T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YEREL EĞRİLİKLİ KOMPOZİT ŞERİT PLAKLARIN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Onur ÇINAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Mekanik Programı

Danışman

Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ

Temmuz, 2024

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YEREL EĞRİLİKLİ KOMPOZİT ŞERİT PLAKLARIN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Onur ÇINAR tarafından hazırlanan tez çalışması 19.07.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. İrfan COŞKUN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Fethi KADIOĞLU, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Yerel Eğrilikli Kompozit Şerit Plakların Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Onur ÇINAR

İmza

Aileme

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca teknik bilgi birikimlerini ve hayat tecrübelerini daima paylaşan, tez konusunun özgün sahibi ve danışmanın Doç Dr. Zafer KÜTÜĞ'e derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez kapsamında kitaplarından ve bilgisinden yararlandığım Prof.Dr. Surkay AKBAROV'a teşekkür ederim.

Tez kapsamında doktora tezinden yararlandığım, yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU'a teşekkür ederim.

Tez süresince çalışmalarımı birlikte yürüttüğüm, maddi manevi desteğini esirgemeyen İnş. Yük. Müh. Öğretim Görevlisi Özlem VARDAR'a teşekkür ederim.

İnş. Yük. Müh. Hiranur GÜNGÖR'e manevi katkılarından dolayı teşekkürü borç bilirim.

Beni bugünlere getiren sevgili annem Gülbahar ÇINAR'a, babam Yüksel ÇINAR'a, abim Gürsel ÇINAR'a ve diğer tüm aile bireylerime sonsuz teşekkürler.

Onur ÇINAR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ ix

ŞEKİL LİSTESİ x

TABLO LİSTESİ xiii

ÖZET xiv

ABSTRACT xvi

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Taraması 1

2 KOMPOZİT MALZEMELER 4

2.1 Parçacıklı Kompozitler 5

2.2 Tabakalı Kompozitler 6

2.3 Lifli Kompozitler 6

3 MALZEMELERİN GENEL ÖZELLİKLERİ VE MALZEME SABİTLERİ 8

3.1 Anizotropik Malzeme 10

3.2 Monoklinik Malzeme 10

3.3 Ortotrop Malzeme 11

3.4 Enine İzotrop Malzeme 12

3.5 İzotrop Malzeme 12

4 PLAKLAR VE PLAK TEORİLERİ 14

4.1 Plaklar 14

4.2 Plak Teorileri 15

5 KIRCHHOFF-LOVE PLAK TEORİSİ 19

6 EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMELER MEKANİĞİNİN SÜREKLİLİK TEORİSİ **25**

6.1 Temel Kabuller ve Notasyonlar 27

6.2 Elastisite Bağıntıları ve Normalize Edilmiş Elastik Sabitler 29

7 MERKEZİ SONLU FARKLAR YÖNTEMİ **32**

8 YAPISINDA YEREL EĞRİLİK OLAN KOMPOZİT ŞERİT PLAKLAR **37**

8.1 Şerit Plak Analizi 40

8.2 İki Ucu Basit Mesnetli Şerit Plak 40

8.3 İki Ucu Ankastre Mesnetli Şerit Plak 45

8.4 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Basit Mesnetli Şerit Plak 49

8.5 Değişken Kesite Sahip İki Ucu Basit Mesnetli Şerit Plak 67

9 SONUÇ **71**

KAYNAKÇA **72**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **75**

SİMGE LİSTESİ

ε_{ij}	Birim Şekil Değiştirme Tansörü
q	Düzgün Yayılı Yük
Ψ	Eksene Dik Olan Kesitin Dönmesi
$M_{12})$	Eğilme Momenti
$\emptyset_1$ ve $\emptyset_2$	Eğrilik Fonksiyonu Parametresi
σ_{ij}	Gerilme Tansörü
$\S_{ijkl}$	Kompilyans Tansörü
η	Kompozit Malzemenin Hacim Oranı
λ_k ve μ_k	Lame Sabitleri
l_0	Maksimum Yüksekliğin Kiriş Uzunluğuna Oranı
A^0_{ij} ve G^0_{ij}	Malzeme Sabitleri
C_{ijkl}	Malzemenin Elastik Sabitleri Tansörü
n_j	Malzemenin Yüzey Birim Normali
D	Plak Rijitliği
α	Plak Teorisi Parametresi
T, N	Plak İç Kuvveti
e	Plağın Kayma Şekil Değiştirmesi Parametresi
v_k	Poisson Oranı
T_i	Sınırda Gerilmeler
w	Sonlu Farklar Operatörü
u_i	Sınırda Yer DEğiştirmeler
$\frac{h}{2}$	Şerit Plağın Yüksekliği
Λ	Yarım Dalga Boyu

u, v, w	Yer Değiştirme
c_1, d_1, L_1	Yerel Erğilik Fonksiyonun Parametreleri
L	Yerel Eğriliğin Maksimum Yüksekliğe Karşılık Gelen Noktanın Yeri
ε	Yerel Eğrilik Parametresi

KISALTMA LİSTESİ

LKT	Klasik Laminasyon Teorisi
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Parçacıklı kompozit malzeme örneği 5
Şekil 2.2 (a) Tabakalı kompozit ve (b) oryantasyon açısının gösterimi . . . 6
Şekil 2.3 Yerel eğriliğe sahip liflerin şerit plak üzerinde gösterimi 7
Şekil 2.4 Periyodik formdaki lifler [20]. 7
Şekil 3.1 Monoklinik malzemeye ait koordinat takımı 10
Şekil 3.2 Ortotrop malzemeye ait koordinat takımları a, b, c 11
Şekil 3.3 Enine izotrop malzemeye ait koordinat takımı 12
Şekil 4.1 Kirchhoff-Love plak teorisine göre yer değiştirmeler 18
Şekil 6.1 Eğrisel yapıdaki kompozit malzemenin kesiti [19] 27
Şekil 6.2 Yerel kartezyen koordinat sistemi ile polar kartezyen koordinat sistemi arasındaki ilişki[20] 28
Şekil 7.1 y=f(x) fonksiyonun grafiği 32
Şekil 8.1 Yerel eğriliğe sahip şerit plak 37
Şekil 8.2 Yerel eğriliğin detayı 38
Şekil 8.3 Şerit plağın farklı ε değerlerinde lokal eğrilik grafiği 39
Şekil 8.4 ε=0.1, c=0.35, d=0.65, n=1 ve $l_0 = 0.5$ olmak üzere farklı m değerleri için lokal eğrilik grafiği 39
Şekil 8.5 İki ucu basit mesnetli yerel eğrilikli kompozit şerit plak 41
Şekil 8.6 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde çökme grafiği 41
Şekil 8.7 İki ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği 42
Şekil 8.8 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 42
Şekil 8.9 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde ve sadece kompozit durumda kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 43
Şekil 8.10 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde moment grafiği 43
Şekil 8.11 İki ucu ankastre mesnetli yerel eğrilikli kompozit şerit plak 45
Şekil 8.12 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde çökme grafiği 45
Şekil 8.13 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği 46

Şekil 8.14 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 46
Şekil 8.15 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde ve sadece kompozit durumda kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği . . 47
Şekil 8.16 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde moment grafiği 47
Şekil 8.17 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli yerel eğrilikli kompozit şerit plak 49
Şekil 8.18 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerindeki çökme grafiği 50
Şekil 8.19 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği 50
Şekil 8.20 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 51
Şekil 8.21 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde ve sadece kompozit durumda kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 51
Şekil 8.22 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde moment grafiği 52
Şekil 8.23 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki lokal eğrilik grafiği 54
Şekil 8.24 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki çökme grafiği 55
Şekil 8.25 İki ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği 55
Şekil 8.26 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 56
Şekil 8.27 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki moment grafiği 56
Şekil 8.28 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki çökme grafiği 58
Şekil 8.29 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği 58
Şekil 8.30 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 59
Şekil 8.31 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki moment grafiği 59
Şekil 8.32 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde çökme grafiği 61

Şekil 8.33 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği 61
Şekil 8.34 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 62
Şekil 8.35 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerindeki moment grafiği 62
Şekil 8.36 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerinde çökme grafiği 64
Şekil 8.37 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı c değerleri için σ_{11} grafiği 64
Şekil 8.38 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 65
Şekil 8.39 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki moment grafiği 65
Şekil 8.40 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde çökme grafiği 67
Şekil 8.41 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği 68
Şekil 8.42 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 68
Şekil 8.43 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde ve sadece kompozit durumda kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği 69
Şekil 8.44 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde moment grafiği 69

TABLO LİSTESİ

Tablo 7.1 Merkezi sonlu farklar tablosu 36

Tablo 8.1 İki ucu basit mesnetli şerit plakta farklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 44

Tablo 8.2 İki ucu ankastre mesnetli şerit plakta farklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri . 48

Tablo 8.3 İki ucu ankastre mesnetli şerit plaktafarklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda maksimum çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 48

Tablo 8.4 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plakta farklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 52

Tablo 8.5 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plakta, farklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda maksimum çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 53

Tablo 8.6 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 57

Tablo 8.7 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 60

Tablo 8.8 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki maksimum çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 60

Tablo 8.9 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerindeki çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 63

Tablo 8.10 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 66

Tablo 8.11 Değişken kesite sahip iki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerindeki çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri 70

ÖZET

Yerel Eğrilikli Kompozit Şerit Plakların Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü

Onur ÇINAR

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ

Kompozit malzemeler inşaat sektöründen uçak sanayisine kadar çok geniş yelpazede, hafif bir malzeme olması ve yüksek dayanımından dolayı sıkça kullanılmaktadır. Yüzeysel taşıyıcı eleman olan plakların kompozit malzemelerle üretilmesi, analizlerin kompozit malzemeler gözetilerek statik ve dinamik modelleme yapılmasını gerektirmektedir. Kompozit malzemelerde üretim aşamasında meydana gelebilecek bir bozukluk veya nakliye esnasında oluşacak bir darbe benzeri olayla veya iç yapısından dolayı yerel eğrilikler meydana gelebilmektedir. Bu durumlarda ise malzemenin gerilme-şekil değiştirme özelliklerini belirlemek ve yük altında çökme değerlerini bulmak karmaşık ve zor bir hal almaktadır.

Bu nedenler gözetilerek, tez kapsamında yerel eğrilikli kompozit şerit plakların her bir noktasındaki yer değiştirme, gerilme ve moment değerleri MATLAB programında Merkezi Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Sabit ve değişken kesitlerde ele alınan şerit plakların çökme değerleri, düzgün yayılı yükleme altında ve farklı mesnet şartlarında (basit ve ankastre mesnet) incelenmiştir. Bu şerit plakların matematiksel denklemleri ise Kirchhoff- Love Plak Hipotezi kullanılarak, Akbarov ve Guz' Süreklilik Teorisi çerçevesinde elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar literatürdeki diğer çalışmalarla kıyaslanmıştır. Neticede yerel eğrilikli kompozit şerit plak problemlerinin modellenerek çözülmesi karmaşık ve zor olmasından dolayı, sınırlı sayıda çalışmanın yapılmış olduğu görülmüştür.

Araştırmadan elde edilen sonuçlar sınırlı sayıdaki literatür ile karşılaştırılmış ve neticede özgün ve önemli katkılar sağlayacağı düşünülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Kompozit şerit plak, yerel eğrilik, merkezi sonlu farklar yöntemi, Kirchhoff - Love plak teorisi, Akbarov- Guz' süreklilik teorisi.

ABSTRACT

Solution of Composite Strip Plates With Local Curvature Using Finite Differences

Onur ÇINAR

Department of Civil Engineering
Master of Science Thesis

Supervisor: Associate Professor Dr. Zafer KÜTÜĞ

Composite materials are widely used across a broad spectrum, ranging from the construction sector to the aircraft industry, due to their lightweight nature and high strength. The production of plate-like structural elements using composite materials necessitates static and dynamic modeling with consideration to these materials. Local curvatures may arise due to defects during the manufacturing process or impact events such as transport or inherent structural characteristics of composite materials. Determining the stress-strain properties and collapse values of the material under load in such cases becomes complex and challenging.

Taking these factors into account, displacement, stress, and moment values at each point of locally curved composite strip plates were obtained using the Central Finite Differences Method in MATLAB within the scope of this thesis. The collapse values of strip plates with constant and variable cross-sections were investigated under uniform distributed loading and different support conditions (simple and restrained supports).The mathematical equations of these strip plates were derived using the Kirchhoff-Love Plate Hypothesis within the framework of Akbarov and Guz's Continuum Theory.

The obtained results were compared with other studies in the literature. Consequently, due to the complexity and difficulty in modeling and solving problems related to locally curved composite strip plates, it was observed that only a limited number of studies have been conducted. The results obtained from the research were compared with the limited literature available, and it is believed that

they will provide original and significant contributions in the end.

Keywords: Composite strip plate, local curvature, finite differences method, Kirchhoff - Love plate hypothesis, Akbarov- Guz' continuum theory.

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Taraması

Kütüğ [1] çalışmasında, yapısında periyodik veya lokal (yerel) eğrisellik bulunan kompozit plak elemanları, Akbarov ve Guz' Süreklilik Teorisi çerçevesinde Galerkin Yöntemi kullanarak doğal titreşimlerini ve burkulmalarını hesaplamıştır. Elastisite teorsinin kesin hareket denklemlerini kullanarak üçüncü dereceden geliştirilmiş plak teorisini kullanmış ve elde ettiği sonuçları Kirchhoff- Love ve Reissner-Mindlin Plak Teorileri ile karşılaştırmıştır.

Şimşek, M.F [2] çalışmasında, tabakalı kompozit malzeme yapısında yerel eğriliklerin olduğu şerit plağın, serbest titreşim frekanslarını aralık (interval) analizi ile elde etmiştir.

Ergün, A [3] çalışmasında, düzgün yayılı yük ve farklı sınır şartlarına sahip dikdörtgen plakların Sonlu Eleman ve Sonlu Farklar Metodu kullanılarak bilgisayar programı (BASIC) yardımıyla analinizi yapmış ve bu iki metodun yakınsaklığını denklem sisteminde bilinmeyen sayısına göre incelemiştir. Klasik Sonlu Farklar Metodu kullanılarak çözülen basit mesnetli plak problemlerinin daha az bilinmeyenle tam çözüme ulaşıldığı, ankastre mesnetli plak problemlerinde ise tam çözüme ulaşmanın daha fazla bilinmeyenle gerçekleşebileceğini tespit etmiştir. Bu sonuçlarda basit mesnetli durumda daha gerçekçi, ankastre mesnet durumunda ise kabulün daha kaba bir yaklaşım olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bu durumda Sonlu Farklar Metodunun, Sonlu Elemanlar Metoduna göre yakınsaklığı hızlı olmakta ve pratikte kabul edilebilir sonuçlar verdiğine ulaşmıştır. Plak diferansiyel denklemi için çıkartılan Klasik Sonlu Farklar ifadeleri geliştirilerek daha az bilinmeyenle hatta elle çözüm yapılabilecek şekildeki yöntemlerle tam çözüme ulaşmanın mümkün olduğunu gözlemlemiştir.

Türe, Ü [4] çalışmasında, minimum potansiyel enerji prensibi kullanılarak kalın sayılabilecek plakların statik çözümü için Sonlu Elemanlar Yöntemi ile iki adet 4

ve 8 düğüm noktalı plak elemanı geliştirmiştir. Geliştirilen elemanların sayısal 13 çözümünü Gauss Eliminasyon Yöntemi ile yapmıştır. Sonuç olarak iç kuvvetlerin yakınsaması, eleman adedinin artımından – yer değiştirmelere nazaran daha az etkilendiğini, örneğin ankastre mesnetli, yayılı yüke maruz kare plakta eleman ağı 2x2'den 3x3'e çıkarıldığında yer değiştirmelerdeki hata %5.3'den %0.8'e düşerken momentlerdeki hatanın %5.4'den%3.3'e düştüğünü gözlemlemiştir.

Yanen, C vd. [5] çalışmalarında, eğrisel yüzeyli tabakalı kompozit plakların burkulma yükü altındaki davranışlarına etki eden parametreleri incelemiştir. Bu amaçla farklı tabaka dizilimlerine, açılarına ve geometrik özelliklere sahip tabakalı hibrit kompozitlerin kritik burkulma yüklerindeki değişimini sayısal olarak araştırmıştır. Modellemeyi ANSYS paket programı kullanarak yapmıştır. Yapılan analizler sonucunda kritik burkulma yüklerini belirleyip literatürle kıyaslamıştır. Eğrisel yüzeyli kompozit plaklarda eğrilik yarıçapı ve eğrilik açısı arttıkça kritik burkulma yükünün arttığını tespit etmiştir.

Altunsaray, E [6] tabakalı dikdörtgen kompozit plakların statik ve dinamik problemlerini farklı sınır şartlar için çözmüştür. Elde ettiği sonuçları ANSYS paket yazılım sonuçları ile karşılaştırmıştır.

Ergün, A [7] ince plaklar için geliştirilmiş Sonlu Fark Yöntemini, Klasik Sonlu Fark ifadelerinin çıkartılışından tamamen bağımsız bir yöntemle ortaya koymuştur. Bu yöntemde, sonsuz uzunluklu bir plak ele alınarak belirli bir bölgesi için çökme yüzeyi tanımlanmakta ve plağın çökme yüzeyini oluşturan yükler, plak diferansiyel denkleminden yararlanılarak bulunmuştur. Geliştirilmiş Sonlu Farklar Yöntemi ile yapılan çözümler sonucu,plak problemlerinin çözümlerinde, diğer sayısal yöntemlere göre oldukça yüksek hassasiyet ve performans sağlamıştır.

Akbarov vd.[8] çalışmalarında, 1992 yılından 1998 yılına kadar eğrisel yapıdaki kompozit malzemelerin mekaniği ile ilgili yapılan araştırmaları ve çalışmaları gözden geçirmiştir. Yazarlar teorik ve uygulamalı problemlerin artan gereksinimleri nedeniyle eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin mekaniğinin daha fazla araştırılmasını gerekli görmüşlerdir.

Akbarov ve Guz' [9] malzeme yapısında eğri tabakalara sahip kompozitleri parçalı üniform model üzerinde incelemişlerdir. Öncelikle genel bir yaklaşım belirlenip eğrilikli kompozit tabakalardaki gerilme şekil değiştirme durmunu belirleme problemini formule etmişlerdir. Her biri elastik ve izotrop olan periyodik eğrilikli veya lokal eğrilikli tabakalı kompozit plakları incelemiştir. Ayrıca parçalı uniform model çervesinde dinamik problemlerin de çalışması gerekliliğine vurgu yapılmıştır.

Aydın,S [10] düzgün yayılı yük etkisindeki lamine dik katmanlı (cros-ply) küresel kabuk levhaya ait diferansiyel denklemlerinin çözmünü MATLAB kullanarak yapmış ve sonuçları literatürle kıyaslamıştır.

Gürlek [11] tabakalı kompozit kirişlerin gerilme ve şekil değiştirme analizlerini Sonlu Farklar Yöntemi kullanarak yapmıştır. Analizlerinde farklı mesnet koşulları ve yüklemeler etkisi altındaki kirişler, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre incelemiştir. Elde edilen bünye bağıntıları ve denge denklemlerinin çözümü için açık kaynak kodlu olan DEV-C++ V 5.8.3 editörü kullanılarak bir bilgisayar programı geliştirmiştir. Elde edilen sonuçların yakınsaklığı literatürle karşılaştırılmıştır.

Yahnioğlu [12] periyodik eğriliğe sahip bir şerit kompozit için Lagrange Koordinat Sisteminde elastisite teorisinin kesin non-lineer denklemlerini kullanarak bazı eğilme problemlerini incelemiştir. Sayısal sonuçları, Newton-Raphson ve Geliştirilmiş Newton- Raphson algoritması ile Sonlu Elemanlar Yöntemini kullanarak elde etmiştir. Geometrik nonlineritenin gerilme dağılımı üzerindeki etkisinin, malzeme elastisite modüllerinin oranı ve plak kalınlığının plak uzunluğuna oranının artmasıyla azaldığını gözlemlemiştir.

Qatu [13] dördü üçgensel, sekizi trapez yüklü olmak üzere keyfi şekilli ve serbest kenarlı on iki lamine kompozit plağın bilinen ilk kesin frekans verilerini Ritz Metodu kullanarak elde etmiştir. Malzeme olarak, geniş kullanım alanı nedeniyle, grafit/epoksi ve cam epoksiyi 0/90/15 derece açılarla tabakalı olarak düzenleyerek doğal frekans değerlerini incelemiştir. Bazı frekansların, lamine açılarındaki değişimi çok hassas olduğu sonucuna varmıştır.

Özakıncı [14], Rayleigh – Ritz yöntemini kullanarak düzlem gerilme durumu için simetrik kesitli dikdörtgen plakların titreşim analizlerini yapmıştır. Frekans sonuçlarının malzeme anizotropisi ve plak kalınlığının açıklığa oranının artmasıyla arttığını tespit etmiştir.

Saraçoğlu ve Özçelikörs [15] çalışmalarında, tüm kenarları basit mesnetli, düzgün yayılı yük etkisindeki kare kompozit tabakalı plakların orta noktasındaki çökme değerlerini Sonlu Farklar Yöntemi ile araştırmıştır. Klasik (Kirchhoff-Love) Plak Teorisinin tabakalı kompozitlere genişletilmesiyle elde edilen Klasik Kompozit Tabakalı Plak Teorisini kullanmıştır. Plağın denge denklemlerini Sonlu Farklar Yöntemiyle lineer denklem takımlarına dönüştürmüş ve düğüm noktalarındaki yer değiştirme değerlerini bulmuştur. Elde edilen sonuçları Reddyle karşılaştırmış, pratikte aynı kabul edilebilecek sonuçları elde etmştir.

2
KOMPOZİT MALZEMELER

Kompozit malzemeler, hafif bir malzeme ve yüksek dayanıma sahip olmasından dolayı inşaat sektöründen uçak sanayine çok geniş yelpazede sıklıkla kullanılmaktadır. Kompozit malzeme denilince, iki veya daha fazla malzemenin bir araya gelerek birbirlerinin zayıflıklarını gideren dayanıklı bir malzeme akla gelmektedir. Kompozit malzemelerin bileşenleri makro veya mikro boyutlarda olabilir.

Kompozit malzemelerin kullanımıyla, her bir malzemenin yetersiz olduğu

- Gerekli yüksek dayanım
- Şekil değiştirebilme kapasitesi
- Hafiflik
- Yoğunluk
- Korozyon direnci
- Aşınma direnci
- Yorulma ömrü
- Isı yalıtımı
- Isı iletkenliği
- Sıcaklık davranışları

gibi etmenler kolaylıkla giderilebilir ve malzeme istenilen hale getirilebilir[16].

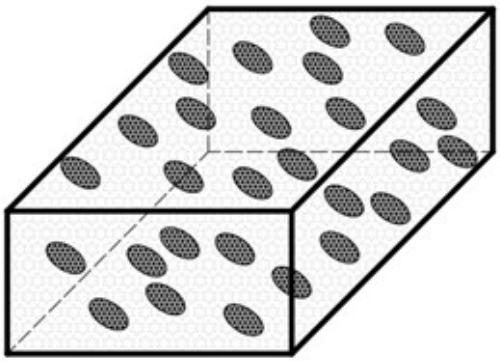
Kompozitler, sürekli ortam olan genellikle parçacıklardan oluşan dolgu (matris) malzemesi ve buna göre daha güçlü yönleri olan lifli ve levhalı kısımlardan meydana gelirler. Bu nedenle, bir kompozit malzemenin özelliği matris ve fiber malzemenin bileşenlerine, dağılımına ve etkileşimine bağlıdır. Epoksi ve poliimid gibi malzemeler dolgu malzemesine, cam, bor ve kevlar gibi malzemelerde takviye, güçlendirici malzemeye örnek olarak verilebilir.

Kompozit malzemeler geniş bir şekilde üç kısıma ayrılabilirler[17];

- Parçacıklı kompozitler
- Tabakalı kompozitler
- Lifli kompozitler

2.1 Parçacıklı Kompozitler

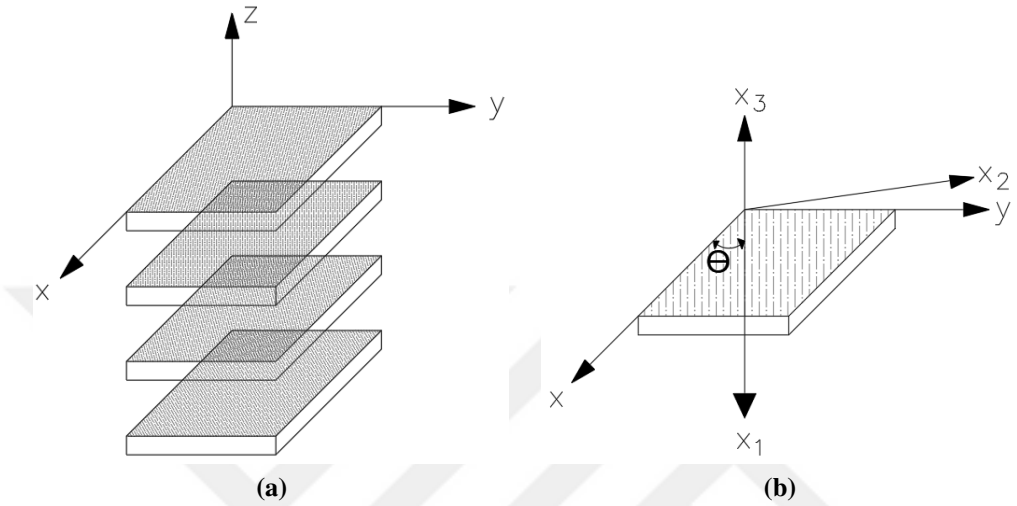
Bu tür kompozit malzemeler bir matris içinde asılı parçacıklardan (partiküllerden) oluşur. Bu asılı parçacıklar görsel olarak herhangi bir şekil, boyut ve yapıya sahip olabilirler. Ortotrop veya anizotrop malzeme davranışı gösteren bu parçacıklı kompozitler, tasarımda mukavemetin çok önemli rol oynamadığı uygulamalarda kullanılır [18].



