T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKALARDA ÇARPANLARA AYRILIŞ VE MODÜLLER

BÜŞRA GÜLLE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. MURAT ALAN

İSTANBUL, 2018

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKARDA ÇARPANLARA AYRILIŞ VE MODÜLLER

Büşra GÜLLE tarafından hazırlanan tez çalışması 22.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Murat ALAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Murat ALAN

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL

Marmara Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Tez çalışma sürecim ve eğitimim boyunca bana yardımcı olan, değerli bilgi ve tecrübeleriyle hiçbir zaman desteğini esirgemeyen ve her fırsatta çalışmamla yakından ilgilenip yol gösteren danışman hocam Doç. Dr. Murat Alan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca yanımda olup beni destekleyen aileme, hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Haziran, 2018

Büşra GÜLLE

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

KISALTMA LİSTESİ vii

ÖZET viii

ABSTRACT x

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 5
1.3 Hipotez 5

BÖLÜM 2

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN BÖLGELER 6

2.1 Giriş 6
2.2 Temel Tanımlar ve Sonuçlar 6
2.3 R' den Türetilen Halkaların Özellikleri 17

BÖLÜM 3

BİRİMLİ TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN HALKALAR 26

3.1 Giriş 26
3.2 Birimli Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halkanın Tanımı 26
3.3 Esas İdeal Halkaları 33
3.4 Pseudo- Bölgeler 35

BÖLÜM 4

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN MODÜLLER 40

4.1 Giriş 40
4.2 Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Modüllerin Tanımı 40

BÖLÜM 5

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN MODÜLLERİN DİREKT TOPLAMI 49

5.1 Giriş 49
5.2 Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Modüllerin Direkt Toplamı 49

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 61

KAYNAKLAR 62

ÖZGEÇMİŞ 63

SİMGE LİSTESİ

$a \mid b$	a böler b
$a \nmid b$	a bölmez b
$a \sim b$	a ilgilidir b
(a,b)	a ve b elemanlarının en büyük ortak böleni
$[a,b]$	a ve b elemanlarının en küçük ortak katı
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\oplus$	Direkt Toplam
$\times$	Kartezyen çarpım

KISALTMA LİSTESİ

EİB	Esas İdeal Bölgesi
EİH	Esas İdeal Halkası
TÇAB	Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Bölge
TÇH	Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halka
TÇM	Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Modül
TÇPB	Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halka Olan Pseudo Bölge

ÖZET

DEĞİŞMELİ HALKALARDA ÇARPANLARA AYRILIŞ VE MODÜLLER

Büşra GÜLLE

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murat ALAN

Değişmeli halkalarda çarpanlara ayrılış ve modüller adlı tez altı bölümden oluşmaktadır. Bu bölümler sırasıyla giriş, tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgeler, tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalar, tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüller, tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüllerin direkt toplamı, sonuç ve öneriler kısımlarıdır.

Birinci bölüm giriş kısmı için ayrılmıştır.

İkinci ve üçüncü bölümde tez çalışması için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde tek türlü çarpanlarına ayrılış kavramı bir bölge üzerinde incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise tek türlü çarpanlarına ayrılış kavramı bölge olmayan sıfır bölenli değişmeli halkalar üzerinde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise tek türlü çarpanlarına ayrılış öncelikle serbest burulmalı modüller üzerinde incelenmiştir ve daha sonra serbest burulmalı olmayan modüller üzerinde incelenmiştir. Halkalardaki bazı özellikler serbest burulmalı olmayan modüller üzerinde çalışılmıştır.

Beşinci bölümde özellikle tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüllerin direkt toplamları incelenmiştir. Bazı modüllerin indirgenemez elemanları incelenmiştir.

Altıncı bölüm sonuç ve öneriler kısmı için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgeler, tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkalar, tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüller, U-ayrışım, tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüllerin direkt toplamı

ABSTRACT

FACTORIZATION IN COMMUTATIVE RINGS AND MODULES

Büşra GÜLLE

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Murat ALAN

This thesis with the title “Factorization in Commutative Rings and Modules” consists of six chapters. These chapters are introduction, unique factorization domains, unique factorization rings, unique factorization modules, the direct sum of unique factorization modules, results and discussion respectively.

The first part is separated for the introduction.

In the second and third part, some basic definitions and theorems are given necessary for thesis work.

In the second part, the notion of unique factorization is studied over domain.

In the third part, the notion of unique factorization is studied over commutative rings with zero divisor which are not domain.

In the fourth part, the notion of unique factorization is studied over torsion free modules and then the notion is studied over non torsion free modules. Some properties in the rings have been worked over non torsion free modules.

In the fifth part, especially, the direct sums of unique factorization modules are studied. The irreducible elements of some modules are examined.

In the sixth part is separated for results and discussion.

Keywords: Unique factorization domains, unique factorization rings, unique factorization modules, U-decomposition, the direct sums of unique factorization modules

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Serbest burulmalı modüllerde çarpanlara ayrılışı ilk olarak Nicolas [1]'deki çalışmasında incelemiştir. R bir tamlık bölgesi ve M sıfırdan farklı olmak üzere bir serbest burulmalı $R-$ modül olsun. Eğer

(1) M bir atomik,

(2) p, R'de indirgenemez ise p, R'de asal ve

(3) M'nin her ilkel elemanı süper ilkeldir şeklinde ise o zaman M bir çarpanlarına ayrılışa sahiptir şeklinde Nicolas [1]' deki çalışmasında tanımlamıştır .

M bir çarpanlarına ayrılışa sahip ise R'nin bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir bölge olduğunu göstermiştir. M bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modül ise ve eğer $a_i, b_j \in R$'de atom olmak üzere

$$a_1 ... a_n = b_1 ... b_m \Rightarrow n = m \qquad (1.1)$$

ve tekrar bir sıralamadan sonra a_i ile b_i ilgilidir. Ancak R'nin bir atomik olduğunu gösterememiştir. Anderson ve Leon tarafından verilen [2]' deki Teorem 4.4' te R'nin bir atomik olduğu gösterilmiştir. Bu da çarpanlarına ayrılabilen bir modül ile tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modülün denk olduğunu gösterir.

1976 yılında D. L. Costa [3]' teki çalışmasında tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge üzerinde serbest burulmalı modülleri en küçük çarpanlarına ayrılabilen modülleri

içerdiğini kabul edip inceleme yapmıştır ve simetrik cebirlerin çarpanlarına ayrılabilmelerini incelemiştir.

1977 yılında Chin-Pi Lu tarafından verilen [4]' teki çalışmasında çarpanlarına ayrılabilen modüllerin tanımını ve bu kavramla ilişkili olan kavramların özelliklerinin çalışmasını yapmıştır. Nicolas tarafından verilen [1]' deki tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge kavramını serbest burulmalı modüller için genelleştirmiş ve çarpanlarına ayrılabilen modüller olarak tanımlamıştır. Lu tarafından verilen [4]' teki Teorem 2.1 çarpanlarına ayrılabilen modüllerin ana teoremidir.

Eğer $m \mid m'$ ve m, m' ile ilgili değil ise o zaman m'ye m''nün öz çarpanı olarak yani $0 \neq m \in M$'nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşulun

$a \in R$ ve $m' \in M$ için $m = am$ iken $a \in U$

şeklinde Lu [4]' teki çalışmasında Tanım 1.1' de tanımlamıştır.

$0 \neq a \in R$ ve $m' \in M$ için $m \mid am'$ iken $m \mid m'$ ise o zaman $0 \neq m \in M$'ye ilkel eleman şeklinde Lu [4]' teki çalışmasında Tanım 1.2' de tanımlamıştır.

Lu tarafından verilen [4]' teki Tanım 1.4'de R bir tamlık bölgesi ve M sıfırdan farklı olmak üzere bir serbest burulmalı $R-$ modül eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa M bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür veya çarpanlarına ayrılabilen bir modül olarak tanıtılmıştır.

(1) $x \in M$'nin sıfırdan farklı her elemanı indirgenemez çarpanlarına ayrılışa sahiptir yani $a_1, a_2, ..., a_n \in R$'de indirgenemez ve $m \in M$'de indirgenemezdir.

(2) Eğer $x \in M$'nin iki indirgenemez çarpanlarına ayrılışı

$$x = a_1 a_2 ... a_n m = b_1 b_2 ... b_k m' \qquad (1.2)$$

ise o zaman $n = k, m \sim m' \in M$'de ve b_i'lerin yeniden bir sıralanmasından sonra $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için R'de $a_i \sim b_i$'dir.

Lu tarafından verilen [4]' teki Sonuç 2.5' te $\{M_i \mid i \in I\}$ tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir bölge olan R üzerinde bir tamlık bölgesi iken aşağıdaki durumların serbest burulmalı modüller için denk olduğunu göstermiştir.

(1) $\prod_{i\in I} M_i$, R üzerinde çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür.

(2) $\oplus_{i\in I} M_i$, R üzerinde çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür.

(3) Her bir M_i, R üzerinde çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür.

1997 yılında Anderson ve Leon tarafından verilen [2]' deki çalışmalarında R bir tamlık bölgesi ve M sıfırdan farklı olmak üzere bir serbest burulmalı $R-$ modül şeklinde ele almışlardır.

Rm, M'nin maksimal devirli alt modülü ise $0 \neq m \in M$ ilkeldir. Eğer $a,b \in R$ için $bm = an$ ve $n \in M$ iken $a \mid b$ ise o zaman $0 \neq m \in M$ süper ilkeldir.

$m \text{ bir süper ilkeldir} \Leftrightarrow Km \cap M = Rm \Leftrightarrow 0 \neq a \in R \text{ ve } n \in M \text{ için } an \in Rm \Rightarrow n \in Rm' dir.$

$0 \neq m \in M$, bazı $a \in R$ için $m = an$ ve ilkel $n \in M$ ise M bir ilkel atomiktir.

R bir tamlık bölgesi ve M sıfırdan farklı olmak üzere bir serbest burulmalı $R-$ modül olsun. O zaman Anderson ve Leon tarafından verilen [2]' deki Teorem 4.2' ye göre aşağıdaki koşullar denktir.

M bir (ilkel, $R-$ izomorfik) bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür.

M bir (süper ilkel, $R-$ izomorfik) bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür.

M bir ilkel-atomik ve M'nin her ilkel elemanı süper ilkeldir.

M bir süper ilkel-atomiktir.

R bir tamlık bölgesi ve M sıfırdan farklı olmak üzere bir serbest burulmalı $R-$ modül olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir. Eğer M, Anderson ve Leon tarafından verilen [2]' deki Teorem 4.2'yi sağlarsa çarpanlarına ayrılabilirdir. Aynı şekilde Anderson ve Leon tarafından verilen [2]'deki Tanım 4.3'te eğer M bir ((indirgenemez,ilkel), $R-$ izomorfik) tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modül (sırasıyla,((indirgenemez, süper ilkel), $R-$ izomorfik) tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modül ise M bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür. (sırasıyla, çarpanlarına ayrılabilen bir modül)

2011 yılında Nikseresht ve Azizi [5]'deki çalışmasında modüllerde çarpanlarına ayrılışın bazı özellikleri ile sonuçlarını incelemişlerdir ve modüllerin sıfırlayıcısı ve polinom modülleri üzerinde çalışmışlardır.

$A=$ {indirgenemez, kuvvetli indirgenemez, çok kuvvetli indirgenemez} ve

$B=$ {ilkel, kuvvetli ilkel, çok kuvvetli ilkel} şeklinde belirlemiştir.

$\alpha \in A, \beta \in B, m \in M$ olsun. $m=an$'nin çarpanlarına ayrılışını eğer n, β ise $\beta-$çarpanlarına ayrılışı olarak tanımlamıştır ve eğer her a_i, α ve n, β ise $m=a_1 a_2 ... a_k n$'nin tüm çarpanlarına ayrılışını (α, β)- çarpanlarına ayrılışı olarak tanımlamıştır. Eğer $0 \neq m \in M$, $\beta-$çarpanlarına ayrılışa sahip ise o zaman M'ye $\beta-$atomik demiştir.

2015 yılında Gerhard Angermüller [6]'daki çalışmasında serbest burulmalı modüller üzerinde çalışmıştır. [6]' daki çalışmasında Tanım 3.1' de şu şekilde göstermiştir. $x \in M$ olsun.

Eğer bazı $y \in M$ için $x=ry$ ise $r \in R$'ye x'in bir $R-$böleni denir ve eğer x'in bir $R-$böleni $r \in R$'yi bölerse $r \in R$'ye x'in bir en büyük $R-$böleni denir.

Eğer x'in bir $R-$böleni R'de birimsel ise x'e indirgenemez eleman denir.

Eğer $x \neq 0$ ve x, Rx'in sıfırdan farklı bir en küçük $M-$böleni ise x'e ilkel eleman denir.

M'nin sıfırdan farklı herhangi bir elemanı en küçük bir $M-$bölene sahipse M'ye çarpanlarına ayrılabilir denir.

Gerhard Angermüller tarafından verilen [6]' daki çalışmasında Önerme 3.4 ve Önerme 3.5' de çarpanlarına ayrılabilme ile ilgili bazı denk koşullar verilmiştir.

Gerhard Angermüller tarafından verilen [6]' daki çalışmasında Tanım 4.1' de eğer $M \neq 0$ ve M'nin sıfırdan farklı her x elemanı

$$x=r_1 ... r_n y \tag{1.3}$$

şeklinde çarpanlarına ayrılışı $r_i \in R$'de ve $y \in M$'de indirgenemez ve eğer

$$x=s_1 ... s_m z \tag{1.4}$$

bir diğer çarpanlarına ayrılışı $s_i \in R$'de ve $z \in M$'de indirgenemez ise o zaman $n = m$ ve $r_i = u_i s_{\sigma(i)}$ olacak şekilde $u_i \in R^*$ birimselleri ve $\{1,\ldots,n\}$'ye σ permütasyonu ve $y = uz$ olacak şekilde $u \in R^*$ birimseli varsa o zaman M'ye çarpanlarına ayrılabilen bir modül denir.

Gerhard Angermüller tarafından verilen [6]'daki çalışmasında Önerme 4.2' de çarpanlarına ayrılabilen modüller ile ilgili bazı denk koşullar vermiştir.

