrıca uygun çözümler bölgesi $\triangle = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\}$ boş olmayan, konveks ve kapalı bir kümedir.

3.1 Lineer Kesirli Programlama Problemi Çözüm Yöntemleri

Literatürde LKPP'leri çözmek için çeşitli yöntemler mevcuttur. Bunlardan en sık kullanılanları aşağıda verilecektir.

3.1.1 Genişletilmiş Primal Simpleks Algoritma

1947'de Dantzig [46] tarafından LPP için tanıtılan Simpleks yöntemini, 1960'da Martos [3, 4] LKPP için genişletmiştir.

Tanım 3.1. Eğer bir LKPP'nin uygun çözümler bölgesi $\triangle$ boş değilse ve amaç fonksiyonu $Z(\mathbf{x})$, $\triangle$ üzerinde sonlu bir üst sınıra sahipse LKPP çözülebilirdir.

Tanım 3.2. $x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}$ vektörleri lineer bağımsız ise $\mathtt{T} = \{x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}\}$ bir tabandır.

$J = \{1, \ldots, n\}$ indis kümesi ve $\mathtt{T} = \{x_{s_1}, \ldots, x_{s_m}\}$ verilen LKPP sisteminin bir tabanı olmak üzere $J_{\mathtt{T}}$ ve $J_{\mathtt{TD}} = J \backslash J_{\mathtt{T}}$ sırasıyla B tabanındaki x_{s_m} ve B tabanında olmayan x_j vektörlerine karşılık gelen birer j indis kümeleridir. Öte yandan, LP ile benzerlik adına Λ'_j, Λ''_j ve $\Lambda_j(\mathbf{x})$'den sırasıyla payın, paydanın ve LFP'nin azaltılmış maliyetleri

$$\begin{aligned} \Lambda'_j &= \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{s_i} - c_j \\ \Lambda''_j &= \sum_{i=1}^{m} d_{s_i} x_{s_i} - d_j \\ \Lambda_j(\mathbf{x}) &= \Lambda'_j - N(\mathbf{x})\Lambda''_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.3}$$

olmak üzere genişletilen simpleks yöntem, maksimizasyon yönlü olarak aşağıdaki gibi ilerlemektedir.

Adım 1 LPP'deki gibi LKPP'i standart forma çevir.

Adım 2 Eğer mümkünse bir başlangıç uygun taban çözümü bul.

Adım 3 Eğer tüm taban olmayan x_j $(\forall j \in J_{\text{TD}})$ değişkenleri için $\Lambda_j(\mathbf{x}) \geq 0$ ise mevcut uygun taban çözüm optimaldir, DUR.

Adım 4 Eğer en az bir $j \in J_{\text{TD}}$ için $\Lambda_j(\mathbf{x}) < 0$ oluyorsa tabana girecek uygun değişkeni seç.

Adım 5 Tabana giren değişken ile $\Lambda_j(\mathbf{x})$ hesapla ve **Adım 3**'e git.

3.1.2 Charnes - Cooper Dönüşümü

1962'de Charnes ve Cooper [5], boş olmayan, sınırlı uygun çözümler bölgesinde LKPP'nin bir LPP'ye dönüştürülerek çözülebileceğini göstermiştir.

Genel bir LKPP (3.2)'de, paydanın uygun çözümler bölgesi $\triangle$'de pozitif olduğu kabul edilerek

$$\Upsilon_j = \frac{x_j}{D(\mathbf{x})}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad \Upsilon_0 = \frac{1}{D(\mathbf{x})} \tag{3.4}$$

değişken dönüşümü yapılır. Bu dönüşüm ile amaç fonksiyonu $Z(\mathbf{x})$

$$L(\boldsymbol{\Upsilon}, \Upsilon_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j \Upsilon_j + \alpha \Upsilon_0 \tag{3.5}$$

formuna dönüşür. $D(\mathbf{x}) > 0$ kabulü ile kısıtlar,

$$-b_i \Upsilon_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Upsilon_j \leq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.6}$$

halini alır ve LKPP,

$$\begin{aligned} \max \quad & L(\boldsymbol{\Upsilon}, \Upsilon_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j \Upsilon_j + \alpha \Upsilon_0 \\ & \mathbf{A}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{b}\Upsilon_0 \leq 0 \\ & \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Upsilon} + \beta \Upsilon_0 = 1 \\ & 0 \leq \boldsymbol{\Upsilon} \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 \leq \Upsilon_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklinde olarak $n + 1$ değişkenli $m + 1$ kısıtlı LPP'ye dönüşür.

Teorem 3.1. $\Upsilon^* = [\Upsilon_0^* \ \Upsilon_1^* \ \dots \ \Upsilon_n^*]^T$ *vektörü* (3.7) *probleminin optimal çözümü ise*

$$x_j^* = \frac{\Upsilon_j^*}{\Upsilon_0^*}, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{3.8}$$

dönüşümü ile $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ \dots \ x_n^*]^T$ *vektörü de asıl LKPP* (3.2)*'nin optimal çözümüdür.*

3.1.3 Dinkelbach Algoritması

1967'de, Dinkelbach [6] lineer olması gerekmeyen kesirli programlama probleminin çözümü için bir dizi LPP çözümüne dayanan parametrik bir yaklaşım önermiştir.

Teorem 3.2. *LKPP* (3.2)*'un optimal çözümünün* $\mathbf{x}^*$ *vektörü olması için gerek ve yeter koşul* (3.9)*'in sağlanmasıdır.*

$$G(\Upsilon^*) = \max_{\mathbf{x}\in\triangle} \{N(\mathbf{x}) - \Upsilon^* D(\mathbf{x})\} = 0, \quad \Upsilon^* = \frac{N(\mathbf{x}^*)}{D(\mathbf{x}^*)} \tag{3.9}$$

Teorem 3.2 baz alınarak,

$$G(\Upsilon) = \max_{\mathbf{x}\in\triangle} \{N(\mathbf{x}) - \Upsilon D(\mathbf{x})\}, \quad \Upsilon \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

fonksiyonu yardımıyla her iterasyonda hesaplanan Υ değerleri kullanılarak oluşturulan parametrik bir LPP'nin optimal çözümü ile LKPP'ye çözüm bulunmuş olunur. Önerilmiş olan yöntemin algoritması aşağıdaki gibidir:

Adım 0 $\mathbf{x}^0 \in \triangle$ al, $\Upsilon^0 = \frac{N(\mathbf{x}^0)}{D(\mathbf{x}^0)}$ hesapla ve $i = 1$ yap.

Adım 1 $\mathbf{x}^i = \arg\max_{\mathbf{x}\in\triangle} \{N(\mathbf{x}) - \Upsilon^i D(\mathbf{x})\}$ hesapla.

Adım 2 Eğer $G(\Upsilon^i) = 0$ ise $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^i$ optimal çözümdür, DUR.

Adım 3 $\Upsilon^{i+1} = \frac{N(\mathbf{x}^i)}{D(\mathbf{x}^i)}$ hesapla, $i = i + 1$ yap ve **Adım 1**'e git.

3.1.4 Güncelleştirilmiş (Updated) Amaç Fonksiyonu Yöntemi

1972'de Bitran ve Novaes [7], deniz taşımacılığı probleminden esinlenerek bir LKPP'nin çözümünde herhangi bir değişken dönüşümü veya yeni bir değişken tanımlanmasını ve yeni bir kısıt eklenmesini gerektirmeyen kesirli amaç

fonksiyonunun $\bar{\mathbf{x}}$ noktasındaki bölgesel (local) gradyentinin

$$\nabla Z(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{(\mathbf{d}^T\bar{\mathbf{x}} + \beta)\mathbf{c} - (\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} + \alpha)\mathbf{d}}{(\mathbf{d}^T\bar{\mathbf{x}} + \beta)^2} \tag{3.11}$$

parametrik olarak hesaplandığı bir algoritma sunmuştur. Hesaplanan gradyentler, bir LPP'nin amaç fonksiyon katsayıları olarak alınarak bir dizi LPP çözülür ve böylece LKPP'nin çözümü bulunmuş olur. Yöntemde $\sum_j c_j d_j$ ve $\sum_j d_j d_j$ skaler çarpımları sırasıyla $< \mathbf{c}, \mathbf{d} >$ ve $< \mathbf{d}, \mathbf{d} >$ ile gösterilmek üzere algoritma şöyledir:

Adım 1 $i = 0$ al. $\zeta = \mathbf{c}^T - \frac{<\mathbf{c},\mathbf{d}>}{<\mathbf{d},\mathbf{d}>}\mathbf{d}^T$ hesapla ve $\max\{< \zeta, \mathbf{x} > | \ \mathbf{x} \in \triangle\}$ LPP'yi çözerek $\mathbf{x}^0$ uç noktasını bul.

Adım 2 Amaç fonksiyonunun bölgesel gradyentini $\mathbf{x}^i$ noktasında hesapla ve $\max\{\nabla Z(\mathbf{x}^i)\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \triangle\}$ LPP'yi çözerek $\mathbf{x}^{i+1}$ uç noktasını bul.

Adım 3 $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i$ ise $\mathbf{x}^i$, LKPP'nin optimal çözümüdür, DUR. Aksi halde $i = i+1$ yap ve **Adım 2**'ye git.

3.2 Lineer Kesirli Programlama Problemini Çözmek için İteratif Bir Algoritma

Bu bölümde verilecek olan LKPP çözüm yöntemi, tezin orijinalliğini oluşturacak olan Bölüm 4 ve Bölüm 5'e temel oluşturacaktır.

2020'de Ozkok [16], bir LKPP'nin çözümü için herhangi bir değişken dönüşümü veya yeni bir değişken tanımlanmasını gerektirmeyen, sürekliliğin (ε, δ)-tanımı tabanlı yeni bir iteratif algoritma sunmuştur. Yöntemde, amaç fonksiyonunun uygun çözümler bölgesinin her noktasında sürekliliğine dayanarak yakınsama kısıtı oluşturulmuş ve amaç fonksiyonu ile birleştirilerek iteratif kısıt yardımıyla LKPP iteratif LPP'e dönüştürülerek çözüm bulunmuştur.

Yorum 3.1. Genel olarak, uygun çözümler bölgesi $\triangle$ kompakt bir küme olduğundan ve $\mathbf{d}^T\mathbf{x} + \beta > 0$ kabulü ile, reel değerli $Z(\mathbf{x})$ kesirli fonksiyonu, $\triangle$ 'de sonlu optimal çözüme sahip olup tanım kümesinde süreklidir. Yani, $\forall \mathbf{x}^i \in \triangle$ için $Z(\mathbf{x})$ süreklidir. Ayrıca, $Z(\mathbf{x}^i) = Z^i$ olarak gösterilecektir.

Tanım 3.3. (Komşuluk) Bir $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ noktasının komşuluğu, $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$B(\mathbf{x}^i, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\right| < r\right\}$$

ile gösterilen bir kümedir. Ayrıca, komşuluk kavramı r yarıçaplı $\mathbf{x}^i$ merkezli bir yuvar olarak da tanımlanmaktadır.

Tanım 3.4. (Süreklilik) $Z(\mathbf{x})$, $\triangle \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde süreklidir, öyle ki her $\mathbf{x}^i \in \triangle$ noktası ve $\varepsilon > 0$ için $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i| < \delta$ iken $|Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}^i)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Tanım 3.4, geleneksel komşuluk tanımı 3.3 kullanılarak aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir:
Her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^i, \delta)$ ve $Z \in B(Z^i, \varepsilon)$ olacak şekilde $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, verilen $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ noktasında $Z(\mathbf{x})$ süreklidir.