Şekil 2.1 Parçacıklı kompozit malzeme örneği

2.2 Tabakalı Kompozitler

En az iki veya daha fazla tabakanın, aynı ya da farklı oryantasyon açılarıyla üst üste dizilmesiyle tabakalı kompozitler oluşturulur, Şekil 2.2. Burada her bir tabakanın kalınlığı da tıpkı oryantasyon açıları gibi farklı olabilir. Oryantasyon açısı θ, +90° ile -90° arasında değişen, global eksen takımı ile lif eksen takımı arasındaki açıya denir.



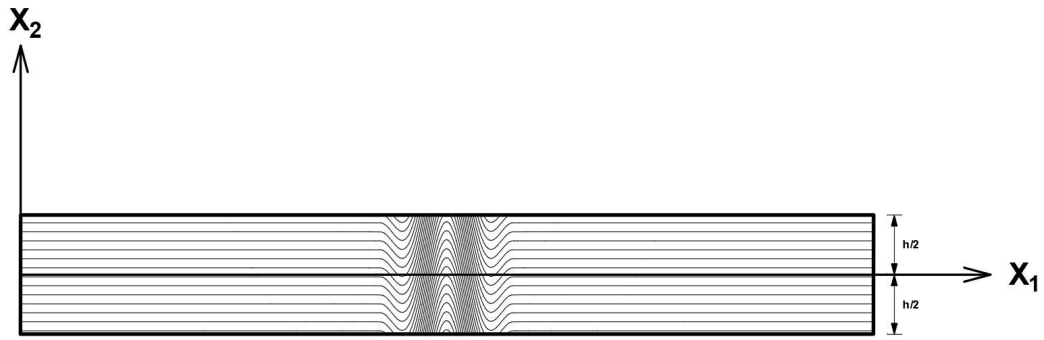
Şekil 2.2 (a) Tabakalı kompozit ve (b) oryantasyon açısının gösterimi

2.3 Lifli Kompozitler

Kompozit malzemelerle kıyaslandığında, yüksek çekme gerilmesi dayanımı nedeniyle kullanılan lifli kompozitler, takviye (güçlendirici) malzemelerin özel bir durumudur. Lifli kompozit malzemelerde liflerin çapı 0.01 mikrometreden 100 mikrometre arasında değişirken, hacim oranları ise yüzde 70'e kadar arttırılabilinir [19]. Fiber takviyeler genel haldeki durumlardan çok daha güçlüdürler. Maksimum çekme gerilmesini karşılamaya yarayan liflerin zayıf taraflarından biri ise tek başına basınç dayanımını karşılayamamasıdır [20].

Bahsi edilen lifli kompozitlerin her biri lifi düz bir formda olduğu gibi eğrisel formda da olabilir, Şekil 2.4. Kompozit malzemelerde üretim aşamasında bir darbe sonucu ya da iç yapısından dolayı yerel eğrilikler meydana gelebilmektedir.

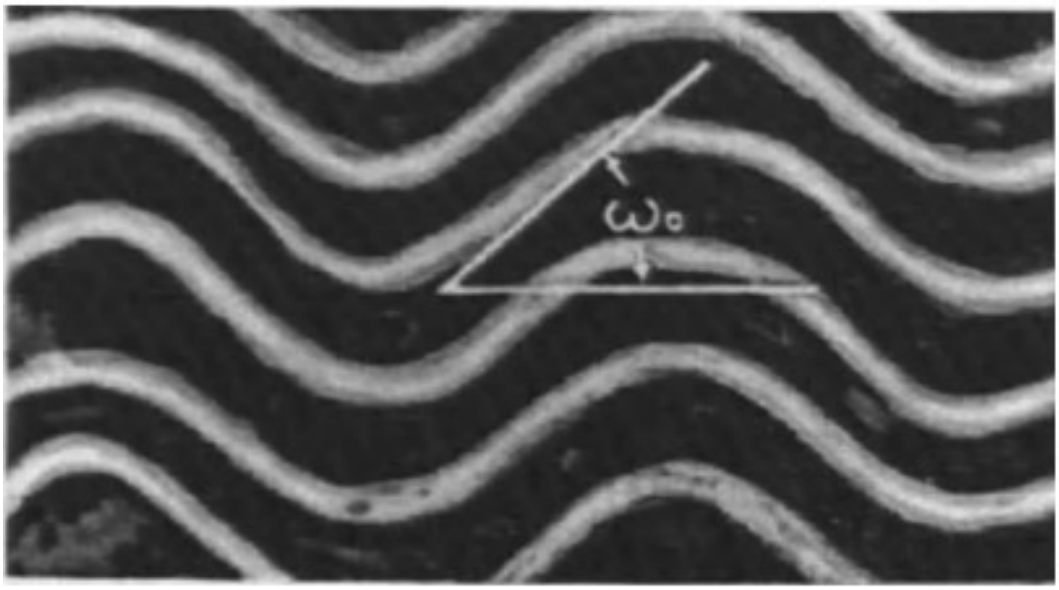
Liflerin eğrisel yapıları, şekildeki gibi baştan sona periyodik (örneğin sünizoidal) şekilde olabileceği gibi, kiriş uzunluğunun belli bir bölgesinde (örneğin tam ortada) kısmi olarak oluşabilir, Şekil 2.3.



Şekil 2.3 Yerel eğriliğe sahip liflerin şerit plak üzerinde gösterimi

Kesitin başından sonuna kadar var olan bu eğrilik periyodik eğrilik, kesitin belirli bir bölgesinde kısmi olarak var olan eğrilik ise yerel (lokal) eğrilik adını alır.

Bu tez kapsamında ise özel bir durum olan yerel (lokal) eğriliğe sahip kompozit bir şerit plak ele alınacaktır.



Şekil 2.4 Periyodik formdaki lifler [20].

3
MALZEMELERİN GENEL ÖZELLİKLERİ VE MALZEME SABİTLERİ

Malzeme özelliklerinin noktadan noktaya değişmediği, her yerde aynı fiziksel özellikleri gösterdiği malzemeye "homojen", tam tersi durumdaki olan malzemeye "heterojen" malzeme denir.

Kuvvet ve sıcaklık etkisi nedeniyle farklı davranış gösteren bu malzemeleri matematiksel olarak tek bir denklem veya denklem takımı olarak açıklamak imkânsızdır.[21].

Üç boyutlu ortamda altı adet hareket denklemi ve üç adet denge denklemi olmak üzere toplam dokuz adet denklem vardır. Ancak altı adet birim şekil değiştirme, altı adet gerilme ve üç adet yer değiştirme olmak üzere toplam on beş değişken vardır. Bu da demek oluyor ki denklem takımlarını çözebilmemiz için altı adet denkleme daha ihtiyacımız vardır [22]. Bu altı adet denklem ise malzemenin gerilme ve şekil değiştirme ilişkilerinden elde edilir. Malzemenin gerilme ve şekil değiştirme bağıntılarıyla elde edilen, dinamik büyüklükler ile geometrik büyüklükler arasındaki ifadeye, ise "bünye denklemleri" adı verilir.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\mathrm{i,j,k,l} = 1,2,3,4) \tag{3.1}$$

burada, σ_{ij} gerilme tansörü, C_{ijkl} malzemenin elastik sabitler tansörü, ε_{kl} ise birim şekil değiştirme tansörüdür. Formülasyondan da anlaşılacağı üzere malzemenin elastik sabitlerini gösteren C_{ijkl} dördüncü mertebeden bir tansör olup en genel haliyle 81 (3^4) adet bileşeni vardır.

Bünye bağıntıları gerilmeler cinsinden yazıldığı gibi birim şekil değiştirmeler cinsinden de yazılabilir. Bu durumda kapalı haldeki bünye bağıntılarımız aşağıdaki şekildeki gibi formülize edilebilir,

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (\mathrm{i,j,k,l} = 1,2,3,4). \tag{3.2}$$

Burada, dördüncü mertebeden bir tansör olan S_{ijkl}, elastik sabitler tansörünün tersi ($[S] = [C]^{-1}$) olup komplians tansörü adını alır. Aynı biçimde 81 bileşeni vardır.

Bu tez kapsamında 3.1 formülü ele alınacaktır. Burada gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin simetrik olması nedeniyle ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) birbirinden bağımsız C_{ijkl} katsayıları 36'ya indirgenmiş olur. Aynı zamanda termodinamiğin birinci yasasına göre elastik cisimdeki şekil değiştirmeler izotermal ve tersinir olduğu kabul edilerek, cisim içerisinde ortaya çıkan şekil değiştirme enerjisinin, şekil değiştirmelere göre ikinci mertebeden türevinin simetrik olmasından dolayı ($C_{ijkl} = C_{klij}$) birbirinden bağımsız malzeme sabitleri sayısı 21'e düşer.

İndis formasyonunu aşağıdaki gibi,

$$11 \to 1, \quad 22 \to 2, \quad 33 \to 3, \quad 23 \to 4, \quad 13 \to 5, \quad 12 \to 6 \tag{3.3}$$

düzenlenirse;

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} \\ &\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Böylece 3.1 ifadesi matris formunda,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

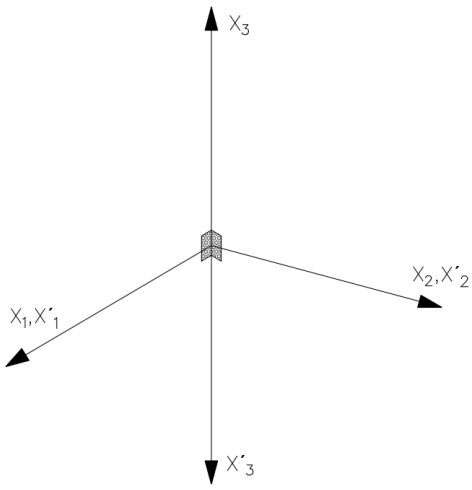
biçiminde elde edilir.

3.1 Anizotropik Malzeme

Eşitlik 3.5'da görüldüğü gibi 21 adet bağımsız malzeme parametresi, en genel hâl olan anizotrop malzemeyi göstermektedir. Doğada birçok malzeme bu halde bulunur ve bu malzeme parametrelerinin belirlenmesi için malzeme üzerinde deneyler yapılarak aranılan değerler elde edilir.

3.2 Monoklinik Malzeme

Eğer malzeme tek bir simetri düzlemine (x_1-x_2) sahip ise monoklinik malzeme olarak adlandırılır. Bu durumda;



Şekil 3.1 Monoklinik malzemeye ait koordinat takımı

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0 \tag{3.6}$$

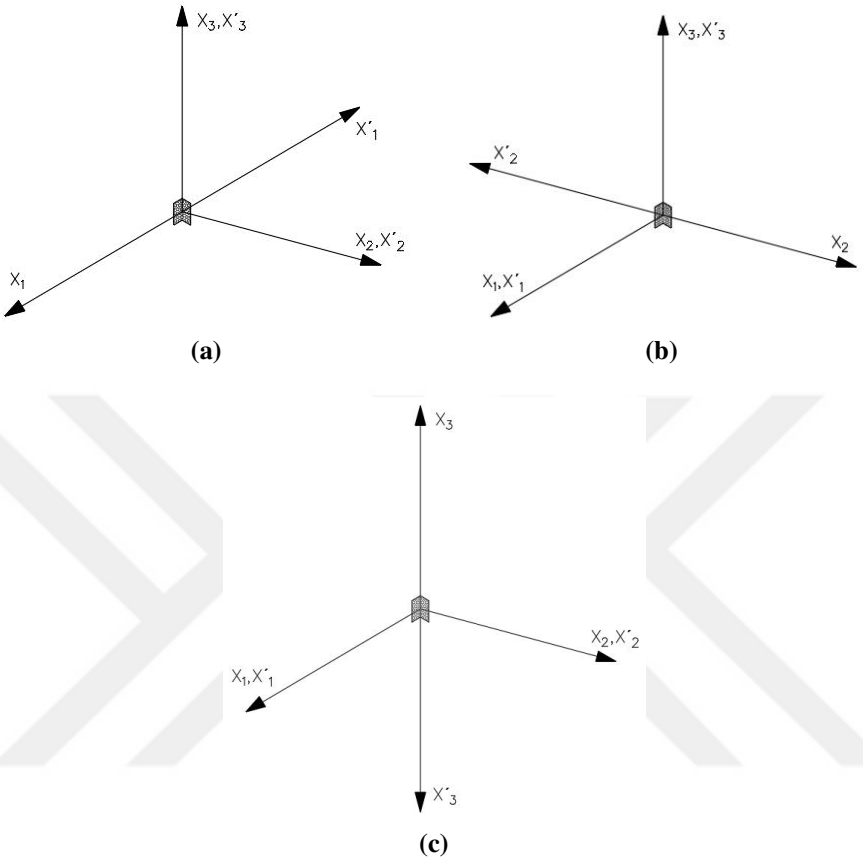
olur. 3.5eşitliği;

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

biçimine gelir. Bu durumda, birbirinden bağımsız malzeme parametre sayısı 13 adete düşecektir.

3.3 Ortotrop Malzeme

Malzeme, monokilik malzeme gibi sadece bir düzleme göre değil, bir birine dik üç düzleme göre simetrisi varsa ortotrop malzeme olarak adlandırılır.



Şekil 3.2 Ortotrop malzemeye ait koordinat takımları a, b, c

Bu durumda;

$$C_{26} = C_{36} = C_{45} = C_{54} = C_{61} = C_{62} = C_{63} = 0 \tag{3.8}$$

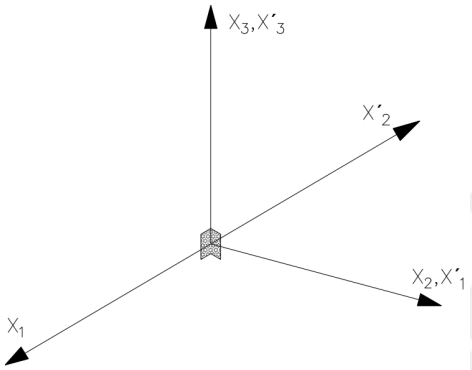
olur. 3.5 eşitliği;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

biçimine gelir. Burada, birbirinden bağımsız malzeme parametre sayısı 9 adete düşecektir.

3.4 Enine İzotrop Malzeme

Enine izotropik bir malzemede ise her üç düzlemin yanında bir simetri ekseni (x_3) daha vardır. Örneğin, tek yönlü elyaf takviyeli bir kompozitin elyaf yönü, elyaflar enine kesite rastgele yerleştirilmişse bir simetri ekseni olarak kabul edilebilir[23].



Şekil 3.3 Enine izotrop malzemeye ait koordinat takımı

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \tag{3.11}$$

3.10 ve 3.11'den enine izotropik bir malzemede birbirinden bağımsız malzeme parametre sayısı 5 adete düşecektir.

3.5 İzotrop Malzeme

Malzemenin tüm düzlemlerde aynı özellikleri gösterdiği duruma ise izotrop malzeme denir. Malzeme sonsuz sayıda simetri düzlemine sahiptir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

$$C_{44} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \tag{3.13}$$

3.12 ve 3.13'den görüleceği üzere izotropik bir malzemede birbirinden bağımsız malzeme parametre sayısı 2 adete düşecektir. Malzeme artık en basit olduğu haldedir.

Bu tez kapsamında ise malzememizin homojen ve enine izotrop olduğu varsayılacaktır.

4
PLAKLAR VE PLAK TEORİLERİ

İnşaat, makine ve gemi ve uçak taşıyıcı yapı elemanı olarak sıkça kullanılan plaklar, ayrıca ekonomik bir kazanç da sağlamaktadırlar. Bu kadar yaygın ve ekonomik getirileri olan yapı ve teçhizat elemanlarının detaylı olarak incelenmesi kaçınılmazdır.

4.1 Plaklar

Kalınlıkları diğer iki boyutuna göre çok daha küçük olan yüzeysel taşıyıcı sistemlere "plak" veya "levha" denir. Bu tür taşıyıcıların kalınlıklarının orta noktalarını birleştiren yüzeye "orta düzlem" denir. Dış yükler, orta düzleme dik olarak etkirse plak, orta düzlem içinde etkirse levha adını alır. Eğer orta düzlem bir düzlem değilde bir eğri yüzey ise, bu durumda yüzeysel taşıyıcıya "kabuk" adı verilir. Kabuklar da kendi aralarında dönel kabuklar, silindirik kabuklar ve öteleme kabuklar olarak üç kısma ayrılırlar [24].

Rijit Plaklar

Bu tür plaklar eğilmeye çalışan ince plakalardır. Rijit plaklarda eğilme momentine, burulma momentine ve kesme kuvvetine karşı iç kuvvetler ortaya çıktığı için dış yükleri eğilme momenti, burulma momenti ve kesme kuvveti vasıtasıyla taşırlar. Buna göre rijit plakların davranışı bir kirişin davranışına benzer ve mühendislik uygulamaları için genel olarak plak denilince rijit plaktan bahsedilmektedir.

Membranlar

Kalınlıklarının oldukça ince olmalarından dolayı eğilme rijitliği ihmal edilebilir olan, düşey yükleri plak düzlemi içindeki kesme ve eksenel kuvvetlerle taşıyan ince plaklardır[25].

Eğilebilen Plaklar

Eğilebilen plaklar, rijit plaklarla membranların bir kombinasyonudur. Dış yükler, eğilme ve burulma momentleri ile plak düzlemine dik ve plak düzlemi içindeki kuvvetlerle karşılanır. Uçak ve gemi inşaatlarında bu tür plaklar oldukça sık kullanılır.

Kalın Plaklar

Kalınlığının diğer boyutlarına oranı 1/20'den küçük ve eşit ise ince plak, değilse kalın plak olarak adlandırılırlar [26]. Kalın plakların iç gerilme durumu üç boyutlu sürekli ortamınkine benzer.

Bu tez kapsamında şerit plak (plak - kiriş) ele alınacaktır. Kenar uzunluklarından birinin diğerine göre çok daha büyük olması durumu "Şerit Plak" olarak adlandırılır. Bu şekliyle şerit plağın davranışı kiriş davranışına benzeyecektir.

4.2 Plak Teorileri

Gerçekte plaklar üç boyutlu bir yapısal eleman olsalar dahi, plakların tanımı gereği plak kalınlığının diğer boyutlarına kıyasla daha küçük olmasından dolayı üç boyutlu elastisite teorisini kullanarak analiz yapmak bazen gerekli olmayabilir. Çünkü kalınlık boyunca yer değiştirmelerin, gerilmelerin ve şekil değiştirmelerin makul ölçüde gerçekçi varyasyonlarını varsayarak, problem iki boyutlu bir hâle indirgenebilir [27].

Plak teorileri

- Gerilme esaslı plak teorileri
- Yer değiştirme esaslı plak teorileri

olmak üzere iki başlık altında incelenebiir.

Gerilme Esaslı Plak Teorileri

Reissner araştırmalarında [28],[29], [30] gerilme esaslı ve enine kayma şekil değiştirmenin göz önüne alındığı plak teorileri üzerinde çalışmıştır. Reissner plak teorisine göre, $\mathrm{Ox_1x_2}$ düzlemindeki bir plakta $\mathrm{M_{11}}$,$\mathrm{M_{22}}$, $\mathrm{M_{12}}$, eğilme ve burulma momentlerinden, ortaya çıkan sırasıyla $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ gerilmeleri plak kalınlığı boyunca doğrusal olarak değişmektedir. $\mathrm{M_{11}}$,$\mathrm{M_{22}}$, $\mathrm{M_{12}}$ momentleri $\mathrm{x_1}$ ve $\mathrm{x_2'}$ ye bağımlı birer fonksiyonlardır. Plağın orta düzlemindeki gerilmelerin $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ değişimi elastisitenin üç boyutlu denge denklemlerinin plak kalınlığı boyunca (0 dan x_3'e kadar) integrasyonundan elde edilir. Böylelikle üç boyutlu problem iki boyutlu bir problem haline indirgenmiş olur.

Goldenveizer [31] ise Reissner teorisini geliştirerek $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ gerilmelerini kalınlık boyunca doğrusal olarak değil keyfi bir fonksiyon şeklinde $(F(x_3))$ değiştiğini kabul etmiştir. 1948 yılında Green [32], Castigliano'nun mininum enerji prensibini kullanarak Reissner teorisini doğrudan gerilme denge denklemleri ve gerilme birim şekil değiştirme denklemleri kullanarak elde etmiştir.

Yer Değiştirme Esaslı Plak Teorileri

1890 yılında Basset [33], yer değiştirmeleri plak kalınlığı boyunca kuvvet serisi olarak ifade etmiştir. Plak kalınlığı olan $\mathrm{x_3}$ koordinatının sıfırıncı mertebedeki katsayısı plağın orta düzleminin yer değiştirmelerini ifade etmektedir. Daha yüksek mertebelerin katsayıları ise $\mathrm{x_1}$ ve $\mathrm{x_2}$ koordinatlarının birer fonksiyonları olup bunların bulunması gerekmektedir. Böylece kuvvet serisinden $\mathrm{x_3}$'ün kaçıncı mertebesine kadarki terimlerinin dikkate alınacağına bağlı olarak bir birinden farklı mertebelerde plak teorileri önermiştir. Basset'e göre u_1 yer değiştirmesi,

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) + \sum_{n=1}^{N} x_3^n \psi_1^{(n)}(x_1, x_2) \tag{4.1}$$

biçiminde gösterilir. Hildebrand [34] bu denklemleri kullanarak birinci mertebeden plak teorileri önermiştir. Bu yer değiştirmeler,

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u(x_1, x_2) + x_3\psi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v(x_1, x_2) + x_3\psi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

biçiminde gösterilir.

Burada ψ_1, ψ_2, sırasıyla, normali x_1 ve x_2 ekseni doğrultusunda olan kesitin dönmesini gösterir [35].

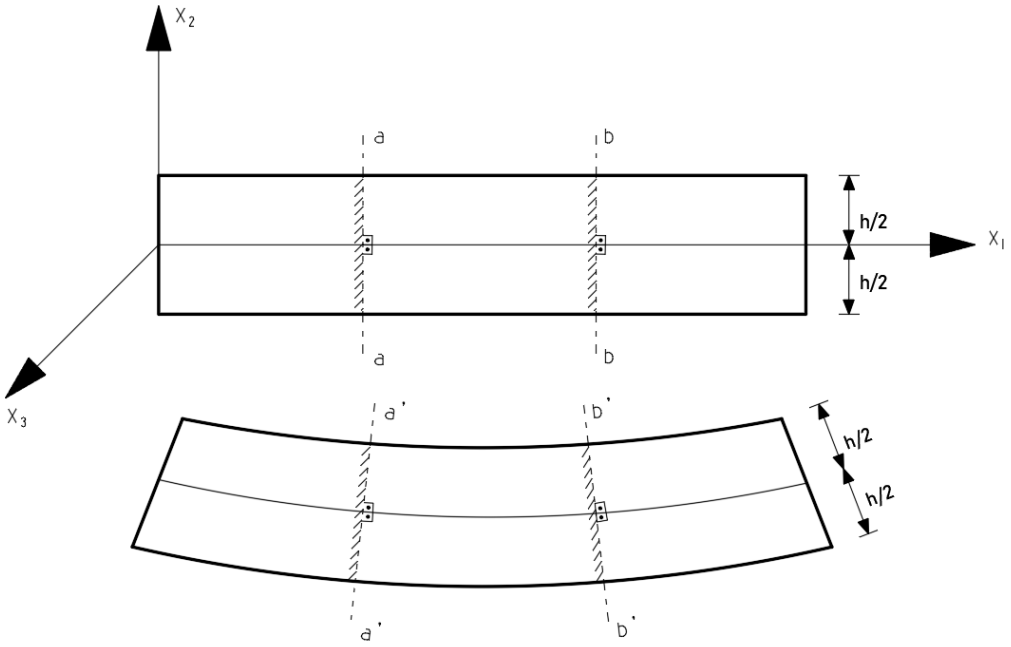
Üçüncü dereceden plak teorilerinde yer değiştirmeler,

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2,x_3) &= u(x_1,x_2) + x_3\left[\psi_1 - \alpha\frac{4}{3}\left(\frac{x_3}{h}\right)^2\left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\right] \\ u_2(x_1,x_2,x_3) &= v(x_1,x_2) + x_3\left[\psi_2 - \alpha\frac{4}{3}\left(\frac{x_3}{h}\right)^2\left(\psi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\right] \\ u_3(x_1,x_2,x_3) &= w(x_1,x_2) \end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak ifade edilir. Burada h plak kalınlığıdır. Ayrıca eşitlik, 4.3'de $\alpha = 1$ Reddy teorisine karşılık gelirken, $\alpha = 0$, $\psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}$ ve $\psi_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_2}$ için Kirchhoff-Love teorisine, yalnızca $\alpha = 0$ olması durumunda ise Reissner-Mindlin teorisine karşılık olarak gelmektedir.

Dikkat edilirse, Kirchhoff-Love plak teorisinin birinci mertebeden bir teori olduğu görülür. Reissner-Mindlin teorisinde kayma şekil değiştirmeleri ve buna bağlı olarak kayma gerilmeleri ortaya çıkarken Kirchhoff-Love plak teorisinde bu gerilmeler otomatik olarak sıfır olur.

Kirchhoff-Love plak teorisinde, kayma şekil değiştirmeleri ve kayma gerilmleri sıfır olduğundan, eğilmeden önce orta düzleme $\mathrm{Ox_1x_2}$ dik ve düzlem olan kesitler, eğilmeden sonra da şekil değiştirmiş olan orta düzleme dik ve düzlem olarak kalırlar.



Şekil 4.1 Kirchhoff-Love plak teorisine göre yer değiştirmeler

Wang vd. [36] ve [37] çalışmalarında Reissner-Mindlin teorisinin bir çok literatürde bire bir aynı olarak verilmesine rağmen aralarında farklılar olduğunu ortaya koymuştur. Şöyleki Reissner plak teorisi, doğrusal bir eğilme gerilmesi dağılımı ve parabolik bir kayma gerilmesi dağılımı varsayımı ile tamamlayıcı gerilme enerjisinin varyasyonel prensibinden türetilirken, Mindlin ortaya koyduğu teorisinde levha kalınlığının enine uzamasını korurken kalınlık boyunca yer değiştirmelerin doğrusal değiştiğini varsaymıştır.

Bu tez kapsamında Akbarov ve Guz Süreklilik Teorisi çerçevesinde yer değiştirme esaslı olan Kirchhoff- Love Plak Hipotezi kullanılmıştır.