Gerhard Angermüller tarafından verilen [6]'daki çalışmasında Önerme 4.8'de direkt toplam ve direkt çarpım modüllerinin çarpanlarına ayrılabilme ile ilgili denk koşullarını vermiştir.

2016 yılında M. Alan ve E. Özbulur' un [7]' deki "On Unique Factorization Modules" çalışmalarında serbest burulmalı olmayan modüller üzerinde çalışmışlardır.

1.2 Tezin Amacı

Tek türlü çarpanlarına ayrılabilme kavramı serbest burulmalı modüllerde daha çok incelenmiştir ve bu yüzden serbest burulmalı olmayan modüllerde tek türlü çarpanlarına ayrılabilme kavramı incelenerek bazı özelliklere aktarılacaktır.

1.3 Hipotez

Özel olarak $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_n$'ler ve $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$'lerin indirgenemez elemanları incelenip ve serbest burulmalı olmayan herhangi iki modülün direkt çarpımlarının indirgenemez elemanları incelenmiştir. Böylece serbest burulmalı olmayan tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüllerin direkt toplamlarının tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül olduğunu göstermek amaçlanmıştır.

BÖLÜM 2

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN BÖLGELER

Bu bölümde R bir tamlık bölgesidir ve $R^* = R - \{0\}$ şeklindedir.

2.1 Giriş

Bu bölümde tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge (TÇAB) tanımı için bazı tanımlar verilecektir ve bu tanımdan bazı temel sonuçlar ispatlanmıştır. Bir R halkasının türetilmiş halkaları olan; $R[x]$ polinom halkası, $R[[x]]$ kuvvet serileri halkası, R^* halkasının S çarpımsal kapalı alt kümesine göre R_S kesir halkası ve R'nin esas ideali olan $P(\neq R)$ için R/P kesir halkaları ile ilgileneceğiz. Burada R bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge (TÇAB) iken R halkasının türetilmiş halkalarının TÇAB olup olmadığı incelenecektir. Kaynaklar kısmındaki [2], [8], [9], [10] ve [11]' deki çalışmalardan yararlanılmıştır.

2.2 Temel Tanımlar ve Sonuçlar

Bu kısımda tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgenin tanımını vereceğiz ve bunun için bazı önemli tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 $a, b \in R^*$ olsun.

(i) Eğer $d \mid a$ ile $d \mid b$ ve a ile b'nin diğer ortak bölenleri d'yi bölerse $d \in R$'ye en büyük ortak bölen (ebob) denir.

(ii) Eğer $a \mid c$ ile $b \mid c$ ve c, hem a hem de b ile bölünebilen R'nin her elemanını bölerse $c \in R$'ye en küçük ortak kat (ekok) denir.

d'yi (a,b) ile c'yi $[a,b]$ ile göstereceğiz. Açıkça ebob veya ekok mevcutsa ilgililik bakımından tek türlüdür.

Önerme 2.2 (i) $(a)\cap(b)=(c)$ olması için gerek ve yeter koşul $a,b\in R^*$ için $c=[a,b]$ olmasıdır.

(ii) Eğer $(a)+(b)=(d)$ ise o zaman $a,b\in R^*$ için $d=(a,b)$'dir.

(iii) Eğer $[a,b]$ mevcutsa (a,b) vardır ancak tersi doğru değildir.

İspat (i) $(a)\cap(b)=(c)$ olsun. c'nin a ile b'nin ekok'u olduğunu göstermemiz gereklidir. Eğer

$(c)\subseteq(a)$ ve $(c)\subseteq(b)$ ise $a\mid c$ ve $b\mid c$'dir.

Dolayısıyla c, a ile b'nin ortak katıdır.

Şimdi de x, a ile b'nin bir başka ortak katı olsun. O zaman

$a\mid x$ ve $b\mid x$ ise $(x)\subseteq(a)$ ve $(x)\subseteq(b)\Rightarrow(x)\subseteq(a)\cap(b)=(c)\Rightarrow c\mid x$

elde edilir. Böylece c, en küçük ortak kat olur yani $c=[a,b]$'dir.

Tersine, $c=[a,b]$ ve $x\in(a)\cap(b)$ olsun. Eğer $x\in(a)$ ve $x\in(b)$ ise $k,l\in R$ için

$x=ak$ ve $x=bl$

elde edilir. $a\mid x$ ve $b\mid x$ ise x, a ile b'nin bir ortak katıdır. c ekok olduğundan $c\mid x$'dir. Buradan $y\in R$ için $x=cy$ yazılabilir ve $x\in(c)$ olur.

$x\in(a)\cap(b)$ iken $x\in(c)$

oldu. O zaman

$$(a)\cap(b)\subseteq(c) \qquad (2.1)$$

olur.

Şimdi de $x\in(c)$ olsun ve böylece $x=cy$ olur. c ekok olduğundan $a\mid c$ ve $b\mid c$ yazılabilir. Buradan

$c=ak$ ve $c=bl$

olur.

$x = cy = aky$ ve $x = cy = bly$

yazılır. Böylece

$x \in (a)$ ve $x \in (b) \Rightarrow x \in (a) \cap (b)$

elde edilir.

$x \in (c)$ iken $x \in (a) \cap (b)$

elde edilir. O zaman

$$(c) \subseteq (a) \cap (b) \tag{2.2}$$

olur. Sonuç olarak

$$(a) \cap (b) = (c) \tag{2.3}$$

elde edilir.

(ii) $(a) + (b) = (d)$ olsun ve d'nin a ile b'nin ortak böleni olduğunu gösterelim.

$(a) \subseteq (d)$ ve $(b) \subseteq (d)$ ise $d \mid a$ ve $d \mid b$

olur. Buradan d bir ortak bölen olur.

Şimdi de d'nin ebob olduğunu gösterelim. e' de bir başka ortak bölen olsun.

$e \mid a$ ve $e \mid b$ ise $(a) \subseteq (e)$ ve $(b) \subseteq (e)$

olur ve (e) toplamaya göre kapalı olduğundan

$(a) + (b) \subseteq (e) \Rightarrow (d) \subseteq (e) \Rightarrow e \mid d$

elde edilir ve dolayısıyla d ebob olur.

(iii) $[a,b] = c$ olduğunu kabul edelim ve $d = ab/c \in R^*$ olsun. $[a,b] = c$ olduğundan

(i)' den $(a) \cap (b) = (c)$' dir.

$(c) \subseteq (a) \cap (b) \Rightarrow (c) \subseteq (a)$ ve $(c) \subseteq (b) \Rightarrow a \mid c$ ve $b \mid c \Rightarrow c = ax$ ve $c = by$

elde edilir. $d = ab/c$ olduğundan

$$d = ab/ax \tag{2.4}$$

yazılır ve buradan

$dx = b \Rightarrow d \mid b$ (2.5)

elde edilir ve benzer şekilde

$d = ab/by$ (2.6)

yazılır ve buradan

$dy = a \Rightarrow d \mid a$ (2.7)

elde edilir. O zaman d bir ortak bölen olur.

Şimdi de d' başka bir ortak bölen olsun. $k,l \in R$ için $d' \mid a$ ve $d' \mid b$ olduğunu kabul edelim yani

$a = d'k$ ve $b = d'l$

şeklinde yazılsın. $a = d'k$ ve $b = d'l$ ifadelerini sırasıyla l ve k ile çarparsak

$al = d'kl$ ve $bk = d'kl$

yazılır ve buradan

$al = bk$ (2.8)

elde edilir.

$al = bk \in (a)$ ve $al = bk \in (b)$

olduğundan $r \in R$ için

$r = al \in (a)$ ve $r = bk \in (b)$'dir.

Dolayısıyla

$r \in (a) \cap (b) = (c) \Rightarrow r \in (c)$'dir

ve $t \in R$ için $r = ct$ ve böylece

$al = bk = ct$ (2.9)

olur. O zaman

$d = ab/c = ad'l/c = d'ct/c = d't \Rightarrow d' \mid d$

ve böylece

$d = (a, b)$ (2.10)

elde edilir.

Ancak Önerme 2.2 (iii)'nin tersi doğru değildir ve Örnek 2.3' de gösterilmiştir.

Örnek 2.3 A bir tamlık bölgesi olsun ve $\mathbb{Z}$ üzerindeki x'in katsayıları çift olan polinomların elemanlarından oluşsun. Yani

$$R = \{a_0 + 2a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$$

şeklindedir.

O zaman $(2, 2x) = 1$'dir ancak $[2, 2x]$ mevcut değildir.

Tanım 2.4 (i) $a, b \in R^*$ için $p = ab$ iken a veya b birimsel ise birimselden farklı $p \in R^*$ elemanına indirgenemez eleman denir.

(ii) $p \mid ab$ iken $p \mid a$ veya $p \mid b$ ise birimselden farklı $p \in R^*$ elemanına asal eleman denir.

Açıkça her asal eleman indirgenemezdir. Tersi için R, bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge (TÇAB) iken sağlandığını göstereceğiz.

Tanım 2.5 Aşağıdaki iki özelliği sağlayan R'ye tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge (TÇAB) denir.

TÇAB1 : R^*'ın birimselden farklı her elemanı indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılır.

TÇAB2 : Eğer

$r = p_1...p_n = q_1...q_m$,

$r \in R^*$'ın iki indirgenemez ayrışımlarıysa o zaman $m = n$ ve $i = 1, ..., n$ için p_i ile q_i, q'ların uygun bir numaralandırılmasından sonra ilgilidir.

Örnek 2.6 $\mathbb{Z}$ bir TÇAB' dir.

Örnek 2.7 $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ Gauss tam sayılar bölgesi bir TÇAB' dir.

Örnek 2.8 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]=\{a+bi\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\}$ bir tamlık bölgesidir ancak bir TÇAB değildir. Çünkü $6\in\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$' in iki indirgenemez ayrışımı

$$6=2.3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

şeklindedir uzunlukları eşittir ancak

$$2\neq(1+\sqrt{-5}),\ 3\neq(1+\sqrt{-5})$$

iki indirgenemez ayrışımı ilgili olmadığından TÇAB2' yi sağlamaz ve TÇAB değildir.

Örnek 2.9 $R=\{a_0+2a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,\ a_i\in\mathbb{Z}\}$ bir TÇAB değildir. Çünkü

$$x^6=x^2x^2x^2=x^3x^3$$

şeklinde iki indirgenemez ayrışıma sahiptir ancak $x^2\nmid x^3$ olduğundan x^2 ile x^3 ilgili değildir dolayısıyla TÇAB2' yi sağlamaz ve TÇAB değildir.

Teorem 2.10 Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R bir TÇAB'dir.

(ii) R, TÇAB1' i sağlar ve herhangi iki esas idealin kesişimi esas idealdir. (R^*' ın herhangi iki elemanı bir ekok' a sahiptir.)

(iii) R, TÇAB1' i sağlar ve R^*' ın herhangi iki elemanı bir ebob'a sahiptir.

(iv) R, TÇAB1' i sağlar ve her indirgenemez eleman asaldır.

İspat (i) $\Rightarrow$ **(ii)** $(a)\cap(b)=I$ olduğunu kabul edelim.

$a=0$ olduğundan $I=(0)$'dır.

$a,b\neq0$ olduğunu kabul edelim. $0\neq x\in I$ alalım.

O zaman

$x\in(a)$ ve $x\in(b)$'dir

ve $k,l\in R$ için

$x=ak$ ve $x=bl$

elde edilir. x' in

$p_1^{\alpha_1}...p_n^{\alpha_n}$

şeklinde indirgenemez ayrışımı olmak üzere $0 \neq x \in I$ alalım.

a ve b'nin

$a = q_1...q_m$ ve $b = r_1...r_s$

şeklinde indirgenemez ayrışımlarının olduğunu kabul edelim.

$ak = x = bl$

olduğundan

$q_1...q_m k = p_1^{\alpha_1}...p_n^{\alpha_n} = r_1...r_s l$

elde edilir. R, TÇAB2' den dolayı u ile v birimseller ve $0 \leq \gamma_i, \beta_i \leq \alpha_i$ olmak üzere

$q_1...q_m = up_1^{\gamma_1}...p_n^{\gamma_n}$, $r_1...r_s = vp_1^{\beta_1}...p_n^{\beta_n}$

elde edilir.

$\sigma_i = maks\{\gamma_i, \beta_i\} \leq \alpha_i$ olmak üzere

$c = p_1^{\sigma_1}...p_n^{\sigma_n}$

yazalım.

$c = ap_i^{\sigma_i - \gamma_i}$ ve $c = ap_i^{\sigma_i - \beta_i}$'dir.

O zaman $c \mid x$ ve $x \in (c)$ olur. $x \in I$ iken $x \in (c)$ elde edildi. Böylece $I \subset (c)$'dır. Ayrıca c'nin tanımından $c \in (a)$ ve $c \in (b)$ yazarız ve böylece $c \in I$'dır. Bu da

$I = (c)$

olduğunu gösterir.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Önerme 2.2(iii)' den elde edilir.

Yani iki esas idealin kesişimi esas olduğundan Önerme 2.2(i)' den iki sayının ekok' u mevcuttur ve ekok mevcutsa ebob vardır.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** p'nin R'de indirgenemez olduğunu kabul edelim ve $p \mid ab$ yani $ab \in (p)$ olsun.

$a = 0$ ise $a \in (p)$' dir ve dolayısıyla $p \mid ab$ olur. Bu yüzden $a, b \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$$p \mid a,\ p \mid ab,\ p \mid ap$$

olduğundan p bir ortak bölendir. Bu nedenle (ap, ab) mevcuttur ve d olsun. O zaman $k, l \in R^*$ için

$$ap = dk,\ ab = dl \Rightarrow a \mid d$$ 'dir

ve a bir ortak bölen olur. $s \in R^*$ için $d = as$ yazılır ve benzer şekilde p bir ortak bölen olduğundan o zaman $p \mid d$'dir ve $r \in R^*$ için

$$d = pr$$

yazılır.

$$ap = dk$$

ifadesinde $d = as$ yazılırsa

$$ap = ask \Rightarrow p = sk$$

elde edilir. p indirgenemez eleman olduğundan s veya k birimseldir.

Eğer s birimsel ise o zaman

$$d = pr = as \Rightarrow a = prs^{-1} \in (p) \Rightarrow p \mid a$$'dır.