Bu bilgilerden hareketle, $B(\mathbf{x}^i, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}^i| < \delta\}$ ve $B(Z^i, \varepsilon) = \{Z \in \mathbb{R} \mid |Z - Z^i| < \varepsilon\}$ ile tanımlanan komşulukların kartezyen çarpımı $B(\mathbf{x}^i, \delta) \times B(Z^i, \varepsilon) = \{(\mathbf{x}, Z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}^i| < \delta, |Z - Z^i| < \varepsilon\}$'dır. Kartezyen çarpım bölgesi $B(\mathbf{x}^i, \delta) \times B(Z^i, \varepsilon)$ 'ndeki tüm sıralı $(Z, \mathbf{x})$ ikilileri için, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon.\delta$ alınarak aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|Z - Z^i\right| \left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\right| < \bar{\varepsilon} \tag{3.12}$$

(3.12) eşitsizliği $\forall \bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$ sağlandığından

$$\left(Z - Z^i\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\right) = 0 \tag{3.13}$$

yakınsama kısıtı olarak yazılabilir. (3.13) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$Z\mathbf{x} = Z^i\mathbf{x} + \mathbf{x}^i Z - Z^i\mathbf{x}^i \tag{3.14}$$

elde edilir. Öte yandan, kesirli amaç fonksiyonu Z'nin,

$$\mathbf{d}^T\mathbf{x}Z + \beta Z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \alpha \tag{3.15}$$

şeklinde yazılabileceği de aşikardır. (3.14) ve (3.15) birleştirilerek, aşağıdaki lineer denklem elde edilir:

$$\left(Z^i\mathbf{d}^T - \mathbf{d}^T\right)\mathbf{x} + \left(\mathbf{d}^T\mathbf{x}^i + \beta\right)Z = Z^i\mathbf{d}^T\mathbf{x}^i + \alpha \tag{3.16}$$

Bu iki fonksiyonun yapıları birbirinden farklı olduğundan LKPP ve LPP amaç fonksiyonları sırasıyla Z ve $\bar{Z}$ ile ifade edilmektedir. (3.16) kullanılarak LKPP,

$$\begin{aligned} &\max \bar{Z} \\ &\left(Z^i\mathbf{d}^T - \mathbf{d}^T\right)\mathbf{x} + \left(\mathbf{d}^T\mathbf{x}^i + \beta\right)\bar{Z} = Z^i\mathbf{d}^T\mathbf{x}^i + \alpha, \quad \forall k \\ &\qquad \mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{3.17}$$

iteratif LPP ile çözülür. Başlangıç çözümü $(\mathbf{x}^0, Z^0)$ ile başlayarak, alt problem (3.17)'ye iteratif olarak çözüm aranır. Yani, i iterasyonunda elde edilen $(\mathbf{x}^{i*}, Z^i)$ uygun çözüm kullanılarak $i+1$ iterasyonunda $(\mathbf{x}^{i+1*}, Z^{i+1})$ optimal çözümü elde edilmeye çalışılır.

Teorem 3.3. *Kesirli ve lineer amaç fonksiyonları $(Z$ ve $\bar{Z})$'nın gradyent vektörleri, her $\mathbf{x}^i \in \triangle$ noktasında aynı değeri alır.*

İspat: [16]'den takip edilebilir.

4
LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA UYGULAMALARI

İki lineer fonksiyonun oranı olarak amaç fonksiyonu ve lineer yapıdaki kısıtları içeren optimizasyon problemi, yöneylem araştırması, yönetim bilimi ve ekonomide çeşitli karar süreçlerinin modellenmesindeki kullanışlılığı nedeniyle son yıllarda kayda değer ilgi çekmektedir. Bu bölümde, Bölüm 3'te anlatılan iteratif optimizasyon metodolojisi [16] ile gerçek hayat problemleri ele alınacak ve birden fazla amacın tek olarak ele alınma yeteneği kullanılacak olup, literatürden farklı olarak, modelin matematiksel karmaşıklığı ve çözümü eşdeğer bir LPP yardımıyla kolaylaştırılacaktır.

4.1 Lineer Kesirli Taşıma Problemi

Özel bir TP türü olarak LKTP, arz ve talep kısıtlamaları altında taşınacak malzemelerin maliyet/kar, zaman/kar veya maliyet/miktar, vb. olarak ifade edilen çeşitli oranlarını optimize eden bir problemdir. Reel hayatta sıklıkla karşılaşılan LKTP aşağıdaki gibi matematiksel olarak modellenir:

$$\begin{aligned}
&\min\,(\text{veya }\max)\ Z(\mathbf{X}) = \frac{\phi(\mathbf{X})}{\psi(\mathbf{X})} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} + p_0}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} + q_0} \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq, =, \geq, a_i \quad i = 1, \ldots m \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq, =, \geq, b_j \quad j = 1, \ldots n \\
&\mathbf{X} \geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Burada $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{m\times n}$ ve $\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{m\times n}$ amaçlar doğrultusunda pay ve payda için katsayılar matrisleri olmak üzere p_0 ve q_0 sabitleri göstermektedir. Ayrıca $a_i\,(a_i > 0, \forall i)$ ve $b_j\,(b_j > 0, \forall j)$ sırasıyla $i.$ kaynağın arzını $j.$ müşteri bölgesinin talebini

ifade etmektedir. Uygun çözümler bölgesi $\triangle$ boş olmayan kompakt bir kümedir.

Gerçek bir LKTP çalışılmak üzere tekstil ürünleri üreten ve pazarlayan bir firmanın tedarik zinciri ağının bir parçası ele alınarak on müşteri bölgesinin talebi karşılanmak üzere altı dağıtım merkezinden hizmet alınmaktadır [24]. Taşıma sırasında oluşan CO_2 emisyonu dikkate alınarak karbon ayak izinin minimize edilmesi ile tedarik zinciri yönetimine çevreci bir bakış açısı kazandırılmıştır. Müşteri bölgelerinin talepleri sırasıyla $4830, 2900, 4910, 2720, 4800, 2760, 3740, 4520, 7460$ ve 3500 adet olup dağıtım merkezlerinin arzı ise sırasıyla $6600, 9040, 7800, 9600, 7200$ ve 1900 adettir. Ayrıca, $i.$ dağıtım merkezinden $j.$ müşteri bölgesine taşınacak bir birim ürün kârı ve nakliyeden kaynaklanan CO_2 emisyon miktarı Tablo 4.1-4.2'de verilmektedir. Dağıtım merkezlerindeki işlemlerden oluşan sabit CO_2 emisyon miktarı 165000 birim olup şirketin kâr/toplam CO_2 emisyonu olarak ifade edilen lojistik oranının maksimizasyonu amaçlanmaktadır. Model, 17 kısıt ve 60 değişken ile oluşturulmuş ve iteratif eşdeğer LPP çözülerek optimal dağıtım planı bulunmuştur. Çözüm adım adım aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Başlangıç dağıtım planı

$$\mathbf{X}^0 = [x_{ij}]_{6\times 10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3100 & 0 & 3500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 160 & 1420 & 7460 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4220 & 0 & 3580 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3540 & 2720 & 580 & 2760 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2930 & 2900 & 1370 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $Z^0 = 0.5893$ lojistik oranı elde edilmiştir.

Adım 2: $\mathbf{X}^0$ ve Z^0 kullanılarak LKTP'e karşılık gelen (3.17) eşdeğer LPP çözülmüş ve $\mathbf{X}^*$ optimal dağıtım planı

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2760 & 0 & 2240 & 0 & 1600 \\ 0 & 0 & 4040 & 2720 & 0 & 0 & 0 & 2280 & 0 & 0 \\ 4830 & 0 & 0 & 0 & 1370 & 0 & 0 & 0 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3740 & 0 & 5860 & 0 \\ 0 & 2900 & 870 & 0 & 3430 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1900 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir.

Adım 3: $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^*$ olup $Z^1 = 1.3051$ lojistik oranı elde edilmiştir.

Adım 4: $Z^1 \neq Z^0$ olduğundan $i = 1$ al ve tekrar eşdeğer LPP (3.17)'yi çöz.

Adım 2: $\mathbf{X}^1$ ve Z^1 kullanılarak LKTP'e karşılık gelen (3.17) eşdeğer LPP

çözülmüş ve $\mathbf{X}^*$ optimal dağıtım planı

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2760 & 0 & 2240 & 0 & 1600 \\ 0 & 0 & 4040 & 2720 & 0 & 0 & 0 & 2280 & 0 & 0 \\ 4830 & 0 & 0 & 0 & 1370 & 0 & 0 & 0 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3740 & 0 & 5860 & 0 \\ 0 & 2900 & 870 & 0 & 3430 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1900 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilmiştir.

Adım 3: $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^*$ olup $Z^2 = 1.3051$ lojistik oranı elde edilmiştir.

Adım 4: $Z^2 = Z^1$ olduğundan optimal dağıtım planı $\mathbf{X}^1$ şeklindedir.

Tablo 4.1 Dağıtım Merkezi (DM)'den Müşteri Bölgesi (MB)'e bir birim ürünün taşıma kârı

Müşteri Bölgesi	**Dağıtım Merkezi**					
	DM1	**DM2**	**DM3**	**DM4**	**DM5**	**DM6**
MB1	15.3625	11.1725	24.875	8.35	5.2725	2.9705
MB2	16.2935	23.69	0.375	9.5125	28.2925	3.0975
MB3	16.575	19.5725	15.625	9.4325	18.375	1.7875
MB4	13.025	31.125	12.375	11.25	22.0925	1.7935
MB5	17.325	21.475	21.95	16.275	23.175	7.875
MB6	17.015	16.55	8.35	22.625	15.625	6.625
MB7	7.795	7.175	8.125	22.175	4.135	13.375
MB8	6.995	7.45	6.745	12.25	5.905	5.1875
MB9	4.175	6.345	6.425	11.125	4.865	24.075
MB10	4.0625	3.225	3.55	9.125	3.075	20.375

Tablo 4.2 Dağıtım Merkezi (DM)'den Müşteri Bölgesi (MB)'e bir birim ürünün taşımasından kaynaklanan CO_2 emisyon miktarı

Müşteri Bölgesi	**Dağıtım Merkezi**					
	DM1	**DM2**	**DM3**	**DM4**	**DM5**	**DM6**
MB1	0.7556	6.0825	14.1887	14.7755	11.2725	31.9705
MB2	8.2977	7.52	58.775	15.9512	3.2925	32.0975
MB3	8.2457	3.9572	5.9625	11.4325	3.2375	28.8987
MB4	6.0925	1.3912	6.9537	11.3825	6.0925	28.7937
MB5	10.3125	5.9475	2.295	10.2237	4.9175	27.2787
MB6	9.015	8.73755	14.3187	8.6572	14.7625	23.3625
MB7	17.695	17.2875	18.9925	7.5375	23.135	10.6337
MB8	22.068	19.4025	23.5745	12.625	25.905	12.4187
MB9	27.2827	23.3745	23.1425	12.7625	25.865	8.1175
MB10	26.0625	26.2225	26.2225	15.8012	28.8937	4.0377

Uygulamaya ek olarak, kesirli amaca sahip büyük ölçekli TP'ler rastgele veri üretilerek kurgulanmış ve test LKTP'leri oluşturulmuştur. Arz Kısıt Sayısı (AKS), Talep Kısıt Sayısı (TKS) ve Karar Değişkeni Sayısı (KDS) üretilen problemlerin boyutunu göstermek üzere, AKS, TKS ve KDS'nin toplam yürütme süresine ve iterasyon sayısına etkisi gözlemlenmiştir. Tezde tüm hesaplama testleri, 2.30 GHz CPU ve 16 GB RAM'e sahip Intel i7 11. nesil sistemi çalıştıran bir bilgisayarda GAMS 24.3.3 yazılımı ile gerçekleştirilmiş olup sonuçlar Tablo 4.3'te sunulmuştur.

