MAK5515 MÜHENDİSLİK MATEMATİĞİ (3-0-0)

İçerik

Giriş ve Temel Kavramlar (sayılar, analitik çözüm ve sayısal çözüm, seriler)

Vektörler, Matrisler

Lineer Denklemler

Lineer olmayan denklemler

Diferansiyel denklemler

Laplace Dönüşümü

Fourier Dönüşümü

Sonlu Farklar

Sayısal Türev

Sayısal İntegral

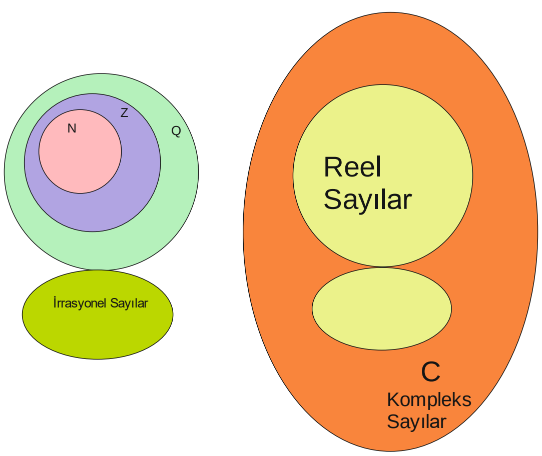
Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü

Kısmi Türevli Denklemler

Giriş ve Temel Kavramlar (sayılar, analitik çözüm ve sayısal çözüm, seriler)

SAYILAR

Sayı Kümesi	**Elemanları**	**Tanımlı işlemler**
Doğal sayılar	$\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$	$+\,;\times$
Tam sayılar	$\mathbb{Z}=\{...-2,-1,0,1,2,...\}$	$+\,;\times\,;-$
Rasyonel sayılar (Devirli sayılar)	$\mathbb{Q}=\left\{x,y\in\mathbb{Z}\middle\| \dfrac{x}{y}, y\neq 0\right\}$	$+\,;\times\,;-\,;\div$
İrrasyonel sayılar (Düzensiz devirli sayılar)	$I=\{\sqrt{2},\sqrt{3},e,\pi,...\}$	$+\,;\times\,;-\,;\div$
Reel sayılar	$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup I$	$+\,;\times\,;-\,;\div$
Kompleks sayılar	$\mathbb{C}=\mathbb{R}\cup\{i\}$, burada $i^2=-1$	$+\,;\times\,;-\,;\div$



Şekil 1. Sayı kümesi

Rasyonel sayılar, diğer bir değişle ondalıklı (veya düzenli devirli) sayılardır. Örneğin,

$\frac{3}{4}=0,75\,;$

$\frac{1}{3}=0,33333...=0,\overline{3}$

İrrasyonel sayılar düzensiz devirli sayılardır. Örneğin,

$\pi = \dfrac{\text{Çemberin çevresi}}{\text{Çemberin çapı}} = 3{,}14159265358979323846...$;

$e = 2{,}718281828459...$;

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237...$

Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimi Reel sayılardır. Ayrıca Reel sayılara $\sqrt{-1} = i$ sanal (kompleks) sayısı ilave edilerek Kompleks sayılar kümesi elde edilir.

$z \in \mathbb{C};\ x, y \in \mathbb{R}$ için $z = x + iy$ veya $z = re^{i\theta}$ burada $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\theta = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}$ dir.

Sonlu Küme: Eleman sayısı sonlu olan kümelere **sonlu küme**ler denir. Örneğin $H = \{x \mid 0 \le x < 9\ , x \in \mathbb{Z}\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Sonsuz küme: Eleman sayısı sonsuz olan kümelere **sonsuz küme**ler denir. Örneğin, $S = \{x \mid x < 9\ , x \in \mathbb{Z}\} = \{...0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Sayılabilir küme: Bir A kümesi ile Doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi elemanları arasında birebir-örten bir eşleme kurulabiliyorsa, A kümesine **sayılabilir küme** denir.

Dolayısıyla, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, kendi kendisi ile eşleşebileceğine göre sayılabilir kümedir, ancak eleman sayısı sonsuzdur. Benzer şekilde $\mathbb{N}$ kümesi ile $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında birebir örten bir eşleme yazılabilir. Dolaysıyla $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuz kümeler olur. Dolayısıyla $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilir sonsuz kümeler olurlar. Diğer taraftan her biri sonsuz elemanı olan bu kümeler arasında $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ yazılabilir.

Ancak, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri sayılabilir değildir (Cantor ispatladı) yani, $\mathbb{N}$ kümesi elemanları ile bu iki küme elemanları arasında birebir-örten bir ilişki yazılamaz. İspat için $[0,1]$ kümesinin sayılamaz olduğu gösterilir.

Kümenin Gücü: Eleman sayısı kavramı sonlu kümeler için geçerli bir kavramdır, eleman sayısı sonsuz olan kümeler için "kümenin gücü-güçlülük (cardinality)" kavramı kullanılmaktadır. Örneğin, elemanları $\mathbb{N}$ kümesi elemanları arasında birebir-örten eşleme yapılabilen kümeler "0" gücünde; elemanları ile $\mathbb{N}$ nin alt kümeleri ($P(\mathbb{N})$) arasında birebir-örten eşleme yapılabilen kümeler "1" gücünde; elemanları ile $\mathbb{N}$ nin alt kümeleri kümesinin alt kümeleri ($P(P(\mathbb{N}))$) arasında birebir-örten eşleme yapılabilen kümeler "2" gücünde vb isimlendirilir.

Elemanları $[0,1]$ aralığındaki reel sayılar ile birebir-örten eşleşebilen kümelere "kontinyum (continuum) gücünde"dir denir.

Kümenin ölçüsü: .

R de ölçü, uzunluk kavramının genelleştirilmesi yani, kümenin uzayda kapladığı hacim/alan/ uzunluktur.

R de herhangi bir sınırlı aralık (yani I= [a; b], (a; b], [a; b) veya (a; b)) olmak üzere, I aralığının uzunluğu $\ell(I) = b - a$ olarak tanımlanır.

Her nokta bir aralıktır ve uzunluğu sıfırdır. Dolayısıyla, [a; b] aralığında a=b seçersek aralık $\{a\}$ noktasına denk gelir. Buradan $\ell(\{a\}) = \ell([a, a]) = a - a = 0$ elde edilir. Buradan ölçü kavramına geçersek, sonlu kümelerin ölçüsü **sıfır** alınır..