Eğer k birimsel ise o zaman

$$ab = dl \Rightarrow ab = asl \Rightarrow b = sl \Rightarrow b = pk^{-1}l \in (p) \Rightarrow p \mid b$$'dir.

Böylece p bir asaldır.

(iv) $\Rightarrow$ **(i)** Ayrışımın uzunluğunu tümevarım kullanarak tekliğini gösterelim.

Uzunluğu 1 olanlar için açıkça tektir. $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $m \geq n$ iken r'nin iki indirgenemez ayrışımı

$$r = p_1 \ldots p_n = q_1 \ldots q_m$$

olsun. p_1 asal olduğundan ve $p_1 \mid q_1 \ldots q_m$, bazı $i = 1, \ldots, m$ için

$p_1 \mid q_i$

elde edilir ve böylece $p_1 \mid q_1$ olsun. O zaman p_1 ve q_1 ilgilidir.

Örnek 2.11 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + bi\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$'de 3 bir indirgenemezdir ancak asal değildir.

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$3 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) = (a - b\sqrt{-5})(c - d\sqrt{-5})$$

şeklinde yazılabilir.

$$9 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$$

ise

$a = \pm 3,\ b = 0$ ve $c = \pm 1,\ d = 0$

elde edilir.

$$3 = (3 + 0\sqrt{-5})(1 + 0\sqrt{-5})$$

şeklinde yazılır ve $(1 + 0\sqrt{-5})$ birimsel olduğundan 3 bir indirgenemez elemandır.

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + bi\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$'de 3 elemanının asal olduğunu kabul edelim.

$3 \mid 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \Rightarrow 3 \mid (1 + \sqrt{-5})$ veya $3 \mid (1 - \sqrt{-5})$'dir

ancak

$$(1 + \sqrt{-5}) = 3(x + y\sqrt{-5}) \text{ için } x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$$

bulunamaz. Dolayısıyla asal değildir.

Teorem 2.12 Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R bir TÇAB'dir.

(ii) R^*'ın birimselden farklı her elemanı asalların çarpımı şeklinde yazılır.

(iii) Sıfırdan farklı her asal ideal $(\neq R)$ sıfırdan farklı esas asal ideal içerir.

İspat (i) $\Rightarrow$(ii) $\Rightarrow$(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$(i) şeklinde göstereceğiz.

(i) $\Rightarrow$**(ii)** Teorem 2.10 (iv)' den elde edilir.

Yani R bir TÇAB olduğundan TÇAB1' i sağlar ve her indirgenemez eleman asaldır. TÇAB1, R^*'ın birimselden farklı her elemanı indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılır ve her indirgenemez eleman asal olduğundan dolayısıyla asalların çarpımı şeklinde yazılır.

(ii) $\Rightarrow$**(iii)** $P(\neq R)$, R'nin sıfırdan farklı asal ideali olsun. R^*'ın her elemanı p_i'ler asal olmak üzere

$$a = p_1 \ldots p_n$$

asalların çarpımı şeklinde yazılabileceğinden $a \in P$ vardır. Böylece bazı i için $p_i \in P$ ve $(p_i) \subseteq P$' dir.

(iii) $\Rightarrow$ **(ii)** S asalların ve birimsellerin sonlu çarpımlarının kümesi olsun. O zaman S çarpımsal kapalı bir alt kümedir ve doymuştur. (Yani $a,b \in S$ iken $a \in S$ ve $b \in S$' dir).

$$ab = p_1 \ldots p_n$$

şeklinde asalların çarpımı olarak yazıldığını kabul edelim ve o zaman $p_1 \mid a$ olduğu söylenebilir ve $a = p_1 k$'dır ve

$$p_1 kb = p_1 p_2 \ldots p_n$$

yazılır. Bu nedenle

$$kb = p_2 \ldots p_n$$

ve tümevarım yapılırsa $a,b \in S$ sonucu çıkar.

$S = R^*$ olduğunu göstermemiz gereklidir. $S \neq R^*$ olduğunu kabul edelim. $0 \neq a \notin S$ mevcuttur. S doymuş olduğundan $(a) \cap S = \varnothing$'dir. Çünkü

$x \in (a) \cap S = \varnothing \Rightarrow x \in (a)$ ve $x \in S \Rightarrow x = ac \in S$'dir

ancak $a \notin S$'dir ve bu bir çelişkidir. Bütün ideallerin kümesi ile S'nin kesişimlerinin kesişimi tümevarımsaldır ve $\varnothing$'dir. Zorn lemmasından bu özelliği sağlayan bir I maksimal ideali vardır. I, R'de maksimal ideal olduğundan asaldır.

$x, y \notin I$ olduğunu kabul edelim.

$(I, x) \cap S \neq \varnothing$

olur ve $s_1 \in S,\ i_1 \in I$ için

$s_1 = i_1 + xr_1$' dir.

Benzer şekilde

$s_2 = i_2 + yr_2$' dir.

Bu nedenle

$s_1 s_2 = i_1 s_2 + xr_1 i_2 + xr_1 yr_2$' dir

ve böylece $xy \notin I$'dır. Hipotezden $(p) \subseteq I$ olacak şekilde bir p asalı mevcuttur. O zaman $p \notin S$ ile bir çelişkidir. $S = R^*$'dır.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)** R bir tamlık bölgesi olduğundan her asal indirgenemezdir. Asalların çarpımı şeklinde yazılabileceğinden indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılır ve TÇAB1 sağlanır.

q, R' de bir indirgenemez olsun. O zaman hipotezden p_i asal olmak üzere

$q = p_1 \cdots p_n$

asalların çarpımı şeklinde yazılır. Bu nedenle q ve p_1 ilgilidir denir ve

$p_2, \ldots, p_n$

birimsellerdir. $n = 1$ iken $q = p_1$'dir ve böylece Teorem 2.10 'dan R bir TÇAB'dir.

2.3 R' den Türetilen Halkaların Özellikleri

Burada polinom halkası, kuvvet serileri halkası, kesir halkası ve bölüm halkası ile ilgileneceğiz. Verilen halka TÇAB özelliğine sahipse türetilmiş halkaların bu özelliği sağlayıp sağlamadığını belirleyeceğiz.

Teorem 2.13 R bir TÇAB ise o zaman $R[x]$ polinom halkasıda bir TÇAB'dir.

İspat Teorem 2.13' ün ispatı Teorem 2.18' in altındaki Sonuç 2.19' da verilecektir.

Teorem 2.14 R bir TÇAB ise o zaman $R[[x]]$ kuvvet serisi halkasıda bir TÇAB olmak zorunda değildir.

İspat Samuel [9]'da göstermiştir.

R bir esas ideal bölgesi (EİB) olması halinde Cohen'in sonucunun genelleştirilmesi ile aşağıdaki sonuca sahip oluruz.

Teorem 2.15 R bir EİB ise o zaman $R[[x]]$ kuvvet serisi halkasıda bir TÇAB'dir.

İspat Teorem 2.12' yi kullanacağız. Yani her asal ideal bir asal eleman içerir.

P, $R[[x]]$' de sıfırdan farklı bir asal ideal olsun.

$\psi : R[[x]] \to R'$ ye $\psi(a_0 + ...) = a_0$

olacak şekilde bir halka homomorfizmasını düşünelim.

O zaman

$Ker\psi = (x)$ ve $R[[x]]/(x) \cong R'$dir.

R bir tamlık bölgesi olduğundan (x), $R[[x]]$' in bir asal idealidir.

$x \notin P$ olsun. (Aksi takdirde (x) bir esas asaldır). $\psi(P) = (\alpha)$ ve bazı $f \in P$ için $\alpha = \psi(f)$ olsun. P asal ideal olduğu için görüntüsüde esas asal ideal olur.

Şimdi $P = (f)$ olduğunu gösterelim.

$(f) \subseteq P'$ dir.

$P \subseteq (f)$ olduğunu gösterelim.

$g \in P$ ve

$g = a + \ldots$

olduğunu kabul edelim.

$\psi(g) = (\alpha)$ olduğundan

$\psi(g) = a \in (\alpha) \Rightarrow a = k\alpha$ ' dır.

$f \in P$ olduğundan

$f = \alpha + \ldots$

şeklindedir ve

$$g - kf = a - k\alpha + x + x^2 + \ldots = x + x^2 + \ldots = x(1 + x + \ldots) = xh$$

elde edilir. Bu nedenle

$a = k\alpha$ ve $g - kf = xh \in P$ 'dir.

P asal ideal olduğundan

$hx \in P \Rightarrow x \in P$ veya $h \in P$ ' dir.

$x \notin P$ kabul ettiğimizden dolayı $h \in P$ 'dir.

Eğer

$h = b + \ldots$

ise o zaman

$b = l\alpha$ 'dır

ve

$$h - lf = b - l\alpha + x + x^2 + \ldots = x + x^2 + \ldots = x(1 + x + \ldots) = xm \in P$$

olur ve

$g - kf = xh \in P$

olduğundan

$g - kf = x(lf + xm) = xlf + x^2 m$ yani $g - (k + lx) f = x^2 m$ 'dir.

Sonsuza kadar devam edilirse g , f 'in terimleri şeklinde yazılır.

O zaman $g \in (f)$' dir.

$g \in P$ iken $g \in (f)$ elde edildi. Buradan $P \subseteq (f)$ olur. $(f) \subseteq P$ ve $P \subseteq (f)$' den

$$P = (f) \tag{2.11}$$

elde edilir.

Tanım 2.16 Eğer S, R^*'ın çarpımsal kapalı alt kümesi ise o zaman

$$R_S = \{a/s : a \in R, s \in S\}$$

olarak yazarız. Bu yine bir halkadır ve $K = R_{R^*}$ kesir cisminin bir alt halkasıdır.

R_S'yi kesir halkası olarak adlandırırız.

Teorem 2.17 R bir TÇAB ve S, R^*'ın çarpımsal kapalı alt kümesi ise R_S bir TÇAB'dir.

İspat Eğer p, R'de indirgenemez (ve ayrıca asal) ve p/s birimselden farklı ise o zaman p/s'nin R_S'de asal olduğunu ispatlayacağız.

$p/s \mid a/s_1 b/s_2$ olduğunu kabul edelim.

$$\frac{a}{s_1}\frac{b}{s_2} = \frac{p}{s}\frac{k}{s_3} \Rightarrow abss_3 = pks_1s_2 \Rightarrow abs' = pks_1s_2$$

yazılabilir. Bu nedenle $p \mid s'ab$ ve p asal olduğundan

$p \mid s'$ veya $p \mid a$'dır.

p/s birimselden farklı olduğundan $p \nmid s'$'dir.

Böylece

$p \mid a \Rightarrow p/s \mid a/s_1 \Rightarrow p/s$ asaldır.

O zaman ss/t, R_S'de birimsel olduğundan

$$ps/t = p/s\ ss/t \tag{2.12}$$

asaldır.

Birimselden ve sıfırdan farklı $a/s \in R_S$ (ve böylece $a \in R$ birimselden ve sıfırdan farklı) için,

$a = p_1 ... p_n$;

$a \in R$'nin bir indirgenemez ayrışımı olsun. Bu nedenle

$a / s = p_1 / s \; p_2 s / s ... p_n s / s$,

$a / s \in R_S$'nin bir asal ayrışımıdır.

Teorem 2.12' den asalların çarpımı şeklinde yazılabildiğinden dolayı R_S bir TÇAB'dir.

Tersi için aşağıdaki sonucu vereceğiz ve Noetherian Bölge için ilk olarak Nagata'nın [11]'deki çalışmasında Nagata tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.18 R, TÇAB1' i sağlasın ve asalların çarpımından oluşan ve R^*'ın çarpımsal kapalı alt kümesi S olsun. R_S bir TÇAB ise o zaman R de bir TÇAB 'dir.

İspat R' deki her indirgenemezin asal olduğunu ispatlayacağız.

p, R'de indirgenemez olsun. O zaman p / s ya indirgenemezdir ya da R_S' de birimseldir.

Eğer p herhangi bir $s \in S$' yi bölerse o zaman p açıkça R_S'de birimseldir. Yani

$$p \mid s \Rightarrow s = px \Rightarrow 1 = \frac{p}{s}\frac{x}{1} \in R_S$$

elde edilir. Buradan $p\dfrac{1}{s}$ birimsel ise p' de R_S'de birimseldir.

Şimdi her $s \in S$ için $p \nmid s$ olduğunu kabul edelim ve R_S'de

$$p/s = a/s_1 \, b/s_2$$

alalım. O zaman

$ps_1 s_2 = sab$'dir.

Hipotezden $s_1 s_2$ ve s asalların çarpımı şeklinde ifade edilebilir.

$s_1 s_2 = q_1 ... q_m$ ve $s = r_1 ... r_n$

olsun.

$pq_1...q_m = abr_1...r_n$ (2.13)

şeklinde yazılır.

r'lerin ve q'ların birer birer iptal edilmesiyle $p = a'b'$ (çünkü $p \nmid s$ ve böylece $i = 1,...,n$ için $r_i \nmid p$) elde edilir.

p, R'de indirgenemez olduğundan ya a' ya da b' birimseldir ve buna göre

a/s_1 veya b/s_2, R_S'de

birimseldir.

Böylece p/s, R_S'de indirgenemezdir.

Şimdi bu iki durumları ayrı ayrı inceleyelim:

(i) p/s, R_S'de indirgenemezdir. R_S bir TÇAB olduğundan p/s, R_S'de asaldır.

Eğer R'de $p \mid ab$ ise (a ve b birimselden farklı olmak üzere) o zaman R_S'de

$p/s \mid a/s\, b/s$'dir.

Böylece p/s, R_S'de a/s'yi böldüğü söylenir.

$k/t \in R_S$ için

$a/s = p/s\, k/t$

olduğunu kabul edelim.

O zaman R'de

$at = pk$'dır.

$t = q_1...q_m$, t'nin bir asal ayrışımı olsun. $i = 1,...,m$ için $q_i \nmid p$ olduğundan

$a = pk'$

elde edilir yani $p \mid a$ ve böylece p, R'de asaldır.

(ii) p/s, R_S'de birimseldir. p bazı $t \in S$'yi böler ve $t = kp$ olsun. Böylece p, t'nin asal çarpanlarının birebir iptal edilmesiyle ilgili olan t'nin bazı asal çarpanları tarafından bölündüğünü elde ederiz. Böylece p asaldır ve R bir TÇAB 'dir.