Tablo 4.3 Rastgele oluşturulan lineer kesirli taşıma problemleri için elde edilen sonuçlar

	(AKS,TKS,KDS)	**İterasyon Sayısı**			**CPU Süresi (saniye)**		
		Min	**Maks**	**Ortalama**	**Min**	**Maks**	**Ortalama**
1	(10,10,100)	3	5	3.8	0.457	0.784	0.612
2	(25,25,625)	4	6	4.8	0.686	0.93	0.784
3	(50,50,2500)	5	6	5.6	0.785	1.689	1.018
4	(75,75,5625)	6	8	6.5	1.32	1.711	1.461
5	(100,100,10000)	6	8	6.8	1.829	2.631	2.13
6	(200,200,40000)	5	5	5	4.756	5.961	5.003
7	(250,250,62500)	4	5	4.9	6.457	8.682	7.649
8	(500,500, 250000)	4	4	4	36.59	44.156	40.386
9	(750,750,562500)	4	4	4	132.53	155.546	147.443
10	(1000,1000,1000000)	3	4	3.5	364.021	434.986	378.149

4.2 Lineer Kesirli Araç Rotalama Problemi

ARP'nin matematiksel modellemesinin hem optimizasyon literatürüne hem de ticari pazara katkısı tartışılmaz olan bir LKARP, $V = \{0, 1, \ldots, L, L+1\}$ ve $A = \{(i,j) : i,j \in V, i \neq j\}$ sırasıyla düğümleri ve yay (ark) kümesini belirtmek üzere $G = (V, A)$ ağı üzerinde aşağıdaki gibi matematiksel olarak modellenir:

$$
\begin{aligned}
&\min\,(\text{veya } \max)\ Z(\mathbf{X}) = \frac{\phi(\mathbf{X})}{\psi(\mathbf{X})} = \frac{\mathbf{r}^T\mathbf{X}+\alpha}{\mathbf{s}^T\mathbf{X}+\beta} \\
&\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{L+1} X_{ij}^k = K, \quad i = 0 \\
&\sum_{i=0}^{L+1} X_{il}^k - \sum_{j=0}^{L+1} X_{lj}^k = 0, \quad k = 1,\ldots,K \text{ ve } l = 1,\ldots,L \\
&\sum_{k=1}^{K}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{L+1} X_{ij}^k = 1, \quad i = 1,\ldots,L \\
&\sum_{j=1}^{L} X_{0j}^k = 1, \quad k = 1,\ldots,K \\
&\sum_{i=1}^{L} X_{i,L+1}^k = 1, \quad k = 1,\ldots,K \\
&\sum_{i=0}^{L+1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{L+1} d_i X_{ij}^k \leq C, \quad k = 1,\ldots,K \\
&Y_j \geq Y_i + 1 - L\left(1 - \sum_{k=1}^{K} X_{ij}^k\right), \quad i \neq j,\ i = 1,\ldots,L \text{ ve } j = 1,\ldots,L \\
&Y_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots,L
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Burada L, 0, $L{+}1$, K, C, d_i sırasıyla müşteri sayısını, depoyu, hayali depoyu, araç sayısını, araç kapasitesini ve tüketici talebini ifade etmektedir. Ayrıca $\mathbf{r}^T, \mathbf{s}^T, \in \mathbb{R}^L$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$'dir. Uygun çözümler bölgesi $\triangle$ boş olmayan kapalı bir kümedir.

Gerçek bir LKARP çalışılmak üzere anlaşmalı olduğu zincir marketlerin İstanbul ve İzmit satış noktalarının yumurta tedariğini karşılayan bir yumurta toptancısı firması incelenmiştir. Toplam maliyet/yük oranını (lojistik oranı) en aza indirirken mal ve hizmet sunumunu optimize etmeyi amaçlayan LKARP'e herhangi bir değişken dönüştürme tekniği kullanılmadan çözüm elde edilmiştir. Modelde maksimum yük hedefi korunurken, ulaşım giderlerini oluşturan yakıt tüketimini minimuma indiren ve dolayısıyla dünyamız için karbon ayak izini azaltan bir hedef sunularak yeşil temelli bir yaklaşım ifade edilmektedir.

Perakende sektöründe faaliyet gösteren firma için günlere göre müşteri ve araç sayılarını içeren veriler Tablo (4.4)'de verilmiştir [47]. Firmanın birbirinden bağımsız olarak müşterilerine dağıtım yapan iki aracı haftada 6 gün faaliyette bulunmaktadır. Pazartesi, Salı, Perşembe ve Cuma günleri müşteri talepleri bir araç

kapasitesini geçmediği için bu günlerde yalnızca tek araç modele dahil edilmektedir. Ayrıca, her bir araç (van tipi) $20,94$ \$/l maliyetle $8,4$ km/l performansla yakıt tüketen özelliklere sahiptir. Öte yandan, şirket sahip olduğu paketleme makinesi yardımıyla yumurtaları dağıtımdan önce 30'lu paketlere dönüştürerek bu paketlerin bulunduğu kutularda müşterilerine ulaştırmaktadır. Karayolu tonaj limiti nedeniyle araçlar maksimum 1000 adet 30'luk paket taşıyabilmektedir ve bir rotanın yükü, ziyaret edilen müşterilerin toplam talebinin 2,19 kg (1 paket yumurta ortalama ağırlığı) ile çarpımı ve sabit yük toplamına eşittir. Buradan hareketle kurulan modelde sabit maliyet ve sabit araç yükü sırasıyla 1800 \$ ve 2000 kg olarak ele alınmıştır. Dağıtım düğümleri adreslerine göre Google Haritalar [48] ve İstanbul Şehir Rehberi [49] üzerinden bulunmuş olup, Google Haritalar [48] üzerinde işaretlenerek depo dahil 59 farklı konum GPS koordinatları ile belirlenmiştir. Düğümler arasındaki mesafeler ve müşterilerin gün bazlı talepleri Tablo 4.5-4.10'da özetlenmiştir.

Tablo 4.4 Günlere göre müşteri ve araç sayılarına ilişkin veriler

Günler	Müşteri Sayısı	Araç Sayısı
Pazartesi & Cuma	5	1 (birinci araç)
Salı	9	1 (ikinci araç)
Çarşamba & Cumartesi	24	2
Perşembe	9	1 (ikinci araç)
Cuma	11	1 (ikinci araç)

Tablo 4.5 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Pazartesi & Cuma)

	Düğümler Arasındaki Mesafe (km)						
	Depo	**Başakşehir**	**Başakpazar**	**Zeytinburnu**	**Feriköy**	**Gaziosmanpaşa**	**Talep (paket)**
Depo	-	15.85	15.4	10.614	12.121	4.528	
Başakşehir	15.96	-	3.669	21.703	26.252	13.896	350
Başakpazar	15.645	3.404	-	21.642	26.191	13.415	150
Zeytinburnu	11.311	23.781	23.190	-	12.163	14.133	150
Feriköy	12.574	25.044	24.453	12.838	-	14.316	200
Gaziosmanpaşa	3.970	18.2	17.609	13.643	14.776	-	150

Tablo 4.6 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Salı)

	Düğümler Arasındaki Mesafe (km)										
	Depo	**Derince**	**Ncty**	**Yahya Kaptan**	**Çukurbağ**	**Çarşı**	**Karabaş**	**Sultanbeyli**	**Mecidiye Mah.**	**Yenidoğan**	**Talep (paket)**
Depo	-	113.245	118.65	121.32	117.026	116.99	117.862	49.827	53.563	46.179	
Derince	111.494	-	9.027	11.597	10.387	7.267	11.223	67.311	63.494	76.539	150
Ncty	119.068	10.863	-	3.741	3.058	2.853	2.12	74.885	71.068	84.113	120
Yahya Kaptan	120.02	11.815	4.22	-	4.17	4.153	3.583	75.837	72.02	85.065	130
Cukurbağ	116.089	7.884	3.776	4.129	-	1.46	1.894	71.906	68.089	81.134	100
Carşı	116.427	8.222	2.487	3.088	0.378	-	0.853	72.244	68.427	81.472	100
Karabaş	118.2	10.295	2.38	2.8	1.05	1.18	-	74.317	70.5	83.545	100
Sultanbeyli	49.36	66.595	72.95	75.62	71.326	71.290	72.162	-	3.55	8.853	100
Mecidiye Mah.	52.427	63.52	69.875	72.545	68.251	68.232	69.087	3.327	-	11.15	60
Yenidoğan	45.509	77.114	83.469	86.139	81.845	81.826	82.681	8.706	11.542	-	70

Kurulan modelin adım adım çözümü sadece Salı günü için verilecek olup tüm günler için optimum dağıtım planları elde edilmiştir. Amaç değeri hesaplanırken rota üzerindeki ilk ve son müşteriden depoya olan mesafeler de dahil edilmiştir.

Tablo 4.7 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Çarşamba & Cumartesi)

Düğümler Arasındaki Mesafe (km)														
	Depo	**Kazımkarabekir**	**Atatürk**	**FSM**	**Çarşı**	**Mehmetakif**	**Selimiye**	**İstiklal**	**İtfaiye**	**Tavukçuyolu**	**Doğanevler**	**Ihlamurkuyu**	**Dudullu**	**Talep (paket)**
Depo	-	34.52	34.098	34.45	37.19	38.041	41.423	34.91	34.494	36.083	35.05	35.25	40.04	
Kazımkarabekir	35.01	-	1.508	1.81	2.663	3.446	9.666	3.684	4.099	6.574	5.519	6.55	9.393	30
Atatürk	34.229	1.508	-	438	1.241	2.638	7.951	2.539	3.389	5.597	5.569	5.769	8.612	50
FSM	34.344	1.86	438	-	848	2.425	7.538	2.142	3.435	5.505	4.855	5.055	7.998	70
Çarşı	37.742	2.632	1.210	1.072	-	2.112	7.275	2.36	3.703	5.773	5.123	5.323	8.266	100
Mehmetakif	38.88	3.683	2.858	2.72	2.493	-	7.594	4.831	5.651	7.721	7.071	7.271	10.214	30
Selimiye	42.218	9.848	8.426	8.288	7.710	7.708	-	9.048	12.952	12.938	13.508	13.708	16.551	40
İstiklal	35.328	3.038	1.767	1.893	1.929	3.979	9.192	-	2.67	4.74	4.09	4.29	7.233	80
İtfaiye	33.923	4.227	3.265	3.391	3.89	5.467	12.986	3.063	-	2.259	1.789	2.016	5.056	70
Tavukçuyolu	36.25	6.708	5.746	5.872	6.371	7.948	13.161	5.544	2.979	-	1.7	2.122	3.633	100
Doğanevler	34.88	5.508	4.546	4.672	5.171	6.748	13.943	4.344	1.779	1.033	-	0.77	3.623	30
Ihlamurkuyu	33.129	6.279	5.857	4.343	4.942	6.519	13.182	4.115	2.003	1.623	0.59	-	3.663	30
Dudullu	37.690	9.750	9.328	7.889	8.398	9.975	16.653	7.571	5.459	4.465	3.945	3.435	-	70
Taşdelen	43.5	15.66	15.238	15.59	18.33	17.850	22.563	15.346	13.284	10.795	10.175	9.665	7.03	70
Ortaçeşme	35.715	21.296	22.104	23.626	25.196	22.406	29.429	22.916	22.5	24.089	23.056	23.256	28.046	120
Kavacık	27.708	10.091	12.097	12.449	15.189	10.861	19.422	12.909	12.493	14.082	13.049	13.249	18.039	30
Zümrütevler	44.324	16.884	16.462	16.814	17.346	18.507	14.603	14.107	15.208	12.281	13.101	13.993	13.766	50
Cevizli	49.11	21.67	21.248	21.6	22.132	23.293	19.389	18.893	19.994	16.963	20.505	18.895	18.448	40
Gümüşpınar	50.568	23.128	22.706	23.058	22.543	24.851	20.947	20.351	21.452	16.103	16.923	17.694	17.538	40
Kurfali	56.349	28.909	28.487	28.839	29.371	30.532	26.628	26.132	27.233	21.958	22.778	23.099	23.393	60
Tuzla	60.8	34.459	32.938	33.290	32.849	34.983	31.079	31.582	31.684	26.409	27.229	28	27.844	50
Ahmetyesevi	31.819	34.379	35.056	35.408	34.841	36.002	32.098	31.165	33.802	27.428	28.248	29.019	28.863	70
EsenlerMah.	57.388	29.948	29.526	30.977	29.437	31.571	27.667	27.171	28.272	22.997	23.817	24.588	24.432	70
İnönüMah.	41.055	13.615	13.193	13.545	10.416	17.236	12.736	10.838	7.555	5.456	6.276	6.997	6.941	50
Kayışdağı	39.930	12.490	12.118	12.420	10.880	16.111	13.24	7.657	5.984	4.120	4.94	5.661	5.605	80