R de bir kümeyi tam olarak belirli bir takım aralıklara bölmemiz her zaman mümkün olmayabiliyor. Bu nedenle bu kümeyi örten bir takım (hatta sayılabilir sayıda) aralıkların bir sistemini göz önüne alabiliriz. Buradan yola çıkarak kümenin ölçüsü, alt aralıkları kümesi üzerinden belirlenir.

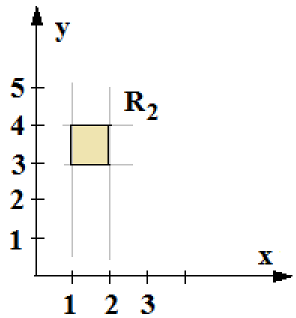
Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $A \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} I_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $\{I_n, n \geq 1\}$ bulunabiliyorsa, A kümesine **ölçüsü sıfır olan küme** yada kısaca **sıfır kümesi** denir.

Bu tanıma göre, özel halde tek elemanlı kümeler ile boş küme sıfır kümeleridir. Her elemanı kümenin alt kümesi olduğuna göre ve tek elemanlı kümelerin ölçüsü sıfır olduğuna göre daha genel olarak (aşağıda verilen teorem gereği), herhangi bir sayılabilir $A = \{x_1, x_2, ...\}$ kümesi sıfır kümesi olur.

Teorem: $\{N_n\}_{n\geq 1}$ sıfır kümelerinin bir dizisi ise bunların birleşimi olan $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ kümesi de sıfır kümesidir.

Sayılabilir kümeler sıfır kümeler olmakla birlikte, sayılamayan kümeler için aynı şeyi söyleyemeyiz. Buna karşın, sayılamayan sıfır kümeler de mevcuttur (bakınız Reel Analiz kitapları).

Örneğin $R_1 = [1,2]$ $(R_1 \subset \mathbb{R})$ reel eksen için kümenin uzunluğu $\ell(R_1) = 2-1=1$ dir.



$R_2 = \{x, y \mid x \in [1,2], y \in [3,4]\}$ için $\ell(R_2) = (2-1)\times(4-3) = 1$ dir.

Not: Diğer bazı sayı sistemleri,

Kuaternion (Dördeyler); karmaşık sayıları bir gerçel, üç sanal boyuta genişleten sayı sistemidir. İlk defa İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmış ve 3 boyutlu uzaydaki matematiğe uygulanmışlardır.

Oktonyon; bir tür hiper-karmaşık sayı sistemi olup gerçek sayılar üzerinde bir normlu bölme cebiridir.

Kompleks Sayılarda Cebirsel İşlemler

i. Eşitlik

$z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ için $z_1 = z_2$ ise $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ dir.

ii. Toplama/Çıkarma

$$z_1 \mp z_2 = (x_1 \mp x_2) + i(y_1 \mp y_2)$$

iii. Çarpma

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)\times(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

iv. Bölme

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

v. Kompleks eşlenik

$$z = x + iy \Rightarrow z^* = x - iy\,; \quad x = \frac{z+z^*}{2} \text{ ve } y = \frac{z-z^*}{2i}$$

vi. Kompleks sayının modülü (normu)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \left(z \times z^*\right)^{1/2}$$

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ |z_2| \neq 0$$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (üçgen eşitsizliği)

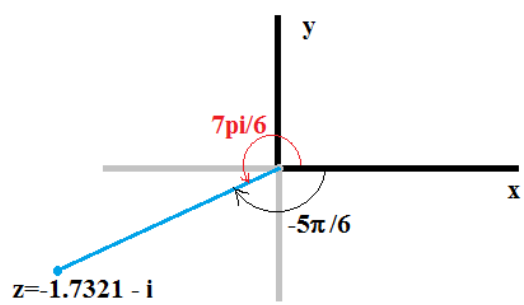
vii. Kutupsal gösterim

$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ burada $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ dır.

Trigonometrik fonksiyonlar periyodik olduğundan yani, $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ veya $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$ ($k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$) için $\arg(z) = \theta = \arctan\frac{y}{x}$ birden çok değer alacaktır. Bu değerden $-\pi \leq \theta \leq \pi$ aralığındaki değerine **esas argümanı** denir ve $\mathrm{Arg}(z)$ ile gösterilir. Dolayısıyla, $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$ olur.

Örnek. $z = -\sqrt{3} - i$ kutupsal ifadesini yazınız.

$x = -\sqrt{3}$ ve $y = -1$ için $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$ ve $\theta = \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arctan}\frac{y}{x} = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ olur. Ancak, verilen kompleks sayı kompleks düzlemin 3. çeyreğinde olduğundan ($x < 0$ ve $y < 0$) $\theta_1 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ veya $\theta_2 = \frac{\pi}{6} - \pi = \frac{-5\pi}{6}$ olabilir. Burada $\theta_1 > \pi$ ($\theta_1 \notin [-\pi, \pi]$) olduğundan esas argüman $\mathrm{Arg}(z) = \theta_2 = \frac{-5\pi}{6}$ alınmalıdır. Dolayısıyla, $z = -\sqrt{3} - i = 2e^{-i5\pi/6}$ olur.



NOT:

a) Reel sayılar arasındaki “<” veya “>” sıralamasının kompleks sayılarda anlamı yoktur.

b) $x \in \mathbb{R}$ için $e^x = -2$, $\sin x = 5$ gibi $x \in \mathbb{R}$ için reel analizde imkansız olan eşitliklerin çözümü, $x \in \mathbb{C}$ için mümkündür.

c) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için ancak bu sayıların modülleri için $|z_1| > |z_2|$ $\left(\text{veya } |z_1| < |z_2|\right)$ yazılabilir. Bu kıyaslama geometrik olarak, z_1 sayısının z_2 ye göre orijine daha uzak (veya daha yakın) olduğunu gösterir.

d) $\mathrm{Arg}(i) = \dfrac{\pi}{2}$ dir. Ancak $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, ..., \dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-7\pi}{2}, ...$ lerden herhangi biri olabilir.

e) $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{-5\pi}{6}$ ve $r = 2$ için $z = 2\left(\cos\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right)\right)$

De Moivre Teoremi.

$z \in \mathbb{C}$, $a, b, \rho, n \in \mathbb{R}$

$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(|z| = \rho \text{ ve } \mathrm{Arg}(z) = \theta\right)$ olmak üzere,

$$\boxed{z^n = \rho^n\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]^n = \rho^n\left[\cos n\theta + i\sin n\theta\right]}$$

dir. Bu teorem yardımıyla, $z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ve n tam sayı için,

$$\boxed{z^{1/n} = r^{1/n}e^{i\theta/n} = r^{1/n}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)},$$

k=0,1,2,..,(n-1)

yazılabilir. Buna göre tüm kompleks sayılar için $z^{1/n}$ ifadesinin n adet farklı kökü vardır.