Teorem 2.18, Teorem 2.13' ün ispatını verir.

Sonuç 2.19 R bir TÇAB ise o zaman $R[x]$ polinom halkasıda bir TÇAB'dir.

İspat R'nin kesir cismi $K = R_{R^*}$'ı ele alalım.

K bir cisim $\Rightarrow K[x]$ bir Öklid Bölgesi $\Rightarrow K[x]$ bir TÇAB' dir.

$K[x] = R[x]_{R^*}$ bir Öklid bölgesidir ve böylece bir TÇAB' dir. R bir TÇAB olduğundan S asalların çarpımı olmak üzere ve Gauss lemmasından

$R[x]_{R^*} = R[x]_S$' dir.

Bu asallar $R[x]$'de asal kalır. Bu nedenle $R[x]$' in TÇAB1'i sağladığını göstermemiz yeterlidir ve bunun için tümevarım kullanacağız. Açıkça $R[x]$'de derecesi sıfır olan birimselden farklı her polinom indirgenemez ayrışıma sahiptir.

$f \in R[x]$, derecesi $n > 0$ ve daha küçük dereceli her polinomun indirgenemez ayrışıma sahip olduğunu kabul edelim. $c \in R$ ve f' ilkel olmak üzere

$$f = cf' \tag{2.14}$$

yazılır ve f' 'nün indirgenemezlerin çarpımı şeklinde yazılabildiğini göstermemiz yeterlidir.

Eğer f' indirgenemez ise o zaman ifade sağlanır.

Aksi takdirde $g, h \in R[x]$ olmak üzere

$$f' = gh \tag{2.15}$$

elde edilir ve f' ilkel olduğundan ikiside sabit değildir. Böylece tümevarım yardımıyla her bir g ve h indirgenemez ayrışıma sahiptir ve böylece f' 'de indirgenemez ayrışıma sahiptir.

Tanım 2.20 Eğer R bir tamlık bölgesi ve $P(\neq R)$, R'nin bir asal ideali ise o zaman R/P bir tamlık bölgesidir.

Örnek 2.21 $\mathbb{Z}$ bir TÇAB olduğundan $\mathbb{Z}[x]$ polinom halkası da bir TÇAB' dir.

Teorem 2.22 R bir TÇAB ise o zaman R/P bir TÇAB olmak zorunda değildir.

İspat Bir sayılabilir örnek verelim.

$R=\mathbb{Z}[x]$ ve $P=(x^2+4)$'ü ele alalım. Burada x^2+4 bir indirgenemez ve Teorem 2.10' dan asaldır ve Teorem 3.17'nin sonucu Sonuç 2.19'dan $\mathbb{Z}$ bir TÇAB olduğundan $\mathbb{Z}[x]$ bir TÇAB' dir. Böylece P bir asal idealdir.

$\bar{f}$, $f\in\mathbb{Z}[x]$'in bir rezidü sınıfı olarak gösterilsin.

$\mathbb{Z}[x]/P=\{ax+b+P \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

şeklindedir.

$\bar{x}$ ve $\bar{2}$ indirgenemez ve ilgili olmamak üzere

$x^2+4+P=P\Rightarrow x^2+P=-4+P=\bar{x}.\bar{x}=(\bar{-2})(\bar{2})$

elde edilir.

Böylece $\mathbb{Z}[x]/(x^2+4)$ bir TÇAB değildir.

R bir TÇAB iken R/P'nin TÇAB olması durumunu aşağıdaki teoremle ispatlayabiliriz.

Teorem 2.23 R bir TÇAB ve R'nin herhangi iki esas idealinin toplamı R'nin esas ideali ise o zaman R/P bir TÇAB'dir.

İspat p, R'de indirgenemez ve $p+P$ sıfırdan ve birimselden farklı olmak üzere

$p+P=(a+P)(b+P)$

olsun. O zaman $k\in P$ için $p=ab+k$ yazarız.

Eğer

$(b)+(k)=(d)$

ise o zaman $p=dl$ ve ya d birimseldir ya da p ile ilgilidir.

Eğer d birimsel ise o zaman $(b)+(k)=R$ ve $b+P$, R/P'de birimsel olmak üzere

$1=bs+kt$'dir.

İkinci durumda

$(b)+(k)=(p)$ ve $p \mid b$ yani $p+P \mid b+P$

elde edilir. Sıfırdan ve birimselden farklı $r+P \in R/P$ alalım. O zaman r, R'nin sıfırdan ve birimselden farklı elemanıdır ve

$r=q_1...q_m$

şeklinde indirgenemez ayrışıma sahiptir.

Birimselleri indirgenemezlere dahil ettikten sonra $r+P$'nin indirgenemez ayrışımı

$r+P=(q_1+P)...(q_m+P)$

şeklindedir. Böylece TÇAB1 sağlanır.

TÇAB2 için R/P'deki her indirgenemezin asal olduğunu göstermeliyiz. p, R'de indirgenemez (ve böylece asal) olmak üzere R/P'de $p+P$ indirgenemezini ele alalım ve

$(a+P)(b+P)=(p+P)(k+P)$

olsun. Bu da $l \in P$ için

$ab=pk+l$

olduğunu gösterir.

Eğer $(p)+(a)=(d)$ ise o zaman $p=de$ ve d bir birimseldir veya p ile d ilgilidir.

Eğer d birimsel ise o zaman

$(p)+(a)=R$ ve $1=pt+as$'dir.

Bu nedenle

$b=bpt+bas=p(bt+ks)+ls$ ve $p+P \mid a+P$'dir.

Eğer p ve d ilgili ise o zaman

$a \in (p)$ ve $p+P \mid a+P$'dir.

Böylece herhangi bir p indirgenemezi için $p+P$ asaldır.

Şimdi $c+P$, R/P'de indirgenemez olsun. O zaman c, R'nin sıfırdan ve birimselden farklı elemanıdır ve

$c = q_1 ... q_m$

şeklinde indirgenemez ayrışıma sahiptir. Bu nedenle

$c+P = (q_1+P)...(q_m+P)$ 'dir.

Bu da $c+P$ ve q_i+P'nin bazı i için ilgili olduğunu gösterir ve yukarıdan $c+P$ asaldır. Böylece her indirgenemez R/P'de asaldır.

BÖLÜM 3

BİRİMLİ TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN HALKALAR

Bu bölümde R bir birimli ve değişmeli bir halkadır.

3.1 Giriş

Bu bölümde Fletcher'ın tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka (TÇH) tanımı verilecektir ve bu tanım kullanılarak halkalar için bazı teoremler ispatlanmıştır. Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka, bölge olması durumunda tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgedir. Tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halkaların (TÇH) sonlu direkt toplamlarının yine bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka olduğu, esas ideal halkasının (EİH) bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka olduğu gösterilecektir. Pseudo-Bölge tanımı ve bazı önemli sonuçları verilecektir. Kaynaklar kısmında verien [2], [8], [12] ve [13]' teki çalışmalardan yararlanılmıştır.

3.2 Birimli Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Halkanın Tanımı

[1] ve [2]'den aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 3.1 $r = a_1 ... a_n \in R$'nin çarpanlarına ayrılmasının refinement'i $i = 1, ..., n$ için a_i'lerin bir veya daha fazla çarpanlarına ayrılması ile elde edilir.

Tanım 3.2 p'nin her bir çarpanlarına ayrılışı p'yi içeren bir refinemente sahipse birimselden farklı $p \in R$'ye indirgenemez eleman denir.

Yani $a, b \in R$ için

$p = ab$ iken $p \mid a$ veya $p \mid b$

ise birimselden farklı $p \in R$'ye indirgenemez denir.

R'yi bir bölge olarak alırsak Tanım 3.2, Tanım 2.4 (i)' ye denk olur. Bunun haricinde 0 elemanı indirgenemezdir. Ayrıca burada sıfır elemanı indirgenemez ise R bir bölgedir.

Örnek 3.3 $\mathbb{Z}_6$'nın indirgenemez elemanları $2,3 \text{ ve } 4$'tür.

$\mathbb{Z}_6$ da 2 elemanı için incelersek $2 = 2.4$ şeklinde yazılacağından $2 \mid 2 \text{ veya } 2 \mid 4$ olduğundan indirgenemezdir.

3 elemanı için incelersek $3 = 3.5$ şeklinde yazılacağından $3 \mid 3$ olduğundan indirgenemezdir.

4 elemanı için incelersek $4 = 2.2$ şeklinde yazılacağından $4 \mid 2$ olduğundan indirgenemezdir.

Örnek 3.4 $\mathbb{Z}_6$'nın birimsel elemanları ise $1 \text{ ve } 5$'tir.

Örnek 3.5 $\mathbb{Z}_8$'in indirgenemez elemanı 2 'dir.

$\mathbb{Z}_8$ de 2 elemanı için incelersek $2 = 2.5 = 3.6$ şeklinde yazılacağından $2 \mid 2 \text{ veya } 2 \mid 6$ olduğundan indirgenemezdir.

4 elemanı için incelersek $4 = 2.2$ şeklinde yazılacağından $4 \nmid 2$ olduğundan indirgenemez değildir.

Örnek 3.6 $\mathbb{Z}_8$'in birimsel elemanları ise $1,3,5 \text{ ve } 7$'dir.

Tanım 3.7 Bir $r \in R$'nin U-sınıfı $U(r)$ ile gösterilir ve

$$U(r) = \{\alpha \in R \mid \alpha\beta r = r, \exists \beta \in R\}$$

şeklindedir. Yani

$$\alpha \in U(r) \Leftrightarrow \alpha(r) = (r) \qquad (3.1)$$

şeklindedir.

Bu tanıma göre aşağıdaki özellikler kolayca ispatlanabilir.

Önerme 3.8 (i) $\alpha, \beta \in U(r)$ ise $\alpha\beta \in U(r)$'dir.

(ii) $\alpha \in U(rs)$ ve $r \in U(s)$ ise $\alpha \in U(s)$'dir.

(iii) $U(r) \subseteq U(rs)$'dir.

(iv) Bir sıfır bölensiz a için $U(ar) = U(r)$'dir.

Örnek 3.9 $\mathbb{Z}_6$'da 2 elemanının U-sınıfı

$\alpha \in U(2) \Leftrightarrow \alpha(2) = (2)$'dir.

Böylece buradan α yerine $1, 2, 4$ ve 5 gelebilir. Böylece $U(2) = \{1, 2, 4, 5\}$'dir.

Tanım 3.10 Bir $r \in R$'nin U-ayrışımı r'nin

$r = (p_1^{'} \ldots p_k^{'})(p_1 \ldots p_n)$

şeklinde çarpanlarına ayrılmasıdır öyle ki burada

(i) $i = 1, \ldots, k$ ve $j = 1, \ldots, n$ için $p_i^{'}, p_j$ indirgenemezdir.

(ii) $i = 1, \ldots, k$ için $p_i^{'} \in U(p_1 \ldots p_n) \Leftrightarrow p_i^{'}(p_1 \ldots p_n) = (p_1 \ldots p_n)$'dir.

(iii) $j = 1, \ldots, n$ için

$p_j \notin U(p_1 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_n) \Leftrightarrow p_j(p_1 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_n) \neq (p_1 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_n)$'dir.

Burada ilk parantez boşsa $r = (\,)(p_1 \ldots p_n)$ yazarız.

Tanım 3.10' dan bir eleman U-ayrışımına sahip ise indirgenemez ayrışımına sahip olması gerekir.

Tersi için aşağıdaki sonucu vereceğiz.

Önerme 3.11 $r \in R$ bir indirgenemez ayrışıma sahip ise o zaman r bir U-ayrışımına sahiptir.

İspat $r \in R$' nin indirgenemez ayrışımı $r = p_1 \ldots p_n$ olsun.

Buradan ya $r = (\,)(p_1 \ldots p_n)$ ve r'nin bir $U-$ayrışımı vardır ya da bazı $i = 1, \ldots, n$ için

$p_i \in U(p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n)$'dir.

Eğer ikincisi sağlanıyor ise p_1'in bunu sağladığını kabul edelim yani

$p_1 \in U(p_2 \ldots p_n)$

olsun. Benzer şekilde

$p_2 \in U(p_3 \ldots p_n)$

olmak üzere p_2'de bu özelliği sağlar. O halde tekrar edersek $p_1, \ldots, p_k$ bu özelliği sağlayan sadece p_i'ler olsun.

O zaman

$r = (p_1 \ldots p_k)(p_{k+1} \ldots p_n)$

olur ve r bir U-ayrışımına sahiptir deriz.

Oluşturulan ifadeden dolayı

$j = k+1, \ldots, n$ iken $p_j \notin U(p_{k+1} \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_n)$

vardır ve $g = 1, \ldots, k$ için

$p_g \in U(p_{g+1} \ldots p_n)$'dir.

Önerme 3.8 (ii)'den,

$p_g \in U(p_{k+1} \ldots p_n)$ (3.2)

elde edilir.

Örnek 3.12 $\mathbb{Z}_6$'da

0 elemanının U-ayrışımı $0 = (\ )(2.3)$ şeklinde yazılabilir.

2 elemanının U-ayrışımı $2 = (\ )(2)$ şeklinde yazılabilir.

3 elemanının U-ayrışımı $3 = (\ )(3)$ şeklinde yazılabilir.

4 elemanının U-ayrışımı $4 = (2)(2)$ şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.13 $\mathbb{Z}_8$'de

0 elemanının U-ayrışımı $0 = (\ )(2.2.2)$ şeklinde yazılabilir.

2 elemanının U-ayrışımı $2 = (\ )(2)$ şeklinde yazılabilir.

4 elemanının U-ayrışımı $4 = (\ )(2.2)$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.14 Eğer $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise $a, b \in R$' ye ilgilidir denir. Yani

$(a) = (b)$'dir.

$a \sim b$ şeklinde gösterilir.

Bir U-ayrışımında

$r = (p_1^{'} \ldots p_k^{'})(p_1 \ldots p_n)$, $p_1 \ldots p_n$ ve $p_1^{'} \ldots p_k^{'}$

çarpanları sırasıyla ilgili kısım ve ilgili olmayan kısım olarak adlandırılır.