Tablo 4.8 Mesafelere ilişkin verilerin devamı (Çarşamba & Cumartesi)

Düğümler Arasındaki Mesafe (km)												
	Taşdelen	**Ortaçeşme**	**Kavacık**	**Zümrütevler**	**Cevizli**	**Gümüşpınar**	**Kurfali**	**Tuzla**	**Ahmetyesevi**	**EsenlerMah.**	**İnönüMah.**	**Kayışdağı**
Depo	46.517	36.675	26.46	45.41	49.141	51.079	56.064	62.294	61.7	58.715	41.252	40
Kazımkarabekir	17.717	20.809	10.014	16.96	20.691	22.629	27.614	33.844	33.25	30.265	12.097	11.55
Atatürk	16.936	22.06	11.845	16.179	19.91	21.848	26.833	33.063	32.469	29.484	11.316	10.769
FSM	17.051	22.175	11.96	17.294	20.025	21.963	26.948	33.178	32.584	29.599	11.431	10.884
Çarşı	20.499	25.573	15.358	23.592	27.323	22.281	30.346	36.576	35.982	32.997	11.803	10.464
Mehmetakif	20.138	21.015	10.27	20.88	24.611	23.688	31.534	37.764	37.17	34.185	16.722	15.47
Selimiye	24.975	30.049	19.834	15.473	19.204	21.014	26.127	32.357	31.763	28.778	12.213	13.513
İstiklal	17.157	22.999	12.784	13.356	17.087	19.675	24.01	30.24	29.646	26.661	8.493	7.64
İtfaiye	14.98	21.854	11.639	17.273	21.004	18.252	27.927	34.157	33.563	30.578	7.679	6.209
Tavukçuyolu	11.73	27.481	13.966	11.81	16.191	15.279	21.156	28.024	27.430	24.445	5.152	3.900
Doğanevler	11.73	22.811	12.596	12.893	21.961	16.362	22.239	29.107	30.712	25.528	6.235	4.983
Ihlamurkuyu	11.77	22.05	11.835	13.7	18.281	17.119	28.123	34.353	33.759	30.774	7.042	5.573
Dudullu	9.037	25.621	15.406	13.495	18.076	16.914	22.791	29.659	29.065	26.08	6.837	5.585
Taşdelen	-	31.431	21.216	16.341	23.217	16.163	22.04	34.044	32.119	25.329	13.067	11.815
Ortaçeşme	34.523	-	7.724	33.416	37.147	39.085	44.07	50.300	49.706	46.721	29.258	28.006
Kavacık	24.516	8.088	-	23.409	27.14	29.078	34.063	40.293	39.699	36.714	18.546	17.999
Zümrütevler	20.577	30.905	22.040	-	5.566	8.291	13.304	19.634	19.04	16.055	7.551	8.485
Cevizli	22.299	35.691	26.826	5.879	-	4.861	10.094	16.324	15.73	12.745	12.233	13.167
Gümüşpınar	16.352	37.149	28.284	7.885	5.129	-	5.368	14.166	13.572	10.587	13.691	14.625
Kurfali	22.307	42.741	34.065	13.928	11.422	4.729	-	11.033	10.439	5.817	19.472	17.625
Tuzla	26.758	47.381	38.516	18.379	15.873	12.493	9.909	-	1.956	5.218	23.923	24.857
Ahmetyesevi	30.989	48.4	39.535	19.398	16.892	13.512	10.928	1.879	-	4.991	24.942	25.876
EsenlerMah.	23.346	43.969	35.104	14.967	12.461	9.081	5.7	6.184	4.738	-	20.511	21.445
İnönüMah.	15.048	27.636	18.771	7.319	11.9	13.61	18.723	24.953	24.359	21.374	-	1.66
Kayışdağı	13.712	26.511	17.646	8.188	12.769	14.369	17.756	25.822	25.228	22.243	1.53	-

Tablo 4.9 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Perşembe)

Düğümler Arasındaki Mesafe (km)											
	Depo	**Çekmeköy**	**Sancaktepe**	**Sarıgazi**	**Dudullu**	**Yeni Çamlıca**	**Fındıklı**	**İçerenköy**	**Fikirtepe**	**FetihMah.**	**Talep (paket)**
Depo	-	40.738	40.25	41.57	36.996	39.938	42.996	41.193	42.94	41.577	
Çekmeköy	39.34	-	4.44	5.76	3.141	7.203	10.365	10.625	16.845	15.177	150
Sancaktepe	41.24	3.03	-	1.44	3.742	6.19	9.99	10.25	16.47	15.107	120
Sarıgazi	41.1	2.89	1.529	-	5.391	7.007	11.38	11.64	17.86	16.497	130
Dudullu	36.136	3.29	3.503	4.723	-	4.628	7.79	8.05	14.27	9.912	100
Yeni Çamlıca	3.926	6.682	5.865	6.723	4.124	-	5.09	5.72	12.94	9.682	100
Fındıklı	41.291	10.234	9.417	11.667	7.676	5.069	-	1.799	9.019	7.656	100
İçerenköy	39.722	10.565	9.748	11.998	8.007	5.237	1.813	-	7.212	6.039	100
Fikirtepe	43.22	17.452	16.705	18.885	13.426	12.077	10.506	7.201	-	5.077	60
FetihMah.	40.006	13.618	12.871	15.051	9.839	9.184	9.316	7.513	4.04	-	70

Adım 1: $\mathbf{X}^0$ başlangıç rotası $0 \to 9 \to 1 \to 6 \to 2 \to 7 \to 4 \to 5 \to 3 \to 8$ ve $Z^0 = 0.625$ lojistik oranı elde edilmiştir.

Adım 2: $\mathbf{X}^0$ ve Z^0 kullanılarak LKARP'e karşılık gelen (3.17) eşdeğer LPP çözülmüş ve $\mathbf{X}^*$ optimal rotası $0 \to 6 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1 \to 8 \to 7 \to 9$ olarak elde edilmiştir.

Adım 3: $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^*$ olup $Z^1 = 0.559$ lojistik oranı elde edilmiştir.

Tablo 4.10 Mesafe ve taleplere ilişkin veriler (Cuma)

	Düğümler Arasındaki Mesafe (km)												
	Depo	**Kaynarca**	**Kartal**	**Küçükyalı**	**Atakent**	**Namıkkemal**	**Yunusemre**	**Bulgurlu**	**Çengelköy**	**Şerifali**	**SelamiAli**	**Fıstıkağacı**	**Talep (paket)**
Depo	-	57.163	50.068	43.16	34.735	35.265	36.026	35.726	36.25	40.443	40.02	39.594	
Kaynarca	58.167	-	8.111	17.118	25.530	24.876	24.315	25.042	27.148	22.462	28.438	28.012	80
Kartal	50.14	8.208	-	10.19	18.728	19.316	18.775	18.114	20.22	17.778	21.510	21.084	130
Küçükyalı	43.323	16.596	9.601	-	11.811	12.499	11.938	11.297	17.133	10.955	14.693	14.267	100
Atakent	34.46	25.458	18.363	12.071	-	1.844	2.806	3.056	3.52	5.01	7.83	7.404	70
Namıkkemal	35.5	24.937	18.433	11.525	1.799	-	0.876	1.49	2.943	6.294	6.794	6.368	100
Yunusemre	36.275	23.805	17.861	10.953	2.455	0. 876	-	1.342	3.664	6.883	6.806	6.38	100
Bulgurlu	36.618	25.063	18.068	11.06	3.103	1.532	1.544	-	2.668	7.668	5.320	4.894	120
Çengelköy	36.973	27.205	20.21	17.982	4.018	2.939	3.499	2.147	-	8.023	5.688	5.262	100
Şerifali	39.041	22.113	16.565	10.917	4.548	6.214	6.159	7.524	7.698	-	13.811	13.385	100
SelamiAli	40.71	28.703	21.708	14.7	8.375	7.296	7.242	5.842	6.99	13.983	-	0.977	50
Fıstıkağacı	40.2	28.193	21.198	14.190	7.865	6.786	6.732	5.332	6.48	13.473	1.41	-	50

Adım 4: $Z^1 \neq Z^0$ olduğundan $i = 1$ al ve tekrar eşdeğer LPP (3.17)'i çöz.

Adım 2: Bu değerler kullanılarak $\mathbf{X}^*$ optimal rotası $0 \to 7 \to 6 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1 \to 8 \to 9$ olarak bulunmuştur.

Adım 3: $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^*$ olup $Z^2 = 0.56$ lojistik oranı elde edilmiştir.

Adım 4: $Z^2 \neq Z^1$ olduğundan $i = 2$ al ve tekrar eşdeğer LPP (3.17)'i çöz.

Adım 2: Bu değerler kullanılarak $\mathbf{X}^*$ optimal rotası $0 \to 7 \to 6 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1 \to 8 \to 9$ olarak bulunmuştur.

Adım 3: $\mathbf{X}^3 = \mathbf{X}^*$ olup $Z^3 = 0.56$ lojistik oranı elde edilmiştir.

Adım 4: $Z^3 = Z^2$ olduğundan Salı günü için optimal rota $0 \to 7 \to 6 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1 \to 8 \to 9$ şeklindedir.