Burada $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ **Euler formülü**'dür. $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ kompleks eşleniği için

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEKLER

1. $z = -\sqrt{3} - i$ için $z^3 = ?$

$z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} - i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$ (burada $r = 2$ ve $\theta = \dfrac{\pi}{6} - \pi = \dfrac{-5\pi}{6}$) için

$$z^3 = 2^3\left(\cos\frac{3\times 5\pi}{6} - i\sin\frac{3\times 5\pi}{6}\right) = 8\left(\cos\frac{5\pi}{2} - i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = -8i$$

2. $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = ?$

$$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}=\frac{3\left(i^2\right)^{15}-i\times\left(i^2\right)^9}{2i-1}=\frac{3(-1)^{15}-i\times(-1)^9}{2i-1}=\frac{-3+i}{2i-1}\times\frac{-2i-1}{-2i-1}=\frac{5+5i}{4+1}=1+i$$

3. $z_1=2+2i$**,** $z_2=1-\sqrt{3}i$, $z_3=-2$ karmaşık sayılarının asal argüman için kutupsal gösterilimini yazınız.

$\rho_1=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $\theta_1=\mathrm{Arctan}\frac{2}{2}=\frac{\pi}{4}$ için $z_1=2\sqrt{2}e^{i\pi/4}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\rho_2=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$, $\theta_2=\mathrm{Arctan}\frac{-\sqrt{3}}{1}=\frac{-\pi}{3}$ için $z_1=2e^{-i\pi/3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\rho_3=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$, $\theta_1=\mathrm{Arctan}\frac{0}{-2}=\pi$ için $z_3=2e^{i\pi}=2\cos\pi$

4. $z_1=(3+2i)e^{i\pi/3}$**,** $z_2=\left(2+\sqrt{2}i\right)^3$, $z_3=(1+i)^i$ karmaşık sayılarının reel ve sanal kısımlarını bulunuz.

$$z_1=(3+2i)e^{i\pi/3}=(3+2i)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=(3+2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2=\left(2+\sqrt{2}i\right)^3=-4+10\sqrt{2}i$$

$z_3=(1+i)^i$; $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ için $z_3=\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^i=\left(\sqrt{2}\right)^i e^{-\pi/4}$

$$\left(\sqrt{2}\right)^i=e^{\ln\left(\sqrt{2}\right)^i}=e^{i\ln\sqrt{2}}=\cos\left(\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\ln\sqrt{2}\right)$$

$$z_3=(1+i)^i=e^{-\pi/4}\left[\cos\left(\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\ln\sqrt{2}\right)\right]$$

5. $z^5-1=0$ denkleminin köklerini bulunuz.

$z^5=1 \Rightarrow (x+iy)^5=\left(\rho e^{i\theta+2k\pi}\right)^5=1$

$1=e^{(0+2k\pi)i}$ için kökler $z_k=\left(e^{0+2k\pi}\right)^{1/5}=e^{i\frac{0+2k\pi}{5}}$ k=0,1,2,3,4 den bulunur:

k=0 için $z_1=e^0=1$

k=1 için $z_2=e^{i\frac{2\pi}{5}}=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

k=2 için $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

k=3 için $z_4 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$

k=4 için $z_5 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$ bulunur.

Çözümler

Verilen herhangi bir eşitliği (denklemi) sağlayan büyüklüklerin (serbest değişken/değişkenlerin) belirlenmesine, denklemin **çözümü** denir.

Ele alınan problemin matematiksel modeli olarak ifade edebileceğimiz denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemler, **analitik çözüm yöntemleri** veya **sayısal çözüm yöntemleri** adlanır. Bu çözüm yöntemlerinden eğer, analitik çözüm yöntemlerinden birini kullanarak çözüm belirleniyor ise elde edilen çözüme **kesin çözüm**; sayısal çözüm yöntemlerinden biri kullanılarak çözüm belirleniyor ise çözüme **yaklaşık çözüm** adı verilir.

Elde edilen kesin çözüm, verilen denklemi özdeşlikle sağlar ancak, yaklaşık çözüm verilen denklemi özdeşlikle sağlamaz, belirli bir hata ortaya çıkar. Bu nedenle eğer belirlenebiliyor ise, öncelikle kesin çözüm belirlenmeye çalışılmalıdır.

Örneğin,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x$$

Diferansiyel denklemi verilsin. Bu diferansiyel denklemin için $\varphi(\mathrm{x})$ fonksiyonu çözüm ise verilen diferansiyel denklemi özdeşlikle sağlamalıdır. Örneğin $\varphi(\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\sin\mathrm{x} - \cos\mathrm{x}$ bir kesin çözüm ise yukarıdaki diferansiyel denklemi özdeşlikle sağlamalıdır. Bu fonksiyondan türevler alınıp diferansiyel denklemde yerine konursa, bu diferansiyel denklemi özdeşlikle sağladığı görülür. Eğer $\varphi(\mathrm{x})$ fonksiyonu "$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2\sin\mathrm{x} - \cos\mathrm{x}$" dışında başka fonksiyonlar seçilirse örneğin $\varphi(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 - 4$ seçilsin. Bu fonksiyon diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\frac{d\varphi}{dx} - 3\varphi = (4) - 2(4x) - 3(2x^2 - 4) = -6x^2 - 8x - 8 \neq 2e^x - 10\sin x$$

olur ve verilen diferansiyel denklemi özdeşlikle sağlamaz ve $\text{Hata} = -6x^2 - 8x - 8 - 2e^x + 10\sin x$ şeklinde bir hata fonksiyonu ortaya çıkar ve burada $\varphi(x) = 2x^2 - 4$ çözümü yaklaşık çözüm olur. Yaklaşık çözümlerin belirlenmesinde kullanılan pek çok yöntem vardır örneğin, ağırlıklı artıklar metodları (Kolakasyon, Galerkin, Ritz yöntemleri vb.) , sonlu farklar, sonlu elemanlar vb. Seçilen yöntemlerin işlem adımları gerçekleştirilerek, yaklaşık çözüm belirlenmeye çalışılır. Burada amaç, y(x) aranan çözüm (çözüm bölgesi $x \in \Omega$) , $\varphi(x)$ yaklaşık çözüm ve $\varepsilon > 0$ bir sayı (hassaslık derecesi) olmak üzere $\max_{x \in \Omega} |y(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ sağlayan yaklaşık çözümü belirlemektir.