Örnek 3.15 $\mathbb{Z}_6$' da $2 \mid 4$ ve $4 \mid 2$ yani $(2) = (4)$ olduğundan 2 ile 4, $\mathbb{Z}_6$' da ilgilidir.

Önerme 3.16 $r = (p_1^{'} \ldots p_k^{'})(p_1 \ldots p_n)$, $r \in R$'nin bir U-ayrışımıysa o zaman $p_1 \ldots p_n$ ve r ilgilidir.

İspat $U-$ ayrışımının tanımından $i = 1, \ldots, k$ için

$p_i^{'} \in U(p_1 \ldots p_n)$'dir.

O halde Önerme 3.8 (i)'den

$p_1^{'} \ldots p_k^{'} \in U(p_1 \ldots p_n)$'dir.

Böylece $p_1 \ldots p_n$ ve r ilgilidir.

Burada Fletcher'ın tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka (TÇH) tanımı verilecektir.

Tanım 3.17 Bir R halkası aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa tek türlü çarpanlarına ayrılabilen halka (TÇH) olarak adlandırılır.

TÇH1: R'nin birimselden farklı her elemanı U-ayrışımına sahiptir.

TÇH2: Eğer

$r = (p_1^{'} \ldots p_k^{'})(p_1 \ldots p_n) = (q_1^{'} \ldots q_l^{'})(q_1 \ldots q_m)$,

$r \in R$'nin iki U-ayrışımlarıysa o zaman $m = n$ ve $i = 1, \ldots, n$ için p_i ile q_i, q'ların uygun bir numralandırılmasından sonra ilgilidir.

$r \in R$ bir U-ayrışımına sahip ve TÇH2 sağlanıyorsa o zaman tek türlü çarpanlarına ayrılışa sahiptir denir. Bölge olması durumunda TÇH ve TÇAB' nin tanımlarının denk olduğu aşağıdaki sonuçla gösterilecektir.

Teorem 3.18 Bir R tamlık bölgesinin TÇH olması için gerek ve yeter koşul R'nin TÇAB olması gerekir.

İspat R bir TÇH olsun. R'de birimselden ve sıfırdan farklı her elemanın U-sınıfı birimsellerin sınıfı olduğundan R bir TÇAB'dir.

Yani TÇH1'den U-ayrışımına sahipse indirgenemez ayrışıma sahiptir ve dolayısıyla TÇAB1 özelliği sağlanır.

$r \in R$'nin

$r = (\ )(p_1 \ldots p_n) = (\ )(q_1 \ldots q_m)$

şeklinde bir U-ayrışımı olsun. TÇH2' den

$m = n$ ve $p_i \sim q_i$'dir.

Böylece TÇAB2 de sağlanır. Sonuç olarak R bir TÇAB'dir.

Tersine, eğer R bir TÇAB ise o zaman R'nin birimselden ve sıfırdan farklı her elemanı tek türlü çarpanlarına ayrılışa sahiptir. Burada $U(0) = R$ ve her $0 \neq a \in R$ için $0 \notin U(a)$ olduğundan, sıfır elemanı

$$(p_1' \ldots p_m')(0) \qquad (3.3)$$

şeklinde daima bir U-ayrışımına sahiptir. O halde 0 tek türlü çarpanlarına ayrılışa sahiptir ve R bir TÇH'dır.

Örnek 3.19 $\mathbb{Z}$ tamlık bölgesi bir TÇAB olduğundan dolayı TÇH'dır.

Aşağıdaki sonuç iki TÇH' ın sonlu direkt toplamının bir TÇH olduğunu gösterecektir.

Teorem 3.20 R_1 ve R_2 birer TÇH' lar ise o zaman $R_1 \oplus R_2$ bir TÇH'dır.

İspat p ile q indirgenemez ve u ile v sırasıyla R_1 ve R_2'nin birimselleri olmak üzere $R_1 \oplus R_2$'nin indirgenemez elemanları

(p, v) ve (u, q)

şeklindeki tüm elemanları olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi r_1 ve r_2'nin her ikiside birimsel olmayacak şekilde herhangi bir $(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$'yi düşünelim. r_1 ve r_2'nin ikisininde birimsel olmadığını kabul edelim. Diğer durumlarda ispat benzer şekilde yapılır.

R_1 ve R_2 birer TÇH olduğundan r_1 ve r_2 U-ayrışımına sahiptir.

r_1 ve r_2'nin U-ayrışımları

$r_1 = (p_1' \ldots p_k')(p_1 \ldots p_n)$ ve

$r_2 = (q_1' \ldots q_l')(q_1 \ldots q_m)$

olsun ve böylece

$(r_1, r_2) = ((p_1' \ldots p_k')(p_1 \ldots p_n), (q_1' \ldots q_l')(q_1 \ldots q_m))$

$(r_1, r_2) = (p_1', 1) \ldots (p_k', 1)(p_1, 1) \ldots (p_n, 1)(1, q_1') \ldots (1, q_l')(1, q_1) \ldots (1, q_m)$

şeklinde bir indirgenemez ayrışıma sahiptir.

$(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$ indirgenemez ayrışıma sahip olduğundan dolayı (r_1, r_2) bir U-ayrışımına sahiptir. Böylece TÇH1 Önerme 3.11'den sağlanır.

(r_1, r_2)'nin

$((p_1', s_1') \ldots (p_k', s_k'))((p_1, s_1) \ldots (p_n, s_n))$ ve

$((t_1', q_1') \ldots (t_l', q_l'))((t_1, q_1) \ldots (t_m, q_m))$

şeklinde iki U-ayrışımı olsun. Böylece

$u = p_1 \ldots p_g$, $\mu = t_1 \ldots t_h$ ve $v = s_{g+1} \ldots s_n$, $\gamma = q_{h+1} \ldots q_m$

sırasıyla R_1 ve R_2'nin birimselleri ve $1 \le g \le n, 1 \le h \le m$ olmak üzere r_1 ve r_2'nin

$r_1 = (p_1' \ldots p_k')(up_{g+1} \ldots p_n) = (t_1' \ldots t_l')(\mu t_{h+1} \ldots t_m)$ ve

$r_2 = (s_1' \ldots s_k')(s_1 \ldots s_g v) = (q_1' \ldots q_l')(q_1 \ldots q_h \gamma)$

şeklinde iki U-ayrışımı vardır.

R_1 ve R_2 TÇH'lar olduğundan

$n-g=m-h$ ve $g=h$

olur. Buradan

$n=m$'dir.

$i=g+1,...,n$ için p_i ile t_i ve $j=1,...,g$ için s_j ile q_j uygun yeni bir numaralandırılmadan sonra ilgilidir. Bu nedenle $i=1,...,n$ için

(p_i,s_i) ve (t_i,q_i)

ilgilidir. Böylece TÇH2 sağlanır ve $R_1 \oplus R_2$ bir TÇH'dır.

TÇH'ların sonlu direkt toplamının bir TÇH olduğunu tümevarımı kullanarak genelleştirebiliriz.

Sonuç 3.21 $i=1,...,n$ için R_i bir TÇH ise o zaman $R_1 \oplus ... \oplus R_n$ bir TÇH'dır.

3.3 Esas İdeal Halkaları

Tamlık bölgesi olması durumunda esas ideal bölgesinin (EİB), TÇAB olduğu iyi bilinir. Bir esas ideal halkasının (EİH), TÇH olduğunu ispatlayacağız. Zariski ve Samuel [10]' dan aşağıdaki tanım ve teoremi verebiliriz.

Tanım 3.22 Bir EİH, eğer $P \neq R$ şeklinde sadece bir P asal idealine sahipse ve eğer P nilpotent ise yani

$m>0$ için $P^m=(0)$

ise özel (special) olarak adlandırılır.

Örnek 3.23 $\mathbb{Z}_4$ bir EİH' dır ve $<2>$ asal ideali nilpotenttir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_4$ bir özel EİH'dır.

Benzer şekilde $\mathbb{Z}_{p^n}$ bir özel EİH' dır

Teorem 3.24 Her EİH, EİB' lerin ve özel EİH' ların sonlu direkt toplamıdır.

Teorem 3.20' nin Sonucu 3.21'den aşağıdaki sonuca ihtiyacımız vardır.

Teorem 3.25 R bir özel EİH ise o zaman R bir TÇH' dır.

İspat İndirgenemez ayrışımı olmayan birimselden farklı elemanlar ile üretilmiş esas idealleri düşünelim. R bir EİH dolayısıyla Noetherian olduğundan bu sınıfın bir maksimal üyesi vardır a indirgenemez olmamak koşuluyla bu maksimal üye (a) olsun. Bu nedenle $a = a_1 ... a_n$ yazarız ki burada a, a_i'yi bölmeyecek ve her $i = 1, ..., n$ için $(a) \subset (a_1)$'dir. (tam olarak dahildir.) a_i, indirgenemez ayrışıma sahip olduğundan a'da bir indirgenemez ayrışıma sahiptir. Bu bir çelişkidir.

$P^m = (0)$ ve m minimal olacak şekilde R'nin tek asal ideali P olsun.

Eğer $m = 1$ ise o zaman R bir cisimdir ve bu nedenle bir TÇH'dır.

Eğer $m > 1$ ise o zaman $P = (\alpha)$ olsun. Eğer $r \neq (\alpha)$ ise o zaman r birimseldir. Aksi takdirde (r) asal olan bir maksimal ideal içerir. α'nın ilgililik farkıyla R'de tek indirgenemez olduğunu söyleriz. β ve α ilgili olmayacak şekilde β başka bir indirgenemez olsun. β birimselden farklı olduğundan $\beta \in (\alpha)$'dır ve $\beta = r\alpha$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. β indirgenemez olduğundan bazı $s \in R$ için

$$r = \beta s$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\beta = r\alpha \Rightarrow \beta = \beta s\alpha \text{ ve } \beta(1 - s\alpha) = 0$$

elde edilir.

$$1 = 1 - (s\alpha)^m = (1 - s\alpha)(1 + s\alpha + ... + (s\alpha)^{m-1})$$

yazarız ve böylece $1 - s\alpha$ birimseldir. Bu nedenle $\beta = 0$ ve R bir bölgedir. $m > 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece birimsel olmayan her $r \in R$, u bir birimsel ve $0 < k \leq m$ olmak üzere

$$r = u\alpha^k \tag{3.4}$$

şekline sahiptir. Burada k tektir. Çünkü $0 < k < l \leq m$ olmak üzere eğer

$u\alpha^k = u\alpha^l$

ise o zaman

$\alpha^{-l+k+m} = 0$'dır.

Bu da m'nin minimal olmasıyla çelişir. Bu nedenle

$r = ()((u\alpha)\alpha^{k-1})$ ve $0 = (p_1^{'}...p_l^{'})(\alpha^m)$

sırasıyla $r \neq 0$ ve sıfır elemanının tek türlü U-ayrışımlarıdır.

Böylece R bir TÇH' dır.

Sonuç 3.26 Her EİH bir TÇH' dır.

Sonuç 3.26 ve Teorem 3.20' den aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 3.27 Eğer $\mathbb{Z}$'yi ele alırsak $\mathbb{Z}$ esas ideal halkası olduğundan bir TÇH'dır ve iki TÇH'ın sonlu direkt toplamı yani $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ bir bölge olmayan TÇH' dır.

Örnek 3.28 Eğer EİH olan $\mathbb{Z}_4$'ü ele alırsak $\mathbb{Z}_4$ bir bölge olmayan TÇH' dır.

3.4 Pseudo- Bölgeler

Tanım 3.29 Sıfırdan farklı her $r \in R$ için $U(r)$ birimsellerin sınıfı ise halkaya pseudo-bölge denir. Yani

$(r) = x(r) \Rightarrow x \in U(r) \Leftrightarrow x = xy \Rightarrow x = 0$ veya y birimsel

oluyorsa pseudo bölge denir.

Örnek 3.30 $\mathbb{Z}_4$ halkasında sıfırdan farklı her $r \in \mathbb{Z}_4$ için $U(r)$ birimsellerin sınıfı olduğundan yani

$r = 1$ için $(1) = x(1) \Rightarrow x \in U(1)$

$r = 2$ için $(2) = x(2) \Rightarrow x \in U(2)$

$r = 3$ için $(3) = x(3) \Rightarrow x \in U(3)$

şeklinde yazılabilir ve dolayısıyla $\mathbb{Z}_4$ halkası bir pseudo bölgedir.

Tanım 3.29 ve 3.2 kısmından aşağıdaki sonuç kolayca gösterilebilir.

Önerme 3.31 (i) Eğer q bir indirgenemez olan $p \in R$' yi bölerse o zaman ya p ile q ilgilidir ya da $q \in U(p)$' dir.

(ii) Bir pseudo-bölgede indirgenemezle ilgili olan elemanda indirgenemezdir.

TÇH olan pseudo bölge TÇPB ile gösterilsin. O zaman aşağıdaki sonucu verebilirz.

Önerme 3.32 (i) Her TÇPB ilgililik farkı düşünülmeksizin tam olarak bir sıfır bölen indirgenemez eleman içerir. (yani sıfır böleni olan bir indirgenemezdir.)

(ii) Tek sıfır bölen indirgenemez elemanı sıfırdan farklı olan her TÇPB bir regüler indirgenemez eleman içermez.

İspat (i) $q \neq 0$ olmak üzere R, ilgili olmayan sıfır bölen indirgenemezleri p ve q' ya sahip olsun.

Eğer $p = 0$ ise o zaman R bir bölgedir ve $q = 0$'dır.

$a, b(\neq 0) \in R$ için $p \neq 0$ ve $ap = 0 = bq$ olsun. a ve b'nin indirgenemez ayrışımları

$a = a_1 ... a_l$, $b = b_1 ... b_k$

olsun ve

$$0 = (...)(a_1 ... a_l p) = (...)(b_1 ... b_k q)$$

alabiliriz. Burada TÇH2' den p ve b_k ilgili olduğu söylenir ve böylece bir u birimseli için

$b_k = pu$'dur.

Bu nedenle

$$0 = (...)(b_1 ... b_{k-1} pq)$$

ve p ve q'nun ilgili elemanlarını bir araya toplarsak

$$0 = (...)(p^r q^s c_1 ... c_g)$$

yazarız, burada $r, s > 0$, $i = 1, ..., g$ için c_i indirgenemezdir ve p veya q ile ilgili değildir. Böylece

$0 = p^r (p - (p - q^s c_1 ... c_g))$'dir.