Tablo 4.11 Mevcut ve elde edilen rotaların karşılaştırılması

Günler	**Mevcut**		**Model ile Elde Edilen**		**İyileştirme (%)**
	Rota	**Değer**	**Rota**	**Değer**	
Pazartesi & Cuma	$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$	0.458	$0 \to 4 \to 5 \to 3 \to 1 \to 2$	0.458	0
Salı	$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9$	0.562	$0 \to 7 \to 6 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1 \to 8 \to 9$	0.56	**0.356**
Çarşamba & Cumartesi	$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11 \to 12 \to 13 \to 14 \to 15$ $0 \to 16 \to 17 \to 18 \to 19 \to 20 \to 21 \to 22 \to 23 \to 24$	0.448	$0 \to 8 \to 11 \to 10 \to 9 \to 13 \to 12 \to 24 \to 23 \to 16 \to 17 \to 18 \to 19 \to 22 \to 20 \to 21$ $0 \to 2 \to 3 \to 1 \to 6 \to 7 \to 4 \to 5 \to 15 \to 14$	0.435	**2.902**
Perşembe	$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9$	0.479	$0 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1 \to 5 \to 6 \to 7 \to 9 \to 8$	0.476	**0.626**
Cuma	$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11$	0.479	$0 \to 8 \to 11 \to 10 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 9 \to 3 \to 2 \to 1$	0.466	**2.714**
Toplam	2.426		2.395		**1.278**

Günler itibariyle elde edilen tüm rotalar, firmanın mevcut rotası ve bu rotalar arasındaki farkın tespit edilerek iyileştirme yüzdesi Tablo 4.11'de gösterilmiştir. Araçların güzergâhları incelendiğinde haftalık bazda toplam kesirli amaç değerinde $\%1.2784$'lik bir iyileşme görülmektedir. Aylık ve yıllık bazda hedef değerdeki iyileşme dikkate alındığında önemli bir mali kazanım elde edildiği görülmektedir. Öte yandan mesafeye bağlı olarak minimum maliyetle maksimum yük taşımacılığı ile çevre kirliliği ve karbon emisyonu vb. faktörlerin de azaldığı göz önünde bulundurulmalıdır. Elde edilen rota ile mevcut dağılıma göre karbon ayak izinde azalma sağlanmış ve mümkün olan maksimum yük en temiz şekilde taşınmıştır.

5
ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ PROGRAMLAMA PROBLEMİNE ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Burada önerilecek olan algoritmanın temeli, ÇALKPP için geleneksel süreklilik tanımını ve ağırlıklı toplamlar yaklaşımını kullanarak çözüm bulmaktır. Ayrıca, bir ÇALKPP'yi herhangi bir dönüşüm yapılmaksızın doğrudan çözmek için hiçbir yöntem/algoritma olmadığı gerçeğinden hareketle önerilen yöntem ile bu zor problem, dönüşüm kullanılmadan sadece lineer yapıda kısıt eklenerek oluşturulan eşdeğer LPP yardımıyla iteratif olarak optimize edilmektedir. Sunulan yöntemin etkinliği ve performansı, literatürden bir dizi sayısal örnek aracılığıyla ve rastgele büyük ölçekli test senaryoları oluşturularak analiz edilecektir.

5.1 Problem Tanımı ve Ön Bilgiler

Birbiriyle çelişebilen ve aynı anda optimize edilemeyen birden fazla lineer kesirli amaca sahip herhangi bir ÇALKPP aşağıdaki gibi formüle edilir:

$$\begin{aligned} &\min\ (Z_1, \ldots, Z_p) \\ &\mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{5.1}$$

Burada $Z_k(\mathbf{x}) = \frac{N_k(\mathbf{x})}{D_k(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{c_k}^T\mathbf{x}+\alpha_k}{\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}+\beta_k}$ $(\mathbf{c}_k, \mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^n,\ \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ ve $k = 1, 2, \ldots, p)$ olmak üzere karar uzayı $\triangle = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\}$ boş olmayan kompakt bir kümedir. Genel olarak, uygun çözümler bölgesi $\triangle$'de $D_k(\mathbf{x}) = \mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}^+$ olduğu kabul edilmektedir. ÇALKPP'de olduğu gibi verilecek olan tüm tanım ve bilgiler minimizasyon yönünde çalışacak problem için geçerli olup algoritmanın esnekliği sayesinde kolayca maksimizasyon yönünde de güncellenebilmektedir.

Aşağıdaki bazı tanımlar Bölüm 2'de ÇALPP ve Bölüm 3'te tek amaçlı LKPP

için verilmiş olup ÇALKPP için geçerli olacak benzer gösterimler ve tanımlar sunulmaktadır:

Tanım 5.1. Eğer her $k = 1, \ldots, p$ için $\frac{N_k(\mathbf{y})}{D_k(\mathbf{y})} \leq \frac{N_k(\mathbf{x}^*)}{D_k(\mathbf{x}^*)}$ ve en az bir k için $\frac{N_k(\mathbf{y})}{D_k(\mathbf{y})} < \frac{N_k(\mathbf{x}^*)}{D_k(\mathbf{x}^*)}$ olacak şekilde karar uzayında bir başka $\mathbf{y}$ çözümü yoksa uygun çözüm $\mathbf{x}^*$ Pareto-optimal çözümdür.

Yorum 5.1. $\left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k\right) > 0$ kabulü ile, tüm kesirli fonksiyonlar $Z_k(\mathbf{x})$, $\mathbb{R}$'de değer alır ve tanım kümelerinde süreklidir. Yani, $\forall k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\forall \mathbf{x}^i \in \triangle$ için $Z_k(\mathbf{x})$ süreklidir. Ayrıca, $Z_k\left(\mathbf{x}^i\right) = {Z_k}^i$ olarak gösterilecektir.

Tanım 5.2. Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $Z_k(\mathbf{x})$, $\triangle \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde süreklidir, öyle ki her $\mathbf{x}^i \in \triangle$ noktası ve $\varepsilon > 0$ için $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i| < \delta_k$ iken $\left|Z_k\left(\mathbf{x}\right) - Z_k\left(\mathbf{x}^i\right)\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_k > 0$ sayısı vardır.

Tanım 5.2, geleneksel komşuluk tanımı 3.3 kullanılarak aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir:
Her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}^+$ için, $\forall \mathbf{x} \in B\left(\mathbf{x}^i, \delta_k\right)$ ve $Z_k \in B\left({Z_k}^i, \varepsilon\right)$ olacak şekilde $\delta_k > 0$ bulunabiliyorsa, verilen $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^n$ noktasında $Z_k\left(\mathbf{x}\right)$ süreklidir.

5.2 İteratif Bir Çözüm Önerisi

Bölüm 5.1'de verilen tanımlar ve gösterimler yardımıyla $B\left(\mathbf{x}^i, \delta_k\right) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}^i| < \delta_k\right\}$ ve $B\left({Z_k}^i, \varepsilon\right) = \left\{Z_k \in \mathbb{R} \mid \left|Z_k - {Z_k}^i\right| < \varepsilon\right\}$ ile tanımlanan komşulukların kartezyen çarpımı $B\left(\mathbf{x}^i, \delta_k\right) \times B\left({Z_k}^i, \varepsilon\right) = \left\{(\mathbf{x}, Z_k) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}^i| < \delta_k, \left|Z_k - {Z_k}^i\right| < \varepsilon\right\}$'dır. Kartezyen çarpım bölgesi $B\left(\mathbf{x}^i, \delta_k\right) \times B\left({Z_k}^i, \varepsilon\right)$'deki tüm sıralı $\forall k$, $(Z_k, \mathbf{x})$ ikililer için, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon.\delta_k$ alınarak aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|Z_k - {Z_k}^i\right| \left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\right| < \bar{\varepsilon} \tag{5.2}$$

(5.2) eşitsizliği $\forall \bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$ sağlandığından

$$\left(Z_k - {Z_k}^i\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\right) = 0 \tag{5.3}$$

yakınsama kısıtı olarak yazılabilir. (5.3) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$Z_k\mathbf{x} = {Z_k}^i\mathbf{x} + \mathbf{x}^i Z_k - {Z_k}^i\mathbf{x}^i, \quad k = 1, 2, \ldots, p \tag{5.4}$$

elde edilir. Öte yandan, $\forall k$ için Z_k kesirli amaç fonksiyonlarının,

$$\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}Z_k + \beta_k Z_k = {\mathbf{c}_k}^T\mathbf{x} + \alpha_k \tag{5.5}$$

şeklinde yazılabileceği de aşikardır. (5.4) ve (5.5) birleştirilerek, aşağıdaki lineer denklem elde edilir:

$$\left(Z_k{}^i \mathbf{d_k}^T - \mathbf{c_k}^T\right)\mathbf{x} + \left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}^i + \beta_k\right)\bar{Z}_k = Z_k{}^i\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}^i + \alpha_k \tag{5.6}$$

(5.6) kullanılarak, ÇALKPP aşağıdaki ÇALPP'ye indirgenmiş olur.

$$\begin{aligned} &\min\ \left(\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \ldots, \bar{Z}_p\right) \\ &\left(Z_k{}^i \mathbf{d_k}^T - \mathbf{c_k}^T\right)\mathbf{x} + \left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}^i + \beta_k\right)\bar{Z}_k = Z_k{}^i\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}^i + \alpha_k, \quad \forall k \\ &\mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{5.7}$$

$\sum_{k=1}^{p} \omega_k = 1$ olmak üzere, ağırlıklı toplamlar yaklaşımı yardımıyla ÇALPP (5.7),

$$\begin{aligned} &\min \sum_{k=1}^{p} \omega_k \bar{Z}_k \\ &\left(Z_k{}^i \mathbf{d_k}^T - \mathbf{c_k}^T\right)\mathbf{x} + \left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}^i + \beta_k\right)\bar{Z}_k = Z_k{}^i\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}^i + \alpha_k, \quad \forall k \\ &\mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{5.8}$$

iteratif LPP ile çözülür. Burada, i üst simgesi iterasyon sayacını göstermektedir. Başlangıç çözümü $(x^0, Z_k{}^0)$ ile başlayarak, alt problem (5.8)'e iteratif olarak çözüm aranır. Yani, i iterasyonunda elde edilen $(x^{i*}, Z_k{}^i)$ uygun çözümü kullanılarak $i+1$ iterasyonunda $(x^{i+1*}, Z_k{}^{i+1})$ optimal çözümü elde edilmeye çalışılır.

Önerme 5.1. *$\forall k$ için* (5.5)*'teki Z_k kesirli amaç fonksiyonlarının ve* (5.6)*'daki $\bar{Z}_k$ lineer amaç fonksiyonlarının gradiyet vektörleri, her $\mathbf{x}^i \in \triangle$ noktasında aynı değeri alır.*

İspat: Z_k kesirli amaç fonksiyonlarının gradyent vektörü şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \nabla Z_k\left(\mathbf{x}\right) &= \frac{\left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k\right)\nabla\left(\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} + \alpha_k\right) - \left(\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} + \alpha_k\right)\nabla\left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k\right)}{\left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k\right)^2} \\ &= \frac{\left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k\right)\mathbf{c_k}^T - \left(\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} + \alpha_k\right)\mathbf{d_k}^T}{\left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k\right)^2} = \frac{\mathbf{c_k}^T - \frac{\left(\mathbf{c_k}^T\mathbf{x} + \alpha_k\right)}{\left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k\right)}\mathbf{d_k}^T}{\left(\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k\right)} \\ &= \frac{\mathbf{c_k}^T - Z_k(\mathbf{x})\mathbf{d_k}^T}{\mathbf{d_k}^T\mathbf{x} + \beta_k} \end{aligned} \tag{5.9}$$