Bazı durumlarda çözüm sonsuz terimli seriler yardımıyla aranır örneğin, yukarıda verilen diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Şeklinde bir seri ile aranmak istensin. Bu durumda serinin sonsuz terimleri arasında işlemler yapılamayacağından, serinin terim sayısı sonluya düşürülür yani, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \approx \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ olur. Bunun sonucu da elde edilen çözüm yaklaşık çözüm olur ve N değeri ne kadar büyük seçilirse, çözüm o kadar hassas olur. Ancak yine de belirli bir hata ile verilen denklemi sağlar.

Yaklaşık yöntemlerin çoğu, verilen problemin çözümünü cebirsel denklemlerin çözümüne indirgeyerek çözümü belirler. Buna örnek olarak Euler yaklaşımını verebiliriz. Bu metoda göre, çözüm bölgesi ayrıklaştırılır ve matematik modelde verilen diferansiyel işlemi, türevin tanımı kullanılarak ayrıklaştırılmış noktalardaki aranan fonksiyonun değerlerini içeren cebirsel denklemlere dönüştürülür ve bu cebirsel denklemin çözümü verilen matematiksel modelin çözümü (yaklaşık çözümü) olarak belirlenir.

Örnek: Aşağıda verilen başlangıç değer problemine Euler Metodunu uygulayınız.

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $a < x < b$ için $y(a) = y_a$ (başlangıç koşulu)

Burada $f(x, y), a, b, y_a$ bilinen fonksiyon ve değerlerdir. Çözüm bölgesi N adet alt bölgeye ayrılır, $h = (b-a)/N$ için $x_0 = a$, $x_N = b$ ve $x_i = x_{i-1} + h$ (i=1,2,…,N) olsun. Türev tanımından,

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}\approx y'(x) \text{ için}$$

$$x_1 = x_0 + h \text{ için } \frac{y(x_1)-y(x_0)}{h} = y'(x_0) \text{ veya } \underbrace{y(x_1)}_{y_1} = \underbrace{y'(x_0)}_{f(x_0,y_0)} h + \underbrace{y(x_0)}_{y_0}$$

$$x_2 = x_1 + h \text{ için } \underbrace{y(x_2)}_{y_2} = \underbrace{y'(x_1)}_{f(x_1,y_1)} h + \underbrace{y(x_1)}_{y_1}$$

…..

$$x_N = x_{N-1} + h \text{ için } \underbrace{y(x_N)}_{y_N} = \underbrace{y'(x_{N-1})}_{f(x_{N-1},y_{N-1})} h + \underbrace{y(x_{N-1})}_{y_{N-1}}$$

Buradan noktalarda aranan fonksiyonun değerleri $y_0, y_1, ..., y_N$ göre cebirsel denklem;

$$\begin{array}{c} y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h \\ y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h \\ ..... \\ y_N - y_{N-1} = f(x_{N-1}, y_{N-1})h \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hf(x_0, y_0) \\ hf(x_1, y_1) \\ hf(x_2, y_2) \\ ... \\ hf(x_{N-1}, y_{N-1}) \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu ifade genel olarak AX=B şeklinde ifade edilebilen cebirsel denklem takımı olur. Belirtelim ki, verilen diferansiyel denklem nonlineer ise cebirsel denklem takımı nonlineer; diferansiyel denklem lineer ise cebirsel denklem takımı lineer olur. Benzeri yaklaşım sonlu farklar, sonlu elemanlar vb yöntemlerinde de kullanılmaktadır.

Hata Analizi

Verilen matematiksel modelin yaklaşık çözümlerin belirlenmesi bir zorunluluktan doğar. Bununla beraber yaklaşık çözüm ile kesin çözüm arasındaki farkın (hatanın) ne kadar olduğunun belirlenmesi istenir.

Ancak verilen problem için kesin çözüm elde edilebiliyor ise yaklaşık çözüm zaten bulunmaz. Kesin çözümün elde edilemediği durumlar için yaklaşık çözüm belirlenir, bu durumda da hatanın ne kadar olduğu ve nasıl belirleneceği problemi ortaya çıkar.

Hatanın belirlenmesinde genel uygulama, çok sayıda elde edilen yaklaşık çözümlerin birbiri ile kıyaslanması ile belirlenen hatanın (toplam hata veya noktadaki hata) istenen değerden küçük kaldığı çözümlerden biri alınarak, kesin çözüme en yakın (optimum) çözüm olarak kullanır ve yapılan hatanın karşılaştırılan son iki çözüm arasındaki hata olduğu söylenir.

Hata, mutlak hata ve bağıl hata olarak ikiye ayrılır:

Mutlak hata= $\varepsilon_m = |y_k - y_y|$

Yüzde bağıl hata = $\varepsilon_b = \dfrac{|y_k - y_y|}{|y_k|} \times 100$

Burada y_k kesin değer, y_y yaklaşık değeri göstermektedir. Toplam hata belirlenmek isteniyorsa her noktada yapılan hataların üst üste toplanması (yani hata fonksiyonunun integrali) gerekir.

Cebirsel Denklemlerin Kökleri

$x^2 + ax + b = 0$, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ve $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denklemlerinin kökleri analitik bulunabilir (Giolamo Cardano ve Ferrari formülleri). 4. Dereceden daha büyük polinomun kökleri analitik olarak bulunamaz.

Polinomların köklerinin sayısal bulunması için yaygın kullanılan bazı yöntemler yarıya bölme, hata yarılama, Newton Raphson ve Secant (Bisection, Regula False, Newton-Raphson and Secant) vb. verilebilir. Bu yöntemler ancak reel kökleri verebilir. Kompleks kökleri belirlemek için farklı yöntemler kullanılır örneğin, Muller Yöntemi.

DİZİLER

Bir sayı kümesinin her bir elemanı, bir doğal sayı ile numaralandırılabilen kümeye **dizi** denir. Diğer bir değişle,

$$f:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$$
$$f(n)=a_n$$

şeklinde matematiksel olarak ifade edilebilir.

$a_1, a_2, ..., a_n,...$ dizinin elemanları, a_n dizinin genel terimi adlandırılır. Örneğin genel terimi $a_n=\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$ $(n\neq 0)$ için dizinin elemanları: $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},...,\dfrac{1}{n},...$ olur.