5
KIRCHHOFF-LOVE PLAK TEORİSİ

Kirchhoff-Love plak teorisine göre şekil değiştirmeden önce plak orta düzlemine dik ve düzlem olan kesitler, şekil değiştirmeden sonra da orta düzlemden geçen elastik eğriye dik ve düzlem kalırlar. Bu plak teorisi kirişlerdeki Bernolli - Navier terorisinin genişletilmiş halidir. Kirchhoff- Love Plak Teorisine göre;

1. Plak malzemesi Hooke kanununa uyan, lineer elastik, homojen ve izotroptur.
2. Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri başlangıçta bir düzlemdir.
3. Eğilme esnasında plak orta yüzeyi düz kalır.
4. Plak kalınlığı, plağın diğer boyutlarına nazaran küçüktür.
5. Kalınlık boyunca kayma şekil değiştirmeleri ve gerilmeleri sıfırdır.
6. Plak orta düzleminin çökmesi plak kalınlığına göre küçüktür. Bu yüzden çökme yüzeyinin eğim açısı da çok küçük kalır.

Bu durum da;

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{22} = 0 \tag{5.1}$$

olur. Yukarıda belirtildiği üzere $\alpha = 0$ için;

$$\psi_1 = -\partial w/\partial x_1 \tag{5.2}$$

$$\psi_3 = -\partial w/\partial x_3 \tag{5.3}$$

$$u_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = u^o\left(x_1, x_2, x_3\right) + x_2\psi_1\left(x_1, x_3\right) \tag{5.4}$$

$$u_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = w^o\left(x_1, x_2, x_3\right) \tag{5.5}$$

$$u_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = v^o\left(x_1, x_2, x_3\right) + x_2\psi_3\left(x_1, x_3\right) \tag{5.6}$$

denklemleri Kirchhoff-Love hipotezi gereğince yerdeğiştirmeler aşağıdaki hali alır;

$$u_1\left(x_1, x_2, x_3\right) = u^o\left(x_1, x_3\right) - x_2 w_{,1} \tag{5.7}$$

$$u_2\left(x_1, x_2, x_3\right) = w^o\left(x_1, x_3\right) \tag{5.8}$$

$$u_3\left(x_1, x_2, x_3\right) = v^o\left(x_1, x_3\right) - x_2 w_{,3} \tag{5.9}$$

Şekil değiştirme yer değiştirme ifadeleri;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (\mathrm{i,j} = 1, 2, 3) \tag{5.10}$$

kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u^o{}_{,1} - x_2 w_{,11} \\
\varepsilon_{22} &= 0 \\
\varepsilon_{33} &= u^o{}_{,3} - x_2 w_{,33} \\
\varepsilon_{23} &= 0 \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}\left(u^o_{1,3} + u^o_{3,1}\right) \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}\left(u^o{}_{,3} - x_2 w_{,13} + v^o{}_{,1} - x_2 w_{,31}\right) \\
\varepsilon_{12} &= 0
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

elde edilir. Burada $\frac{\partial \bullet}{\partial x_i} = \bullet, i$ 5.11 ifadesi 3.5'de yerine koyulursa;

$$
\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\
A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\
A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\
A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\
A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u^o{}_{,1} - x_2 w_{,11} \\
0 \\
v^o{}_{,3} - x_2 w_{,33} \\
0 \\
\frac{1}{2}\left(u^o{}_{,3} - x_2 w_{,13} + \ v^o{}_{,1} - x_2 w_{,13}\right) \\
0
\end{bmatrix}
\tag{5.12}
$$

elde edilir. Ele alınan malzeme transversal (enine) izotrop olduğundan dolayı,

$$
A_{15} = A_{35} = A_{41} = A_{43} = A_{51} = A_{53} = A_{65} = 0 \tag{5.13}
$$

olacağından

$$
\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
A_{11} & A_{13} & 0 \\
A_{21} & A_{23} & A_{25} \\
A_{31} & A_{33} & 0 \\
0 & 0 & A_{45} \\
0 & 0 & A_{55} \\
A_{61} & A_{63} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u^o{}_{,1} - x_2 w_{,11} \\
v^o{}_{,3} - x_2 w_{,33} \\
\left(u^o{}_{,3} - x_2 w_{,13} + \ v^o{}_{,1} - x_2 w_{,13}\right)
\end{bmatrix}
\tag{5.14}
$$

elde edilir. Bu durumda 5.14 eşitliği,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} \\ 0 & 0 & A_{55} \\ A_{61} & A_{63} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{11} - x_2 w_{,11} \\ \varepsilon^0_{33} - x_2 w_{,33} \\ \varepsilon^0_{13} - 2x_2 w_{,13}) \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

haline gelir. Denklem 5.15 plak kalınlığı boyunca, (x_2), integre edilirse,

$$\begin{aligned} T_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\, dx_2, \quad T_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22}\, dx_2, \\ T_{33} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33}\, dx_2, \quad T_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23}\, dx_2, \\ T_{13} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13}\, dx_2, \quad T_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}\, dx_2, \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= h(A_{11}\varepsilon^0_{11} + A_{13}\varepsilon^0_{33}), \\ T_{22} &= h(A_{21}\varepsilon^0_{11} + A_{23}\varepsilon^0_{33} + A_{25}\varepsilon^0_{13}), \\ T_{33} &= h(A_{31}\varepsilon^0_{11} + A_{33}\varepsilon^0_{33}), \\ T_{23} &= h(A_{45}\varepsilon^0_{13}), \\ T_{13} &= h(A_{55}\varepsilon^0_{13}), \\ T_{12} &= h(A_{61}\varepsilon^0_{11} + A_{63}\varepsilon^0_{33}), \end{aligned} \tag{5.17}$$

elde edilmiş olunur. Eşitlik 5.17 matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{23} & A_{25} \\ A_{31} & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} \\ 0 & 0 & A_{55} \\ A_{61} & A_{63} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,1} h \\ v_{,3} h \\ (u_{,3} + v_{,1})\, h \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

elde edilir. Benzer biçimde 5.15 eşitliği x_2 ile çarpılıp kalınlık boyunca integre

edilirse;

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_2 \, dx_2, \quad M_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} x_2 \, dx_2,$$
$$M_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} x_2 \, dx_2, \quad M_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} x_2 \, dx_2, \tag{5.19}$$
$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_2 \, dx_2,$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{h^3}{12}(A_{11} w_{,11} + A_{13} w_{,33}) \\ M_{33} &= -\frac{h^3}{12}(A_{31} w_{,11} + A_{33} w_{,33}) \\ M_{23} &= -\frac{h^3}{12}(2A_{45} w_{,13}) \\ M_{13} &= -\frac{h^3}{12}(2A_{55} w_{,13}) \\ M_{12} &= -\frac{h^3}{12}(A_{61} w_{,11} + A_{63} w_{,33}) \end{aligned} \tag{5.20}$$

elde edilmiş olunur. 5.20 eşitliği matris formunda yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{33} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \\ A_{61} & A_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{h^3}{12} w_{,11} \\ -\frac{h^3}{12} w_{,33} \\ \frac{-h^3}{6} w_{,13} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

elde edilir. Ele alınan şerit plak problemi x_3'e bağımlı olmadığından eşitliklerde x_3'e göre türevler sıfır olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{h^3}{12}(A_{11} w_{,11}) \\ M_{33} &= -\frac{h^3}{12}(A_{31} w_{,11}) \\ M_{12} &= -\frac{h^3}{12}(A_{61} w_{,11}). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Üç boyutlu elastisite teorisine göre denge denklemi,

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \quad (\mathrm{i,j} = 1,2,3) \tag{5.23}$$

biçimindedir. Eşitlik 5.23'ün kalınlık boyunca integrasyonundan

$$\begin{aligned} T_{11,1} &= 0 \\ N_{12,1} &= q\,(x_1) \end{aligned} \tag{5.24}$$

x_2 ile çarpılıp yine kalınlık boyunca integre edilmesinden,

$$M_{11,1} - N_{12} = 0 \tag{5.25}$$

elde edilir. Eşitlik 5.25 ifadesi x_1'e göre türevi alınıp 5.24 eşitliğin ikinci ifadesinde yerine konulursa;

$$\begin{aligned} M_{11,11} - N_{12,1} = M_{11,11} - q(x_1) = 0 \\ M_{11,11} = q(x_1) \end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\frac{d^2}{dx_1^2}\left(-A_{11}\frac{h^3}{12}w_{,11}\right) = q(x_1) \tag{5.27}$$

$$\frac{h^3}{12}\,\left(A_{11,11}w_{,11} + 2A_{11,1}w_{,111} + A_{11}w_{,1111}\right) = -q(x_1) \tag{5.28}$$

Böylelikle 5.28 ile birlikte şerit plağa ait diferansiyel denklem takımımızı elde edilmiş olur.

6
EĞRİSEL YAPIYA SAHİP KOMPOZİT MALZEMELER MEKANİĞİNİN SÜREKLİLİK TEORİSİ

Bugüne dek süreklilik yaklaşımı çerçevesinde küçük ölçekli yapısal bozulmaya sahip kompozit malzemelerin mekaniğinin araştırılmasında iki eğilim ortaya çıkmıştır. İlk eğilimin özelliği geliştirilen sürekli yaklaşımların, gerilme-şekil değiştirme durumunun bileşenlerinin hesaplanmasında takviye elemanın eğriliğinin etkisini, bozulmadan çok daha büyük boyuttaki alanlarda dikkate alma imkanı sunmasıdır.

Burada, temsili bir hacmin boyutlarının bozulmanın boyutlarından önemli ölçüde daha büyük olduğu ve yapıdaki bozulmanın etkisinin, indirgenmiş mekanik özelliklerdeki nicel değişim yoluyla hesaba katıldığı varsayılmaktadır [9].

Birincisinden daha sonra gelişen ikinci eğilim, takviye elemanlardaki şekil bozukluğunun etkisinin, şekil bozukluğu ile aynı boyutta veya daha küçük alanlarda gerilme-şekil değiştirme durumunun bileşenlerinin hesaplanmasında dikkate alınmasına izin veren yaklaşımların detaylandırılması ile karakterize edilir. Bu tür yaklaşımların geliştirilmesi ve detaylandırılması ihtiyacı ve uygunluğu aşağıdaki faktörlerle ilişkilidir. Mukavemet problemlerinin araştırılmasında, birçok durumda, çarpılmadan kaynaklanan yerel bozulmayı belirleyebilecek olan gerilme-şekil değiştirme durumunun yerel dağılımı üzerindeki çarpılmanın etkisini tahmin etmek için çarpılmayla aynı boyutta veya daha küçük alanlardaki gerilme-şekil değiştirme durumu hakkında bilgi sahibi olmak gerekir. Açıkçası, düzenli bozulma durumunda, bu yerel bozulma tüm malzemenin küresel bozulmasına dönüştürülmelidir. Bozulmaya bağlı olarak gerilme–gerinim durumundaki yerel değişimin dikkate alınması ihtiyacı, dalga boyu bozulmanın boyutlarıyla orantılı (veya daha az) olduğunda, kompozit bir malzemenin yüksek frekanslı yüklemesinin araştırılmasında da ortaya çıkar.

Süreklilik teorisi çervesinde daha detaylı bilgi için Akborav ve Guz' un çalışmaları, ayrıca tarihsel süreci [38], [39] , [8] ve parçalı homojen cisim modeli [40]' de ayrıca incelenebilir.

Özet olarak burada süreklilik teorisi denilince bahsedilen şey parçalı homojen malzemeyi, anizotrop homojen malzeme olarak ele almaktır. Kompozit malzemelerin çokça farklı ve çeşitli olduğu da göz önüne alınırsa tüm kompozitler için yalnızca bir adet süreklilik teorisi elde etmek oldukça zordur. Kompozit malzemeler mekaniğindeki en kritik problemlerden biri, malzemelerin normalize edilmiş mekanik özelliklerinin yani, belirli sınır koşullarında gerilme tensörü bileşenleri ile şekil değiştirme tensörünün bileşenlerini arasındaki bağı sağlayan mekanik sabitlerin bulunmasıdır. Bahsedilen belirli sınır koşulları ise iki şekilde olabilir.

- Sınırda yer değiştirmeler

$$u_i(S) = \varepsilon^0_{ij} x_j \tag{6.1}$$

- Sınırda gerilmeler

$$T_i(S) = \sigma^0_{ij} n_j \tag{6.2}$$

6.1 ve 6.2'de x_j, S yüzey noktalarının koordinatlarını; n_j malzemenin yüzey normal birim vektörünün bileşenlerini; σ^0_{ij} gerilme ve ε^0_{ij} ise birim şekil değiştirme bileşenini göstermektedir.

Homojen cisimde, 6.1 ve 6.2 sınır koşullarının verilmesi durumunda gerilme ve şekildeğiştirme tansörleri sabit kalırlar. Eğer 6.1 sınır koşulu verilirse şekildeğiştirmeler ε^0_{ij}'ye, 6.2 denklemindeki sınır koşulları verilmiş ise gerilmeler σ^0_{ij}'a eşit olur.

Bahsi geçen kompozit malzemenin normalize edilmiş malzeme sabitleri ise 6.1 ve 6.2 denklemlerindeki sınır koşullarını kullanılarak,

$$\sigma_{ij} = \mu_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \tag{6.3}$$

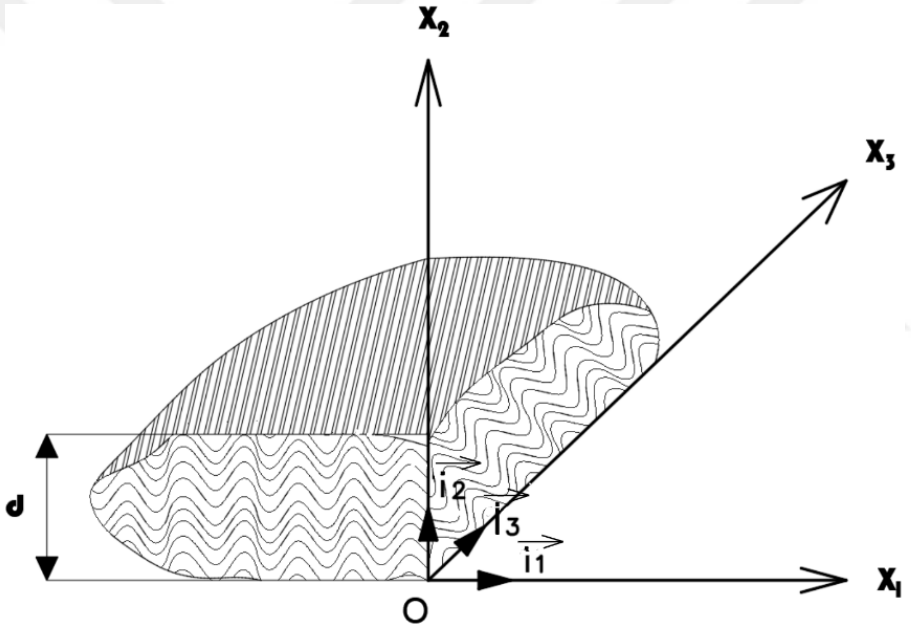
elde edilir.6.3 aynı zamanda $\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j$ olarak da ifade edilebileceğinden,

$$\begin{array}{llll} \sigma_{\mathrm{i}} = \sigma_{ii}(\mathrm{i} = 1,2,3) & \sigma_4 = \sigma_{23} & \sigma_5 = \sigma_{13} & \sigma_6 = \sigma_{12} \\ \varepsilon_{\mathrm{i}} = \varepsilon_{ii}(\mathrm{i} = 1,2,3) & \varepsilon_4 = \varepsilon_{23} & \varepsilon_5 = \varepsilon_{13} & \varepsilon_6 = \varepsilon_{12} \end{array} \tag{6.4}$$

ifadeleri elde edilebilecektir. 6.3 ve 6.1 denklemleri yapısında eğrilik olmayan kompozit malzemeler için süreklilik teorisini ifade etmektedir. Burada normalize edilmiş malzeme sabitleri (μ_{ijkl}) genel olarak sınırda yer değiştirmeler koşulu ile elde edilen parametrelerdir ve bu kesin normalize edilmiş malzeme parametresi olarak adlandırlır. Eğer ki mazeme sabitleri sınırda gerilmeler koşulu ile elde edilecek ise o halde elde edilen parametreler yaklaşık normalize edilmiş malzeme parametresi olarak adlandırılır.

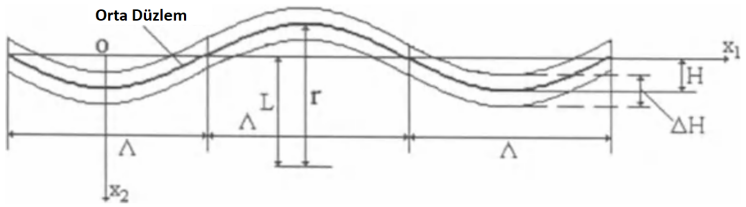
6.1 Temel Kabuller ve Notasyonlar

Bu kısımda periyodik eğriliğe sahip kompozit malzeme için 6.3 ve 6.1 ilişkilerine benzer bünye bağıntıları türetilecektir. Bunun için Şekil 6.1'de görülen periyodik eğrilikli tabaka baz alınarak devam edilecektir.



Şekil 6.1 Eğrisel yapıdaki kompozit malzemenin kesiti [19]

Şekil 6.1 ve 6.2'de $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat sisteminde x_1=sabit, x_3=sabit olmak üzere periyodik eğrilikli kompozit malzemeden yapılmış bir cisim ele alınmıştır. Bu cisimde lifler x_1Ox_3 düzlemi üzerinde yerleştirilmiştir.



Şekil 6.2 Yerel kartezyen koordinat sistemi ile polar kartezyen koordinat sistemi arasındaki ilişki[20]

Burada;

- $\overline{h}$ takviyenin en küçük boyutunu,
- r , Ox_1 eksenine H mesafesi kadar uzaktaki noktanın merkezi eğrilik yarıçapı,
- $\mathrm{L} = \mathrm{r} - \mathrm{H}$,
- H malzemenin yapısal eğriliğin yüksekliğini (genliği),
- Λ_1 (Λ_3) eğriliğin Ox_1 (Ox_3) yönlerindeki yarım dalga boyunu,
- d ise yapı elemanının en küçük boyutunu

ifade eder.

Malzemenin yapısında yerel eğrilik olması durumunda ise Λ_1 ve Λ_3 farklı değerleri farklı anlamlar taşıyacaktır.

Yukarıda verilen notasyonaları kullanarak ileri sürülen süreklilik teorisinin temel varsayımlarını aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

1. Kompozit malzeme Ox_1 ekseni boyunca düzenli (periyodik) bir eğriliğe sahiptir,
2. Eğrilik ve yapı Ox_3 ekseni boyunca değişikliğe uğramaz,
3. Aşağıda verilen eşitsizlikler (6.5) geçerlidir.

$$\overline{h} \ll H; \quad \Delta H \ll \Lambda; \quad H \ll \Lambda; \quad \Lambda \ll L; \quad \Lambda \ll d \tag{6.5}$$

Eşitliksizlik 6.5'de verilen beş eşitsizlikten birincisi; maksimum tabaka kalınlığının eğriliğin tepe noktasından oldukça küçük olduğu; ikincisi; eğriliğe sahip tabakalı yapının kalınlığının eğriliğin yarım periyodundan çok küçük olduğu; üçüncüsü eğriliğin tepe noktasının eğriliğin yarım periyodundan çok küçük olduğu; dördüncüsü eğriliğin çok küçük olduğu anlamına gelirken, beşinci eşitsizlik ise, eğriliğin oldukça küçük ölçekli olduğu anlamına gelmektedir[9]. Bu koşulları sağlayan yapısal bozukluklar, boyut bakımından oldukça küçük olduğu anlamını taşımaktadır.

6.2 Elastisite Bağıntıları ve Normalize Edilmiş Elastik Sabitler

A_{ij}^0 ve G_{ij}^0 ortotrop malzemenin elastisite teorisinde kullanılan malzeme sabitlerini gösterir. Bu sabitler kompozit malzemenin yapısında eğrilik olmadığı durumda malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri gibi bakılabilmektedir.

$$A_{23}^0 = A_{12}^0, \quad A_{11}^0 = A_{33}^0, \quad G_{23}^0 = G_{12}^0, \quad A_{11}^0 - A_{12}^0 = 2G_{23}^0 \tag{6.6}$$

Benzer biçimde eğrisel yapıya sahip kompozit malzemenin $Ox_1x_2x_3$ eksen takımındaki elastisite bağıntıları eşitlik 6.3'de belirtildiği gibi,

$$\sigma_{ij} = \mu_{ij\alpha\beta}\left(x_1, x_3\right)\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{6.7}$$

şeklinde yazılabilir. Normalize edilmiş elastik sabitlerin değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\lambda_k = \frac{v_k E_k}{\left(1-2v_k\right)\left(1+v_k\right)} \quad (\mathrm{k}=1,2) \tag{6.8}$$

$$\mu_k = \frac{E_k}{2\left(1+v_k\right)} \quad (\mathrm{k}=1,2) \tag{6.9}$$

$$A_{66}^{0} = G_{12}^{0} = G_{23}^{0} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1}$$

$$G_{13}^{0} = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2$$

$$\frac{1}{2}\left(A_{11}^{0} - A_{13}^{0}\right) = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2$$

$$\frac{1}{2}\left(A_{11}^{0} + A_{13}^{0}\right) = \left(\lambda_1 + \mu_1\right)\eta_1 + \left(\lambda_2 + \mu_2\right)\eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)^2}{\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)\eta_2 + \left(\lambda_2 + 2\mu_2\right)\eta_1}$$

$$A_{23}^{0} = A_{12}^{0} = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \left(\lambda_1 - \lambda_2\right) \frac{\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right) - \left(\lambda_2 + 2\mu_2\right)}{\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)\eta_2 + \left(\lambda_2 + 2\mu_2\right)\eta_1}$$

$$A_{22}^{0} = \left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)\eta_1 + \left(\lambda_2 + 2\mu_2\right)\eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{\left[\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right) - \left(\lambda_2 + 2\mu_2\right)\right]^2}{\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)\eta_2 + \left(\lambda_2 + 2\mu_2\right)\eta_1} \tag{6.10}$$

Burada, λ_k ve μ_k Lamé sabitleri, E_k Elastisite (Young) modulünü, v_k Poisson oranı, η_1 ve η_2 kompozit bileşenlerin hacim oranlarını göstermektedir. Kompozit malzemeyi oluşturan matris ve takviye elemanların hacim oranlarının toplamı 1.00 olduğu bilinmektedir.

Eşitlik 6.10'da:

$$\begin{aligned}
A_{11}(x_1) &= A_{11}^{0}\phi_1^4\left(x_1\right) + 2A_{12}^{0}\phi_1^2\left(x_1\right)\phi_2^2\left(x_1\right) + A_{22}^{0}\phi_2^4\left(x_1\right) + 4A_{66}^{0}\phi_1^2\left(x_1\right)\phi_2^2\left(x_1\right) \\
A_{33}(x_1) &= A_{33}^{0} \\
A_{13}(x_1) &= A_{13}^{0}\phi_1^2\left(x_1\right) + A_{23}^{0}\phi_2^2\left(x_1\right) \\
A_{23}(x_1) &= A_{55}^{0}\phi_1^2\left(x_1\right) + A_{44}^{0}\phi_2^2\left(x_1\right)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

biçimindedir.

Burada,

$$\phi_1\left(x_1\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2}}, \qquad \phi_2\left(x_1\right) = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1}\phi_1\left(x_1\right) \tag{6.12}$$

biçimindedir. $\varepsilon\left(x_1\right)$ fonksiyonu, yerel eğriselliğin formunu göstermektedir. Buna ilerleyen bölümlerde (Bölüm 8) değinilecektir.

5.28 eşitliğinde görülen, $A_{11}(x_1), A_{11,1}(x_1)$ ve $A_{11,11}(x_1)$ ifadeleri,

$$A_{11}(x_1) = A_{11}^0\phi_1^4(x_1) + 2A_{12}^0\phi_1^2(x_1)\phi_2^2(x_1) + A_{22}^0\phi_2^4(x_1) + 4A_{66}^0\phi_1^2(x_1)\phi_2^2(x_1) \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} A_{11,1}(x_1) = {} & 4A_{11}^0\phi_1^3(x_1)\phi_{1,1} + 4\left(A_{12}^0 + 2A_{66}^0\right)\left(\phi_1(x_1)\phi_{1,1}\phi_2^2(x_1)\right. \\ & \left.+\phi_1^2(x_1)\phi_{2,1}(x_1)\phi_2\right) + 4A_{22}^0\phi_2^3(x_1)\phi_{2,1} \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} A_{11,11}(x_1) = {} & 4A_{11}^0\left(3\phi_1^2(x_1)\phi_{1,1}^2 + \phi_1^3(x_1)\phi_{1,11}\right) + 4\left(A_{12}^0\right. \\ & \left.+2A_{66}^0\right)\left(\phi_{1,1}^2\phi_2^2(x_1) + \phi_{1,11}\phi_1^2(x_1) + 2\phi_1(x_1)\phi_{1,1}\phi_2(x_1)\phi_{2,1}\right. \\ & \left.+2\phi_1(x_1)\phi_{1,1}\phi_{2,1}\phi_2(x_1) + {\phi_1}^2\phi_{2,11}\phi_2(x_1) + {\phi_1}^2\phi_{2,1}\right) \\ & + 4A_{22}^0\left(3\phi_2^2(x_1){\phi_{2,1}}^2 + \phi_2^3\phi_{2,11}\right) \end{aligned} \tag{6.15}$$

biçimindedir.

$$a(x_1) = \varepsilon f_{,1}(x_1) \tag{6.16}$$

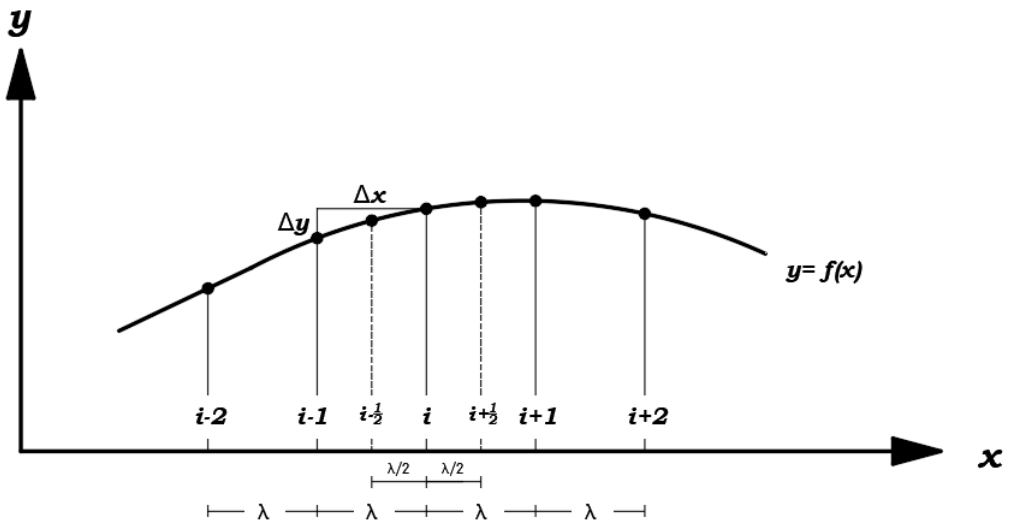
gibi bir fonksiyon tanımlanarak, 6.13 - 6.15 eşitliklerinde kullanılmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_2(x_1) &= a(x_1)\phi_1(x_1) \\ \phi_{2,1}(x_1) &= a'(x_1)\phi_1(x_1) + a(x_1)\phi_{1,1}(x_1) \\ \phi_{2,11}(x_1) &= a''(x_1)\phi_1 + 2(x_1)a'(x_1)\phi_{1,1}(x_1) + a(x_1)\phi_{1,11}(x_1) \end{aligned} \tag{6.17}$$

elde edilir.