Ayrıca, $\mathbf{x}^i$ noktasındaki gradyent vektör değeri

$$\nabla Z_k\left(\mathbf{x}^i\right) = \frac{\mathbf{c_k}^T - Z_k(\mathbf{x}^i)\mathbf{d_k}^T}{\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}^i + \beta_k} = \frac{\mathbf{c_k}^T - Z_k{}^i\mathbf{d_k}^T}{\mathbf{d_k}^T\mathbf{x}^i + \beta_k} \tag{5.10}$$

olarak yazılabilir. (5.6) kullanılarak, $\bar{Z}_k(\mathbf{x})$ lineer amaç fonksiyonlarının gradyent vektörü

$$\begin{aligned} \left(Z_k{}^i \mathbf{d_k}^T - \mathbf{c_k}^T\right) \nabla \mathbf{x} + \left(\mathbf{d_k}^T \mathbf{x}^i + \beta_k\right) \nabla \bar{Z}_k &= 0 \\ \nabla \bar{Z}_k(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{c_k}^T - Z_k{}^i \mathbf{d_k}^T}{\mathbf{d_k}^T \mathbf{x}^i + \beta_k} \end{aligned} \tag{5.11}$$

şeklindedir. $\mathbf{x}^i$ noktasındaki gradyent vektör değeri de aşağıdaki gibidir:

$$\nabla \bar{Z}_k\left(\mathbf{x}^i\right) = \frac{\mathbf{c_k}^T - Z_k{}^i \mathbf{d_k}^T}{\mathbf{d_k}^T \mathbf{x}^i + \beta_k} \tag{5.12}$$

Sonuç 5.1. *Lineer amaç fonksiyonundaki bir azalış $\bar{Z}_k(\mathbf{x}^i) \geq \bar{Z}_k(\mathbf{x}^*)$, lineer kesirli amaç fonksiyonundaki azalış $Z_k(\mathbf{x}^i) \geq Z_k(\mathbf{x}^*)$ anlamına gelir.*

Teorem 5.1. *$x^0 \in \triangle$ başlangıç noktasından başlayarak* (5.8)*'in ardışık optimal çözümleri $x^1, x^2, \ldots, x^i, x^{i+1}, \ldots$ olmak üzere $Z_k{}^i$ kesirli amaç fonksiyon değerleri, ardışık optimal çözümlerde $Z_k{}^0 \geq Z_k{}^1 \geq \cdots \geq Z_k{}^i \geq Z_k{}^{i+1} \geq \ldots$ olacak şekilde artmayan bir dizi oluşturur.*

İspat: Boş olmayan $\triangle^i$ kümesi $\triangle^i = \triangle \cap B(\mathbf{x}^i, \delta_k)$ ile tanımlansın. Tüm $\mathbf{x} \in \triangle^i$ noktaları için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$Z_k(\mathbf{x}) \geq \min_{\mathbf{x} \in \triangle^i} Z_k(\mathbf{x}) \tag{5.13}$$

$\mathbf{x}^i \in \triangle^i$ ve $Z_k{}^i$ olduğu göz önünde bulundurularak, $\min\limits_{\mathbf{x} \in \triangle^i} Z_k(\mathbf{x}) = Z_k(\mathbf{x}^*)$ ise (5.13) eşitsizliği,

$$Z_k(\mathbf{x}^i) \geq Z_k(\mathbf{x}^*) \tag{5.14}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Önerilen yöntemde, bir sonraki iterasyonda optimal $\mathbf{x}^*$ noktası kullanıldığından $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^*$ şeklinde tanımlanabilir. Böylece, (5.14) eşitsizliği $Z_k{}^i \geq Z_k{}^{i+1}$ ile gösterilir. Aynı işlem $\triangle^{i+1} = \triangle \cap B(\mathbf{x}^{i+1}, \delta_k)$ kümesi için yinelenirse tüm $\mathbf{x}^{i+1} \in \triangle^{i+1}$ noktaları için

$$Z_k(\mathbf{x}^{i+1}) \geq Z_k(\mathbf{x}^{i+2}) \tag{5.15}$$

elde edilir, yani $Z_k{}^{i+1} \geq Z_k{}^{i+2}$ olur. Bu prosedüre devam edilirse, kesirli amaç fonksiyonlarının değerlerinin aşağıdaki gibi artmayan bir dizi ürettiği söylenebilir.

$$Z_k{}^0 \geq Z_k{}^1 \geq \cdots \geq Z_k{}^i \geq Z_k{}^{i+1} \geq \ldots, \ \forall k \in \mathbb{N}^+, \ \forall i \in \mathbb{N} \tag{5.16}$$

Teorem 5.2. *Artmayan $\left(Z_k{}^i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi alttan sınırlı ise yakınsaktır.*

Sonuç 5.2. *Eğer $\triangle$ uygun çözümler bölgesi sınırlı ise $\left(Z_k{}^i\right)$ dizisi alttan sınırlı*

olduğundan her zaman yakınsaktır. Yani, iteratif LPP (5.8)*'in uygun bölge üzerinde her zaman bir optimal çözümü vardır.*

5.2.1 Başlangıç Noktası Belirleme

Algoritmayı başlatmak için, rastgele bir değer seçilebilir veya $\mathbf{x^0}$ başlangıç noktası, karar uzayı $\triangle$ üzerinde aşağıdaki problemlerden biri çözülerek belirlenebilir.

$$\min_{\mathbf{x}\in\triangle} \; 0 \tag{5.17a}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\triangle} \; \mathbf{c_k}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \tag{5.17b}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\triangle} \; -\mathbf{d_k}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \tag{5.17c}$$

$$\min_{\mathbf{x}\in\triangle} \; \left(\mathbf{c_k}^{\mathbf{T}} - \mathbf{d_k}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{x} \tag{5.17d}$$

5.2.2 Önerilen algoritma

Daha önceki tanım ve ifadeler dikkate alındığında önerilen algoritma şu şekildedir:

Adım 0 $\forall k$ için amaç fonksiyon ağırlıkları ω_k ile birlikte ÇALKPP (5.1)'i yükle.

Adım 1 Karşılık gelecek amaç fonksiyon değerleri ${Z_k}^0$ için başlangıç çözümü $\mathbf{x^0}$ belirle ve iterasyon sayacını $i = 0$ oluştur.

Adım 2 İteratif LPP (5.8)'i çözerek $\mathbf{x}^*$ optimal çözümünü bul.

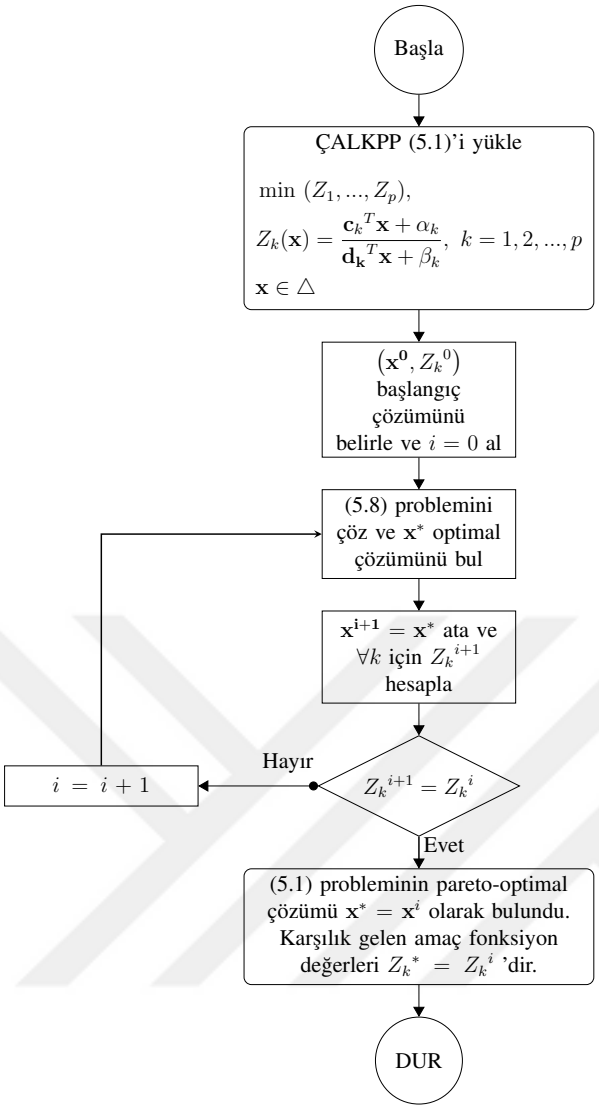
Adım 3 $\mathbf{x^{i+1}} = \mathbf{x}^*$ ata ve $\forall k$ için ${Z_k}^{i+1} = Z_k\left(\mathbf{x^{i+1}}\right)$ hesapla.

Adım 4 ${Z_k}^{i+1} = {Z_k}^i$ ise ÇALKPP (5.1)'in pareto-optimal çözümü $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^i$ 'dir. Amaç fonksiyon değerleri $Z_k^* = {Z_k}^i$ olup DUR. Aksi halde, iterasyon sayacını artır; $i = i + 1$ ve **Adım 2**'ye dön.

Sunulan algoritmanın akış şeması Şekil 5.1'de verilmiştir. Algoritma, minimum amaç yönü ile sunulmakla birlikte yöntemin esnekliği sayesinde ÇALKPP'nin yapısına göre prosedür maksimum amaç doğrultusunda rahatlıkla güncellenebilmektedir.

5.3 Önerilen Yöntemin Etkinliği

Önerilen iteratif yöntem sonucunun ideal çözüme yakınlık derecesini belirlemek için, uzaklık fonksiyonları (metrik) ailesi kullanılabilir. Kullanılacak olan metrik



Şekil 5.1 Önerilen algoritmanın akış şeması

ailesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$L_\lambda(\mathbf{w}, p) = \left[\sum_{k=1}^{p} {w_k}^\lambda |1 - d_k|^\lambda\right]^{\frac{1}{\lambda}} \tag{5.18}$$

Burada d_k, $k.$ amaca göre $\mathbf{x}^*$ pareto-optimal çözüm vektörünün ideal çözüm vektörüne yakınlık derecesini göstermektedir. $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_p)$ amaçların tercih seviyelerini gösteren bir ağırlık vektörü olup λ ($1 \leq \lambda \leq \infty$), bir mesafe parametresini temsil etmektedir. $\lambda = 1, 2$ ve ∞ için $L_\lambda(\mathbf{w}, p)$ düzenlenirse

$$L_1(\mathbf{w}, p) = \left|1 - \sum_{k=1}^{p} w_k d_k\right| \tag{5.19}$$

$$L_2(\mathbf{w}, p) = \left[\sum_{k=1}^{p} {w_k}^2 |1 - d_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.20}$$

$$L_\infty(\mathbf{w}, p) = \max \left\{ w_k |1 - d_k| \right\}, \;\; k = 1, 2, \ldots, p \tag{5.21}$$

yazılabilir. Burada, $d_k = \frac{(Z_k\text{'nın ideal değeri})}{(Z_k\text{'nın etkin değeri})}$'dir.

Sonuç olarak, bazı λ'lar için $\min L_\lambda(\mathbf{w}, p)$ elde edilirse ideal çözüme yakın bir pareto-optimal çözüm veren yaklaşımın diğerinden daha iyi olduğu söylenebilir.

5.4 Açıklayıcı Örnek

Bu bölümde, önerilen algoritma gösterilmek üzere literatürden alınan bir sayısal örnek sunulmuştur. Algoritmanın adımları, verilen örnek için detaylı olarak gösterilmiş olup Tablo 5.1 'de önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar verilerek bildirilen çalışma ile karşılaştırılmıştır.