Burada $p-q^s c_1...c_g$ birimsel değildir.

Aksi takdirde eğer u bir birimsel ise o zaman

$p^{r+1}=p^r u$ ve $p\in U(p^r)$'dir.

$p^r\neq 0$ olduğundan bu p'nin bir birimsel olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle

$p-q^s c_1...c_g$, $d_1...d_h$

şeklinde bir indirgenemez ayrışıma sahiptir ve

$$p^{r+1}=p^r d_1...d_h \qquad (3.5)$$

olur. U-ayrışımları düşünülürse $p\sim d_1$'dir. O zaman v bir birimsel olacak şekilde

$q^s c_1...c_g = p(1-v)$'dir.

Sol taraf sıfırdan farklı olduğundan $1-v\neq 0$ 'dır. Böylece $p\notin U(1-v)$ ve U-ayrışımına dönüştürülmesi p, q veya bazı i'ler için c_i ile ilgilidir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle ilgililik farkı düşünülmeksizin R'de en çok bir sıfır bölen indirgenemez vardır. Sıfır bir sıfır bölen indirgenemez ayrışım içerdiğinden dolayı (i) ispatlanmış olur.

(ii) (i)'den TÇPB'de 0'ın bir U-ayrışımı

$0=(p_1^{'}...p_k^{'})(\alpha^m)$

şeklindedir ve α tek sıfır bölen indirgenemez olmak üzere p, R'de regüler indirgenemez olsun. O zaman $p+\alpha$ birimsel değildir. Çünkü eğer bir u birimseli için

$p+\alpha=u$ ise o zaman $p\alpha^{m-1}=u\alpha^{m-1}$ ve $p\in U(\alpha^{m-1})$'dir.

Ancak bu bir çelişkidir. Bu nedenle $p+\alpha$, $q_1...q_l$ şeklinde indirgenemez ayrışımına sahiptir ve

$p\alpha^{m-1}=q_1...q_l\alpha^{m-1}$'dir.

Her iki tarafın U-ayrışımlarını düşünürsek

$p\sim q_1$ ve $p\mid\alpha$'dır.

Önerme 3.31 (i)'den $p \sim \alpha$'dir ancak bu bir çelişkidir.

Tanım 3.33 Bir R halkasında birimselden farklı bir p elemanına eğer

$a,b \in R$ için $p \mid ab$ iken $p \mid a$ veya $p \mid b$

oluyorsa asal eleman denir.

Bu tanımdan bir halkada her asalın indirgenemez olduğu açıktır ve ayrıca bir halkada asalla ilgili olan elemanlarında asal olduğu kolayca görülebilir. Şimdi Önerme 3.32 ile her indirgenemezin asal olması TÇH2 yerine verilebilir. İspatı aynı yolla yapılır.

Önerme 3.34 Birimselden farklı her elemanın indirgenemez ayrışıma sahip olması ve her indirgenemezin asal olduğu özellikleri ile R bir pseudo-bölge olsun. O zaman R ilgililik farkıyla tam olarak bir sıfır bölen indirgenemez içerir. Eğer bu eleman sıfırdan farklı ise R bir regüler indirgenemez içermez.

Aşağıdaki teorem TÇAB ile ilgili temel teoremin bir genelleştirilmesidir.

Teorem 3.35 Bir R halkasının birimselden farklı her elemanın indirgenemez ayrışımı vardır ve R bu özelliği sağlayan bir pseudo-bölge olsun. O zaman R' nin bir TÇH olması için gerek ve yeter koşul her indirgenemezin asal olmasıdır.

İspat R bir TÇH olsun. Önerme 3.32 (i)'den R tam olarak bir sıfır bölen indirgenemez içerir ve bu eleman α olsun.

Eğer $\alpha = 0$ ise R bir bölgedir ve her indirgemez asaldır.

Şimdi $\alpha \neq 0$ olsun. Önerme 3.32 (ii)'den R de her regüler eleman birimseldir. Bu nedenle α, R'nin birimselden farklı her elemanını böler ve böylece asaldır.

Tersine her indirgemez asal olsun. Önceki önermeden R tam olarak bir sıfır bölen indirgenemez içerir ve α bu indirgenemez eleman olsun.

Eğer $\alpha = 0$ ise R bir bölgedir ve R doğrudan bir TÇH'dır.

Eğer $\alpha \neq 0$ ise o zaman her eleman, u birimsel olacak şekilde $u\alpha^k$ şeklinde ifade edilebilir. Açıkça 0 bir tek türlü çarpanlarına ayrılışa sahiptir. 0'dan farklı $r \in R$ için

$r = u\alpha^k = v\alpha^l$ ve $k > l$

olsun. O zaman $\alpha \in U(\alpha')$ olur. Bu nedenle $k = l$ ve r bir tek türlü çarpanlarına ayrılışa sahiptir. Böylece R bir TÇH'dır.

BÖLÜM 4

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN MODÜLLER

4.1 Giriş

Tek türlü çarpanlarına ayrılış serbest burulmalı modüller için detaylı bir şekilde incelenmiştir ve bu yüzden serbest burulmalı olmayan modüller üzerinde inceleme yapılacaktır. Bu bölümde değişmeli bir R halkasında U-ayrışımı ile tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüller gösterilmiştir ve bu bölümde kaynaklar kısmında verilen Alan ve Özbulur' un [7]' deki "On Unique Factorization Modules" çalışmalarından yararlanılmıştır.

4.2 Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Modüllerin Tanımı

Tanım 4.1 M bir birimsel $R-$ modül ve $m,n \in M$ olsun. M ' nin devirli alt modülleri olarak

$(m)=(n)$

ise m ve n ilgilidir denir ve $m \sim n$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.2 $\mathbb{Z}-$modül olarak $\mathbb{Z}_6$'da devirli alt modülleri olarak

$(2)=(4)$

olduğundan dolayı $2 \sim 4$'dir.

Tanım 4.3 M bir birimsel $R-$ modül ve her $r \in R,\ m \in M$ için

$m=rm \Rightarrow m=0$ veya $r \in U(R)$

oluyorsa presimplifiable olarak adlandırılır.

Tanım 4.4 R değişmeli bir halka ve M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. Eğer $0 \neq r \in R$ ve $n \in M$ için

$m = rn$ iken $m \sim n$

ise m'ye M'de indirgenemez eleman denir.

Eğer $R = M$ ise o zaman $0 \neq m \in M$, M'de indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $m = m1$ olduğundan

$m \in U(R)$'dir.

Böylece $M = R$ durumu için M'nin indirgenemez elemanları ve R'nin birimsel elemanları birbirleri ile denktir.

Örnek 4.5 $\mathbb{Z}$ - modül olarak $\mathbb{Z}$'in indirgenemez elemanları $\mathbb{Z}$- modülünün birimsel elemanlarıdır.

Tanım 4.4' de M'de $0 \in M$' nin indirgenemez olmasına izin verilmiştir ve $0 \in M$'nin M'de indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul M'nin bir serbest burulmalı R-modül olmasıdır.

Önerme 4.6 R bir değişmeli halka ve M bir R-modül olsun. $0 \in M$'nin M'de indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul M'nin bir serbest burulmalı R-modül olmasıdır.

İspat 0'ın M'de indirgenemez olduğunu ve bazı $r \in R$, $n \in M$ için $0 = rn$ olduğunu kabul edelim.

Eğer $r = 0$, $r \in R$'nin tek değeri ise o zaman M bir serbest burulmalı modüldür.

Eğer $r \neq 0$ ise o zaman M'de 0 ile n ilgilidir. Böylece $n = 0$ ve M bir serbest burulmalı modüldür.

Şimdi M'nin bir serbest burulmalı modül olduğunu ve bazı $0 \neq r \in R$ ve $n \in M$ için $0 = rn$ olduğunu kabul edelim. O zaman $n = 0$ ve böylece 0 ile n ilgilidir. Böylece $0 \in M$, M'de indirgenemezdir.

Önerme 4.7 M bir serbest burulmalı modül ve $m \in M$ sıfırdan farklı bir eleman olsun. O zaman aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) m , M 'de indirgenemezdir.

(ii) Bazı $r \in R$ ve $n \in M$ için $m = rn$ iken $r \in U(R)$'dir.

İspat **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** $m = rn$ olduğunu kabul edelim. $m \neq 0$ olduğundan $r \neq 0$'dır. Böylece m ile n ilgilidir. Bazı $s \in R$ için

$n = sm$'dir.

$m = rn$ ifadesinde $n = sm$ yazılırsa

$$m = rsm \Rightarrow (1 - rs)m = 0$$

elde edilir. $m \neq 0$ olduğundan

$$(1 - rs) = 0$$

elde edilir ve buradan

$$rs = 1 \qquad (4.1)$$

elde edilir. Böylece

$r \in U(R)$'dir.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**) Bazı $r \in R$ ve $n \in M$ için $m = rn$ iken $r \in U(R)$ olduğunu kabul edelim ve buradan

$$n = r^{-1}m \qquad (4.2)$$

olur ve böylece m ile n'nin ilgili olduğu elde edilir. Dolayısıyla m, M'de indirgenemezdir.

Tanım 4.8 $n \in M$ 'nin bir U-ayrışımı

$$n = (q_1 \ldots q_k)(p_1 \ldots p_r m),$$

şeklinde çarpanlarına ayrılmasıdır öyle ki burada

(i) $q_i \neq 0,\ p_j \neq 0$ ve q_i ile p_j'ler her i ve j için R'de ve $m \in M$, M'de indirgenemezdir.

(ii) $i = 1, \ldots, k$ için M'nin devirli alt modülü olarak

$q_i\left(p_1 \ldots p_r m\right)=\left(p_1 \ldots p_r m\right)$' dir.

(iii) $i=1,\ldots,r$ için $p_i\left(p_1 \ldots \hat{p}_i \ldots p_r m\right) \neq \left(p_1 \ldots \hat{p}_i \ldots p_r m\right)$'dir

ve $\hat{p}_i$'nin bu çarpımdan ihmal edildiği anlamına gelir.

Halkada olduğu gibi

$p_1 \ldots p_r m$ ve $q_1 \ldots q_k$

çarpanları sırasıyla ilgili kısım ve ilgili olmayan kısım olarak adlandırılır.

$m \in M$ olsun. Eğer m'nin çarpanlarına ayrılışı, her bir p_i, R'de indirgenemez ve m, M'de indirgenemez olmak üzere

$m=p_1 \ldots p_r m_1$

şeklinde yazılabilir ise m indirgenemez çarpanlarına ayrılışa sahiptir denir.

Bu indirgenemezlerin çarpanlarına ayrılışı kaynaklar kısmında verilen Fletcher'ın [1]'deki Önerme 2' nin benzer bir sonucu olarak bir U-ayrışımına dönüştürülebilir.

Önerme 4.9 Eğer $m \in M$ indirgenemez çarpanlarına ayrılışa sahipse o zaman m bir U–ayrışımına sahiptir.

İspat p_i, R'de indirgenemez ve n, M'de indirgenemez olmak üzere

$m=p_1 \ldots p_k n$

olsun. Eğer

$m=(\,)\left(p_1 \ldots p_k n\right)$

ise o zaman m bir $U-$ayrışımına sahiptir.

Eğer,

$p_i\left(p_1 \ldots \hat{p}_i \ldots p_k n\right)=\left(p_1 \ldots \hat{p}_i \ldots p_k n\right)$

bazı p_i için, p_1 diyelim.

O zaman

$p_1(p_2 \dots p_k n) = (p_2 \dots p_k n)$'dir.

Şimdi genelliği kaybetmeden p_2'yi seçelim,

$p_2(p_3 \dots p_k n) = (p_3 \dots p_k n)$

ve bu işlemi tekrarlayıp uygularsak, p_i'nin bu özelliği yok olana kadar $p_1, \dots, p_t$ seçelim.

$m = (p_1 \dots p_t)(p_{t+1} \dots p_k n)$,

$m \in M$ 'nin bir $U-$ ayrışımı olduğunu iddia ediyoruz. Yapıdan

$$p_j\left(p_{t+1} \dots \hat{p}_j \dots p_k n\right) \neq \left(p_{t+1} \dots \hat{p}_j \dots p_k n\right) \qquad (4.3)$$

her $j = t+1, \dots, k$ için ve böylece Tanım 4.8' deki durum (iii)'den sağlanır.

Durum (ii) bir genel gerçeğin direk sonucudur:

Eğer $a(n) = (n)$ ve $b(n) = (n)$ ise o zaman

$ab(n) = (n)$

ve eğer $a(bn) = (bn)$ ve $a(bn) = (bn)$ ise o zaman $a, b \in R,\ n \in M$ için

$a(n) = (n)$'dir.

Önerme 4.10 $n \in M$ 'nin bir U-ayrışımı

$n = (q_1 \dots q_k)(p_1 \dots p_r m)$

olsun. O zaman M 'nin bir devirli alt modülü olarak

$(n) = (p_1 \dots p_r m)$'dir.

İspat Tanım 4.8' in (ii) kısmından

$(n) = (q_1 \dots q_k p_1 \dots p_r m) = q_1 \dots q_k (p_1 \dots p_r m) = (p_1 \dots p_r m)$

elde edilir.

n'nin iki U-ayrışımları

$n=(q_1...q_k)(p_1...p_rm_1)=(q_1'...q_{k'}')(r_1...r_sm_2)$,

eğer

(i) $r=s$ ve

(ii) ilgili kısımdaki çarpanların sıralamasındaki uygun bir değişiklikten sonra $i=1,...,r$ için R'de $p_i \sim r_i$ ve $m_1 \sim m_2$, M'de ise ilgilidir deriz.

Tanım 4.11 R bir değişmeli halka ve M bir R-modül olsun.

M'nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modül (TÇM) olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekir:

(i) M'nin her elemanı U –ayrışımına sahiptir, yani atomiktir.

(ii) Her $n \in M$ 'nin herhangi iki U-ayrışımları ilgilidir.

Eğer M bir serbest burulmalı R-modül ise M'nin 0'dan farklı elemanının herhangi iki U-ayrışımının ilgili olmayan kısmı boştur. Bu yüzden U-ayrışımı 0'dan farklı elemanlar için standart indirgenemez ayrışımla özdeştir.