7
MERKEZİ SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Sonlu Farklar Yöntemi, Merkezi Sonlu Farklar, İleriye Doğru Sonlu Farklar ve Geriye Doğru Sonlu Farklar Yöntemi olmak üzere üç kısıma ayrılır. Tez kapsamında Merkezi Sonlu Farklar yöntemi kullanılacaktır.



Şekil 7.1 y=f(x) fonksiyonun grafiği

$y = f(x)$ fonksiyonunu $x_{i-\frac{1}{2}}$ noktasındaki türev;

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{dx}\right)_{i-\frac{1}{2}} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\lambda} \tag{7.1}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{i-\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{\lambda}\left(y_i - y_{i-1}\right) \tag{7.2}$$

olur. 7.2 geriye doğru sonlu fark olmaktadır.

İleriye doğru sonlu fark ifadesi ise, $x_{i+\frac{1}{2}}$ (i ile $i+1$ noktaları arasındaki eğim) noktasındaki türev;

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{y_{i+1}-y_i}{\lambda} \tag{7.3}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{\lambda}\left(y_{i+1}-y_i\right) \tag{7.4}$$

elde edilir. Merkezi sonlu farkın birinci türevi ise bu ikisinin ortalamasıdır, 7.2 ve 7.4'den yararlanarak,

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_i = \frac{1}{2\lambda}(-y_{i-1}+y_{i+1}) \tag{7.5}$$

olur. İkinci türevler için sonlu fark ifadesi

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cong \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta(\Delta y/\Delta x)}{\Delta x} \tag{7.6}$$

şeklindedir. i noktasındaki eğrinin ikinci türevi birinci türevler farkının λ 'ya bölümü olarak yazılırsa;

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_i \cong \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{i-\frac{1}{2}}\right] \tag{7.7}$$

elde edilir. Bu eşitlik 7.1 ve 7.4 denklemlerinde uygulanırsa,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_i \cong \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}(y_{i+1}-y_i) - \frac{1}{\lambda}(y_i-y_{i-1})\right] \tag{7.8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_i \cong \frac{1}{\lambda^2}\left(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}\right) \tag{7.9}$$

Böylelikle i noktası için ikinci türev elde edilmiş olur [41]. Bu türev formundan yararlanarak $i+1$ ve $i-1$ noktalarının ikinci türevleri

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_{i+1} \cong \frac{1}{\lambda^2}\left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\right)$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_{i-1} \cong \frac{1}{\lambda^2}\left(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}\right) \tag{7.10}$$

olarak elde edilir [42]. Bu değerler Taylor Serisi yardımıyla da elde edilebilir.
y = f(x) fonksiyonunu x = a civarında Taylor Serisine açılırsa;

$$y(x) = y(a) + \frac{(x-a)}{1!}y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}y''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}y^{n-1}(a) \tag{7.11}$$

olur. $x = a + \lambda$ durumunda ise denklem

$$y(a+\lambda) = y(a) + \frac{(\lambda)}{1!}y'(a) + \frac{(\lambda)^2}{2!}y''(a) + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}y^{n-1}(a) \tag{7.12}$$

halini alır. $x = a$ yerine $x = x_i$ terimi konularak,

$$y(i+\lambda) = y(i) + \frac{(\lambda)}{1!}y'(i) + \frac{(\lambda)^2}{2!}y''(i) + \frac{(\lambda)^3}{3!}y''' + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}y^{n-1}(i) \tag{7.13}$$

bu seriden $y'(i)$ çekilirse;

$$y'(i) = \frac{y(i+\lambda) - y(i)}{\lambda} - \frac{(\lambda)}{2!}y''(i) - \frac{(\lambda)^2}{3!}y'''(i) + \cdots \tag{7.14}$$

elde edilir. Seri $i - \lambda$ için yazılırsa;

$$y(i-\lambda) = y(i) - \frac{(\lambda)}{1!}y'(i) + \frac{(\lambda)^2}{2!}y''(i) - \frac{(\lambda)^3}{3!}y''' + \cdots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}y^{n-1}(i) \tag{7.15}$$

bu seriden $y'(i)$ çekilirse;

$$y'(i) = \frac{y(i) - y(i-\lambda)}{\lambda} + \frac{(\lambda)}{2!}y''(i) - \frac{(\lambda)^2}{3!}y'''(i) + \cdots \tag{7.16}$$

elde edilir. Denklem 7.13 ve 7.15 ifadelerinde ilk iki terim göz önüne alınıp bir birinden çıkarılırsa;

$$y(i+\lambda) - y(i-\lambda) = 2\lambda y'(i) \tag{7.17}$$

$$y'(i) = \frac{y(i+\lambda) - y(i-\lambda)}{2\lambda} \tag{7.18}$$

biçiminde elde edilir. Yine aynı şekilde ilk üç terim göz önüne alınarak, denklem 7.13 ile 7.15 toplanırsa;

$$y(i+\lambda) + y(i-\lambda) = 2y(i) + \lambda^2 y''(i) \tag{7.19}$$

$$y''(i) = \frac{y(i+\lambda) - 2y(i) + y(i-\lambda)}{\lambda^2} \tag{7.20}$$

elde edilir.

$$y(i-\lambda) = y_{i-1}, \quad y(i) = y_i, \quad y(i+\lambda) = y_{i+1} \tag{7.21}$$

biçiminde düzenlemeler yapılarak [43],

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_i &= \frac{1}{2\lambda}\left(-y_{i-1} + y_{i+1}\right) \\ \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_i &= \frac{1}{\lambda^2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) \end{aligned} \tag{7.22}$$

elde edilir. Benzer biçimde, 7.13 ve 7.15 ifadelerinde ilk beş terim göz önüne alınarak matematiksel işlemlerle

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right)_i = \frac{1}{2\lambda^3}\left(-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}\right)$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}\right)_i = \frac{1}{\lambda^4}\left(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}\right) \tag{7.23}$$

elde edilir. Şematik olarak gösterilirse,

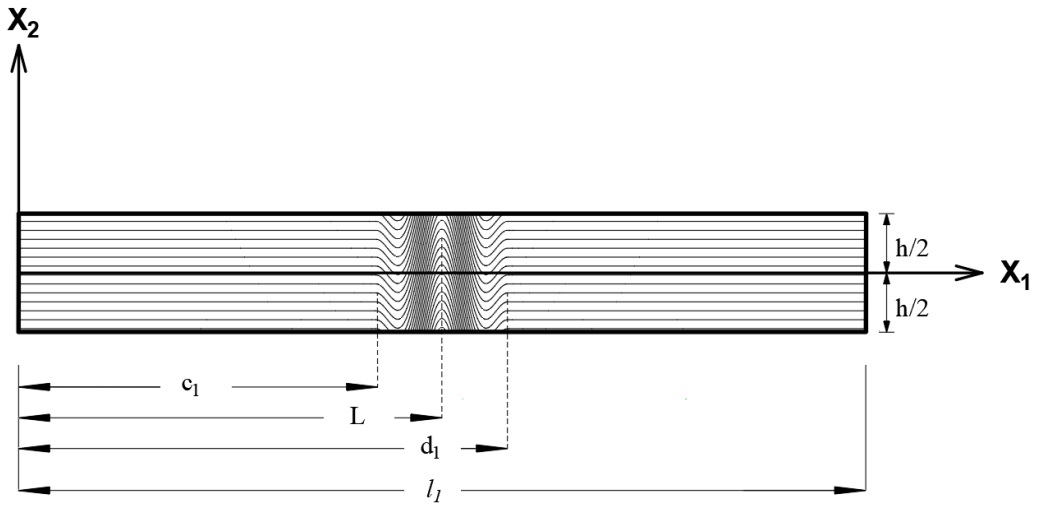
Tablo 7.1 Merkezi sonlu farklar tablosu

TÜREV	NOKTA / ÇARPAN	i-2	i-1	i	i+1	i+2
$y'(i)$	$\frac{1}{2\lambda}$		-1		+1	
$y''(i)$	$\frac{1}{\lambda^2}$		+1	-2	+1	
$y'''(i)$	$\frac{1}{2\lambda^3}$	-1	+2		-2	+1
$y''''(i)$	$\frac{1}{\lambda^4}$	+1	-4	+6	-4	+1

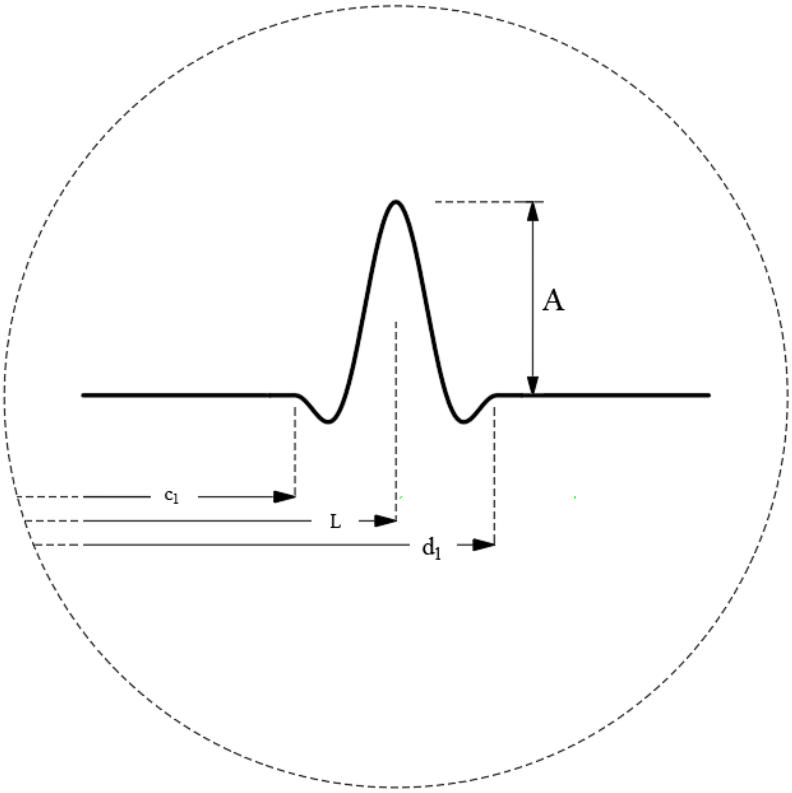
8
YAPISINDA YEREL EĞRİLİK OLAN KOMPOZİT ŞERİT PLAKLAR

Normalize edilmiş malzeme özellikleri Bölüm 3'de verilen kompozit şerit plakların enine izotrop olduğu göz önüne alınacaktır. Burada, E_1, E_2, η_1, η_2 , ν_1 ve ν_2 sırasıyla, matris malzemesi ve takviye (güçlendirici) malzemesine ait Elastisite (Young) modulü, hacim oranları ve Poisson oranını göstermektedir. Ayrıca kiriş üzerindeki eğrilikler sadece Ox_1 ekseni boyuncadır.

Şekil 8.1'de yerel eğriliğe sahip kompozit plak-kiriş görülmektedir. Bu çalışmada yerel eğrilik ifadesi eşitlik 8.1 ile tanımlanmakta olup, fonksiyon değişimi genel itibariyle Şekil 8.1 ve Şekil 8.2'de görülmektedir.



Şekil 8.1 Yerel eğriliğe sahip şerit plak



Şekil 8.2 Yerel eğriliğin detayı

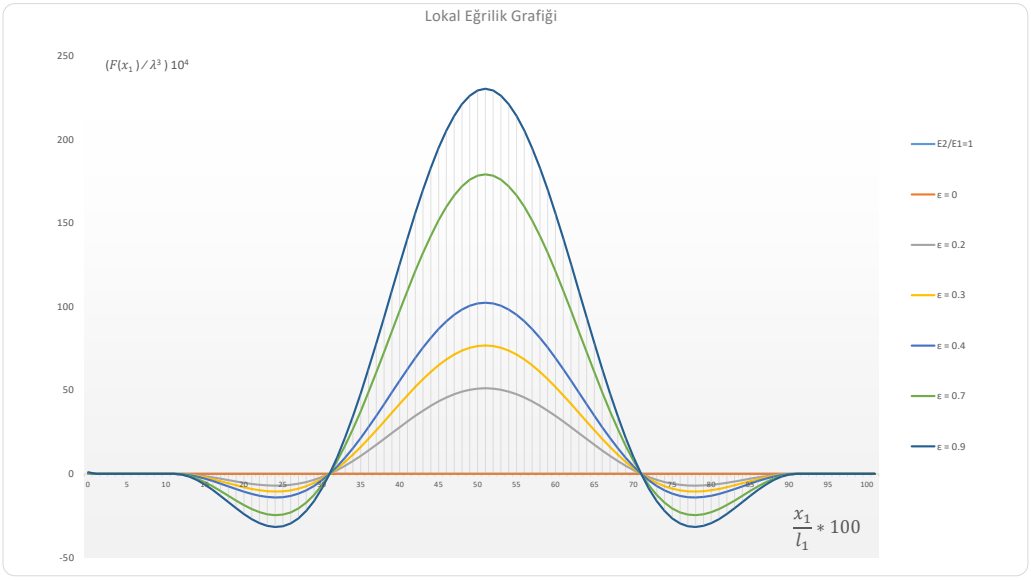
$$F(x_1) = \varepsilon f(x_1) = \begin{cases} \varepsilon\lambda^3 \left(\frac{\mathrm{x_1}}{\ell_1} - \mathrm{c}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{x_1}}{\ell_1} - \mathrm{d}\right)^2 \exp\left(-\lambda^{2\mathrm{n}} \left(\frac{\mathrm{x_1}}{\ell_1} - \ell_0\right)^{2\mathrm{n}}\right) \times \ldots \\ \qquad \ldots \cos\left(\mathrm{m}\pi\lambda \left(\frac{\mathrm{x_1}}{\ell_1} - \ell_0\right)\right), \qquad \frac{\mathrm{x_1}}{\ell_1} \in [\mathrm{c}, \mathrm{d}] \\ 0, \qquad \frac{x_1}{\ell_1} \in [0, \mathrm{c}) \cup (\mathrm{d}, 1] \end{cases} \tag{8.1}$$

Eşitlik 8.1 yerel eğriliğin fonksiyonunu ifade etmektedir ve $c = c_1/l_1$ ve $d = d_1/l_1$ boyutsuzlaştırmaları yapılarak

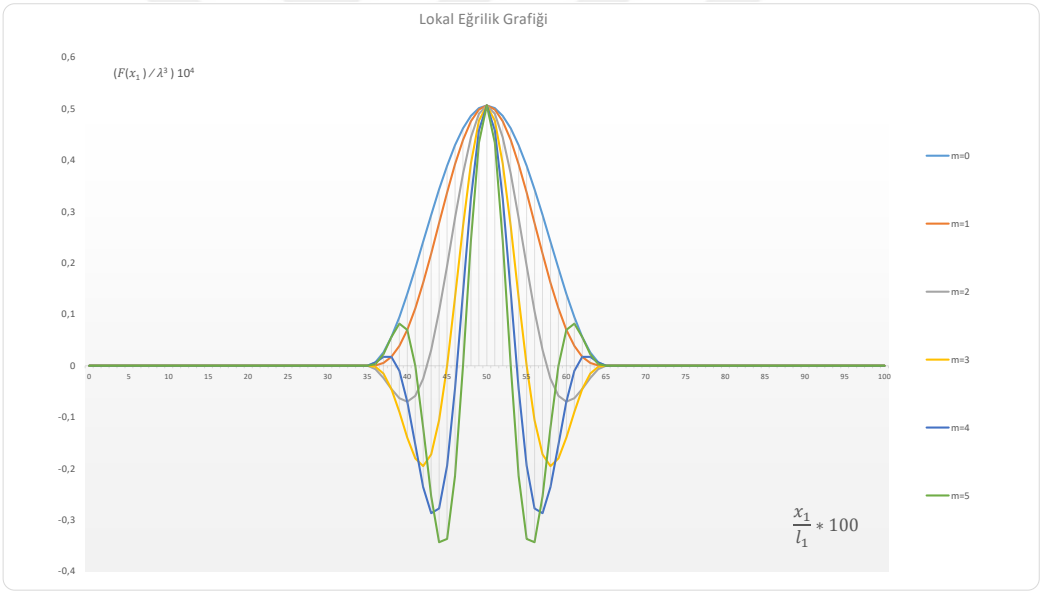
$$\lambda = \frac{l}{(d-c)}, \quad \varepsilon = \frac{A}{(d-c)}, \quad l_0 = \frac{L}{\ell_1} \tag{8.2}$$

biçimindedir. Burada A, yerel eğriliğin tepe noktasının maksimum yüksekliğini; L, bu maksimum yüksekliğe karşı gelen noktanın O başlangıç noktasından olan uzaklığı göstermektedir. $(d-c)$ farkı arttıkça yerel eğrilik daha geniş bir bölgede yer alır, azaldıkça yerel eğriliğin yayıldığı bölge daralır.

Buradaki m parametresi ise yerel eğrilik fonksiyonunun salınımını diğer bir deyişle dalga adedini göstermektedir. Farklı m değerleri için yerel eğrilik formları Şekil 8.4' de görülmektedir.



Şekil 8.3 Şerit plağın farklı ε değerlerinde lokal eğrilik grafiği



Şekil 8.4 ε=0.1, c=0.35, d=0.65, n=1 ve $l_0 = 0.5$ olmak üzere farklı m değerleri için lokal eğrilik grafiği

8.1 Şerit Plak Analizi

Geometrik yapısı Şekil 8.1 ve 8.2'de görülen h kalınlıklı, l_1 açıklıklı ve x_3 doğrultusunda sonsuz uzunluklu şerit plağın statik analizi, Bölüm 7'de anlatılan Merkezi Sonlu Farklar yöntemiyle çözülerek her noddaki çökme değerleri elde edilmiştir. Bu analiz yapılırken farklı sınır koşulları göz önüne alınmıştır. Bunlar

- $x_1 = 0$ ve $l_1 = 0$ da basit mesnetli
- $x_1 = 0$ ve $l_1 = 0$ da ankastre mesnetli
- $x_1 = 0$ da ankastre mesnetli ve $x_1 = l_1$ de basit mesnetli

olmak üzere üç farklı durum için her noktadaki çökme, eğilme momenti değerleri yanında her noddaki σ_1 değerleri bulunarak grafik olarak gösterilmiştir.

Bu konu hakkında, Yahnioğlu [19] ve Akbarov [40] dışında, teorik yada deneysel olarak fazla bir çalışma yapılmamış olduğundan dolayı adı geçen eserlerde de sadece iki ucu ankastre mesnetli plak kiriş üzerinde elde edilmiş olan sonuçlarla bu çalışmadaki aynı sınır şartlarına sahip kiriş analiz sonuçları karşılaştırılarak yeterli yaklaşıklık elde edildiği görülmüştür. Böylelikle program algoritması diğer iki sınır şartı için de geliştirilip analizler yapılmıştır. Bu yönüyle tez çalışması alanında bir ilk olma özelliğindedir.

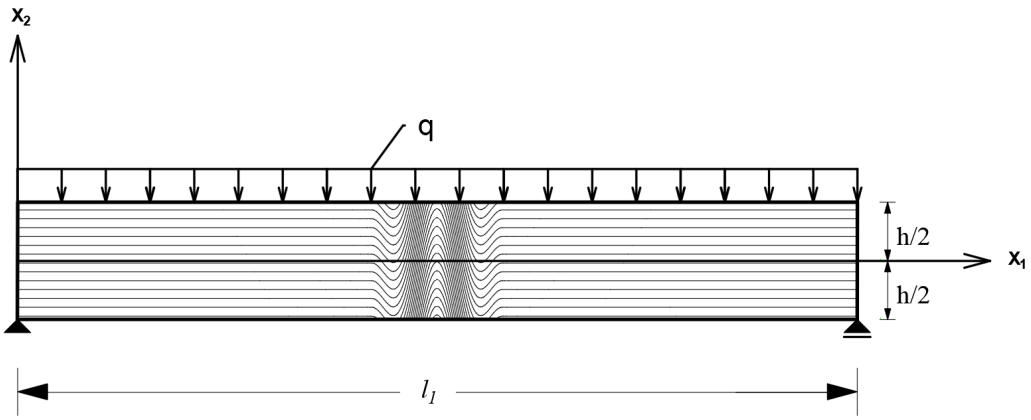
Şekil 8.4'de görüldüğü üzere eğriliğin tüm tepe noktaları kiriş ortasında alınmış olup maksimum genliği $A = 0.50625$'dir.

Grafiklerde düşey eksende $F(x_1)/\lambda^3 \times 10^4$ boyutsuzlaştırılması yapıldığında Akbarov [40] 'da görüldüğü üzere grafiğin maksimum genliği $A = 0.50625$ olduğu görülmektedir.

Kompozit şerit plak analizlerinde, matris ve güçlendirici malzemelerinin hacim oranları $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ ve Poisson oranı $v_1 = v_2 = 0.3$ olarak alınmıştır. Şerit plak ise 100 eşit parçaya bölünerek Merkezi Sonlu Farklar yöntemiyle analizi yapılmıştır.

8.2 İki Ucu Basit Mesnetli Şerit Plak

Burada yerel eğriliğin tepe noktasının tam ortada olduğu yani eşitlik 8.1 fonsiyonunun $x_1 = l_1/2$ (yani, $l_o = 0.5$) noktasından geçen düşey eksene göre simetrik olduğu durumlar için analizler yapılmıştır.

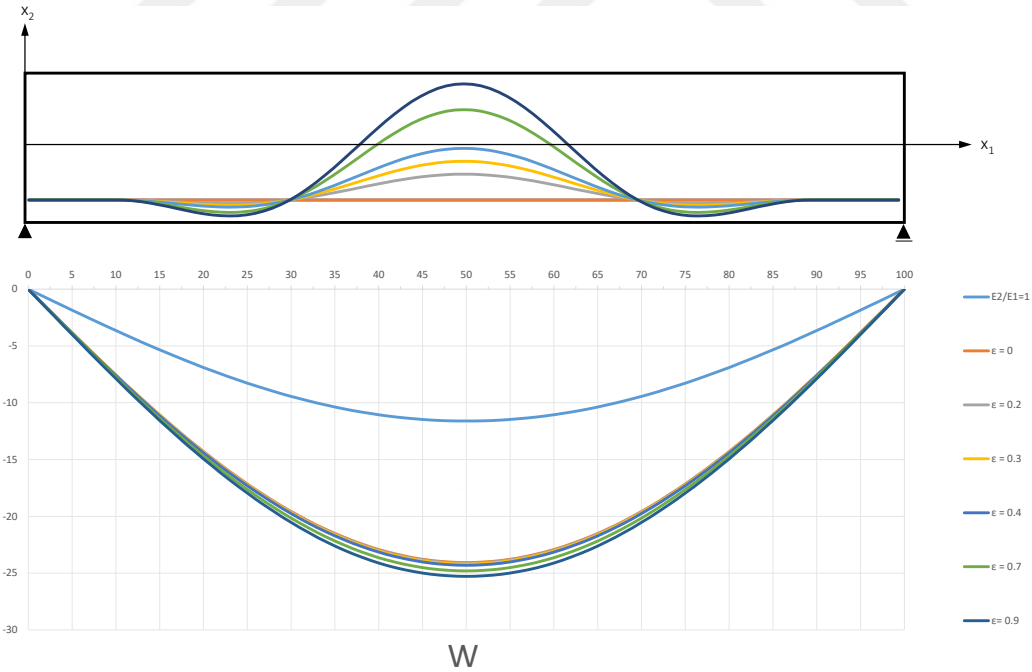


Şekil 8.5 İki ucu basit mesnetli yerel eğrilikli kompozit şerit plak

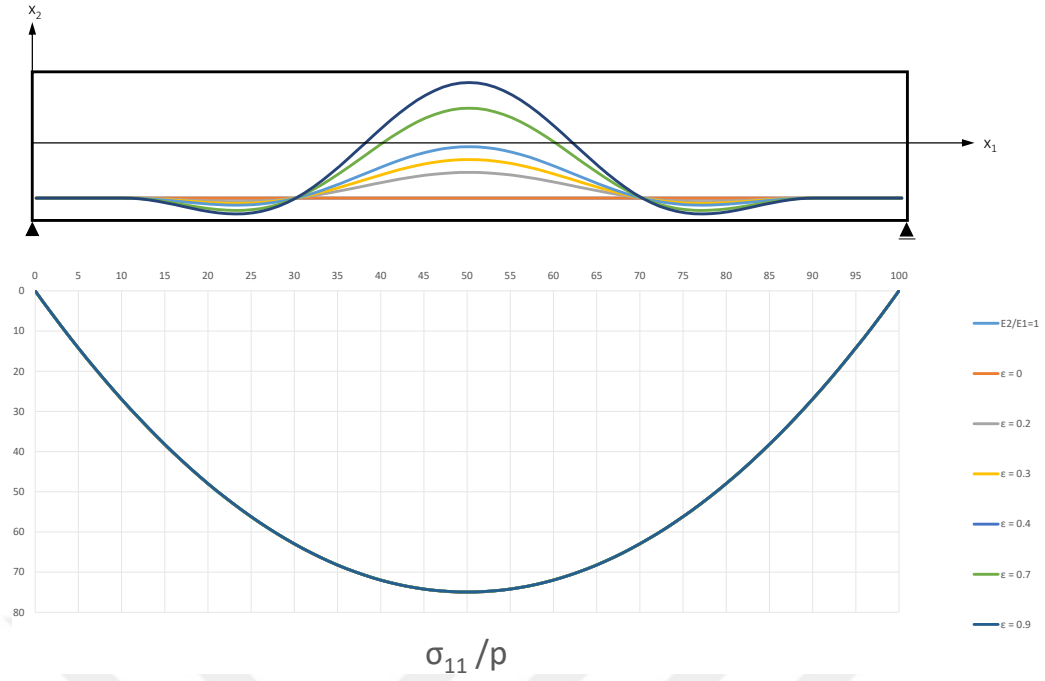
Bu analizde

$$E_2/E_1 = 10, \quad h/l = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \mathrm{d} = 1 - c, \quad n = 1, \quad m = 1$$

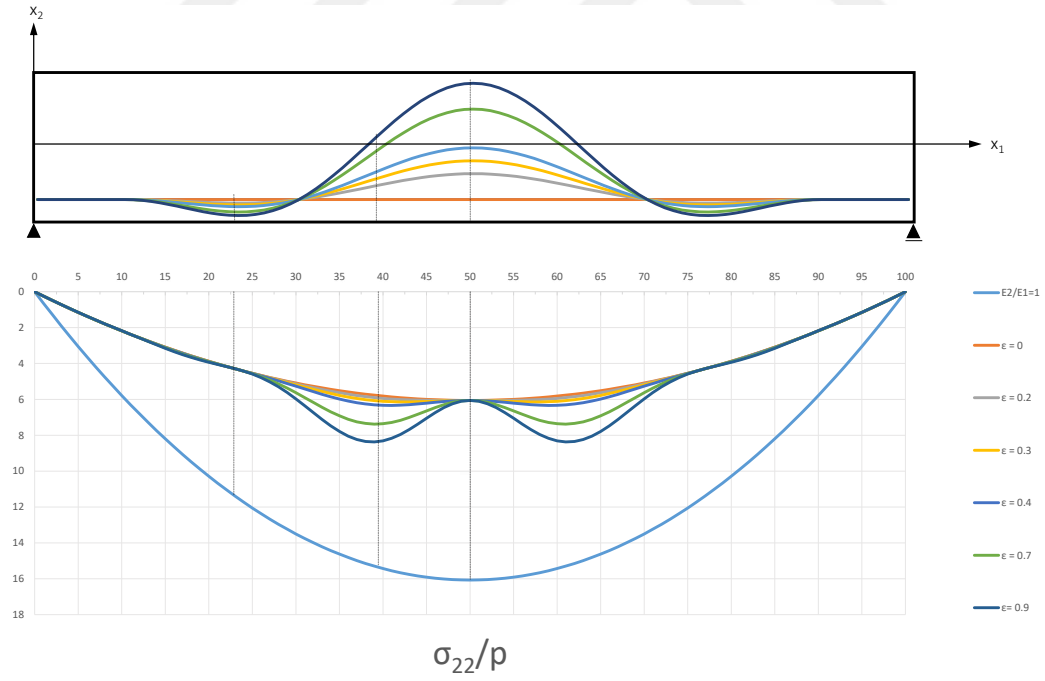
durumu ve farklı ε değerleri için Şekil 8.6 çökme grafiği, Şekil 8.7, σ_{11} grafiği, Şekil 8.8 ve Şekil 8.9'de σ_{22} grafiği, Şekil 8.10'da moment grafiği elde edilmiştir. Yer değiştirme değerlerinde $\frac{E_1.U}{L.P}$ ve gerilme değerlerinde σ/P biçiminde boyutsuzlaştırma yapılmıştır.