Örnek 5.1. Deterministik olarak formüle edilmiş ÇALKPP [50]:

$$\begin{aligned}
\min \; & \left(Z_1(\mathbf{x}) = \frac{31x_{11} + 18x_{12} + 30x_{21} + 20x_{22}}{30x_{11} + 17x_{12} + 29x_{21} + 19x_{22}}, \; Z_2(\mathbf{x}) = \frac{7x_{11} + 4x_{12} + 6x_{21} + 4x_{22}}{6x_{11} + 3x_{12} + 6x_{21} + 4x_{22}} \right) \\
& x_{11} + x_{12} \leq 0.3857, \\
& x_{21} + x_{22} \leq 0.803, \\
& x_{11} + x_{21} \geq 0.3333, \\
& x_{12} + x_{22} \geq 0.6222, \\
& x_{ij} \geq 0, \;\; i = 1, 2; \; j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

ele alınmıştır. $\triangle$ uygun çözümler uzayını göstermek üzere ağırlıklar her bir amaç fonksiyonu için eşit kabul edilmiştir.

Adım 1: LPP (5.17a) çözülerek başlangıç noktası $\mathbf{x}^0 = (0, 0.3857, 0.5665, 0.2365)$ ve amaç fonksiyon değerleri ${Z_1}^0 = 1.0433, \; {Z_2}^0 = 1.0701$ elde edilir.

Adım 2: Elde edilen başlangıç değerleri kullanılarak, (5.8)'e karşılık gelen LPP şu şekilde oluşturulur:

$$\begin{aligned}
\min \; & \left(\frac{1}{2}\bar{Z}_1 + \frac{1}{2}\bar{Z}_2 \right) \\
& 0.2977x_{11} - 0.2646x_{12} + 0.2545x_{21} - 0.1781x_{22} + 27.4789\bar{Z}_1 = 28.6676, \\
& -0.5794x_{11} - 0.7897x_{12} + 0.4206x_{21} + 0.2804x_{22} + 5.5021\bar{Z}_2 = 5.8878, \\
& \mathbf{x} \in \triangle
\end{aligned} \tag{5.23}$$

(5.23)'ün optimal çözümü, $\mathbf{x}^* = (0.1525, 0, 0.1808, 0.6222)$'dir.

Adım 3: $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^* = (0.1525, 0, 0.1808, 0.6222)$ ve amaç fonksiyon değerleri ${Z_1}^1 = 1.0441$, ${Z_2}^1 = 1.03397$'dir.

Adım 4: ${Z_k}^1 \neq {Z_k}^0$ olduğundan, $i = 1$ al ve **Adım 2**'ye git.

Adım 2: ${Z_k}^1$ değerleriyle oluşturulan (5.8) iteratif LPP:

$$\begin{aligned} \min \ & \left(\frac{1}{2}\bar{Z}_1 + \frac{1}{2}\bar{Z}_2\right) \\ & 0.3246x_{11} - 0.2494x_{12} + 0.2805x_{21} - 0.1611x_{22} + 21.64\bar{Z}_1 = 22.5955, \\ & -0.7961x_{11} - 0.8981x_{12} + 0.2038x_{21} + 0.1359x_{22} + 4.4886\bar{Z}_2 = 4.6411, \\ & \mathbf{x} \in \triangle \end{aligned} \tag{5.24}$$

(5.24)'ün optimal çözümü $\mathbf{x}^* = (0.1525, 0, 0.1808, 0.6222)$'dir.

Adım 3: $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^* = (0.1525, 0, 0.1808, 0.6222)$ olup karşılık gelen amaç fonksiyon değerleri ${Z_1}^2 = 1.0441$, ${Z_2}^2 = 1.03397$'dir.

Adım 4: ${Z_k}^2 = {Z_k}^1$ olduğundan Örnek 5.1'in pareto-optimal çözümü ve etkin noktadaki amaç fonksiyon değerleri $\mathbf{x}^1 = (0.1525, 0, 0.1808, 0.6222)$ ve ${Z_1}^1 = 1.0441$, ${Z_2}^1 = 1.03397$'dir.

Tablo 5.1 Örnek için karşılaştırma sonuçları

Örnek	Atıf	Çözüm	Amaçlar		Metrik		
			Z_1	Z_2	L_1	L_2	L_∞
5.1	Önerilen Algoritma	$(0.1525, 0, 0.1808, 0.6222)$	1.0441	1.034	**0.0013**	**0.0013**	**0.0013**
	Gessesse et al. [50] (Bulanık Yaklaşım)	$(0.2541, 0, 0.1808, 0.6222)$	1.0428	1.0498	0.0082	0.0076	0.0075
	Gessesse et al. [[50]] (Genetik Algoritma)	$(0.0704, 0.0127, 0.9208, 0.0577)$	1.0352	1.0134	0.0132	0.0106	0.0102
	İdeal Çözüm	-	1.0415	1.034	-	-	-

Ek olarak, ÇALKPP yapısında modellenen büyük ölçekli gerçek hayat problemleri önerilen yöntemle çözülebilmektedir. Bu noktadan hareketle, literatürdeki küçük uygulamaların yanı sıra çalışmada rastgele veri üretimi yoluyla büyük ölçekli ÇALKPP'ler oluşturulmuştur. Her test problemi için tüm parametreler, amaç sayısına bağlı olarak rasgele tamsayılardan oluşturularak Karar Değişkeni Sayısı (KDS) ve Kısıt Sayısı (KS)'nın önerilen prosedürün iterasyon sayısı ve genel yürütme süresi üzerindeki etkisi gösterilerek bulgular Tablo 5.2'de verilmiştir. Yaşam problemlerinde gerçeklikten uzaklaşmamak adına maksimum amaç sayısı olarak $k = 5$ alınmıştır. Bulgular, gerçek yaşam problemlerini çözmede yeni geliştirilen yöntemin, büyük ölçekli problemlerde dahi makul bir süre ve yinelemede pareto optimal çözümü bulabileceğini göstermektedir.

Tablo 5.2 Rastgele oluşturulan çok amaçlı lineer kesirli programlama problemleri için önerilen algoritma ile elde edilen sonuçlar

		İterasyon Sayısı			CPU Süresi (saniye)		
Amaç sayısı	(KDS, KS)	Min	Maks	Ortalama	Min	Maks	Ortalama
2	$(5,5)$	1	5	2.33	0.434	3.3509	1.2252
	$(10,10)$	1	6	3.9	0.543	1.828	1.3716
	$(20,20)$	3	9	5.4	1.474	2.6659	1.9139
	$(30,30)$	4	8	5.4	1.3579	2.4959	1.7112
	$(40,40)$	3	12	6.33	1.3739	2.307	1.8629
	$(50,50)$	3	12	6.8	1.419	2.753	2.1443
	$(60,60)$	4	10	7.3	1.601	3.1539	2.3954
	$(70,70)$	5	9	7.1	1.8819	2.694	2.3899
	$(80,80)$	5	9	6.8	1.9799	2.9459	2.3665
	$(100,100)$	7	17	9.7	2.4659	3.7843	3.5149
3	$(5,5)$	1	5	2.7	0.914	1.772	1.258
	$(10,10)$	1	6	3.1	1.077	2.651	1.6736
	$(20,20)$	3	7	4.7	1.9469	3.148	2.3511
	$(30,30)$	5	9	6.1	2.13	3.9829	2.6633
	$(40,40)$	3	8	5.7	1.9709	2.9979	2.4389
	$(50,50)$	5	10	6.5	2.366	3.4369	2.8446
	$(60,60)$	5	11	7.5	2.364	3.893	3.1223
	$(70,70)$	6	12	8	2.753	3.7909	3.284
	$(80,80)$	5	13	8.3	2.786	4.3259	3.4476
	$(100,100)$	5	11	7.3	2.268	3.9989	3.1855
4	$(5,5)$	1	5	2.5	0.914	2.409	1.4377
	$(10,10)$	2	7	4.1	1.23	3.355	2.2841
	$(20,20)$	3	7	4.7	2.423	3.243	2.8359
	$(30,30)$	4	9	5.8	2.3539	3.7029	2.9514
	$(40,40)$	5	9	6.2	2.6519	3.954	3.126
	$(50,50)$	5	11	7	2.8849	4.5579	3.6585
	$(60,60)$	5	12	8.3	3.2439	4.453	3.7149
	$(70,70)$	5	10	6.9	3.3969	4.107	3.7336
	$(80,80)$	5	10	7	2.949	4.3109	3.7196
	$(100,100)$	6	13	8.7	3.6379	5.27	4.1997
5	$(5,5)$	1	5	2.8	1.377	2.609	1.8372
	$(10,10)$	2	6	3.3	1.8229	2.882	2.4369
	$(20,20)$	2	8	5.3	2.6039	4.4419	3.3725
	$(30,30)$	4	8	5.9	3.019	3.88	3.416
	$(40,40)$	4	10	6.4	3.066	4.5539	3.7958
	$(50,50)$	6	12	7.7	3.5919	5.2	4.1923
	$(60,60)$	6	12	8.6	4.2079	6.3189	4.8798
	$(70,70)$	5	9	7.3	4.2099	5.9399	4.8827
	$(80,80)$	4	10	6.9	3.7399	6.7469	4.9386
	$(100,100)$	7	10	8.3	4.7049	6.0889	5.0731

6
SONUÇ

İki lineer fonksiyonun oranı olarak amaç fonksiyonunu içeren optimizasyon problemi, yöneylem araştırması, lojistik yönetimi ve ekonomide çeşitli karar süreçlerinin modellenmesindeki kullanışlılığı sayesinde son yıllarda kayda değer ilgi çekmektedir. İki amacın tek bir amaç olarak ifade edilebilmesi avantajlı bir durum olmasıyla birlikte doğası gereği incelenmesi ve çözümü zorlayıcı olan LKPP'nin üstesinden gelmek kapsamlı çalışma gerektirmektedir. Bu çalışma LKPP'nin gerçek hayat uygulamalarını ele almada ve makul sürede çözüm üretmede hayli önemlidir. Diğer bir önemli nokta ise çok amaçlı programlama ve kesirli programlama gibi karmaşık gerçek dünya problemlerini modellemede ve çözmede güçlü olan matematiksel iki konuyu birleştirmektir. Dolayısıyla bu çalışmada, birden fazla hedefi dengelemek ve farklı amaçları en iyi şekilde karşılamak için ÇALKPP'ye etkin ve esnek çözümler sunan yeni bir yöntem geliştirilmiştir.

Müşteri memnuniyetine odaklanılarak LKPP gerçek hayat uygulamaları olarak lojistik sektörü ele alınmış ve taşıma ve araç rotalama problemlerinde lojistik süreçlerin en verimli şekilde uygulanması sağlanmıştır. İlk olarak, geleneksel süreklilik tanımına dayanan çözüm prosedürü LKTP için genişletilmiştir. LKTP, lineer iteratif bir yapıya dönüştürülerek çözüm arandığından mevcut yöntemlerden farklı olarak problem boyutu arttıkça işlemin artması nedeniyle hesaplama konusundaki eksiklik başarıyla giderilmektedir. LKTP için matematiksel çözüm yöntemi sayısal örnek olarak bir vaka çalışması ile yürütülmüştür. Ayrıca, rastgele oluşturulmuş büyük ölçekli problemlere çözüm üretilmiş ve hesaplama sonuçları sunulmuştur.