Bazı özel diziler:

a) Sabit dizi: $a_n = c = sabit.$

b) Aritmetik dizi: $\{a_n\}$ dizisi için $a_n = a_{n-1} + r$ ($a_0 = c = sbt.$)

c) Geometrik dizi: $\{a_n\}$ dizisi için $a_n = a_{n-1}\times r$ ($a_0 = c = sbt.$)

d) Eşit dizi: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri için $a_n = b_n$ dir.

e) Sonlu dizi: $k\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $A_k = \{1,2,3,4\}$

Dizilerin özellikleri

a) Monoton artan dizi: $\forall n$ ler için $a_n < a_{n+1}$

b) Monoton azalan dizi: $\forall n$ ler için $a_n > a_{n+1}$

c) Azalmayan (Artmayan) dizi: $\forall n$ ler için $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$)

Dizinin Limiti

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists N(\varepsilon)$ varki, $\forall n>N$ için $|a_n - a|<\varepsilon$ oluyor ise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dır yani dizinin limiti a dır denir. Örneğin genel terimi $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ olan dizinin limiti, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ dir.

Fundamental dizi: Cauchy dizilerine **fundamental dizi** denir.

Cauchy dizisi:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $|a_n - a_m| < \varepsilon$ eşitsizliğinin her $n, m > N$ $(N \in \mathbb{N})$ için sağlandığı bir N sayısı varsa, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Teoremler:

1. Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.
2. Her Cauchy dizisi sınırlıdır.
3. Bir Cauchy dizisinin her alt dizisi Cauchy 'dir.
4. Bir Cauchy dizisinin bir alt dizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsar
5. Her Cauchy dizisinin $\mathbb{R}$ de bir limiti vardır.

Örnek: Genel terimi $a_n = \dfrac{1}{n}$ olarak verilen dizinin limitinin $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$ olduğunu gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon)$ varki, $\forall n > N$ için $|a_n - 0| < \varepsilon$ olmalı.

Buna göre $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ olsun.

$\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{100} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n}\right| < \dfrac{1}{100}$ için n>100 olur ki, N=100 alınabilir. Başka bir $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ için N=10 bulunur. Yani $N = N(\varepsilon)$ olur. Dolayısıyla $\forall n > N$ için $|a_n - 0| < \varepsilon$ sağlanmış olunur ve $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$ dir.

Bir dizinin limiti, genel teriminin limitine eşittir.

$\{a_n\} = \left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ dizisi yakınsak mıdır? $0 < \dfrac{n!}{n^n} \le \dfrac{1}{n}$ olduğundan yakınsaktır.

$\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ için $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ dir.

$\{a_n\} = \left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ için $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$ dir.

SERİLER

$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şeklinde verilen toplama seri denir.

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$ için,

$S_1 = \frac{1}{2^1}$,

$S_2 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2}$,

$S_3 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$

……..

$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^N}$

…….

Toplamlarının her birine serinin kısmı toplamı adı verilir. Eğer kısmı toplamlarından oluşturulan dizi yakınsak ise seri yakınsaktır. Yani,

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ için $\lim_{n \to \infty} S_n = s$ varsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

Terimleri fonksiyonlardan oluşan seriye **fonksiyon serisi** denir (Örneğin Taylor, Maclaurin, Fourier serileri vb.) Fonksiyon serilerinin yakınsaklığı için serbest değişkenin **yakınsaklık aralığı** belirlenir.

Örneğin, $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - ....$ serisi $|x| \leq 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. Dolayısıyla yakınsaklık aralığı $-1 \leq x \leq 1$ yani $[-1,1]$ dir. $|x| \leq 1$ ifadesinde "1" değerine **yakınsaklık yarıçapı** denir.

Örnek: $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, $(a \neq 0)$ geometrik serisi $|r| < 1$ için yakınsaktır ve serinin toplamı (limiti) $\frac{a}{1-r}$ dir.

VEKTÖRLER

Yön doğrultu ve şiddet gibi üç veriyle temsil edilen büyüklüklerdir. Oxyz Kartezyen koordinat sisteminde keyfi bir vektör $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ şeklinde gösterilir. F_x, F_y, F_z bu vektörün bileşenleri veya koordinat eksenleri üzerindeki izdüşümü adlanır. Yani, $F_x = \vec{F} \cdot \vec{i}$, $F_y = \vec{F} \cdot \vec{j}$ ve $F_z = \vec{F} \cdot \vec{k}$ dir. $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{(F_x)^2 + \left(F_y\right)^2 + (F_z)^2}$ değerine vektörün **şiddeti** veya **modülü** denir.

İşlemler: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k},\ \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ vektör, $k \in \mathbb{R}$ olsun.

1. $\vec{A} \mp \vec{B} = \vec{C} = (A_x \mp B_x)\vec{i} + (A_y \mp B_y)\vec{j} + (A_z \mp B_z)\vec{k}$
2. Vektörün skaler ile çarpımı

   $k\left(\vec{A}\right) = k\vec{A}$
3. Skaler çarpım (iç çarpım veya nokta çarpım)

   $\vec{A} \cdot \vec{B} = sb. = \left|\vec{A}\right| \times \left|\vec{B}\right| \cos\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$ burada $\theta = m\left(\vec{A}, \vec{B}\right)$ dir.

   i. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ diğer taraftan $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ $(\vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{m})$

   ii. $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

   iii. $\vec{A}\ ve\ \vec{B}$ vektörleri arasındaki açı θ ise, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$ dir.

   iv. $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$ bu vektörler ortagonaldir.

   v. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

   vi. $\vec{A} \cdot \vec{A} = \left|\vec{A}\right|^2$

   vii. $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \pm \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} \mp \vec{A} \cdot \vec{C}$

   viii. $k\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = k\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot k\vec{B}$
4. Vektörel çarpım

   $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ burada $\vec{A} \perp \vec{C}\ ve\ \vec{B} \perp \vec{C}$ dir.

$$\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$ olur.

$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|\sin\theta$ burada $\theta=m\left(\vec{A},\vec{B}\right)$ dir.

i. $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$ diğer taraftan $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ $(\vec{m}\times\vec{n}=-\vec{n}\times\vec{m})$

ii. $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

iii. $\vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0$ yani $\vec{A}\perp\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

iv. $\vec{B}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0$ yani $\vec{B}\perp\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

v. $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^2=\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2$ (Lagrange özdeşliği)

vi. $\vec{A}\times\left(\vec{B}\pm\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}\mp\vec{A}\times\vec{C}$

vii. $k\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=k\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times k\vec{B}$

viii. $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0\Rightarrow\vec{A}\ ve\ \vec{B}$ paralel vektörlerdir.

Vektör uzayları

$$\vec{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{Bmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

N boyutlu uzaydaki bir vektörün şiddeti **norm** ile verilir. Norm bir büyüklüğün reel sayı ile eşleştirilmesidir.