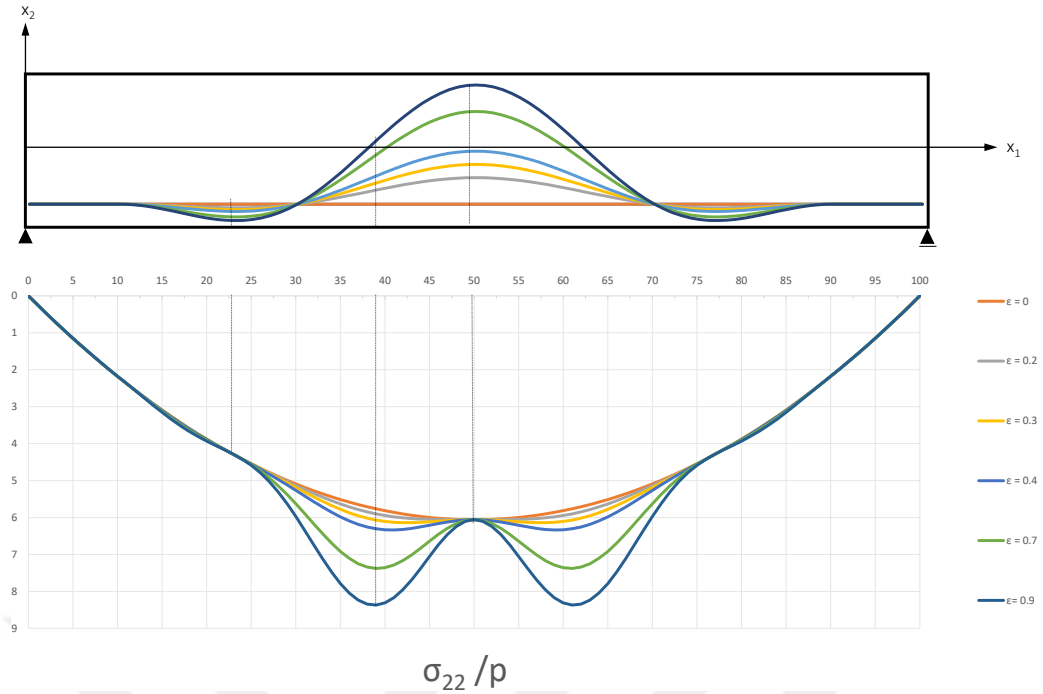
Şekil 8.6 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde çökme grafiği



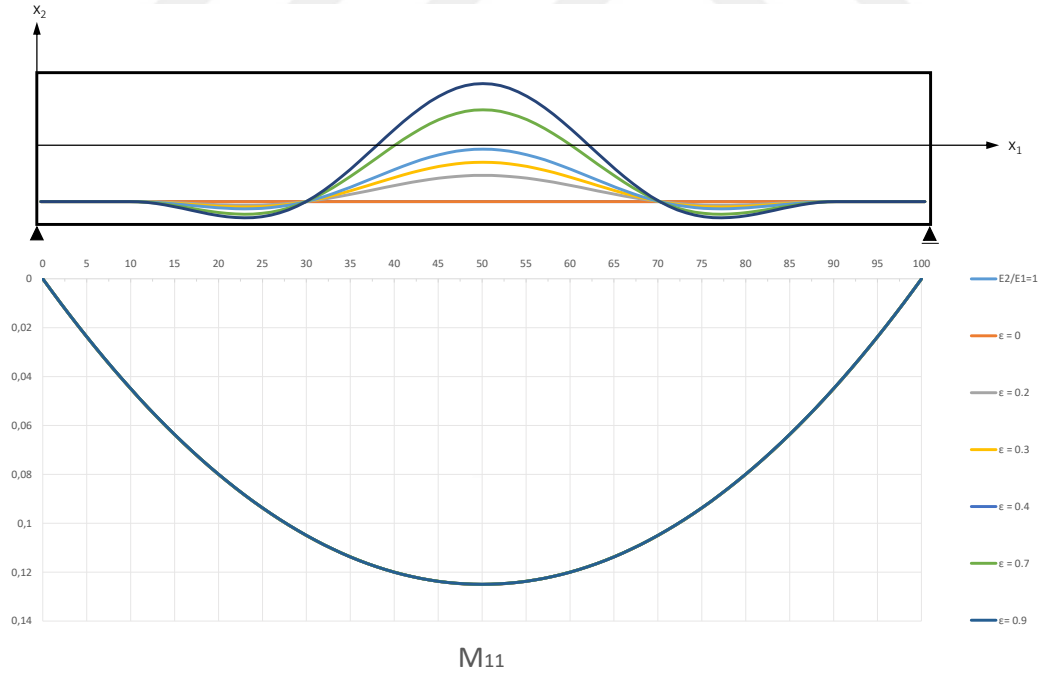
Şekil 8.7 İki ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği



Şekil 8.8 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.9 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde ve sadece kompozit durumda kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.10 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde moment grafiği

Şekil 8.6'dan görüldüğü üzere yerel eğrilikte ε değerleri arttıkça çökme değerleri de artmaktadır. Yerel eğriliğin olduğu kompozit kirişte çökme değerlerinin, $E_2/E_1 = 1$ homojen izotrop durumuna karşı gelen çökme değerinden daha büyük olduğu görülmektedir.

Kompozit şerit plağın yapısındaki eğrilik, σ_{22} gerilmelerinde etkisini göstermektedir. Kiriş kalınlığının ortasına denk gelen noktadaki σ_{22} gerilmeleri Şekil 8.9'da görülmektedir. Burada yerel eğriliğin σ_{22} gerilmesi üzerindeki etkisi, eşitlik 8.1'deki $F(x_1)$ fonksiyonunun küçük salınım yaptığı $x_1/l_1 = 0.23$ noktasından yani maksimum tepe noktasından başlamakta ve $x_1/l_1 = 0.39$'de en büyük değerine ulaşmaktadır. Bu noktadan itibaren $x_1/l_1 = 0.5$ noktasına kadar gerilmeler azalmakta ve $x_1/l_1 = 0.5$ noktasında ε'un bütün farklı değerleri için aynı olmaktadır. Şekil 8.7'de görüldüğü üzere $E_2/E_1 = 1$ olduğu homojen izotrop bir kirişin σ_{22} değeri kompozit kirişe nazaran çok daha yüksek olmaktadır.

Şekil 8.10'daki eğilme momenti grafiği ve buna bağlı olarak Şekil 8.7'deki σ_{11} grafiği üst üste düşmektedir. Bunun nedeni, plak kalınlığının açıklığa göre nispeten küçük olmasıdır. İleride, Yahnioğlu [19] ile karşılaştırılmak üzere aynı değerler kullanıldığında $h/l_1 = 0.2$ değeri için çökme değerlerinde farklılaşmalar meydana geldiği net olarak görülmektedir. Yani farklı ε değerleri için h/l_1 değeri arttıkça çökme değerleri artmaktadır.

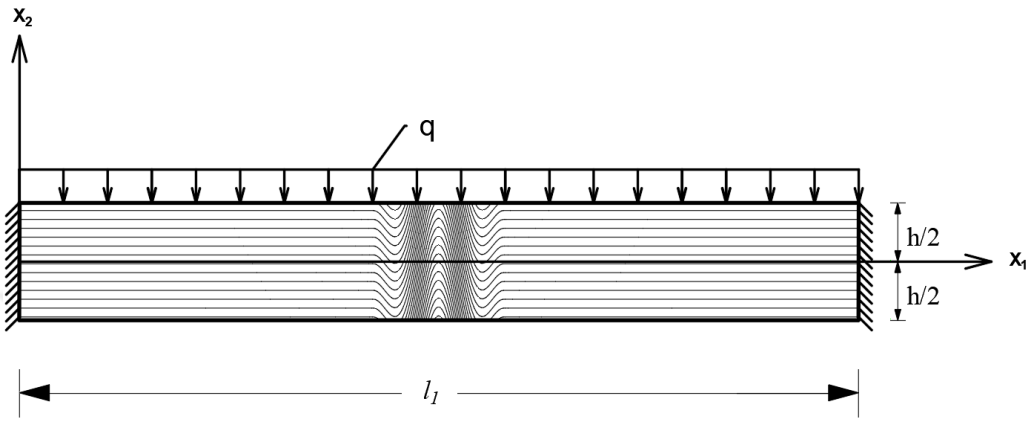
Tablo 8.1 İki ucu basit mesnetli şerit plakta farklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

$E_2/E_1 = 1$	ε	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
-11.6081	W_{maks}	-24.0644	-24.1244	-24.1994	-24.3046	-24.8015	-25.2837
75	$\sigma_{11\,maks}$	75	74.994136	74.9876	74.9798	74.9632	74.9741634
16.071429	$\sigma_{22\,maks}$	6.05769	6.05728	6.139441	6.33553	7.37725	8.37066
16.071429	x_1/l_1=0.5 için σ_{22}	6.05769	6.05722	6.05669	6.05606	6.05472	6.05561
0.125	M_{11maks}	0.125	0.12499	0.12498	0.12497	0.12494	0.12496

8.3 İki Ucu Ankastre Mesnetli Şerit Plak

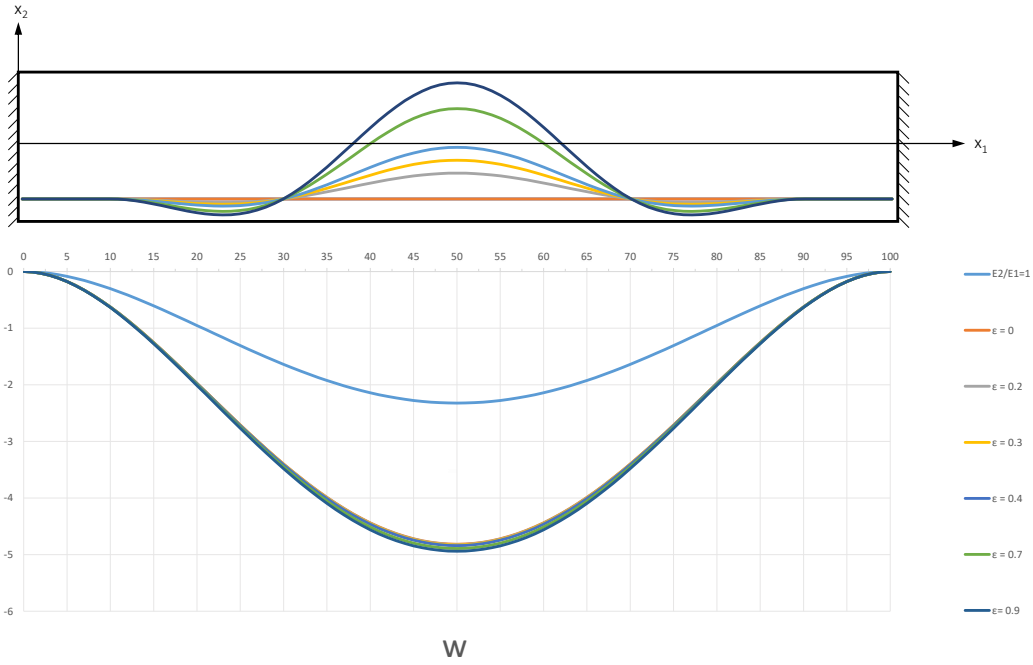
Bu analizde, Şekil 8.11'de görüldüğü gibi iki ucu ankastre yerel eğrilikli kompozit şerit plağın,

$$E_2/E_1 = 10, \quad h/l = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \mathrm{d} = 1 - c, \quad n = 1, \quad m = 1$$

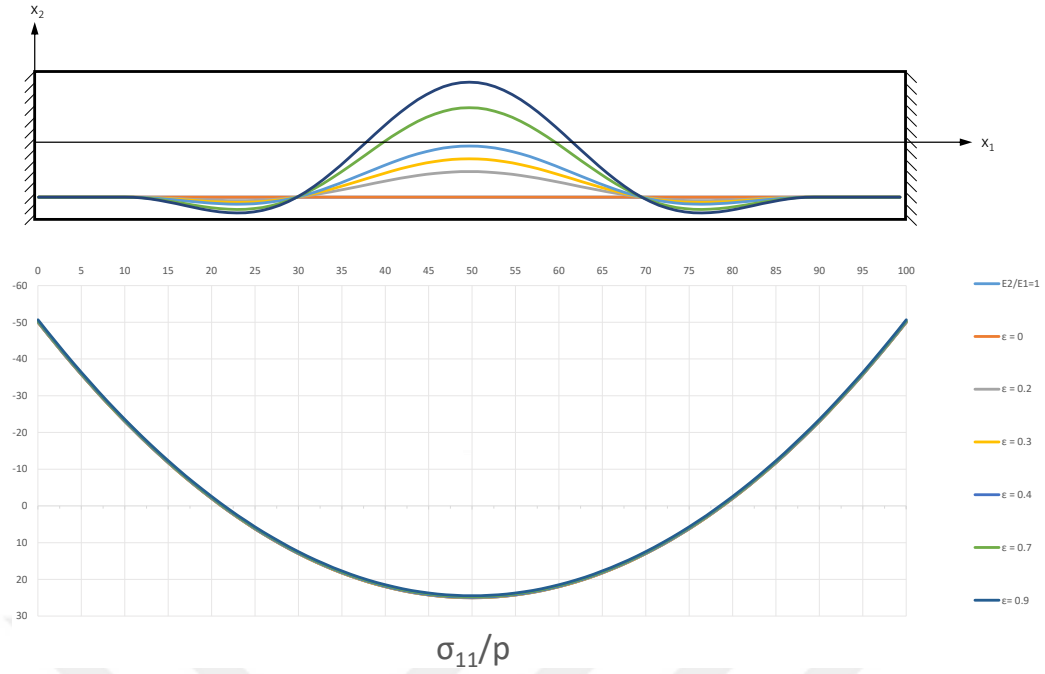


Şekil 8.11 İki ucu ankastre mesnetli yerel eğrilikli kompozit şerit plak

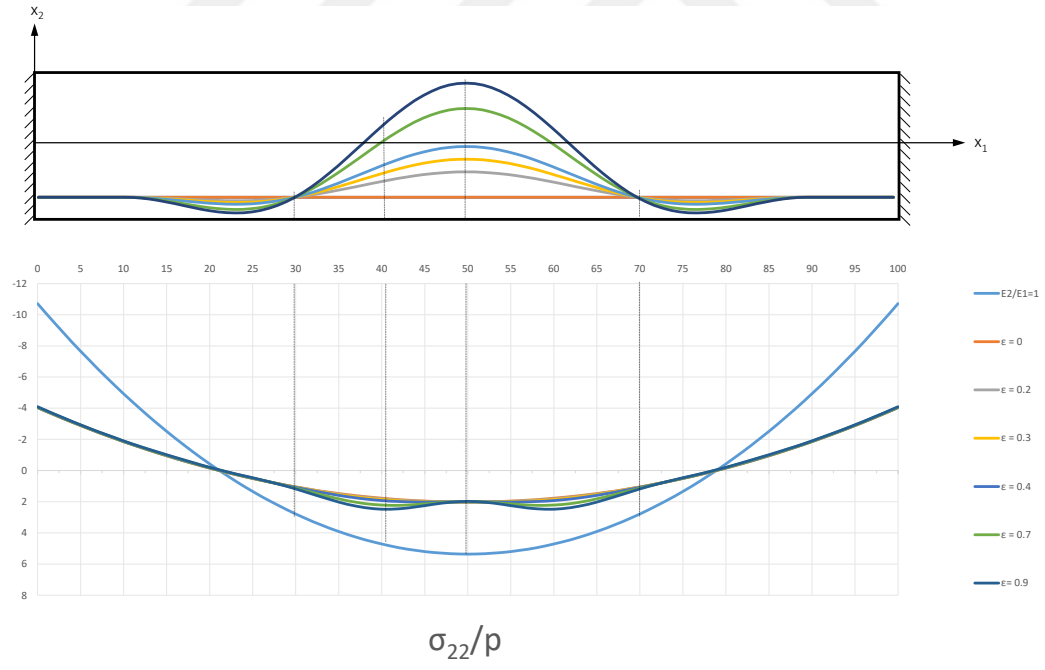
durumunda ve farklı ε değerleri için çökme grafiği (Şekil 8.12), σ_{11} gerilmesine ait grafikler (Şekil 8.13), σ_{22} (Şekil 8.14, 8.15), eğilme momenti grafiği (Şekil 8.16) elde edilmiştir.



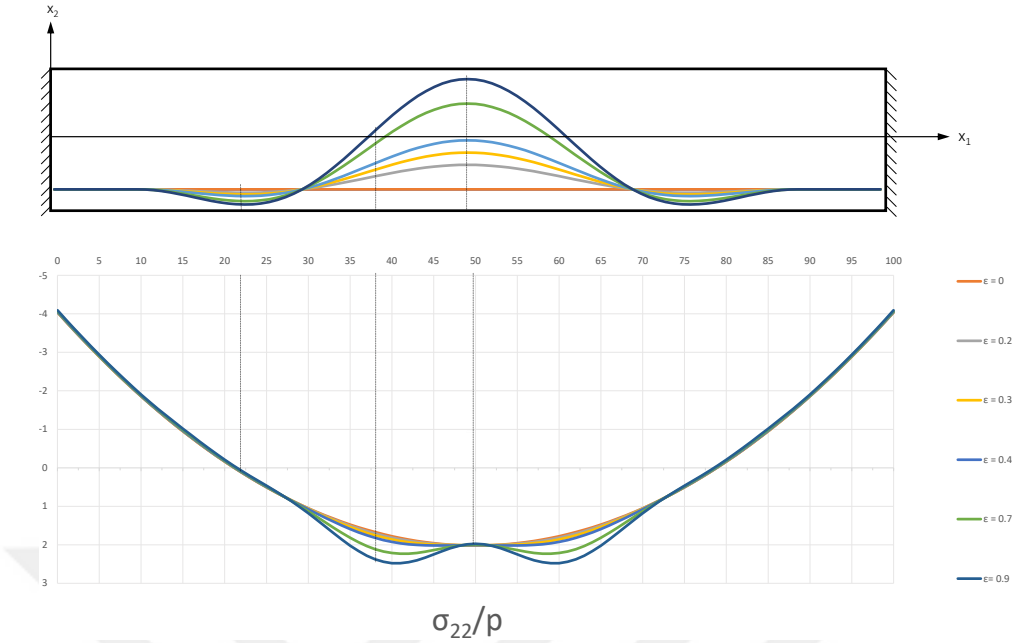
Şekil 8.12 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde çökme grafiği



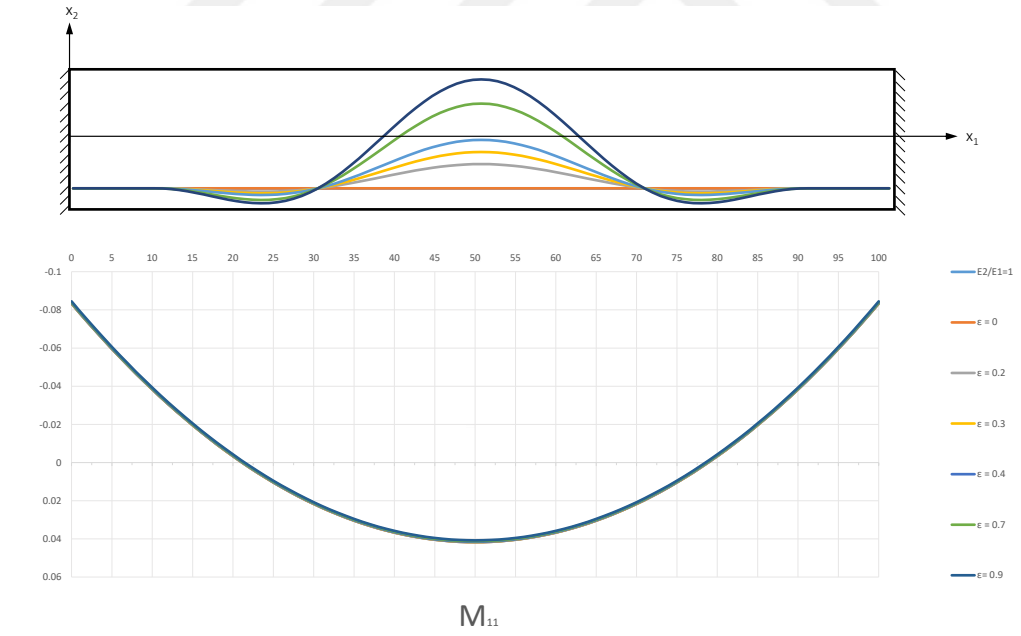
Şekil 8.13 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği



Şekil 8.14 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.15 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde ve sadece kompozit durumda kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.16 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde moment grafiği

Tablo 8.2 İki ucu ankastre mesnetli şerit plakta farklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

$E_2/E_1 = 1$	ε	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
-49.995	X_1/l_1=0 için σ_{11}	-49.995	-50.028524	-50.07038	-50.12888	-50.40275	-50.66460223
25.005	X_1/l_1=0.5 için σ_{11}	25.005	24.975731	24.9395	24.8892	24.6609	24.45193569
-10.7132143	X_1/l_1=0 için σ_{22}	-4.038058	-4.040765	-4.0441461	-4.048871	-4.070991	-4.092141
5.3582143	X_1/l_1=0.5 için σ_{22}	2.01963	2.01727	2.01434	2.01028	1.99184	1.97496
-0.083325	X_1/l_1=0 için M_{11}	-0.083325	-0.083381	-0.083451	-0.083548	-0.084005	-0.084441
0.04168	X_1/l_1=0.5 için M_{11}	0.04168	0.04163	0.04157	0.04148	0.0411	0.04075

Bu grafikler, hem $E_2/E_1 = 1$ hem de $E_2/E_1 = 10$ olması durumunda farklı ε değerleri için çizilmiştir. Grafiklerden de görüldüğü üzere, her iki ucu ankastre mesnetli şerit plağın çökme değerleri, her iki ucu basit mesnetli şerit plak gibi, homojen izotrop ($E_2/E_1 = 1$) halde ε'a bağlı olarak artmaktadır.