M bir serbest burulmalı R-modül olmak üzere 0 indirgenemez olduğundan

$0=(\ )(0)$

olarak her zaman tek bir U-ayrışımına sahiptir. Bu nedenle TÇM'nin tanımından serbest burulmalı modüller için Lu tarafından verilen [4]'te ki gibi aynıdır. TÇM serbest burulmalı modüller için Lu' nun çalışmasında [4]'te detaylı incelendiğinden dolayı serbest burulmalı olmayan modüller için incelemeye çalışacağız.

Önerme 4.12 R bir değişmeli halka ve M bir serbest burulmalı olmayan R−modül olsun. M'nin bir TÇM olduğunu ve

$0=(q_1...q_l)(p_1...p_rm_1)$' in

$0 \in M$ ' nin tek bir U-ayrışımı olduğunu kabul edelim. O zaman m_1 ilgililik ile M'nin tek indirgenemez elemanıdır.

İspat $m_2 \in M$, M 'nin bir diğer indirgenemez elemanı olsun. Eğer

$p_1 \ldots p_r m_2 = 0$

ise o zaman M 'de $m_1 \sim m_2$'dir.

$p_1 \ldots p_r m_2 \neq 0$

olduğunu kabul edelim.

Şimdi

$n = p_1 \ldots p_r m_2 = p_1 \ldots p_r m_2 + p_1 \ldots p_r m_1 = p_1 \ldots p_r \left(m_1 + m_2 \right)$'dir.

M bir TÇM olduğundan $m_1 + m_2 \in M$ elemanının M 'de indirgenemez ayrışımı vardır ve

$m_1 + m_2 = t_1 \ldots t_k m_3$

olsun. İki indirgenemez ayrışımın her iki tarafının $U -$ ayrışımları alınarak

$p_1 \ldots p_r m_2 = p_1 \ldots p_r t_1 \ldots t_k m_3$

elde edilir. M bir TÇM olduğundan M 'de $m_2 \sim m_3$'dir. Bu yüzden bazı $s \in R$ için

$m_3 = s m_2$'dir.

Böylece

$$m_1 + m_2 = t_1 \ldots t_k s m_2 \Rightarrow m_1 = \left(t_1 \ldots t_k s - 1 \right) m_2 \qquad (4.4)$$

elde edilir. m_1 , M 'de indirgenemez olduğundan böylece M 'de

$m_1 \sim m_2$

elde edilir.

Sonuç 4.13 M bir serbest burulmalı olmayan TÇM ve $0 \in M$ 'nin bir U-ayrışımı

$0 = \left(q_1 \ldots q_k \right) \left(p_1 \ldots p_r m_1 \right)$

olsun. O zaman

$M = \left(m_1 \right)$'dir.

Sonuç 4.14 R bir atomik halka ve M bir serbest burulmalı olmayan R−modül olsun. Eğer M bir TÇM ve

$0=(q_1...q_k)(p_1...p_rm_1)$,

$0\in M$'nin bir U-ayrışımı ise o zaman

$Ann(M)=(p_1...p_r)$'dir.

İspat Sonuç 4.13'den

$p_1...p_rm_1=0\Rightarrow p_1...p_rM=0\Rightarrow(p_1...p_r)\subseteq Ann(M)$'dir.

Şimdi $s\in Ann(M)$ olduğunu kabul edelim.

O zaman

$sM=0\Rightarrow sm_1=0=p_1...p_rm_1$'dir.

R bir atomik olduğundan s, R' de indirgenemez ayrışıma sahiptir ve

$s=t_1...t_l$

olsun. Teklikten ve genelliği kaybetmeden

$(t_{r+1}...t_l)(t_1...t_rm_1)=(q_1...q_k)(p_1...p_rm_1)$

ve böylece $i=1,...,r$ için R' de $t_i\sim p_i$' dir. Böylece

$s\in(p_1...p_r)\Rightarrow Ann(M)\subseteq(p_1...p_r)$'dir.

Örnek 4.15 (i) R bir değişmeli halka ve $R=M$ olsun. O zaman $M=(1)$ ve M'nin bir TÇM olması için gerek ve yeter koşul R'nin bir TÇH olmasıdır.

Özellikle, eğer $R=M=\mathbb{Z}_6$ ise o zaman M bir R -modülü olarak ne bir presimplifiable ne de serbest burulmalıdır ancak bir TÇM'dir.

$\mathbb{Z}_6$ presimplifiable değildir. Çünkü presimplifiable olması için

her $r\in R,\ m\in M$ için $m=rm\Rightarrow m=0$ veya $r\in U(R)$

şeklindedir.

$\mathbb{Z}_6$'da $2=4.2$ şeklinde yazılabilir ancak $4\in\mathbb{Z}_6$'da birimsel değildir.

$\mathbb{Z}_6$ serbest burulmalı değildir. Çünkü serbest burulmalı olması için

her $r\in R,\ m\in M$ için $m=rm$ iken $r=0$ veya $r\neq 0$ iken $m=0$

şeklindedir. Ancak $\mathbb{Z}_6$'da $2.3=0$ şeklinde yazılabilir.

(ii) R bir TÇH ve M bir devirli R -modül olsun. M'nin bir R- modül olarak TÇM olmasına gerek yoktur:

$R=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_3$

olsun. O zaman R bir TÇH ve $M=((1,1))$ bir devirli R -modüldür.

$p_1=(0,1)$, $p_2=(1,0)$, $p_3=(1,3)$ ve $m=(1,1)$

yazalım. Öyle ki burada

p_1, p_2, p_3, R'de indirgenemez ve m, M' de

indirgenemezdir.

Şimdi

$0=(\ )(p_1p_2m)=(\ )(p_1p_3m)$,

$0\in M$'nin iki ilgili olmayan U-ayrışımlarıdır. Böylece M bir R- modül olarak TÇM değildir.

BÖLÜM 5

TEK TÜRLÜ ÇARPANLARINA AYRILABİLEN MODÜLLERİN DİREKT TOPLAMI

5.1 Giriş

Serbest burulmalı olmayan tek türlü çarpanlarına ayrılabilen modüllerin direkt toplamları üzerinde çalışılmıştır ve direkt toplamlarının TÇM olduğu gösterilmiştir. Bunun için özel olarak $\mathbb{Z}$ - modül olan $\mathbb{Z}_n$'ler için inceleme yapılmıştır.

5.2 Tek Türlü Çarpanlarına Ayrılabilen Modüllerin Direkt Toplamı

Önerme 5.1 $\mathbb{Z}_n$ bir $\mathbb{Z}$ - modül ve $m \in \mathbb{Z}_n$ olsun.

m'nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $ebob(m,n)=1$ olmasıdır.

İspat $\overline{m}$'nin $\mathbb{Z}_n$ de indirgenemez olduğunu kabul edelim.

O zaman

$$\overline{m} = m\bar{1}$$

şeklinde yazılabilir ve dolayısıyla m, $\mathbb{Z}_n$ de indirgenemez olduğundan $\overline{m}$ ile $\overline{1}$ ilgilidir.

Bazı $k \in \mathbb{Z}$ için

$\overline{1} = k\overline{m}$ ve $1 \equiv k\bar{m} \ \ mod \ \ n$'dir.

Bazı $l \in \mathbb{Z}$ için

$$1 = km + \ln \qquad (5.1)$$

şeklinde yazılır.

Sonuç olarak ,

$ebob(m,n)=1$ (5.2)

elde edilir.

Tersine, $ebob(m,n)=1$ ve bazı $r\in\mathbb{Z}$ ve $p\in\mathbb{Z}_n$ için $m=rp$ olduğunu kabul edelim.

O zaman

$xm+yn=1$

olacak şekilde $x,y\in\mathbb{Z}$ vardır.

$yn=0$

olduğundan

$xm=1$'dir.

Şimdi $m=rp$ ifadesinin her iki tarafını x ile çarparsak

$xm=xrp\Rightarrow 1=xrp$

elde edilir. Böylece

$p=(xr)^{-1}=r^{-1}x^{-1}$

elde edilir ve $x^{-1}=m$ olduğundan

$p=r^{-1}m$

ve böylece

$m\sim p$

elde edilir.

Sonuç olarak m indirgemezdir.

Sonuç 5.2 $\mathbb{Z}$ - modül olarak $\mathbb{Z}_n$'in indirgenemez elemanları $\mathbb{Z}_n$'in birimselleridir

yani $U(\mathbb{Z}_n)$'dir.

Örnek 5.3 $\mathbb{Z}$ - modül olarak $\mathbb{Z}_8$'in indirgenemez elemanları $\mathbb{Z}_8$'in birimselleridir yani

$U(\mathbb{Z}_8) = \{1,3,5,7\}$

şeklindedir.

Örnek 5.4 $\mathbb{Z}$ modül olarak $\mathbb{Z}_5$'in indirgenemez elemanları

$U(\mathbb{Z}_5) = \{1,2,3,4\}$

şeklindedir ve $\mathbb{Z}$ modül olarak $\mathbb{Z}_5$'in elemanlarının U-ayrışımları şu şekildedir:

$\bar{0} = (\ )(5.\bar{1})$

$\bar{1} = (\ )(\bar{1}) = (\ )(\bar{2}) = (\ )(\bar{3}) = (\ )(\bar{4})$

$\bar{2} = (\ )(\bar{1}) = (\ )(\bar{2}) = (\ )(\bar{3}) = (\ )(\bar{4})$

$\bar{3} = (\ )(\bar{1}) = (\ )(\bar{2}) = (\ )(\bar{3}) = (\ )(\bar{4})$

$\bar{4} = (\ )(\bar{1}) = (\ )(\bar{2}) = (\ )(\bar{3}) = (\ )(\bar{4})$

Örnek 5.5 $\mathbb{Z}$ modül olarak $\mathbb{Z}_6$'nın indirgenemez elemanları

$U(\mathbb{Z}_6) = \{1,5\}$

şeklindedir ve $\mathbb{Z}$ modül olarak $\mathbb{Z}_6$'nın elemanlarının U-ayrışımları şu şekildedir:

$\bar{0} = (\ )(2.3.\bar{1})$

$\bar{1} = (\ )(\bar{1}) = (\ )(\bar{5})$

$\bar{2} = (\ )(2.\bar{1}) = (\ )(2.\bar{5})$

$\bar{3} = (\ )(3.\bar{1}) = (\ )(3.\bar{5})$

$\bar{4} = (\ )(2.\bar{1}) = (\ )(2.\bar{5})$

$\bar{5} = (7)(\bar{5}) = (5)(\bar{1})$

Önerme 5.6 Her $n \geq 1$ için $\mathbb{Z}$- modülü olarak $\mathbb{Z}_n$ bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür.

İspat Önerme 5.1'den $\mathbb{Z}$- modülü olarak $\mathbb{Z}_n$'in indirgenemez elemanları tam olarak $\mathbb{Z}_n$ halkasının birimsel elemanlarıdır yani $U(\mathbb{Z}_n)$'dir. Dolayısıyla $\forall m \in \mathbb{Z}_n$ için

$$\bar{m} = m.\bar{1}$$

şeklinde yazılabillir. $m \in \mathbb{Z}$'nin asal çarpanlarına ayrılışı

$$m = p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha n}$$

olsun. Buradan

$$\bar{m} = p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha n}.\bar{1}$$

şeklinde yazılabileceğinden $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$'in bir indirgenemez ayrışımı ve dolayısıyla Önerme 4.9'dan $\forall \bar{m} \in \mathbb{Z}_n$'in bir U-ayrışımı vardır. Böylece TÇM1 sağlanır.

TÇM2 için bir $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$'in

$$\bar{m} = (\ )(p_1 ... p_k.\bar{u}) = (\ )(q_1 ... q_l.\bar{v})$$

şeklinde iki farklı U-ayrışımı olduğunu kabul edelim. Burada $\bar{u}, \bar{v} \in U(\mathbb{Z}_n)$ olduğundan ideal olarak

$$(p_1 ... p_k.\bar{u}) = (\bar{p_1} ... \bar{p_k})$$

$$(q_1 ... q_l.\bar{v}) = (\bar{q_1} ... \bar{q_l})$$

idealleri $(\bar{m})$ idealine eşittir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_n$ halkasında $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$'in

$$\bar{m} = (\ )(\bar{p_1} ... \bar{p_k}) = (\ )(\bar{q_1} ... \bar{q_l}) \qquad (5.3)$$

şeklinde iki farklı U-ayrışımı bulunur. $\mathbb{Z}_n$ bir TÇH olduğundan dolayı bu bir çelişkidir. Dolayısıyla TÇM2'de sağlanır ve $\mathbb{Z}$- modülü olarak $\mathbb{Z}_n$ bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modüldür.

Önerme 5.7 $\mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z}_m$ birer $\mathbb{Z}$- modül olsun.

$m_1 \in \mathbb{Z}_n$'de ve $m_2 \in \mathbb{Z}_m$'de indirgenemez ise $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$'de $\mathbb{Z}$- modül olarak indirgenemezdir.

İspat m_1'in $\mathbb{Z}_n$ de indirgenemez olduğunu kabul edelim. O zaman bazı $r \in \mathbb{Z}$ ve $x \in \mathbb{Z}_n$ için

$$m_1 = rx$$

yazabiliriz ve m_1, $\mathbb{Z}_n$ de indirgenemez olduğundan Önerme 5.1' den

$$ebob(m_1, n) = 1$$

olduğunu söyleyebiliriz ve aynı şekilde m_1, $\mathbb{Z}_n$ de indirgenemez olduğundan

$x \sim m_1$' dir.

Bazı $k \in \mathbb{Z}$ için

$$x = km_1$$

yazılabilir.

$ebob(m_1, n) = 1$ olduğundan

$$sm_1 + tn = 1$$

olacak şekilde bazı $s, t \in \mathbb{Z}$ vardır. $tn = 0$ olduğundan

$sm_1 = 1$'dir.

Şimdi m_2'nin $\mathbb{Z}_m$ de indirgenemez olduğunu kabul edelim. O zaman bazı $r \in \mathbb{Z}$ ve $y \in \mathbb{Z}_m$ için

$$m_2 = ry$$

yazabiliriz ve m_2, $\mathbb{Z}_m$ de indirgenemez olduğundan Önerme 5.1' den

$ebob(m_2, m) = 1$

olduğunu söyleyebiliriz ve aynı şekilde m_2, $\mathbb{Z}_m$ de indirgenemez olduğundan

$y \sim m_2$' dir.