Norm Özellikleri

1) $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n\ ,\ \left\|\vec{x}\right\|\geq 0$

2) $\left\|\vec{x}\right\|=0\Rightarrow\vec{x}=\vec{0}=\underbrace{(0,0,\dots,0)}_{n\text{ adet}}$

3) $\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n$ için $\left\|\alpha\vec{x}\right\|=\left|\alpha\right|\left\|\vec{x}\right\|$

4) $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ için $\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|\leq\left\|\vec{x}\right\|+\left\|\vec{y}\right\|$

Yukarıdaki özellikler $\mathbb{R}^n$ uzayında $\|\bullet\|$ bir norm tanımlar ve $\left(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|\right)$ ikilisine normlu uzay denir.

Örneğin, vektörün modülü bir norm tanımlar. $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \left(x_1, x_2\right)$ için $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\vec{x}\|$ dir. Çünkü yukarıda verilen (1)-(4) özelliklerini sağlar. N boyutlu uzayda tanımlanan bazı normlar aşağıda verilmiştir:

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ için,

p normu, $L_p = \|\vec{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p}$, $p \in \mathbb{N}$

Mutlak norm, $\ell_1 = \|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Euclid normu $L_2 = \|\vec{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$,

Maksimum normu $L_\infty = \|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

Metrik Uzaylar

Vektör uzayındaki herhangi iki vektör arasındaki mesafe-uzaklık metrik yardımıyla belirlenir.

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için,

i. $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \ge 0$, $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

ii. $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \le \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$

Özellikleri ele alınan uzayda bir **metrik** tanımlar.

Eğer uzayda norm verilmişse o uzaya **normlu uzay**, metrik tanımlanmamışsa **metrik uzay** adı verilir. Eğer bir metrik uzayda seçilen her Cauchy dizisinin limiti bu uzayın elemanı ise bu uzaya **tam uzay** adı verilir. Skaler çarpıma göre tanımlanan norma göre Cauchy dizileri yakınsak olan (yani tam uzay olan) uzaya **Hilbert uzayı** denir. Normlu tam uzaya **Banach uzayı** denir.

MATRİSLER

Elemanları sayı, değişken, fonksiyon olabilen satır ve sütunlardan oluşan büyüklükler. $A_{m\times n}$, m satır ve n sütundan oluşan matrisi gösterir, burada m ve n ye matrisin mertebesi denir. Matrisin elemanları a_{ij}, i=1,2,…,m ve j=1,2,…,n için bir matris $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$ şeklinde gösterilir.

Bazı matrisler:

Sütun matris: $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$, örneğin i=1,2,…,m ve j=1

Satır matris: $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$, örneğin i=1ve j=1,2,…,n

Sıfır matris: $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$, $a_{ij}=0$ ve i=1,2,…,m ve j=1,2,…,n

Kare matris, $A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right]$, i=1,2,…,n ve j=1,2,…,n

Köşegen matris: $A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right]$, $a_{ii}=c=\text{sbt.}, a_{ij}=0\ (i\neq j)$, i=1,2,…,n ve j=1,2,…,n

Birim matris: $A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right]$, $a_{ii}=1, a_{ij}=0\ (i\neq j)$, i=1,2,…,n ve j=1,2,…,n Birim matrisler özel olarak "I" ile gösterilir.

Sıfır matris: $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$; $a_{ij}=0$ yani $0_{n\times m}=\left[0\right]$ dir.

Matrisler kümesinde işlemler:

1. **Toplama işlemi**

$A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right]$ ve $C=\left[c_{ij}\right]$ aynı mertebeden matrisler ve λ,λ_1 ve λ_2 sayı olsun.

$A+B=C \Rightarrow \left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\left[c_{ij}\right]$ olur.

Özellikler:

i. $A\mp B=B\mp A$; $A\mp B=\left[a_{ij}\right]\mp\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}\mp b_{ij}\right]$ (Değişme özelliği)

ii. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (Birleşme özelliği)

iii. $A+0=A$ (Etkisiz eleman)

iv. $A-A=0$

v. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$; $\lambda A=\lambda\left[a_{ij}\right]=\left[\lambda a_{ij}\right]$

vi. $(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$

vii. $(\lambda_1 \times \lambda_2)A = \lambda_1 \times (\lambda_2 A)$

viii. $1 \times A = A$ ("1" skaler değer)

2. Matris çarpımı

$A_{m\times n}$ ve $B_{s\times r}$ iki matrisin çarpılabilmesi, yani $A \times B$ için n=s olmalıdır. Ortaya çıkan çarpım matris $A_{m\times n} \times B_{n\times r} = C_{m\times r}$ dir. Diğer taraftan eğer $B \times A$ alınırsa, matrislerin çarpılabilmesi için r=m olmalıdır. Ortaya çıkan çarpım matris $B_{s\times r} \times A_{r\times n} = \overline{C}_{s\times n}$ olur.

Özellikler:

Buna göre A,B ve C çarpılabilen matrisler ve λ, λ_1 ve λ_2 sayı olsun.

i. $A \times B \neq B \times A$

ii. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

iii. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

iv. $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$

v. $\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B)$

vi. $A \times 0 = 0$

Tanım: $A_{n\times n}$ kare matris için $\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{\text{p adet}} = A^p$; $A^p \times A^q = A^{p+q}$; $\left(A^p\right)^q = A^{p\times q}$, $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Örnek: A bir matris olsun bu durumda e^A, $\sin A$, $\cos A$ ne olur?

$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ...$ seri açılımında x yerine A matrisi konularak hesaplanır.

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...$ seri açılımında x yerine A matrisi konularak hesaplanır.

Tanım: Transpoze, $A = \left[a_{ij}\right] \Rightarrow A^T = \left[a_{ji}\right]$ dir.

a) $(A + B)^T = A^T + B^T$

b) $\left(A^T\right)^T = A$

c) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ burada λ skaler.

d) $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

e) $A \times A^T = I$ ise A matrisi ortogonaldir.

Tanım: $\boxed{\left(A^T\right) = A}$ ise A **simetrik** matristir. Yani, $A = \left[a_{ij}\right]$ için $a_{ij} = a_{ji}$ dir. Eğer $\boxed{\left(A^T\right) = -A}$ oluyorsa, A matrisi **ters simetrik** veya **antisimetrik** matris yani, $a_{ij} = -a_{ji}$ dir. Antisimetrik matrislerde $a_{ii} = 0$ dir.

Not: Her matris simetrik ve antisimetrik iki matrisin toplamı şeklinde yazılabilir.

Tanım: $\exists q \in \mathbb{Z}^+$ için $\boxed{A^q = 0}$ oluyorsa, A matrisine **nilpotent matris** denir. En küçük q değerine nilpotent matrisin derecesi (indeksi) denir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ için $A^3 = 0$ olduğunu gösteriniz.