Diğer bir uygulama olarak, perakende sektöründe Türkiye'de faaliyet gösteren bir firmanın dağıtım planı için gerçek verilerle lineer kesirli araç rotalama modeli oluşturulmuştur. Problemin kesirli doğası göz önünde bulundurularak, modellenen LKARP herhangi bir değişken dönüştürme tekniği kullanılmadan

geleneksel sürekliliğe dayalı iteratif bir yaklaşımla çözülmüştür. Gerçek verilerle ARP'yi ele alan bu çalışmada sunulan lineer kesirli matematiksel modelde, amaç fonksiyonu maliyet/yük olarak modellendiğinden, nakliye maliyetleri en aza indirilirken yola bağlı olarak karbon ayak izi de azaltılmıştır. Dolayısıyla amaç fonksiyonu ile çevreci bakış açısı modele yansıtılarak işletmelerin karbon ayak izlerini azaltmalarına ve çevre dostu bir işletme imajı oluşturmalarına yardımcı olmuştur. Bir haftanın tüm günleri için önerilen yaklaşım kullanılarak optimum dağıtım planları elde edilmiş ve karşılaştırmalı bir analiz sağlanmıştır.

Tezin orijinal diğer bir kısmında, birbiriyle çelişebilen birçok amacı olan ÇALKPP'leri önem ağırlıklarıyla optimize etmek için yeni bir algoritma önerilmiştir. Temeli geleneksel sürekliliğin tanımı ve ağırlıklı toplamlar yaklaşımı üzerine kurulmuş olan iteratif yöntem ile ÇALKPP, eşdeğer LPP'nin iteratif olarak optimize edilmesiyle doğrudan çözülmüş ve herhangi bir değişken dönüşümü yapılmadan ve/veya LKPP veya ÇALPP'ye dönüştürülmeden çözüm aranmıştır. Önerilen algoritmanın etkinliği literatürden örnekle test edilmiş olup ayrıca, gerçek hayattaki problemlerle uyumluluğu gösterilmek üzere rastgele çok sayıda test örneği oluşturulmuştur. Literatürdeki küçük ölçekli uygulamaların yanı sıra bu test sayesinde yöntemin farklı sayıda amaçları olan ve büyük ölçekli problemler için dahi kullanışlı olduğu görülmüştür.

KAYNAKÇA

[1] J. Isbell, W. Marlow, "Attrition games," *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 3, no. 1-2, pp. 71–94, 1956.

[2] S. Schaible, "Fractional programming: Applications and algorithms," *European Journal of Operational Research*, vol. 7, no. 2, pp. 111–120, 1981.

[3] B. Martos, "Hyperbolic programming," *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 11, no. 2-3, pp. 135–155, 1964.

[4] B. Martos, "Hyperbolic programming," *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, vol. 5, pp. 383–406, 1960.

[5] A. Charnes, W. W. Cooper, "Programming with linear fractional functionals," *Naval Research logistics quarterly*, vol. 9, no. 3-4, pp. 181–186, 1962.

[6] W. Dinkelbach, "On nonlinear fractional programming," *Management science*, vol. 13, no. 7, pp. 492–498, 1967.

[7] G. R. Bitran, A. Novaes, "Linear programming with a fractional objective function," *Operations Research*, vol. 21, no. 1, pp. 22–29, 1973.

[8] K. Swarup, "Linear fractional functionals programming," *Operations Research*, vol. 13, no. 6, pp. 1029–1036, 1965.

[9] H. Wolf, "A parametric method for solving the linear fractional programming problem," *Operations Research*, vol. 33, no. 4, pp. 835–841, 1985.

[10] Y. E. Nesterov, A. Nemirovskii, "An interior-point method for generalized linear-fractional programming," *Mathematical Programming*, vol. 69, pp. 177–204, 1995.

[11] S. F. Tantawy, "A new method for solving linear fractional programming problems," *Australian Journal of basic and applied sciences*, vol. 1, no. 2, pp. 105–108, 2007.

[12] S. Tantawy, "A new procedure for solving linear fractional programming problems," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 48, no. 5-6, pp. 969–973, 2008.

[13] Q. Feng, H. Jiao, H. Mao, Y. Chen, "A deterministic algorithm for min-max and max-min linear fractional programming problems," *International Journal of Computational Intelligence Systems*, vol. 4, no. 2, pp. 134–141, 2011.

[14] P. Pandian, M. Jayalakshmi, "On solving linear fractional programming problems," *Modern Applied Science*, vol. 7, no. 6, p. 90, 2013.

[15] Y.-H. Zhang, C.-F. Wang, "A new branch and reduce approach for solving generalized linear fractional programming," *Engineering Letters*, vol. 25, no. 3, pp. 262–267, 2017.

[16] B. A. Ozkok, "An iterative algorithm to solve a linear fractional programming problem," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 140, pp. 106–234, 2020.

[17] A. Bennani, D. Benterki, H. Grar, "Adaptive projection methods for linear fractional programming," *RAIRO-Operations Research*, vol. 55, S2383–S2392, 2021.

[18] H. Gonce Kocken, B. Ahlatcioglu Ozkok, M. Ahlatcioglu, "An exact iterative algorithm to solve a linear fractional programming problem," *Scientia Iranica*, 2022.

[19] K. Swarup, "Transportation technique in linear fractional functional programming," *Journal of royal naval scientific service*, vol. 21, no. 5, pp. 256–260, 1966.

[20] D. Moanta, "Some aspects on solving a linear fractional transportation problem," *Journal of Applied Quantitative Methods*, vol. 2, no. 3, pp. 343–348, 2007.

[21] N. Güzel, Y. Emiroglu, F. Tapci, C. Guler, M. Syvry, "A solution proposal to the interval fractional transportation problem," *Applied Mathematics & Information Sciences*, vol. 6, no. 3, 2012.

[22] A. A. Raina, S. Gupta, K. Kour, "Fractional transportation problem with non-linear discount cost," *Sri Lankan Journal of Applied Statistics*, vol. 18, no. 3, 2018.

[23] A. Sheikhi, S. M. Karbassi, N. Bidabadi, "A new method for solving bi-objective fractional transportation problems," *J. Biochem. Technol*, vol. 9, pp. 14–20, 2018.

[24] S. A. Bas, H. G. Kocken, B. A. Ozkok, "A novel iterative method to solve a linear fractional transportation problem," *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, pp. 151–166, 2022.

[25] T. Benoist, F. Gardi, A. Jeanjean, B. Estellon, "Randomized local search for real-life inventory routing," *Transportation Science*, vol. 45, no. 3, pp. 381–398, 2011.

[26] T. Garaix, C. Artigues, D. Feillet, D. Josselin, "Optimization of occupancy rate in dial-a-ride problems via linear fractional column generation," *Computers & Operations Research*, vol. 38, no. 10, pp. 1435–1442, 2011.

[27] C. Archetti, G. Desaulniers, M. G. Speranza, "Minimizing the logistic ratio in the inventory routing problem," *EURO Journal on Transportation and Logistics*, vol. 6, no. 4, pp. 289–306, 2017.

[28] R. Baldacci, A. Lim, E. Traversi, R. Wolfler Calvo, "Optimal solution of vehicle routing problems with fractional objective function," *Transportation Science*, vol. 54, no. 2, pp. 434–452, 2020.

[29] E.-U. Choo, "Multicriteria linear fractional programming," Ph.D. dissertation, University of British Columbia, 1981.

[30] J. S. Kornbluth, R. E. Steuer, "Multiple objective linear fractional programming," *Management Science*, vol. 27, no. 9, pp. 1024–1039, 1981.

[31] I. Nykowski, Z. Zołkiewski, "A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 19, no. 1, pp. 91–97, 1985.

[32] J. P. Costa, "An interactive method for multiple objective linear fractional programming problems," *OR Spectrum*, vol. 27, no. 4, pp. 633–652, 2005.

[33] N. Guzel, M. Sivri, "Taylor series solution of multi-objective linear fractional programming problem," *Trakya University Journal Science*, vol. 6, no. 2, pp. 80–87, 2005.

[34] J. P. Costa, "Computing non-dominated solutions in molfp," *European Journal of Operational Research*, vol. 181, no. 3, pp. 1464–1475, 2007.

[35] G. Wang, G. Ziyou, W. Zhongping, "A global optimization algorithm for solving the bi-level linear fractional programming problem," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 63, no. 2, pp. 428–432, 2012.

[36] E. Valipour, M. Yaghoobi, M. Mashinchi, "An approximation to the nondominated set of a multiobjective linear fractional programming problem," *Optimization*, vol. 65, no. 8, pp. 1539–1552, 2016.

[37] S. Nayak, A. K. Ojha, "Solution approach to multi-objective linear fractional programming problem using parametric functions," *Opsearch*, vol. 56, no. 1, pp. 174–190, 2019.

[38] M. Moulai, A. Mekhilef, "Quadratic optimization over a discrete pareto set of a multi-objective linear fractional program," *Optimization*, vol. 70, no. 7, pp. 1425–1442, 2021.

[39] V. Chankong, Y. Y. Haimes, *Multiobjective decision making: theory and methodology*. Courier Dover Publications, 2008.

[40] R. E. Steuer, E.-U. Choo, "An interactive weighted tchebycheff procedure for multiple objective programming," *Mathematical programming*, vol. 26, pp. 326–344, 1983.

[41] P. Kouvelis, *Its applications. nonconvex optimization and its applications*, 1997.

[42] A. Charnes, W. W. Cooper, R. O. Ferguson, "Optimal estimation of executive compensation by linear programming," *Management science*, vol. 1, no. 2, pp. 138–151, 1955.

[43] A. Charnes, W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming.* John Wiley and Sons, Inc., 1961.

[44] F. L. Hitchcock, "The distribution of a product from several sources to numerous localities," *Journal of mathematics and physics*, vol. 20, no. 1-4, pp. 224–230, 1941.

[45] G. B. Dantzig, J. H. Ramser, "The truck dispatching problem," *Management science*, vol. 6, no. 1, pp. 80–91, 1959.

[46] G. B. Dantzig, "Linear programming," *Operations research*, vol. 50, no. 1, pp. 42–47, 2002.

[47] B. Özkök, F. Kurul, "Integer linear programming model for vehicle routing problem and an application in the food industry," *Istanbul University Journal of the School of Business*, vol. 43, no. 2, 2014.

[48] *Google haritalar, (https://maps.google.com), erişim: 12.07.2023*. [Online]. Available: https://maps.google.com/.

[49] *İstanbul büyükşehir belediyesi şehir rehberi, (http://sehirrehberi.ibb.gov.tr/map.aspx), erişim: 12.07.2023*. [Online]. Available: http://sehirrehberi.ibb.gov.tr/map.aspx/.

[50] A. A. Gessesse, R. Mishra, M. M. Acharya, K. N. Das, "Genetic algorithm based fuzzy programming approach for multi-objective linear fractional stochastic transportation problem involving four-parameter burr distribution," *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, vol. 11, no. 1, pp. 93–109, 2020.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. S. A. Bas, H. G. Kocken, B. A. Ozkok, "A novel iterative method to solve a linear fractional transportation problem," *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, vol. 18, no. 1, pp. 151-166, 2022.

2. S. A. Bas, B. A. Ozkok, "Green vehicle routing model via linear fractional programming: a retail case study for Marmara region, Türkiye," *International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications and Practice*, vol. 30, no.4, 2023.

3. S. A. Bas, B. A. Ozkok, H. G. Kocken, "A new iterative approach to address multi-objective linear fractional programming problems," *Annals of Operations Research*, (Gönderildi).

Konferans Bildirisi

1. S. A. Bas, B. A. Ozkok, "Linear fractional programming method for optimizing of inventory model with price-dependent demand rate," *In Sixth International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, pp. 35, 2022, October.

2. S. A. Bas, B. A. Ozkok, B. Meniz, S. O. Usun, "Lineer kesirli programlama ile perakende sektöründe çevre dostu araç rotalama uygulaması," *42. Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği Kongresi*, 2023, Kasım (Kabul edildi).