Bazı $l \in \mathbb{Z}$ için

$y = lm_2$

yazılabilir.

$ebob(m_2, m) = 1$ olduğundan

$um_2 + vm = 1$

olacak şekilde bazı $u, v \in \mathbb{Z}$ vardır.

$vm = 0$

olduğundan $um_2 = 1$'dir.

$$(m_1, m_2) = (rx, ry) = r(x, y) = r(km_1, lm_2) \tag{5.4}$$

yazabiliriz.

Eğer

$m_1 = rkm_1$

şeklinde yazılırsa ve her iki tarafı s ile çarparsak yani

$sm_1 = srkm_1 \Rightarrow 1 = rk$

elde edilir ve buradan $r \in \mathbb{Z}$ de birimsel eleman olur. Benzer şekilde, eğer

$m_2 = rlm_2$

şeklinde yazılırsa ve her iki tarafı u ile çarparsak yani

$um_2 = urlm_2 \Rightarrow 1 = rl$

elde edilir ve buradan $r \in \mathbb{Z}$ yine birimsel elemandır. Dolayısıyla m_1 ve m_2 için $r \in \mathbb{Z}$ birimsel eleman elde edilir.

$r \in \mathbb{Z}$ birimsel eleman olduğundan o zaman

$m_1 = rx \Rightarrow x = r^{-1}m_1$ ve $m_2 = ry \Rightarrow y = r^{-1}m_2$

şeklinde yazılır. Böylece ,

$(x, y) = (r^{-1}m_1, r^{-1}m_2) = r^{-1}(m_1, m_2)$

şeklindedir.

$(m_1, m_2) = r(x, y)$ ve $(x, y) = r^{-1}(m_1, m_2)$ (5.5)

elde edildiğinden dolayı

$(m_1, m_2) \sim (x, y)$

elde edilir. Sonuç olarak,

$(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$'de

$\mathbb{Z}$ - modül olarak indirgenemezdir.

Önerme 5.7'nin tersi her zaman doğru değildir ve Örnek 5.8'de gösterilmiştir.

Örnek 5.8 $(1,2)$, $\mathbb{Z}$ - modül $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$' de indirgenemezdir.

1, $\mathbb{Z}$ - modül $\mathbb{Z}_4$' de Önerme 5.1'den

$ebob(1,4) = 1$

olduğundan indigenemezdir ancak 2, $\mathbb{Z}$ - modül $\mathbb{Z}_8$' de Önerme 5.1' den

$ebob(2,8) \neq 1$

olduğundan indirgenemez değildir.

Önerme 5.9 M_1 ve M_2 sırasıyla birer R_1 - modül ve R_2 - modül olsun.

$0 \neq m_1 \in M_1$'in R_1 - modülde ve $0 \neq m_2 \in M_2$'nin R_2 - modülde indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$'nin $R_1 \times R_2$ - modülde indirgenemez olmasıdır.

İspat $0 \neq m_1 \in M_1$'in R_1- modülde indirgenemez olduğunu kabul edelim. O zaman bazı $r_1 \in R_1$ ve $n_1 \in M_1$ için

$$m_1 = r_1 n_1$$

yazabiliriz. $0 \neq m_1 \in M_1$, R_1- modülde indirgenemez olduğundan

$m_1 \sim n_1$'dir.

Bazı $x \in R_1$ için

$$n_1 = x m_1$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece

$$m_1 = r_1 n_1 \Rightarrow m_1 = r_1 x m_1$$

elde edilir. $m_1 \neq 0$ olduğundan

$$r_1 x \in U(R_1)$$

olur ve

$$n_1 = r_1^{-1} m_1$$

elde edilir.

Şimdi $0 \neq m_2 \in M_2$'nin R_2- modülde indirgenemez olduğunu kabul edelim. O zaman bazı $r_2 \in R_2$ ve $n_2 \in M_2$ için

$$m_2 = r_2 n_2$$

yazabiliriz. $0 \neq m_2 \in M_2$, R_2- modülde indirgenemez olduğundan

$m_2 \sim n_2$'dir.

Bazı $y \in R_2$ için

$$n_2 = y m_2$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece

$m_2 = r_2 n_2 \Rightarrow m_2 = r_2 y m_2$

elde edilir. $m_2 \neq 0$ olduğundan

$r_2 y \in U(R_2)$

olur ve

$n_2 = r_2^{-1} m_2$

elde edilir.

$(m_1, m_2) = (r_1 n_1, r_2 n_2) = (r_1, r_2)(n_1, n_2)$ ve

$(n_1, n_2) = (r_1^{-1} m_1, r_2^{-1} m_2) = (r_1^{-1}, r_2^{-1})(m_1, m_2)$

yazabiliriz. Buradan

$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$'dir.

Böylece

$(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$'de

$R_1 \times R_2$- modül olarak indirgenemezdir.

Tersine, $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$'nin $R_1 \times R_2$- modül olarak indirgenemez olduğunu kabul edelim. Bazı $r \in R_1$, $n_1 \in M_1$ ve $s \in R_2$, $n_2 \in M_2$ için

$m_1 = r n_1$ ve $m_2 = s n_2$

olsun.

$(m_1, m_2) = (r n_1, s n_2) = (r, s)(n_1, n_2)$

yazabiliriz.

$(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$'de indirgenemez olduğundan $R_1 \times R_2$ modül olarak

$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$'dir.

Bazı $k \in R_1$ ve $l \in R_2$ için

$(n_1, n_2) = (k, l)(m_1, m_2)$ (5.6)

yazılabilir. Böylece

$m_1 \sim n_1$ ve $m_2 \sim n_2$'dir.

Sonuç olarak $0 \neq m_1 \in M_1$, R_1- modülde indirgenemez ve $0 \neq m_2 \in M_2$, R_2- modülde indirgenemezdir.

Sonuç 5.10 M_i bir R_i- modül olsun. $i = 1, \ldots, n$ için $0 \neq m_i \in M_i$, R_i-modülde indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul $(m_1, \ldots, m_n) \in M_1 \times \ldots \times M_n$' in $R_1 \times \ldots \times R_n$-modülde indirgenemez olmasıdır.

Önerme 5.11 M_1 bir R_1- modül ve M_2 bir R_2- modül olsun. M_1 ve M_2'nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilir bir modül olması için gerek ve yeter koşul $M_1 \oplus M_2$'nin tek türlü çarpanlarına ayrılabilir bir $R_1 \oplus R_2$- modül olmasıdır.

İspat M_1 ve M_2 tek türlü çarpanlarına ayrılabilir sırasıyla bir R_1- modül ve R_2- modül olsun. $0 \neq m \in M_1$, R_1- modülde ve $0 \neq n \in M_2$, R_2- modülde indirgenemez olmak üzere $M_1 \oplus M_2$'nin $R_1 \oplus R_2$- modül olarak indirgemez elemanları (m, n) şeklindedir.

Şimdi $(m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2$ elemanını ele alalım.

M_1 ve M_2 tek türlü çarpanlarına ayrılabilir bir $R_1 \oplus R_2$- modül olduğundan m_1 ve m_2'nin U-ayrışımları vardır. O zaman

$m_1 = (p_1' \ldots p_k')(p_1 \ldots p_n x)$ ve

$m_2 = (q_1' \ldots q_l')(q_1 \ldots q_m y)$

şeklinde olsun. Böylece

$(m_1, m_2) = ((p_1' \ldots p_k')(p_1 \ldots p_n x), (q_1' \ldots q_l')(q_1 \ldots q_m y))$

$(m_1, m_2) = (p_1, 1) \ldots (p_n, 1)(1, q_1) \ldots (1, q_m)(x, y)$

şeklinde bir indirgenemez ayrışıma sahiptir.

Önerme 4.9'dan $(m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2$'nin indirgenemez ayrışıma sahip olduğundan (m_1, m_2) U-ayrışımına sahiptir. Dolayısıyla TÇM1 sağlanır.

(m_1, m_2)'nin

$((p_1', s_1')...(p_k', s_k'))((p_1, s_1)...(p_n, s_n)(x, b))$ ve

$((t_1', q_1')...(t_l', q_l'))((t_1, q_1)...(t_m, q_m)(a, y))$

şeklinde iki U-ayrışımına sahip olduğunu kabul edelim.

Böylece

$u = p_1...p_g$, $\mu = t_1...t_h$ ve $v = s_{g+1}...s_n$, $\gamma = q_{h+1}...q_m$

sırasıyla R_1 ve R_2'nin birimselleri ve $1 \le g \le n$, $1 \le h \le m$ olmak üzere m_1 ve m_2'nin U-ayrışımları

$m_1 = (p_1'...p_k')(up_{g+1}...p_n x) = (t_1'...t_l')(\mu t_{h+1}...t_m a)$ ve

$m_2 = (s_1'...s_k')(s_1...s_g vb) = (q_1'...q_l')(q_1...q_h \gamma y)$

şeklindedir.

M_1 ve M_2 TÇM olduğundan

$n - g = m - h$ ve $g = h$'dır

ve böylece

$n = m$

elde edilir.

p_i ile t_i, $i = g+1,...,n$ için ve s_j ile q_j, $j = 1,...,g$ için uygun bir numaralandırılmadan sonra ilgilidir.

x ile a, M_1'de ve b ile y, M_2'de ilgilidir. O zaman

(x, b) ile (a, y),

$M_1 \oplus M_2$'de ilgilidir.

Dolayısıyla TÇM2 sağlanır ve böylece $M_1 \oplus M_2$ bir TÇM'dir.

Tersine, $m \in M_1$ olsun. O zaman v, M_2 de indirgenemez olacak şekilde $(m,v) \in M_1 \oplus M_2$ vardır ve böylece

$(r_1,1)...(r_n,1)(m_1,v)$

şeklinde indirgenemez ayrışıma sahiptir. Dolayısıyla

$m = r_1...r_n m_1$

M_1' de ve v ise M_2' de indirgenemezdir.

$(r_i,1) \in R_1 \oplus R_2$

indirgenemez olduğundan o zaman r_i, R_1' de indirgenemezdir.

Şimdi $m \in M_1$'in iki $U-$ ayrışımının

$m = (p_1'...p_k')(p_1...p_n m') = (q_1'...q_l')(q_1...q_m m'')$

olduğunu kabul edelim.

Dolayısıyla $(m,v) \in M_1 \oplus M_2$'nin iki $U-$ ayrışımını

$(m,v) = ((p_1',1)...(p_k',1))((p_1,1)...(p_n,1)(m',v)) = ((q_1',1)...(q_l',1))((q_1,1)...(q_m,1)(m'',v))$

olduğunu buluruz.

$M_1 \oplus M_2$ bir TÇM olduğundan o zaman $m = n$, uygun yeni bir numaralandırılmadan sonra $i = 1,...,n$ için

p_i ve q_i ilgilidir ve m' ile m'' ilgilidir.

Sonuç olarak M_1 bir TÇM olur ve benzer şekilde M_2 de TÇM elde edilir.

Sonuç 5.12 $i = 1,...,n$ için M_i'nin bir R_i- modül TÇM olması için gerek ve yeter koşul $M_1 \oplus ... \oplus M_n$'in bir $R_1 \oplus ... \oplus R_n$- modül TÇM olmasıdır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada serbest burulmalı olmayan modüller üzerinde tek türlü çarpanlarına ayrılabilme kavramı incelenmiştir ve bazı modüllerin indirgenemez elemanları ile U-ayrışımları üzerinde çalışılmıştır. Bu indirgenemez elemanlardan hareket ederek serbest burulmalı olmayan modüllerin tek türlü çarpanlarına ayrılabilme özelliği gösterilmiştir ve serbest burulmalı olmayan modüllerin direkt toplamlarının yine bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bir modül olduğu gösterilmiştir. Bundan sonraki yapılacak çalışmalarda serbest burulmalı olmayan modüllerin diğer özelliklerinin tek türlü çarpanlarına ayrılış özelliği incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Nicolas, A. M., (1971). “Modules Factoriels”, Bulletin of Mathematical Sciences, 95(2):35-52.

[2] Anderson, D. D. ve Valdes-Leon, S., (1997). “Factorization in Commutative Rings With Zero Divisors”, Rocky Mountain Journal of Mathematics , 2: 197-219.

[3] Costa D.L., (1976). “Unique Factorization in Modules and Symmetric Algebras”, Transactions of the American Mathematical Society, 224: 267-280.

[4] Lu, C.P., (1977). “Factorial Modules”, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 7: 125-139.

[5] Nikseresht, A. ve Azizi, A., (2011). “On Factorization in Modules”, Communications in Algebra, 39: 292-311.

[6] Angermüller, G., (2017). “Unique Factorization in Torsion- Free Modules”, Conference on Rings and Polynomials, 3-8 Temmuz 2016, Graz.

[7] Alan, M. ve Özbulur, E., (2016). “On Unique Factorization Modules”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 108: 23-28.

[8] Anderson, D.D. ve Valdes-Leon, Silva., (1996). “Factorization in Commutative Rings With Zero Divisors”, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 26: 439-480.

[9] Samuel, P., (1961). “On Unique Factorization Domains”, Illionis Journal of Mathematics, 5: 1-17.

[10] Zariski, O. ve Samuel, P., (1958). Commutative Algebra 1, Birinci Baskı, Springer, New York.

[11] Nagata, M., (1957). “A Remark on the Unique Factorization Theorem”, Journal of the Mathematical Society of Japan, 9: 143-145.

[12] Fletcher, C.R, (1970). “The Structure of Unique Factorization Rings”, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 67: 535-540.

[13] Fletcher, C.R, (1969). “Unique Factorization Rings”, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 65: 579-583.

[14] Çallıalp, F. ve Tekir, Ü. (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birinci Baskı, Birsen Yayınevi, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Büşra GÜLLE

Doğum Tarihi ve Yeri : 11.02.1993 - İstanbul

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : busra9358@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2018
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Lise	Fen Bilimleri	Barbaros Lisesi	2011

YAYINLARI

Bildiri

1. Gülle, B. ve Alan, M., (2017). “On Some Properties of Unique Factorization Modules”, 4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energies, 23-25 Kasım 2017, İstanbul.