Tanım: $\boxed{A^{p+1} = A}$ olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı varsa, A matrisine **periyodik matris** denir ve **periyodu** p dir. Eğer $\boxed{A^2 = A}$ oluyorsa bu durumda A matrisine **idempotent matris** denir.

Örnek: Aşağıda verilen matrisin idempotent olduğunu gösteriniz.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Tanım: $\boxed{A^2 = I}$ (burada I birim matristir) ise A matrisine **involut matris** denir.

Tanım: Eşlenik matris; elemanları kompleks sayı olan matrisin, elemanlarının eşlenikleriyle yerdeğiştirilmesiyle oluşturulan matrise önceki matrisin **eşlenik matrisi** denir. Eşlenik işareti bazen büyüklüğün üzerine çizgi işareti ile bazen * işareti eklenmesi ile gösterilir yani $\overline{A} = A^*$ dir.

Örnek:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2+i & 7i \\ 3-4i & i & 1+i \end{bmatrix}$ için $\overline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & -7i \\ 3+4i & -i & 1-i \end{bmatrix}$ olur.

a. $\overline{\overline{A}} = A$

b. $\overline{(kA)} = \overline{k}\overline{A}$

c. $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$

d. $\overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$

Tanım: $\boxed{\left(\overline{A}\right)^T = A}$ ise A matrisine **Hermitian matris** denir. Bu matris elemanları için $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ olur. Ayrıca bu matrislerin köşegen elemanları reel sayı olur.

Tanım: $\boxed{\left(\overline{A}\right)^T = -A}$ ise A matrisine **Ters Hermitian matris** denir. Bu matris elemanları için $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$ olur. Ayrıca bu matrislerin köşegen elemanları sadece sanal sayıdan (pure imaginary part) veya sıfırdan oluşur.

Örnek: Aşağıda verilen A matrisi Hermitian, B matrisi **ters Hermitian matristir**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım: A ve B matrisleri $n \times n$ kare matrisler ve $\boxed{A \times B = B \times A = I_{n \times n} = I_n}$ sağlıyor ise B matrisine A matrisinin **inversi (tersi)** denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ için } A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla, $A^{-1} = B$ dir.

Tanım: Eğer $A_{n \times n}$ matrisinin inversi (tersi) yok ise A matrisi **singüler (tekil) matris** denir.

Teorem: $A_{n \times n}$ matrisinin tersi var ise bu bir tanedir.

İspat için teoremin tersini düşünelim yani B ve C gibi iki adet ters matrisi olsun yani, $A \times B = I_n$ ve $A \times C = I_n$ dir. Bu durumda,

$B = B \times I_n = B \times (A \times C) = \underbrace{(B \times A)}_{I_n} \times C = C \Rightarrow B = C$ olur. Dolayısıyla, matrisin tersi varsa bu tekdir. Her kare matrisin tersi yoktur.

Tanım: Bir matrisin satırları veya sütunları üzerinde yapılan ve elementer satır/sütün işlemleri adlandırılan işlemler şunlardır:

1. Matrisin herhangi i. ve j. satır(sütun) elemanları yerdeğiştirebilir. Bu işlem H_{ij} (K_{ij}) ile gösterilir.
2. Matrisin i numaralı satır (sütun) elemanları sıfırdan farklı λ sayısı ile çarpılabilir. Bu işlem $H_i(\lambda)$ $(K_i(\lambda))$ ile gösterilir.
3. Matrisin herhangi i numaralı satır (sütun) elemanları λ ile çarpılarak j. satır (sütun) elemanlarına eklenebilir. Bu işlem $H_{ji}(\lambda)$ $(K_{ji}(\lambda))$ ile gösterilir.

Tanım: Bir A matrisine ard arda elementer satır (sütun) işlemleri uygulanarak B matrisi elde edilirse, A ve B matrisleri satırca (sütunca) denk matrislerdir ve $A \sim B$ ile gösterilir.

Örnek: Aşağıda verilen matrise sırasıyla $H_{31}(-7)$, $H_3(-\frac{1}{12})$ ve H_{23} işlemlerini yaparak denk (B matrisini) matrisi bulunuz .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 17/12 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Tanım: Bir matris aşağıda verilen özellikleri sağlıyor ise satırca indirgenmiş formdadır denir.

i. İlk k adet satır sıfırdan farklı ve (k+1). Satır ile sonraki satırların tüm elemanları sıfır.

ii. İlk k adet satırın elemanları için, her bir satırdaki sıfırdan farklı ilk eleman 1 ve j. satırdaki 1 in bulunduğu sütun numarası S_j, ilk satırdan itibaren artmaktadır yani, $S_1 < S_2 < ... < S_k$ sağlar.

iii. Bir satırdaki sıfırdan faklı ilk eleman $a_{ij} = 1$ ise, j. sütundaki a_{ij} altında bulunan diğer tüm elemanlar sıfır.

Yukarıdaki (i)-(iii) koşulları "a_{ij} nin bulunduğu sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır" seklinde alınırsa bu durumda matrise **satırca indirgenmiş eşelon form**dadır denir**.**

Örnek: Aşağıdaki matrisler indirgenmiş formda mıdır?

$$A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

A ve B matrisleri satırca indirgenmiş formda ancak C matrisi satırca/sütunca satırca indirgenmiş formda değildir.

Tanım: Satırca (sütunca) indirgenmiş formdaki bir A matrisin sıfırdan farklı satır (sütun) sayısına o matrisin **rangı** denir ve r_A veya "**rang A**" ile gösterilir.

Örnek: Aşağıda verilen A matrisinin rangı kaçtır?

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{bmatrix}$$

Verilen matris, elementer satır işlemleri uygulanarak satırca indirgenmiş formu aşağıdaki gibi bulunur:

$$A\sim B=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \text{ dolayısıyla } r_A=3 \text{ dür.}$$

Tanım: Bir matris elementer satır ve/veya sütun işlemleri ile indirgenmiş eşelon forma getirilebilir. Böylece matris aşağıdaki matris şekillerinden birine denk olur:

$$I_k\ ,\ (I_k,0),\ \begin{pmatrix}I_k\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}I_k&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Matrisin bu şekilde yazılmasına matrisin **normal formu** denir. Bu durumda matrisin rangı k olur.

Örnek: Verilen A matrisinin normal formunu ve rangını belirleyiniz.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-1&5\\2&6&0&4\\-1&-3&2&-8\end{bmatrix}$$

Elementer satır ve sütun işlemleri ile A matrisinin normal formu:

$$A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } r_A = 2 \text{ dir.}$$

Teorem: bir kare matrisin inversinin (tersinin) bulunabilmesi için gerek ve yeter şart, elementer satır ve sütun işlemleriyle elde edilen normal formunun birim matrise denk olmasıdır. Dolayısıyla $\left[A_{n\times n} \;\vdots\; I_n\right] \sim \left[I_n \;\vdots\; A^{-1}\right]$ olacak şekilde bulunan A^{-1} matrisi A matrisinin tersidir.