Tablo 8.3 İki ucu ankastre mesnetli şerit plaktafarklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda maksimum çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

$E_2/E_1 = 1$	ε	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
-2.32329	W_{maks}	-4.81635	-4.82265	-4.8305	-4.84145	-4.89241	-4.94071
25.005	$\sigma_{11\,maks}$	25.005	24.975731	24.9395	24.8892	24.6609	24.45193569
5.3582143	$\sigma_{22\,maks}$	2.01963	2.01727	2.01434	2.01882	2.23283	2.48016
0.04168	M_{11maks}	0.04168	0.04163	0.04157	0.04148	0.0411	0.04075

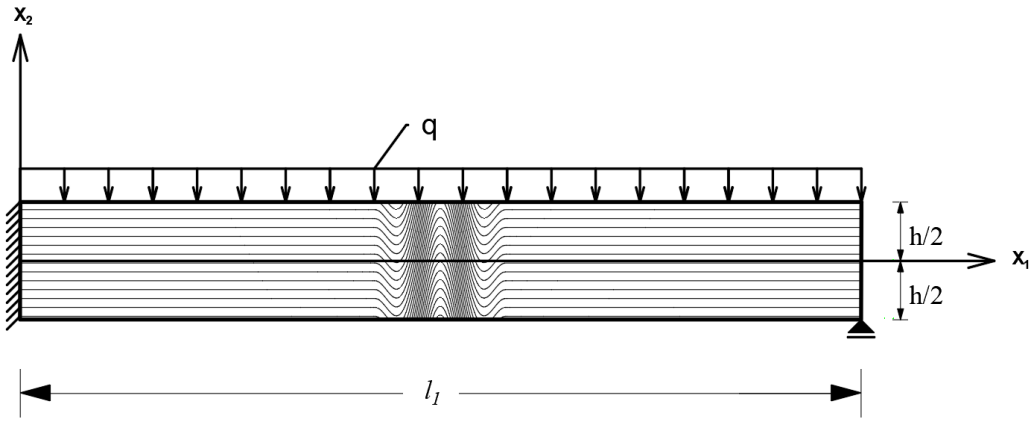
Burada da kompozit şerit plağın yapısındaki eğrilik, σ_{22} gerilmelerinde etkisini göstermektedir. Kiriş kalınlığının ortasına denk gelen noktadaki σ_{22} gerilmeleri Şekil 8.14 ve Şekil 8.15'de görülmektedir. Yerel eğriliğin σ_{22} gerilmesi üzerindeki etkisi, eşitlik 8.1'deki $F(x_1)$ fonksiyonunun sıfır olduğu $x_1/l_1 = 0.30$'den önce ve $x_1/l_1 = 0.70$'dan sonraki küçük salınımlarda, değerler birbirlerine çok yakınken bu aralıkta belirgin miktarda farklılaşmalar başlamaktadır, $x_1/l_1 = 0.41$'da en büyük değerine ulaşmaktadır. Bu noktadan itibaren $x_1/l_1 = 0.5$ noktasına kadar gerilmeler azalmakta, iki ucu basit mesnetli şerit plak probleminden farklı olmak üzere $x_1/l_1 = 0.5$ noktasında ε'un bütün farklı değerleri için aynı olmamaktadır. Şekil 8.14'de görüldüğü üzere $E_2/E_1 = 1$ olduğu homojen izotrop bir kirişin σ_{22} değeri kompozit kirişe nazaran çok daha yüksek olmaktadır.

Şekil 8.16'daki eğilme momenti grafiği ve buna bağlı olarak Şekil 8.13'deki σ_{11} grafiği, iki ucu basit mesnetli problemdeki gibi üst üste düşmemekle birlikte küçük bir miktar farklılık ortaya çıkmaktadır. Yukarıda bahsedildiği üzere şerit plağın kalınlığı arttıkça bu farklılık daha berligin hale geleceği açıktır.

8.4 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Basit Mesnetli Şerit Plak

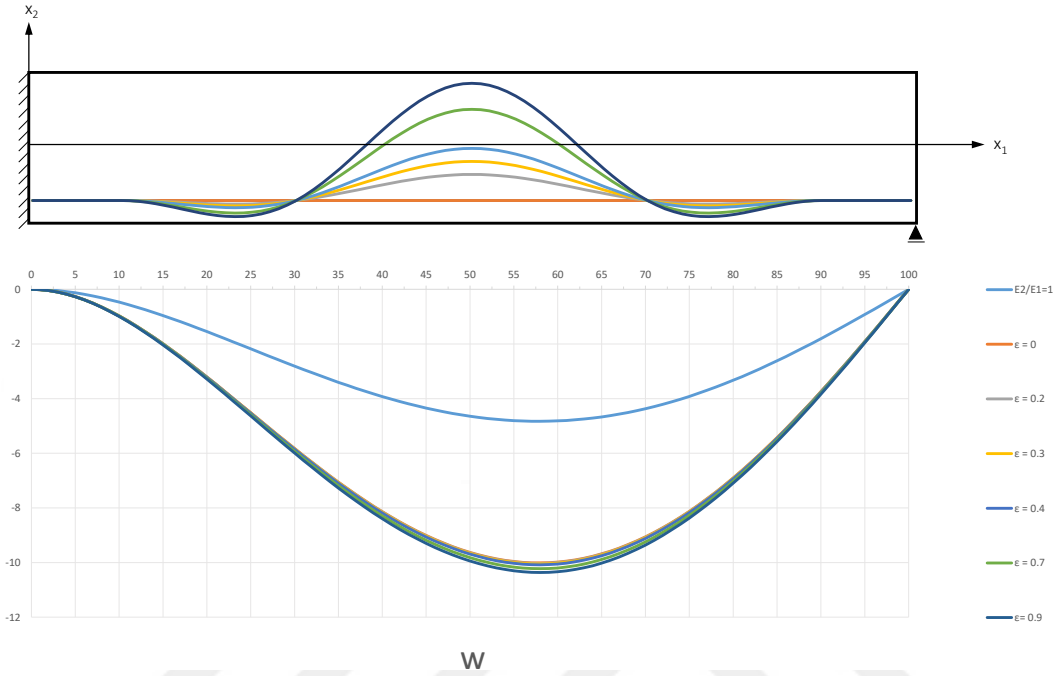
Bu analizde, Şekil 8.17'de görüldüğü gibi bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli yerel eğrilikli kompozit şerit plağın,

$$E_2/E_1 = 10, \quad h/l = 0.1, \quad c = 0.1, \quad \mathrm{d} = 1 - c, \quad n = 1, \quad m = 1$$

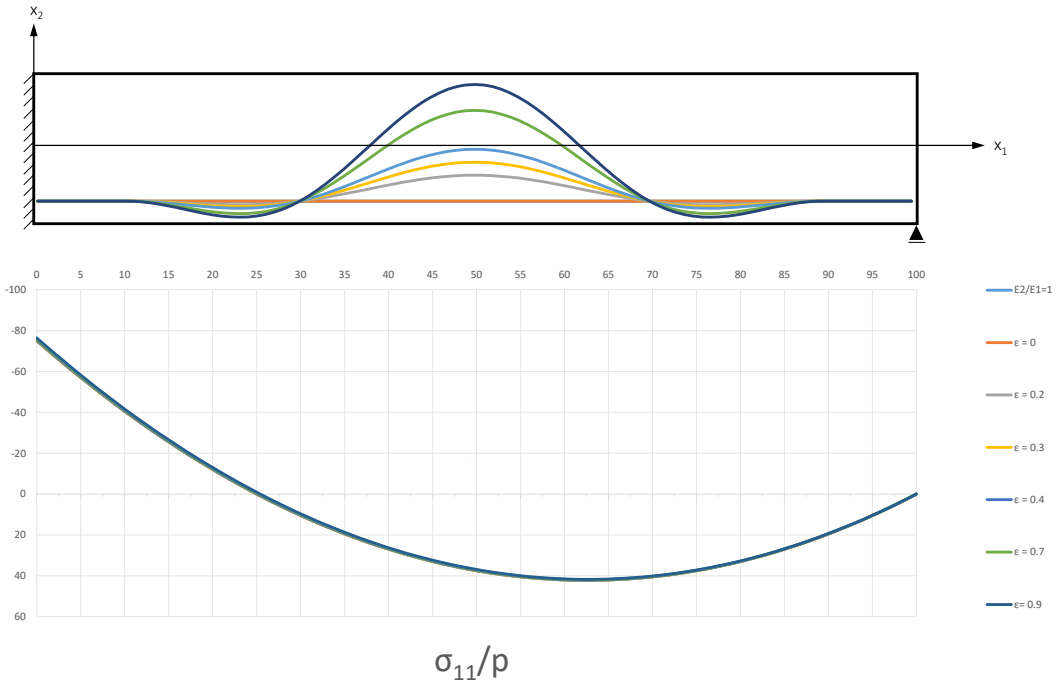


Şekil 8.17 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli yerel eğrilikli kompozit şerit plak

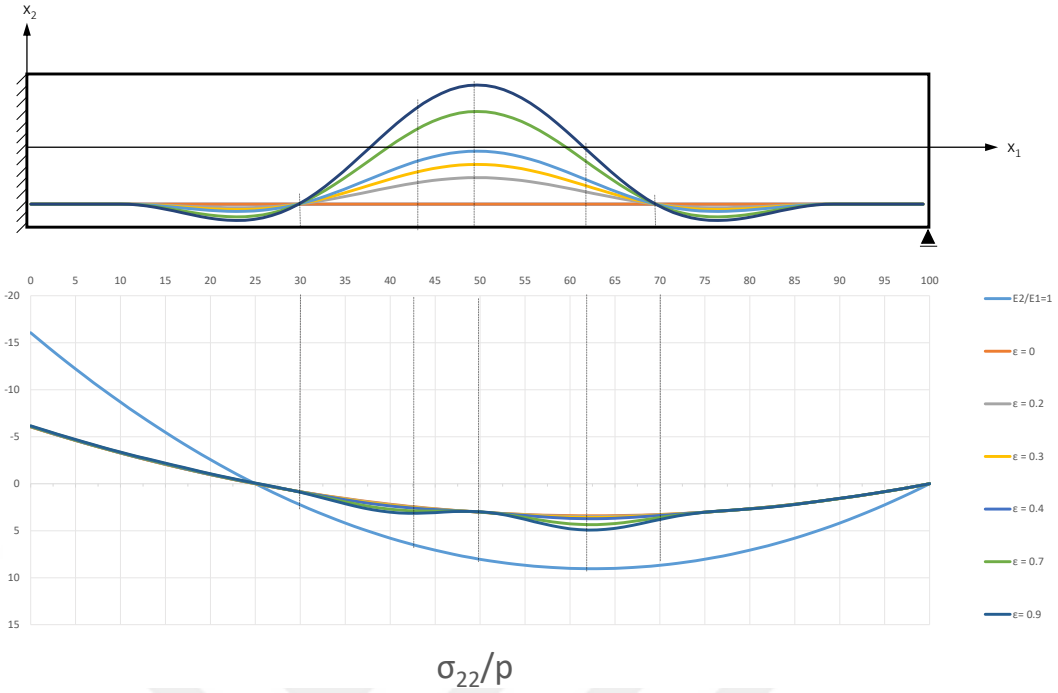
durumunda ve farklı ε değerleri için çökme grafiği (Şekil 8.18), σ_{11} gerilmesine ait grafikler (Şekil 8.19), σ_{22} (Şekil 8.20, 8.21), eğilme momenti grafiği (Şekil 8.22) elde edilmiştir.



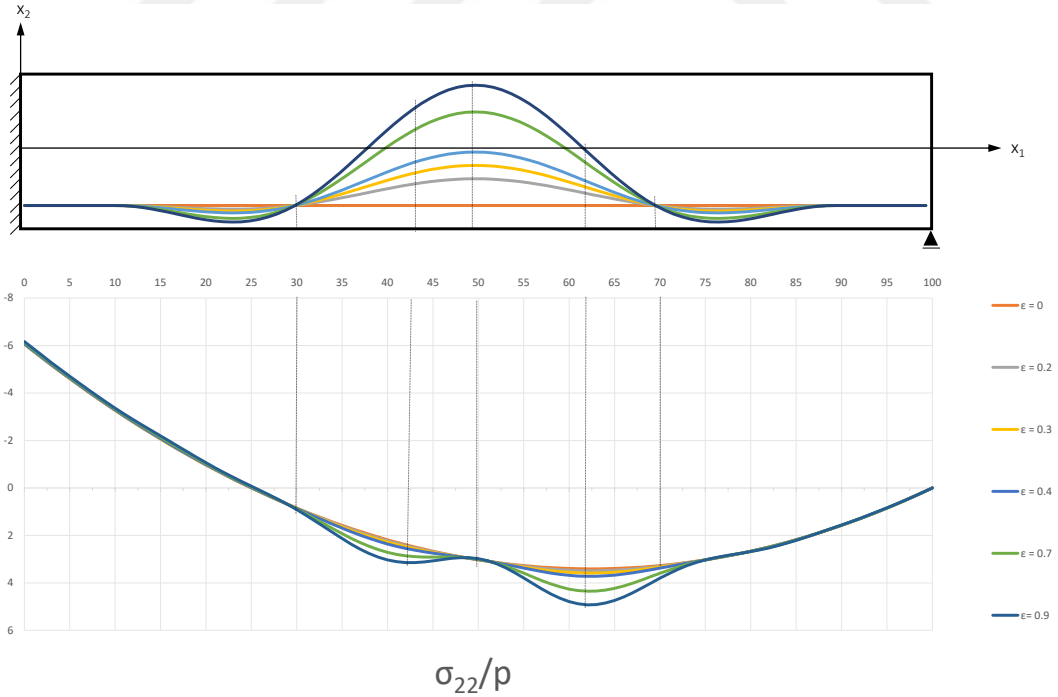
Şekil 8.18 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerindeki çökme grafiği



Şekil 8.19 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği

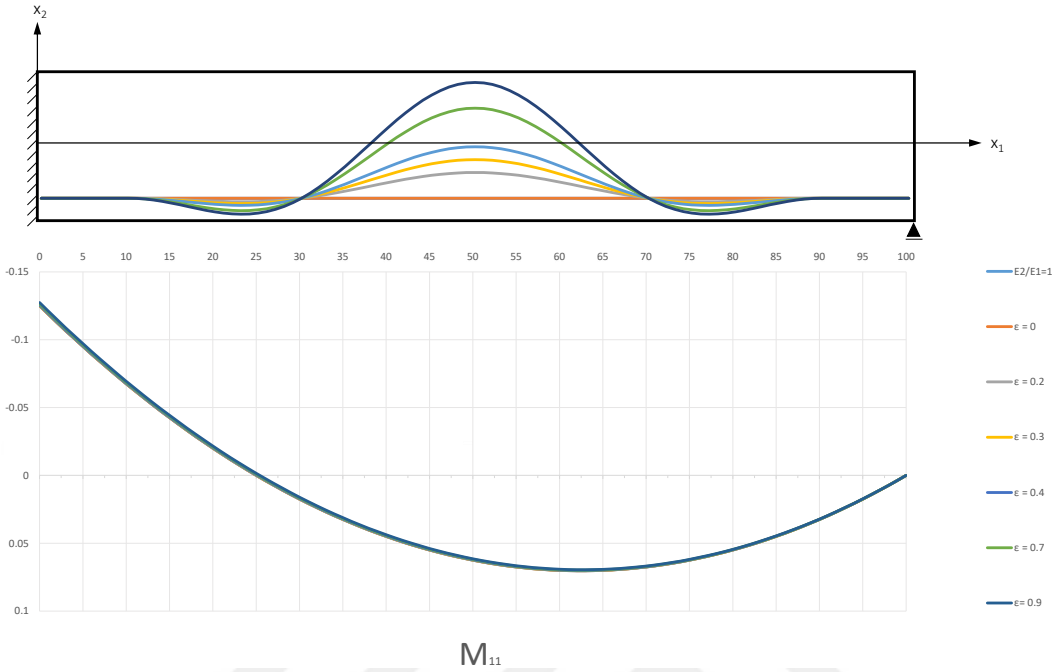


Şekil 8.20 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.21 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde ve sadece kompozit durumda kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği

Şekil 8.22 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde moment grafiği



Tablo 8.4 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plakta farklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

$E_2/E_1 = 1$	ε	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
-4.64483	X_1/l_1=0.5 için W	-9.62909	-9.64477	-9.66435	-9.6917	-9.81968	-9.94204
-74.98875	X_1/l_1=0 için σ_{11}	-74.98875056	-75.059975	-75.14895	-75.27338	-75.85724	-76.4173719
37.5056	X_1/l_1=0.5 için σ_{11}	37.5056247	37.471739	37.4298	37.3719	-7.1102	36.87284913
-16.069018	X_1/l_1=0 için σ_{22}	-6.056784	-6.062536	-6.0697227	-6.079773	-6.126931	-6.172172
8.0369196	X_1/l_1=0.5 için σ_{22}	3.0293	3.02656	3.023177	3.0185	2.99736	2.97819
-0.124981	X_1/l_1=0 için M_{11}	-0.124981	-0.1251	-0.125248	-0.125456	-0.126429	-0.127362
0.06251	X_1/l_1=0.5 için M_{11}	0.06251	0.06245	0.06238	0.06229	0.06185	0.06145

Grafiklerden de görüldüğü üzere, bir ucu ankastre diğeri basit mesnetli şerit plağın çökme değerleri, önceki örnekler gibi, homojen izotrop ($E_2/E_1 = 1$) durumuna göre ε'a bağlı olarak artmaktadır.

Tablo 8.5 Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli şerit plakta, farklı ε değerleri ve homojen izotrop durumda maksimum çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

$E_2/E_1 = 1$	ε	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
-4.82988	W_{maks}	-10.0127	-10.0303	-10.0522	-10.0828	-10.2261	-10.3631
42.1843	σ_{11maks}	42.1842748	42.159309	42.1286	42.0863	41.8966	41.72639876
9.0394875	σ_{22maks}	3.40719	3.48744	3.586938	3.72476	4.35158	4.92454
0.07031	M_{11maks}	0.07031	0.07027	0.07021	0.07014	0.06983	0.06954

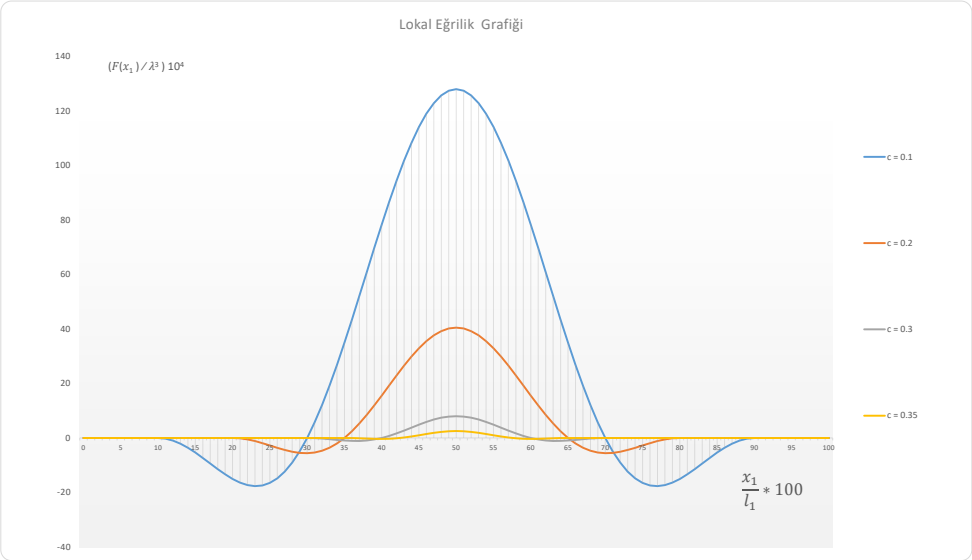
Kompozit şerit plağın yapısındaki eğrilik, daha önceki örneklerde de olduğu gibi, σ_{22} gerilmelerinde etkisini göstermektedir. Kiriş kalınlığının ortasına denk gelen noktadaki σ_{22} gerilmeleri Şekil 8.20 ve Şekil 8.21'de görülmektedir. Yerel eğriliğin σ_{22} gerilmesi üzerindeki etkisi, eşitlik 8.1'deki $F(x_1)$ fonksiyonunun sıfır olduğu $x_1/l_1 = 0.30$'den önce ve $x_1/l_1 = 0.70$'dan sonraki küçük salınımlarda değerler birbirlerine çok yakınken, bu aralıkta belirgin miktarda farklılaşmalar başlamaktadır. $x_1/l_1 = 0.5$ öncesi için $x_1/l_1 = 0.43$'de en büyük değerine ulaşmaktadır. Bu noktadan itibaren $x_1/l_1 = 0.5$ noktasına kadar gerilmeler azalmaktadır. $x_1/l_1 = 0.5$ sonrası için ise $x_1/l_1 = 0.62$'de maksimum değerini almaktadr. iki ucu basit mesnetli şerit plak probleminden farklı olmak üzere $x_1/l_1 = 0.5$ noktasında ε'un bütün farklı değerleri için aynı olmamaktadır. Şekil 8.20'de görüldüğü üzere $E_2/E_1 = 1$ olduğu homojen izotrop bir kirişin σ_{22} değeri kompozit kirişe nazaran çok daha yüksek olmaktadır.

Şekil 8.22'daki eğilme momenti grafiği ve buna bağlı olarak Şekil 8.19'deki σ_{11} grafiği, iki ucu basit mesnetli problemdeki gibi üst üste düşmektedir. Yukarıda bahsedildiği üzere şerit plağın kalınlığı arttıkça bu farklılık daha berligin hale gelmektedir.

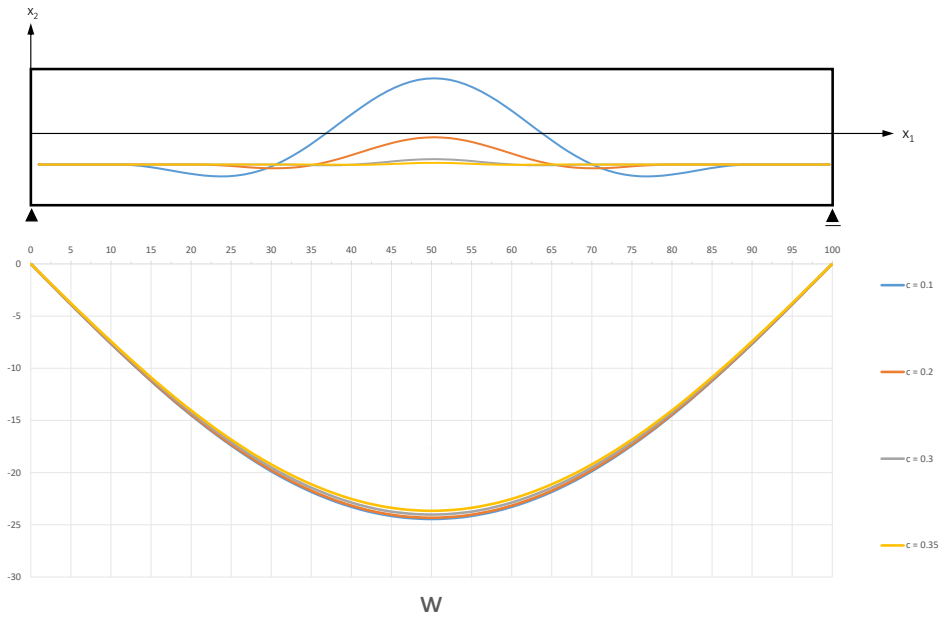
Beklenildiği üzere kompozit şerit plağın mesnetlenme şartlarından dolayı yukarıdaki verilen her iki örnekte olduğu gibi bir simetri düzlemi ve simetrik çökme değerleri yoktur. Ancak yine de eğriliğin yerel olmasından dolayı gerilme değerlerinin de yerel olarak meydana geldiği ve ε'nun artmasıyla çökme ve gerilme değerlerinin de arttığı görülmektedir.

$$E_2/E_1 = 10, \quad h/l = 0.1, \quad \varepsilon = 0.5 \quad n = 1, \quad m = 1$$

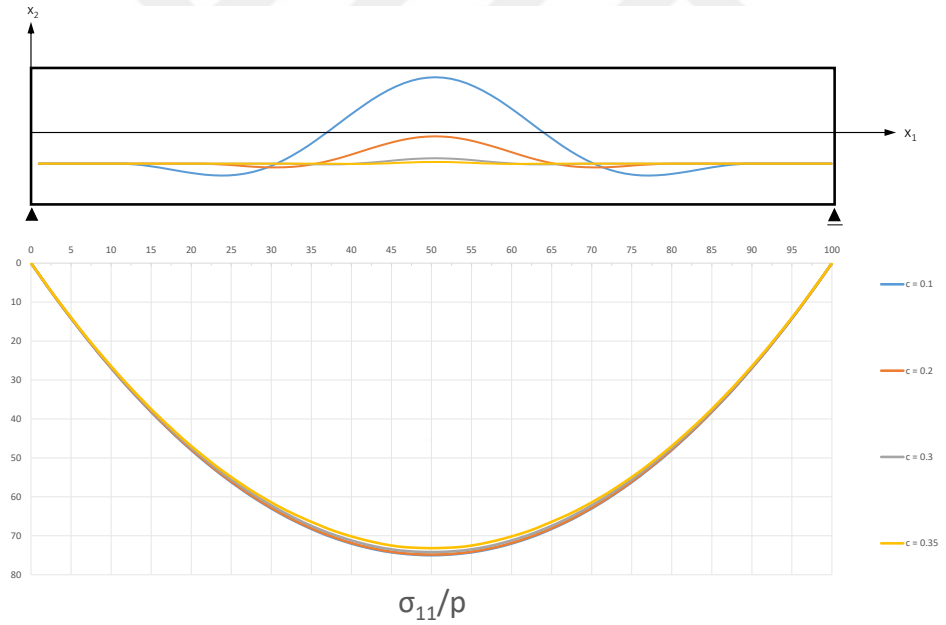
şartlarında her iki ucu basit mesnetli kompozit şerit plak için farklı c değerleri altında analizler yapılmıştır. Lokal eğrilik aralığı $(d - c)$ daraldıkça maksimum çökme, moment ve gerilme değerleri de bağıl olarak azalmaktadır, Tablo 8.6. Aynı zamanda gerilme, moment ve çökme değerleri de $(d-c)$ aralığı daraldıkça daha dar bir bölgede farklılaşmalar meydana gelmektedir, Şekil 8.26,8.27.



