

### 3.2. Kompleks Kuvvetler

$z \neq 0$  olmak üzere  $z$  nin bir kompleks kuvveti  $z^c = e^{c \log z}$  ile tanımlıdır.  $\log z$  yerine onun  $Log z$  esas dalı alınırsa ( $n = 0$ ),  $z^c = e^{c Log z}$  ye  $z^c$  nin esas değeri denir.

**Soru 1.**  $(1 + i)^i$  nin bütün değerlerini ve esas değerini bulunuz.

**Çözüm.**

1)

$$\begin{aligned}(1 + i)^i &= e^{i \log(1+i)} \\ &= e^{i[\ln|1+i| + i \arg(1+i)]} \\ &= e^{i[\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)]} \\ &= e^{i \ln\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4} + 2n\pi} \\ &= e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \left[ \cos(\ln\sqrt{2}) + i \sin(\ln\sqrt{2}) \right], \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

2)  $n = 0$  için esas değeri bulunur.

$$\begin{aligned}(1 + i)^i &= e^{i Log(1+i)} \\ &= e^{i[\ln|1+i| + i Arg(1+i)]} \\ &= e^{i(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4})} \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i \ln\sqrt{2}} \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}} \left[ \cos(\ln\sqrt{2}) + i \sin(\ln\sqrt{2}) \right]\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$Re(1 + i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}} \cos(\ln\sqrt{2})$$

$$Im(1 + i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}} \sin(\ln\sqrt{2}) \text{ bulunur.}$$

**Soru 2.**  $z = re^{i\theta} \neq 0$  için  $z^i$  nin esas dalının denkleminin  $z^i = e^{-\theta} [\cos(\ln r) + i \sin(\ln r)]$  olduğunu gösteriniz.

---

**Çözüm.**

$|z| > 0, -\pi < \text{Arg}z < \pi$  olmak üzere

$$\begin{aligned} z^i &= e^{i \text{Log}z} \\ &= e^{i(\ln|z| + i \text{Arg}z)} \\ &= e^{i(\ln r + i\theta)} \\ &= e^{i \ln r - \theta} \\ &= e^{-\theta} [\cos(\ln r) + i \sin(\ln r)] \end{aligned}$$

bulunur.

**Soru 3.** Aşağıdaki ifadelerin tüm değerlerini bulunuz.

1)  $(-1)^{1/\pi}$

2)  $(1 - i)^{4i}$

**Çözüm.**

1)

$$\begin{aligned} (-1)^{1/\pi} &= e^{\frac{1}{\pi} \log(-1)} \\ &= e^{\frac{1}{\pi} [\ln|-1| + i \arg(-1)]} \\ &= e^{\frac{1}{\pi} i(\pi + 2n\pi)} \\ &= e^{(2n+1)i}, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

bulunur.

2)

$$\begin{aligned}
(1-i)^{4i} &= e^{4i \log(1-i)} \\
&= e^{4i [\ln|1-i| + i(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi)]} \\
&= e^{4i [\ln\sqrt{2} + i \arg(1-i)]} \\
&= e^{i \ln 4 - 4(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi)} \\
&= e^{-4(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi)} (\cos(\ln 4) + i \sin(\ln 4)), \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Soru 4.**  $z \neq 0$  ve  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$|z^\alpha| = |z|^\alpha$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**

$$\begin{aligned}
z^\alpha &= e^{\alpha \log z} = e^{\alpha (\ln|z| + i \arg z)} \\
&= e^{\alpha \ln|z|} e^{i \alpha \arg z} \\
&= |z|^\alpha e^{i \alpha \arg z}
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$|z^\alpha| = ||z|^\alpha e^{i \alpha \arg z}| = |z|^\alpha |e^{i \alpha \arg z}| = |z|^\alpha$$

bulunur.

**Alıştırmalar**

1)  $2^i$ ,  $(-1)^{-i}$ ,  $2^{\pi i}$ ,  $(1+i)^{2+i}$  ifadelerinin bütün değerlerini bulunuz.

2)  $z = x + iy$  olmak üzere

$$\operatorname{Re}(z^i), \operatorname{Im}(z^i), \operatorname{Re}(i^z), |i^z|$$

sayılarının bütün değerlerini bulunuz.

3)  $((1+i)^{(1+i)})^{1+i}$  ifadesini basit hale getiriniz.