Örnek: Verilen A matrisinin inversini elementer satır/sütun işlemleri ile bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ için } \left[A \;\vdots\; I_n\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ için sırasıyla } H_{21}(-1); H_{31}(-1);\ H_{12}(-3)$$

; $H_{13}(-3)$ elementer satır işlemleri yapılarak

$$\left[A \;\vdots\; I_n\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \text{ için } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

Uygulamalar:

1. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ için $D^{-1} = ?$

2. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ için $A \times B;\ A \times C;\ B \times C$ çarpım matrislerini bulunuz.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ için $A^3 = ?$

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ için $A \times B = C$ ise B=?

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $f(x) = 2x^2 - x$ için f(A)=?

6. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ve $f(x)=3x^3-2x^2+x-5$ için f(A)=?

7. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ için $(A\times B)^T=B^T\times A^T$ olduğunu doğrulayınız.

8. $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ matrisinin idempotent $\left(A^2=A\right)$ olduğunu gösteriniz .

9. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{bmatrix}$ için $A^{-1}=?$

10. $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$ için $r_A=?$

11. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 3\\ 6 & 8 & 7 & 5\end{bmatrix}$ için $r_A=?$

DETERMİNANTLAR

Ancak kare matrislerin determinantı vardır.

Teorem: Bir $A_{n\times n}$ kare matrisin determinantı $\det(A)$ veya $|A|$ ile gösterilir ve

$$\det A = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \mp a_1 a_{i_1} a_2 a_{i_2} \ldots a_n a_{i_n}$$ dir.

i. 1×1 mertebeden $A=\left[a_{ij}\right]$ $(a_{ij}=a)$ matrisinin determinantı $\det(A)=|A|=|a|=a$ dır.

ii. 2×2 mertebeden $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ kare matrisin determinantı;

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$ dir.

iii. 3×3 mertebeden $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ kare matrisin determinantı;

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)$$

A determinantının birinci satıra göre açılımıdır.

Tanım: $n>3$ olmak üzere bir $n\times n$ kare matrisin determinantı için $A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right]$ olsun. M_{ij}, a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun çıkarılmasıyla A matrisinden elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ mertebeden matrisi göstersin. M_{ij} matrisinin determinantına ($M_{ij}=|\bullet|$), a_{ij} elemanına ait **Minör** denir. $\boxed{A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}}$ değerine ise a_{ij} elemanına ait **eşçarpan** veya **kofaktör** denir.

Örnek: verilen A matrisi için a_{23} elemanına ait minörü (M_{23}) ve kofaktörü (A_{23}) bulunuz.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6\end{bmatrix},\ a_{23}=2 \text{ için } M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4\end{vmatrix}=-17 \text{ ve } A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-(-17)=17 \text{ olur.}$$

Terorem: $n\geq 2$ için $A_{n\times n}$ kare matris olsun.

$$\boxed{\begin{aligned}\det(A) = |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}\end{aligned}}$$

olur. Determinantın bu şekilde hesaplanmasına **Laplace açılımı** denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\det(A) = ?$

Determinantı 1. Satıra göre açarsak, $\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, burada

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 7$ için

$\det(A) = |A| = 2(-2) + 5(-8) + 4(7) = -16$ dir. Determinant 2. veya 3. satıra (bezer şekilde sütuna) göre de açılsa aynı determinant değeri bulunur. Yani,

$$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = -16$$

olur.

Determinant Özellikleri (Teoremler):

1. Bir determinantın herhangi satır/sütün elemanlarının hepsi sıfır (0) ise determinantın değeri sıfırdır.
2. Matrisin bir satır/sütünü $k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}$ ile çarpılırsa, matrisin determinantı, önceki determinantının k ile çarpımı olur.
3. Determinantta herhangi iki satır/sütün yer değiştirse, determinant işaret değiştirir.
4. Determinantın herhangi bir satır/sütünü $k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}$ ile çarpılıp başka bir satır/sütuna ilave edilse ($H_{ji}(k)$ veya $K_{ji}(k)$ elementer işlemi için), determinantın değeri değişmez.
5. Determinantın herhangi iki satır/sütünü aynı ise determinantın değeri sıfırdır.
6. Determinantın herhangi iki satır/sütünü orantılı ise determinantın değeri sıfırdır.
7. Bir satır/sütuna ait elemanlar başka bir satır/sütün elemanlarına ait uygun eş çarpanlar ile çarpılır ve toplanırsa, elde edilen toplam sıfırdır. Yani, $A_{n\times n} = \left[a_{ij}\right]$ kare matris için

   $$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \ldots + a_{rn}A_{sn} = \begin{cases} \det(A) & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

   olur.

8. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

9. Bir matrisin transpozesinin determinantı, kendi determinantına eşittir. $|A| = \left|A^T\right|$.

10. $|A \times B| = |A| \times |B|$ dir.

Bir Matrisin Tersi

Tanım: Bir kare matrisin elemanları yerine o elemanlara ait eş çarpanların alınmasıyla elde edilen matrisin transpozesine, ilk matrisin **ek matrisi (Adjoint matrisi)** denir. Ek A, Adj A yada A^* ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \textbf{ için } Ek\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

burada, $$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ldots,$$

$$A_{nn} = (-1)^{2n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

Teorem: $A_{n\times n}$ kare matris olsun. $|A| \neq 0$ ise,

$\boxed{A^{-1} = \dfrac{EkA}{|A|}}$ dir. Burada, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\left(M_{ij}\right)$ ve M_{ij} , a_{ij} elemanına ait minördür.

Not: Eğer, $A_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise A matrisinin **tersi yoktur** yani, **singüler (tekil) matris**tir denir.

Örnek: Aşağıda verilen matris singüler midir?

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **,** det $A = |A| = -17$ yani $|A| \neq 0$ olduğu için singüler değildir ve tersi bulunabilir.

Matrisin rangı: $A_{m \times n}$ matrisinden satır ve sütunları eleyerek elde edilen alt kare matrislerinden $r \times r$ $(r \leq n; m)$ en az bir alt matrisin determinantı sıfırdan farklı ve $(r+1) \times (r+1)$ ve daha büyük tüm alt matrislerin determinantları sıfır ise A matrisinin **rangı r**'dir ve $r_A = r$ ile gösterilir.

Örnek: Verilen matrisin rangını bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$