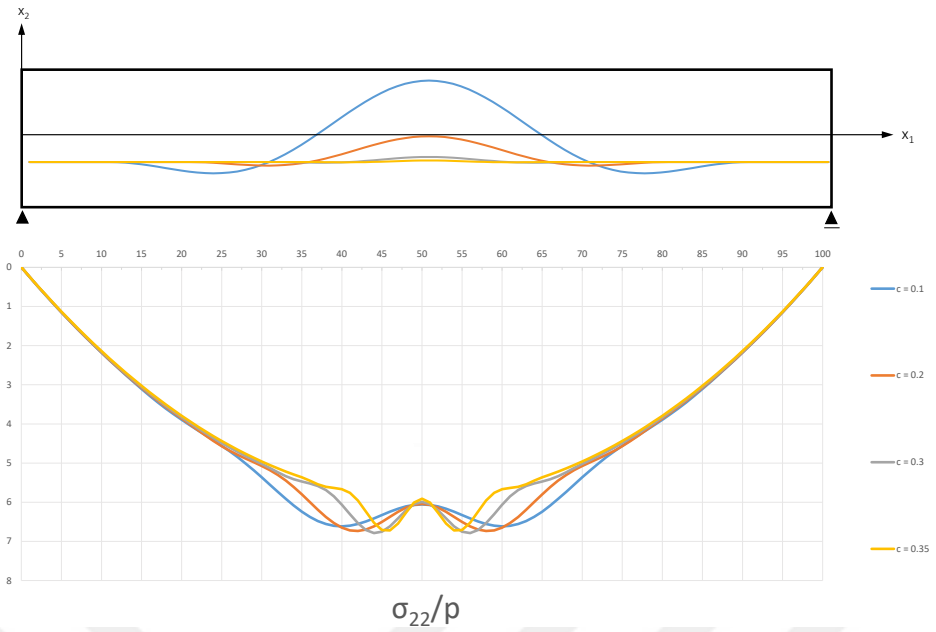
Şekil 8.23 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki lokal eğrilik grafiği



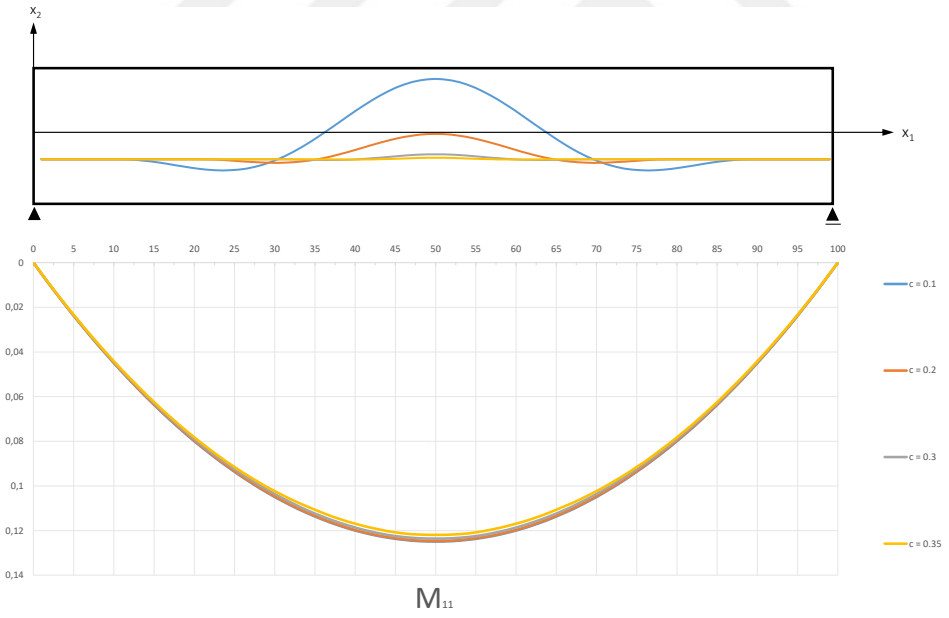
Şekil 8.24 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki çökme grafiği



Şekil 8.25 İki ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği



Şekil 8.26 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.27 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki moment grafiği

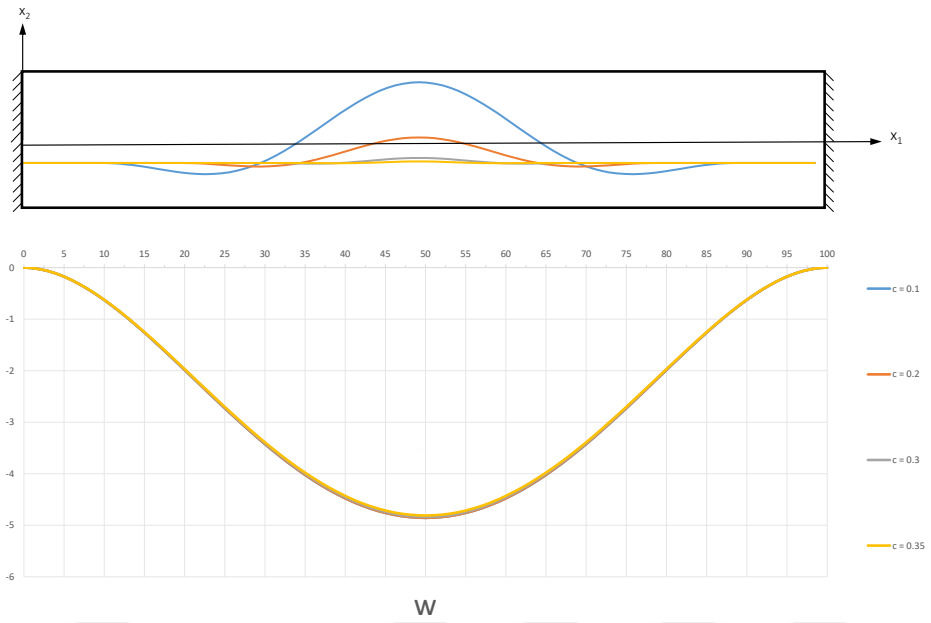
Tablo 8.6 İki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

c	0.1	0.2	0.3	0.35
W_{maks}	-24.44	-24.3219	-24.0223	-23.6581
$\sigma_{11\,maks}$	74.9721	74.8126	74.165109	73.153
$\sigma_{22\,maks}$	6.614884	6.73358	6.78578	6.72003
x_1/l_1=0.5 için σ_{22}	6.0554402	6.04255	5.99026	5.90851
M_{11maks}	0.12495353	0.1246876	0.12361	0.12192

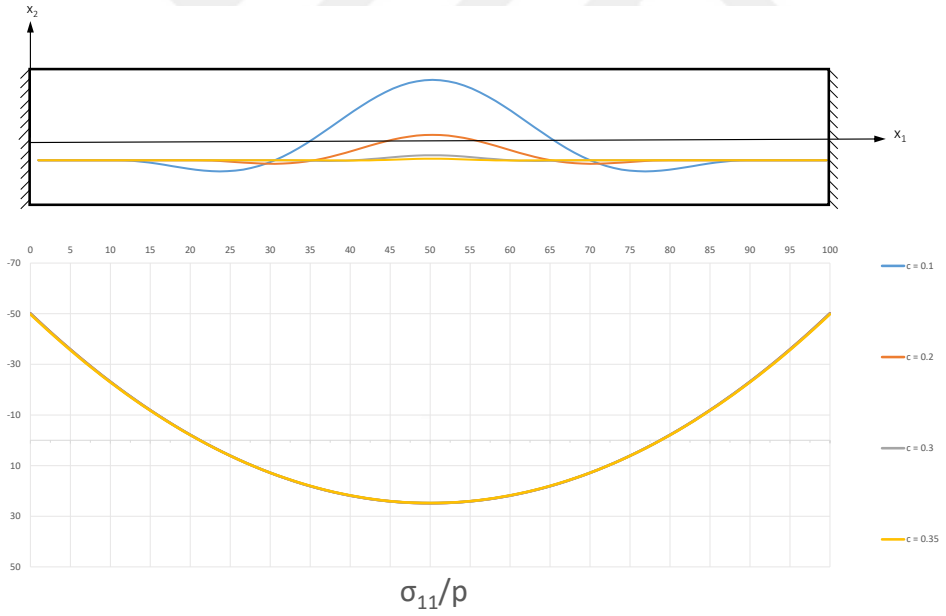
Küçük ve büyük genlikli, iki salınımdan oluşan grafik, c değeri arttıkça küçük salınımın genliği sıfıra yaklaşmaktadır.

$$E_2/E_1 = 10, \quad h/l = 0.1, \quad \varepsilon = 0.5 \quad n = 1, \quad m = 1$$

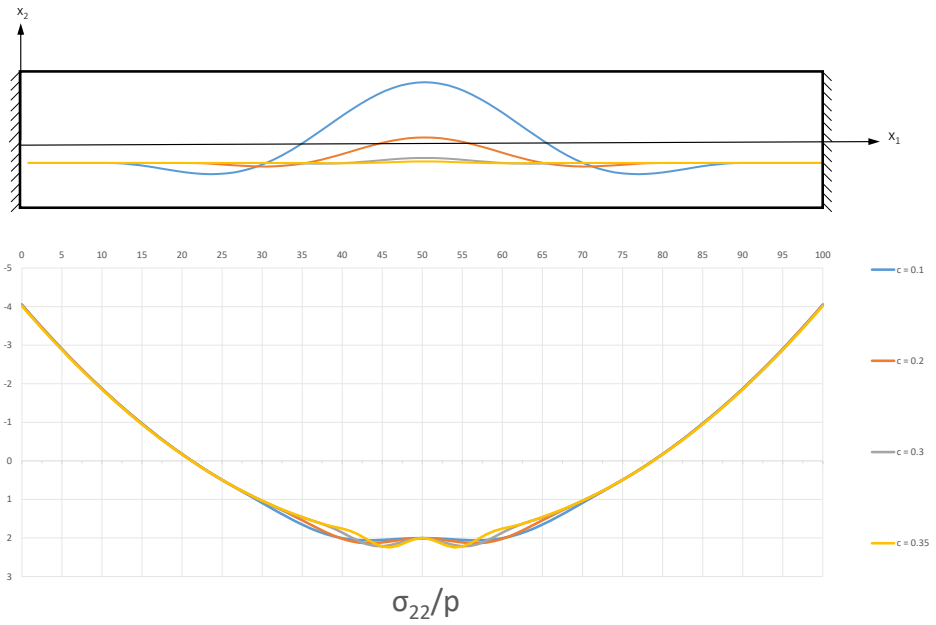
durumunda her iki ucu ankastre mesnetli kompozit şerit plak için farklı c değerleri altında çökme grafiği (Şekil 8.28), gerilme grafikleri (Şekil 8.29-8.30) ve moment (8.31)grafiği aşağıda görülmektedir.



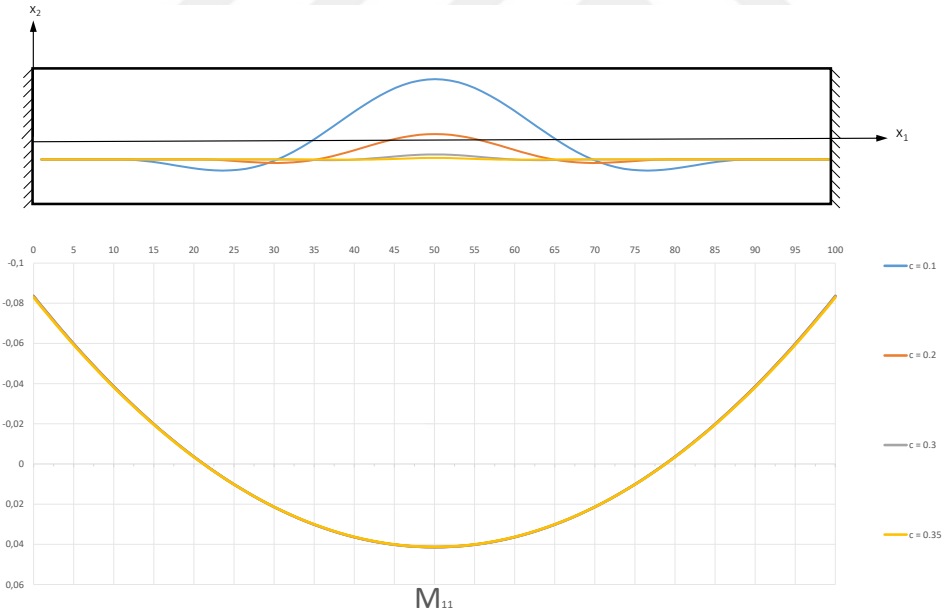
Şekil 8.28 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki çökme grafiği



Şekil 8.29 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği



Şekil 8.30 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.31 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki moment grafiği

Tablo 8.7 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

c	0.1	0.2	0.3	0.35
x_1/l_1=0 için σ_{11}	-50.2039	-50.16594	-49.9999554	-49.77291
x_1/l_1=0.5 için σ_{11}	24.8256	24.8509	24.842214	24.7476
x_1/l_1=0 için σ_{22}	-4.0549304	-4.051864	-4.038458	-4.02012
x_1/l_1=0.5 için σ_{22}	2.0051435	2.00719	2.00649	1.99885
x_1/l_1=0 için M_{11}	-0.08367317	-0.0836099	-0.083333	-0.082955
x_1/l_1=0.5 için M_{11}	0.04137598	0.0414182	0.0414	0.04125

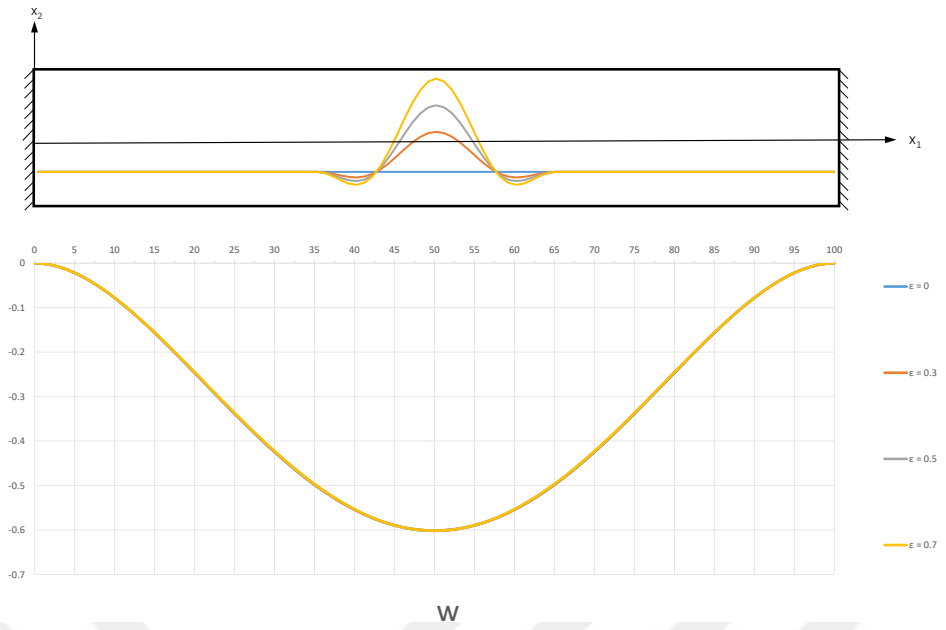
Tablo 8.8 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki maksimum çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

c	0.1	0.2	0.3	0.35
W_{maks}	-4.85546	-4.85552	-4.83856	-4.80994
$\sigma_{11\,maks}$	24.8256	24.8509	24.842214	24.7476
$\sigma_{22\,maks}$	2.0624613	2.13519	2.21553	2.24406
M_{11maks}	0.04137598	0.0414182	0.0414	0.04125

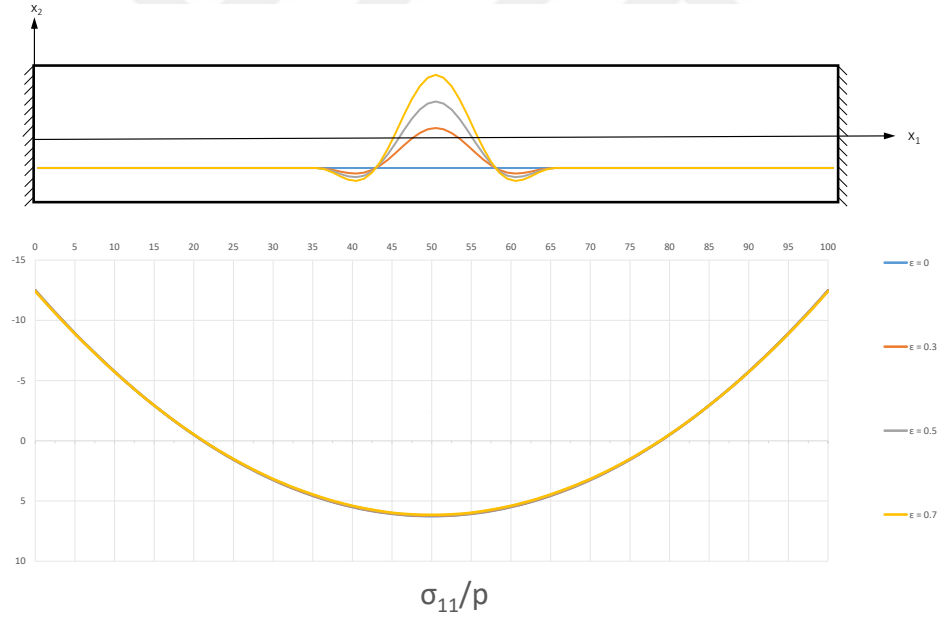
Burada da bir önceki kısımda analizi yapılan iki ucu basit mesnetli şerit plakta olduğu gibi gerilme, moment ve çökme değerleri de $(d-c)$ aralığı gibi gittikçe daralmaktadır.

$$E_2/E_1 = 10, \quad h/l = 0.2, \quad n = 1, \quad m = 2, \quad c = 0.35$$

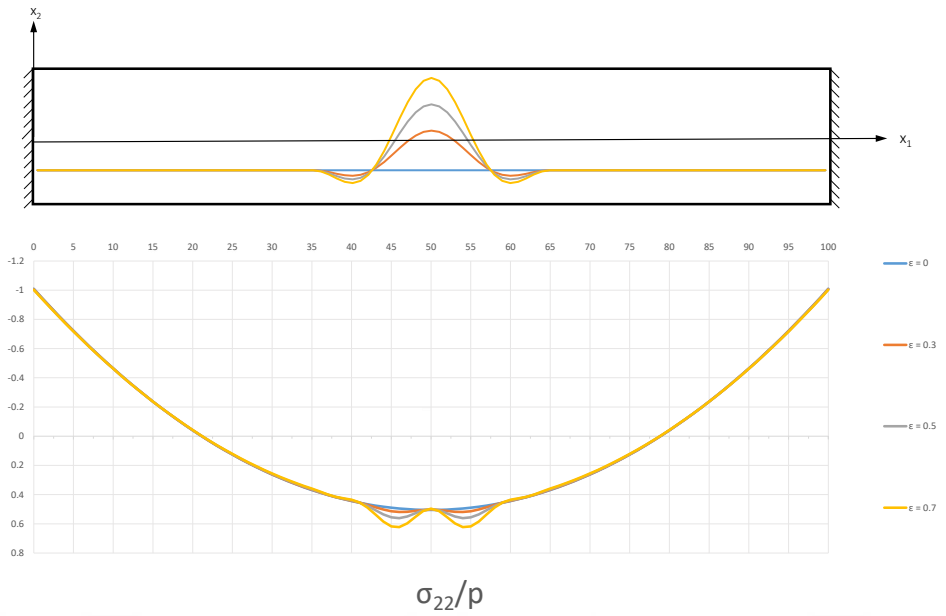
şartlarında her iki ucu ankastre mesnetli kompozit şerit plak için farklı ε değerlerinde çökme grafiği (Şekil 8.32), gerilme grafikleri (Şekil 8.33, 8.34) ve moment grafiği (8.35) aşağıda verilmiştir.



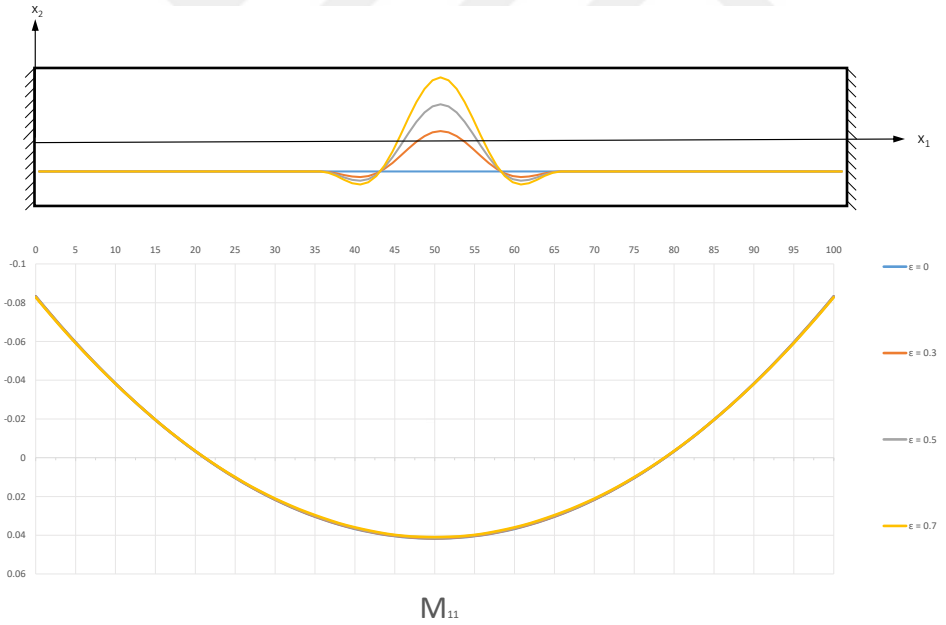
Şekil 8.32 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde çökme grafiği



Şekil 8.33 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği



Şekil 8.34 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.35 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerindeki moment grafiği

Tablo 8.9 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerindeki çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

ε	0	0.3	0.5	0.7
X_1/l_1=0.5 için W	-0.60204375	-0.6016	-0.60124	-0.60163
X_1/l_1=0 için σ_{11}	-12.49875	-12.4761	-12.4432	-12.4093
X_1/l_1=0.5 için σ_{11}	6.25125	6.225786	6.186912	6.142153
X_1/l_1=0 için σ_{22}	-1.00951	-1.00769	-1.00503	-1.00229
X_1/l_1=0.5 için σ_{22}	0.504909	0.502852	0.499712	0.496097
$\sigma_{22\,maks}$	0.504909	0.51917	0.561014	0.61751
X_1/l_1=0 için M_{11}	-0.083325	-0.08317	-0.08295	-0.08273
X_1/l_1=0.5 için M_{11}	0.041675	0.041505	0.041246	0.040948

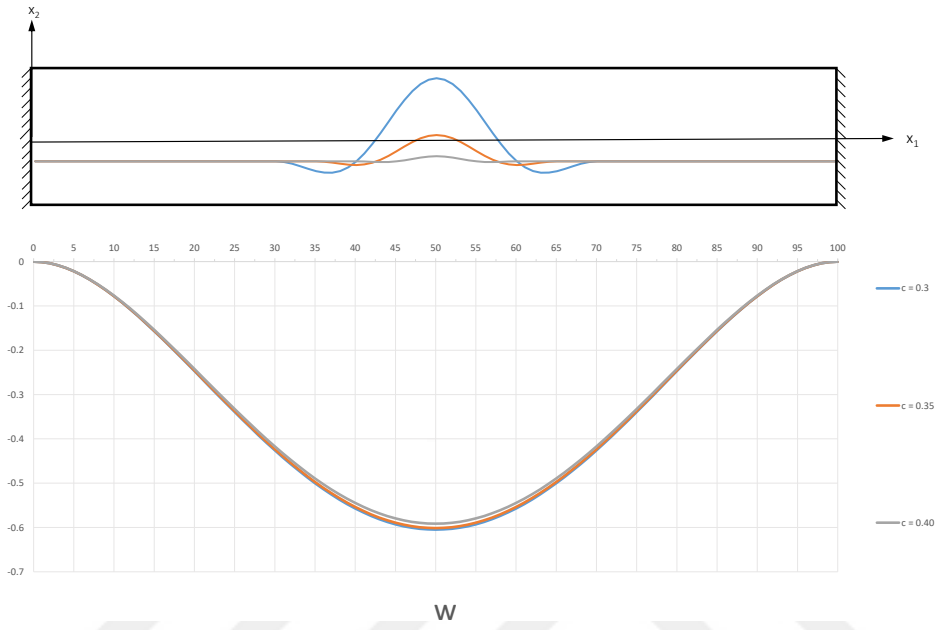
Çökme, σ_{11} gerilme ve moment grafikleri şekil bakımından benzerlik gösterirken, σ_{22} grafiği ise beklenildiği üzere lokal eğriliğin artmasıyla artmaktadır. Tablo 8.9'da elde edilen gerilme değerleri, elastisitenin kesin denklemlerini kullanarak ele alan Yahnioğlu [19]'nun eseriyle benzerlik göstermektedir. Adı geçen eserde elde edilen σ_{22} grafiklerin orta noktadaki değerleri

ε=0 için σ_{11}/p=-5.1,
ε=0.3 için σ_{11}/p=-5.8,
ε=0.5 için σ_{11}/p=-6.4,
ε=0.7 için σ_{11}/p=-6.9,

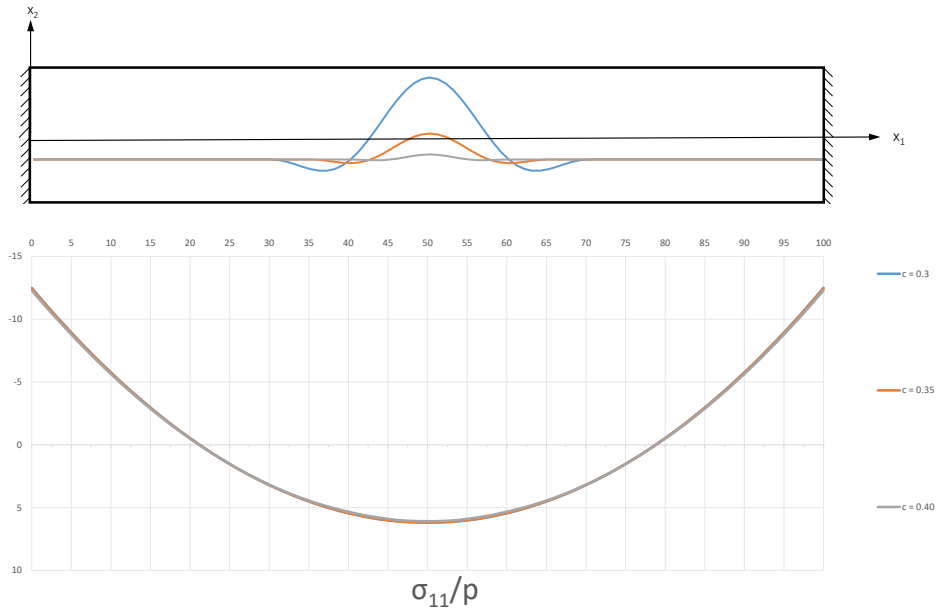
olarak elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen gerilme grafiklerinin Yahnioğlu [19] ile benzerlik göstermemesinin nedeni, bu tez kapsamında Kirchhoff-Love plak teorisi kullanılırken ve dolayısıyla kayma gerilmelerinin etkisi çok hissedilmezken adı geçen eserde elastisite teorisinin kesin denklemleri kullanıldığından kayma gerilmelerinin etkisi ortaya çıkmasıdır.

$$E_2/E_1 = 10, \quad h/l = 0.2, \quad n = 1, \quad m = 2, \quad \varepsilon = 0.5$$

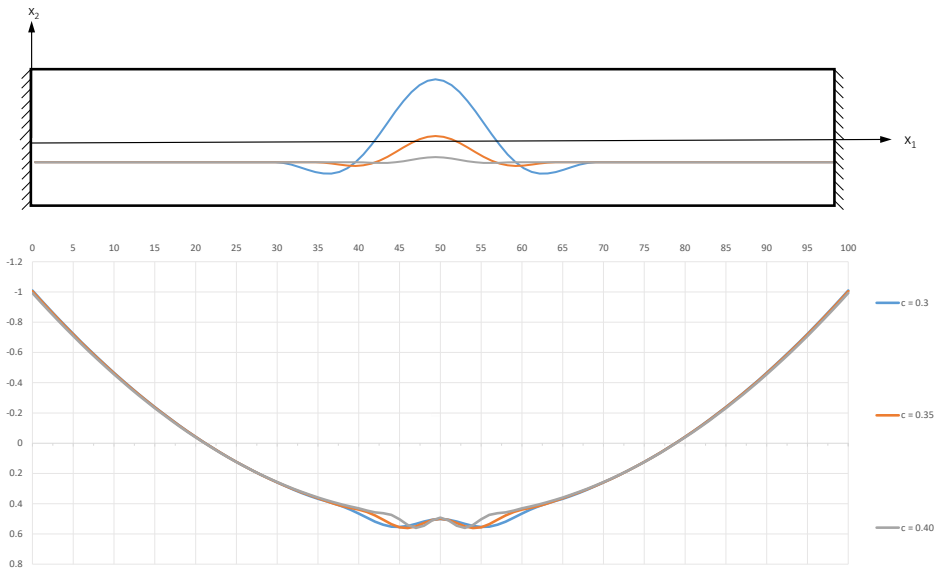
şartlarında her iki ucu ankastre mesnetli kompozit şerit plak için farklı c değerlerinde çökme grafiği (Şekil 8.36), gerilme grafikleri (Şekil 8.37, 8.38) ve moment grafiği (8.39) aşağıda verilmiştir.



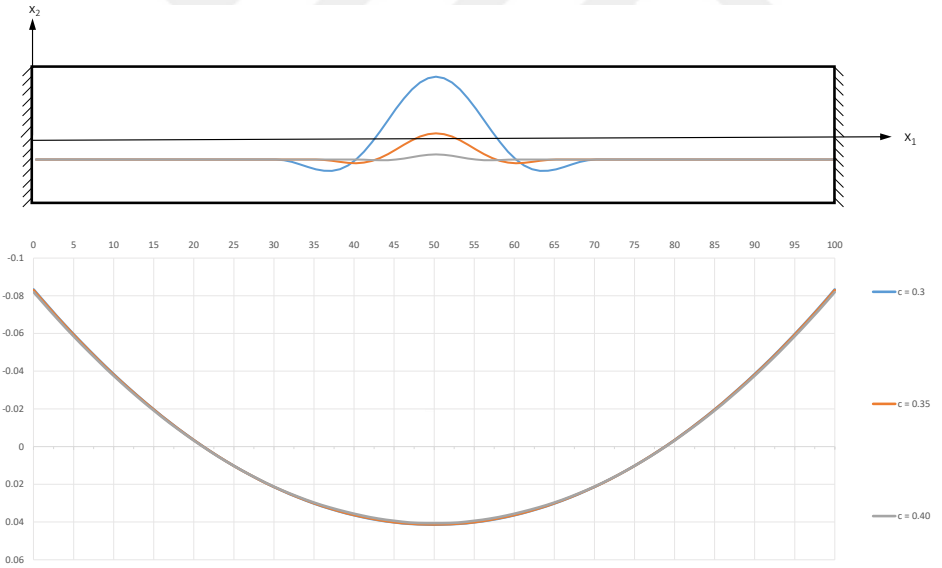
Şekil 8.36 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerinde çökme grafiği



Şekil 8.37 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı c değerleri için σ_{11} grafiği



Şekil 8.38 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.39 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki moment grafiği

Tablo 8.10 İki ucu ankastre mesnetli şerit plağın farklı c değerlerindeki çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

C	0.3	0.35	0.40
X_1/l_1=0.5 için W	-0.60482	-0.60124	-0.59144
X_1/l_1=0 için σ_{11}	-12.5	-12.4432	-12.2927
X_1/l_1=0.5 için σ_{11}	6.21055	6.18691	6.08861
X_1/l_1=0 için σ_{22}	-1.00961	-1.00503	-0.99287
X_1/l_1=0.5 için σ_{22}	0.50162	0.49971	0.49177
$\sigma_{22\,maks}$	0.50162	0.56101	0.56038
X_1/l_1=0 için M_{11}	-0.08333	-0.08295	-0.08195
X_1/l_1=0.5 için M_{11}	0.0414	0.04125	0.04059

bu analizde de çökme, σ_{11} gerilme ve moment grafikleri şekil bakımından benzerlik gösterirken, σ_{22} grafiği ise beklenildiği üzere lokal eğriliğin artmasıyla artmaktadır. Tablo 8.10'da elde edilen gerilme değerleri, Yahnioğlu [19]'nun eseriyle karşılaştırıldığında benzerlik göstermektedir.

Adı geçen eserde elde edilen σ_{22} grafiklerinin orta noktadaki değerleri

c=0.30 için σ_{11}/p=-6.08,
c=0.35 için σ_{11}/p=-6.2,
c=0.40 için σ_{11}/p=-6.405,

olarak elde edilirken, grafiklerin maksimum değerleri

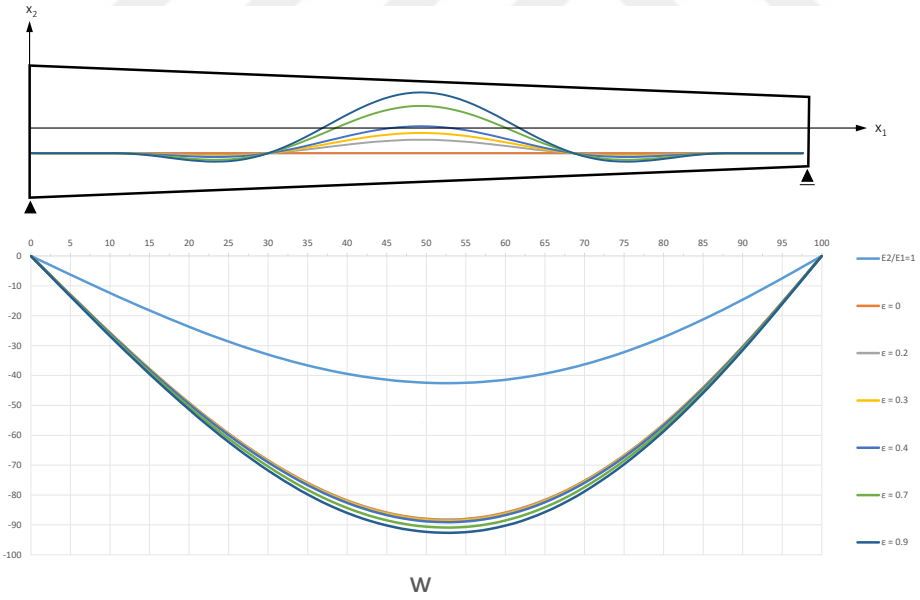
c=0.30 için σ_{11}/p=-7.19,
c=0.35 için σ_{11}/p=-7.38,
c=0.40 için σ_{11}/p=-7.41,

olarak elde edilmiştir.

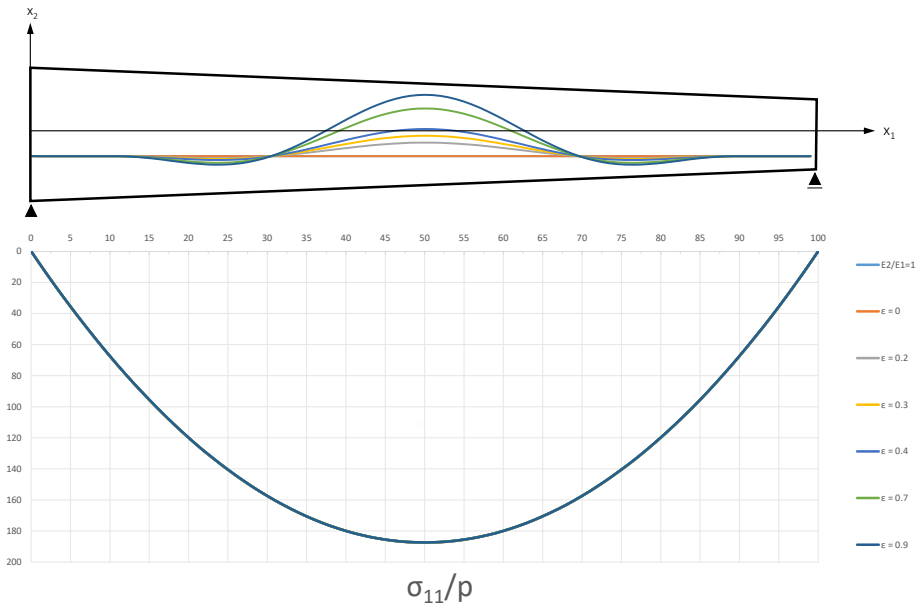
8.5 Değişken Kesite Sahip İki Ucu Basit Mesnetli Şerit Plak

$$E_2/E_1 = 10, \quad n = 1, \quad m = 2, \quad c = 0.1$$

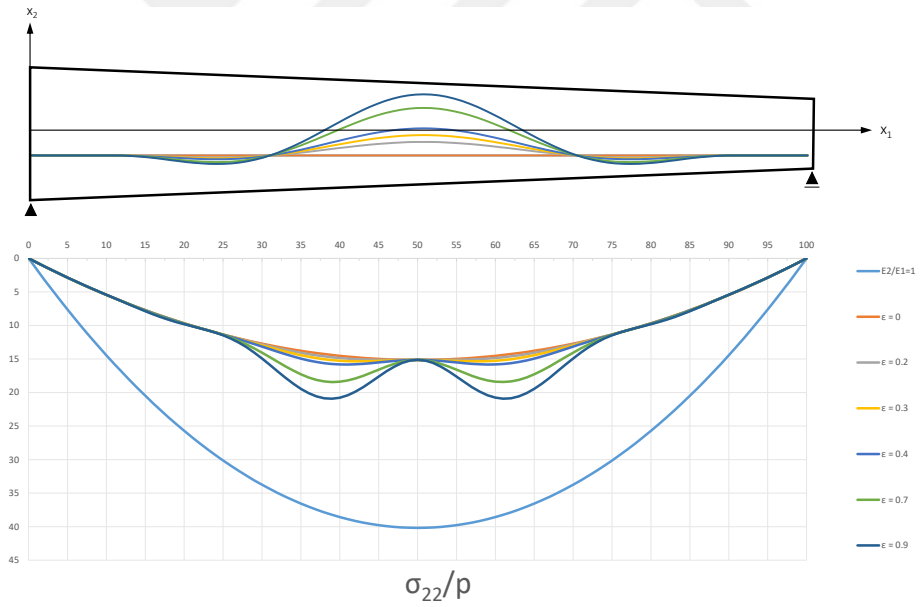
şartlarında değişken kesitli iki ucu basit mesnetli kompozit şerit plağı göz önüne alalım. Ele alınan şerit plağın h/l değeri, 0.1'den 0.04'e kadar yüzde 60 azaltılarak çökme (Şekil 8.40), gerilme (Şekil 8.41, 8.42, 8.43) ve moment değerleri (Şekil 8.44) elde edilmiştir.



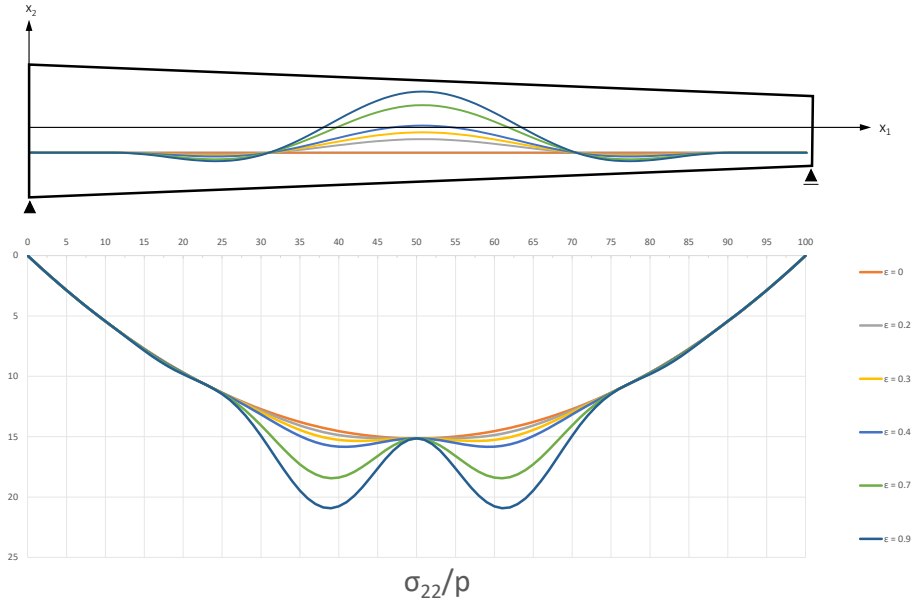
Şekil 8.40 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde çökme grafiği



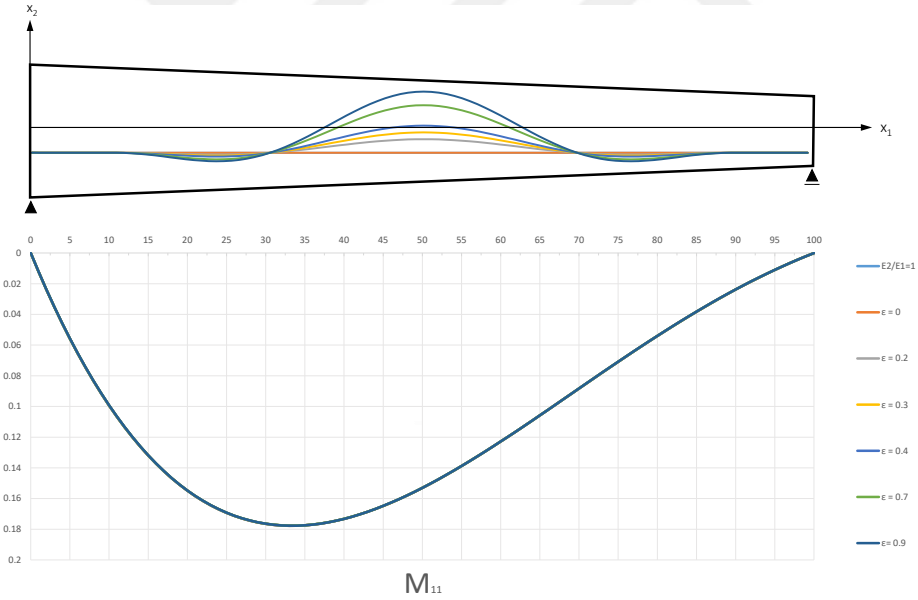
Şekil 8.41 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerleri için σ_{11} grafiği



Şekil 8.42 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın $x_2 = h/2$'de farklı ε değerlerinde kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.43 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde ve sadece kompozit durumda kiriş kalınlığı ortasındaki σ_{22} grafiği



Şekil 8.44 Değişken kesitli iki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerinde moment grafiği

Tablo 8.11 Değişken kesite sahip iki ucu basit mesnetli şerit plağın farklı ε değerlerindeki çökme, σ_{11}, σ_{22} ve moment değerleri

E_2/E_1	ε	0	0.2	0.3	0.4	0.7	0.9
-42.4232	W_{maks}	-87.9466	-88.1626	-88.4329	-88.8115	-90.6005	-92.3363
187.481	$\sigma_{11\,maks}$	187.48111	187.4647333	187.446	187.424	187.369	187.3831877
40.174524	$\sigma_{22\,maks}$	15.1427	15.1415	15.3468	15.8367	18.4398	20.9225
40.174524	X_1/l_1=0.5 için σ_{22}	15.1427	15.1414	15.13989	15.1381	15.1336	15.1348
0.17775	M_{11maks}	0.17775	0.17773	0.17772	0.1777	0.17766	0.17769
0.15311	X_1/l_1=0.5 için M_{11}	0.15311	0.1531	0.15308	0.15306	0.15302	0.15303

Değişken kalınlıklı şerit plağın çökme ve gerilme değerleri, sabit kalınlıklı şerit plağınki ile benzer formda çıkmıştır. Plak kalınlığının azalması nedeniyle maksimum moment kiriş ortasından sola doğru kayarken, maksimum çökmenin yeri kiriş ortasından sağa doğru artmıştır.

9
SONUÇ

Bu tez kapsamında, yapısında yerel eğrilikler içeren tabakalı kompozit malzemeden üretilmiş sonsuz uzunluklu bir plağın sınırlı sayıda statik analizleri yapılmıştır. Buradaki yerel eğrilik, tabakalı kompozit malzeme yapısındaki bir bozukluk olarak da düşünülebilir. Uçak sanayiinden uzay sanayiine geniş bir kullanım alanına sahip bu tür kompozit malzemelerin stabilite ve titreşim problemlerine ait çok sayıda çalışma mevcut olmasına karşılık statik analizlerine ait çalışma yok denecek kadar azdır. Bu nedenle yapılan analizler, homojen izotrop çözümle karşılaştırılırken, kompozit durum için ise üç boyutlu kesin elastisite teorilerinden hareketle Sonlu Elemanlar Yöntemiyle çözüm yapan Yahnioğlu [19] ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmada, takviye ve dolgu malzemelerinin Elastisite Modüllerinin oranları göz önüne alınmıştır. Homojen izotrop durumda oran $E_2/E_1 = 1$ alınırken, kompozit durumda dolgu malzemesinin Elastisite Modülü 10 kat küçültülerek $E_2/E_1 = 10$ olmuştur. Bu nedenle tüm örneklerde kompozit haldeki çökme değerleri homojen izotropunkine nazaran yüksek çıkmıştır. Bununla birlikte, M_{11} ve σ_{11} değerleri birbirlerine yakın çıkmaktadır ancak lokal eğrilik bölgesinin daralmasıyla birlikte farklılıklar belirgin hale gelmektedir, Tablo 8.1-8.11.

Plak orta düzlemi üzerindeki σ_{22} gerilmeleri lokal eğriliğin etkisi çok daha belirgin olmaktadır. Yahnioğlu [19] ile bu tez kapsamındaki değerlerin farklılık göstermesi, kendisinin üçüncü mertebeden plak teorisi kullanması ve dolayısıyla kayma şekil değiştirmelerinin etkisinin ihmal edilmemesidir. Sonraki çalışmalarda bu tez kapsamını genişletilerek Reisner-Mindlin ve üçüncü mertebeden plak teorisi çerçevesinde de statik analizler yapılması hedeflenmektedir.

KAYNAKÇA

[1] Z. Kütüğ, "Lokal ve periyodik eğriliğe sahip kompozit malzemeden hazırlanmış kiriş ve plakların doğal titreşim ve stabilitesi," 1998.

[2] M. F. Şimşek, "Yerel eğrilikli kompozit şerit plakların doğal titreşim frekanslarının aralık analizi ile tespiti," M.S. thesis, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2019.

[3] A. Ergün, "İnce plakların sonlu eleman metodu ve sonlu farklar metodu ile çözümü ve bu iki metodun karşılaştırılması," 1999.

[4] Ü. Türe, "Mindlin plakların sonlu eleman metodu ile çözümlenmesi," 2002.

[5] C. YANEN, M. C. TANİİ, M. Y. SOLMAZ, "Eğrisel yüzeyli tabakalı kompozit plakların kritik burkulma yüklerine etki eden parametrelerin belirlenmesi," *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, no. 28, pp. 1077–1082, 2021.

[6] E. Altunsaray, "Kompozit yapıların statik ve dinamik analiz yardımıyla tasarımı," 2011.

[7] A. ERGÜN, N. KUMBASAR, "İnce plaklar için geliştirilmiş sonlu farklar yöntemi," *İTÜDERGİSİ/d*, vol. 2, no. 1, 2010.

[8] S. Akbarov, A. Guz', N. Yahnioglu, "Mechanics of composite materials with curved structures and elements of constructions," *International applied mechanics*, vol. 34, no. 11, pp. 1067–1078, 1998.

[9] S. Akbarov, A. Guz', "Continuum theory in the mechanics of composite materials with small-scale structural distortion," *Soviet applied mechanics*, vol. 27, no. 2, pp. 107–117, 1991.

[10] S. Aydin, "Basit mesnetlenmiş, lamine ve çift eğrilikli kompozit bir levhanın statik mukavemet analizleri," M.S. thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2010.

[11] M. E. Gürlek, "Tabakalı kompozit kirişlerin sonlu farklar metodu ile analizi," M.S. thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2018.

[12] N. Yahnioglu, S. Selim, "Bending of a composite material strip with curved structure in the geometrically nonlinear statement," *Mechanics of composite materials*, vol. 36, pp. 459–464, 2000.

[13] M. S. Qatu, "Vibrations of laminated composite completely free triangular and trapezoidal plates," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 36, no. 9, pp. 797–809, 1994.

[14] M. Özakıncı, "Tabakalı kompozit plakların titreşim analizi," 2015.

[15] M. H. Saraçoğlu, Y. Özçelikörs, "Tabakalı kompozit plakların sonlu farklar yöntemi ile statik analizi," *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, vol. 17, no. 1, 2011.

[16] R. M. Jones, *Mechanics of composite materials*. CRC press, 2018.

[17] M. H. Datoo, *Mechanics of fibrous composites*. Springer Science & Business Media, 2012.

[18] G. Staab, *Laminar composites*. Butterworth-Heinemann, 2015.

[19] N. Yahnioğlu, "Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış yapı elemanlarının statiğe uygun sınırdeğer probleminin fem ile incelenmesi," Ph.D. dissertation, 1996.

[20] S. Akbarov, A. Guz, S. Akbarov, A. Guz, "Plane-strain state in periodically curved composites," *Mechanics of Curved Composites*, pp. 129–220, 2000.

[21] M. Yıldırım, "Bazı ortotropik plakların sonlu farklar yöntemi ile çözümü," 2007.

[22] D. Roylance, "Constitutive equations," *Department of Materials Science and Engineering Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA*, vol. 2139, 2000.

[23] M. Kashtalyan, "Introduction to composite materials design–third editione. j. barbero crc press, taylor & francis group, 6000 broken sound parkway nw, suite 300, boca raton, fl, 33487-2742, usa. 2018. distributed by taylor & francis group, 2 park square, milton park, abingdon, ox14 4rn. xxxv; 535pp. illustrated.£ 92.(20% discount available to raes members via www. crcpress. com using akq07 promotion code). isbn 978-1-1381-9680-3.," *The Aeronautical Journal*, vol. 122, no. 1258, pp. 2048–2049, 2018.

[24] İ. Berktay, *Plak teorisi ve uygulamaları*. Yıldız Üniversitesi-Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Yay., 1992.

[25] Z. Kütüğ, "Plak denkleminin genel çözümü için bir metod," 1992.

[26] J. Reddy, "Energy principles and variational methods in applied mechanics, john willy and co," *Inc. New Jersey, USA, 542p*, p. 59, 2002.

[27] K. Bhaskar, T. Varadan, *Plates*, 2014.

[28] E. Reissner, "On the theory of bending of elastic plates," *Journal of mathematics and physics*, vol. 23, no. 1-4, pp. 184–191, 1944.

[29] E. Reissner, "On bending of elastic plates," *Quarterly of applied mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 55–68, 1947.

[30] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," 1945.

[31] Goldenveızer, *On Reissner's theory of the bending of plates*. National Aeronautics and Space Administration, 1960.

[32] A. Green, "On reissner's theory of bending of elastic plates," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 223–228, 1949.

[33] A. B. Basset, "Vi. on the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)*, no. 181, pp. 433–480, 1890.

[34] F. Hildebrand, E. Reissner, G. Thomas, "Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells," Tech. Rep., 1949.

[35] J. T. Oden, J. N. Reddy, *Variational methods in theoretical mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.

[36] C. M. Wang, G. Lim, J. Reddy, K. Lee, "Relationships between bending solutions of reissner and mindlin plate theories," *Engineering structures*, vol. 23, no. 7, pp. 838–849, 2001.

[37] C. Wang, I. Nazmul, Q. Wang, "Exact bending solutions of axisymmetric reissner plates in terms of classical thin plate solutions," *Advances in Structural Engineering*, vol. 7, no. 2, pp. 129–145, 2004.

[38] S. Akbarov, A. Guz', "Mechanics of composite materials with curved structures (survey). composite laminates," *Soviet applied mechanics*, vol. 27, no. 6, pp. 535–550, 1991.

[39] S. D. AKBAROV, A. N. GUZ, "Mechanics of curved composites and some related problems for structral members," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 11, no. 6, pp. 445–515, 2004.

[40] S. D. Akbarov, A. N. Guz, "Mechanics of curved composites (piecewise-homogeneous body model)," *International applied mechanics*, vol. 38, no. 12, pp. 1415–1439, 2002.

[41] F. Başar, "Kirişsiz döşemelerin sonlu farklar metodu ile çözümü," M.S. thesis, Anadolu University (Turkey), 1987.

[42] H. Tozluk, "Elastik zemine oturan plakların sonlu farklar yöntemiyle çözümü," M.S. thesis, Anadolu University (Turkey), 1987.

[43] G. W. Recktenwald, "Finite-difference approximations to the heat equation," *Mechanical Engineering*, vol. 10, no. 01, 2004.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. O. Çınar, Z. Kütüğ, "Solution of Composite Strip Plates With Local Curvature Using Finite Differences Method" MAS 19th International European Conference On Mathematics,Engineering,Natural and Medical Sciences,2024.