En küçük üst sınır (sup): $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı bir küme olsun. A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne, en küçük üst sınır veya A'nın supremumu denir. $\sup A$ ile gösterilir.

En büyük alt sınır (inf): $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme olsun. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne, en büyük alt sınır veya A'nın infimumu denir. $\inf A$ ile gösterilir.

Tamlık Aksiyomu: Reel sayıların boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu vardır.

Teorem : $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\sup A = \alpha \iff \begin{array}{l} \text{i) } \forall x \in A \text{ için } x \leq \alpha \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists x_\varepsilon \in A \quad \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon \end{array}$$

veya

$$(\alpha' < \alpha \text{ ise } \exists x \in A \quad \alpha' < x)$$

İspat:

($\Rightarrow$) i) Sup. tanımından açıktır.

ii) Varsayalım ki önerme doğru olmasın. O halde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır öyleki

$$\forall x \in A \text{ için } x \leq \alpha - \varepsilon \text{ dır.}$$

Buradan $\alpha - \varepsilon$, A kümesi için bir üst sınır olmuş olur ve üst sınırların en küçüğü α olduğundan

$\alpha \leq \alpha - \varepsilon$ çelişkisi elde edilir.

Sonuç olarak ii)'de verilen önerme doğrudur.

($\Leftarrow$) i) ve Tamlık Aksiyomundan $\sup A \leq \alpha$ olur.

Eğer $\sup A < \alpha$ ise ii)'den $\varepsilon = \alpha - \sup A > 0$ için

$\exists x_\varepsilon \in A$ öyleki $\alpha - (\alpha - \sup A) < x_\varepsilon$

$\exists x_\varepsilon \in A$ " $\sup A < x_\varepsilon$ Çelişki!!

O halde $\sup A = \alpha$ olur.

Soru: $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme olmak üzere

$$\sup(-A) = -\inf A$$ old. gösteriniz.

(burada $-A = \{-a \mid a \in A\}$)

Çözüm:

A kümesi alttan sınırlı old. $-A$ kümesi üstten sınırlı olup Tamlık Aksiyomundan $\sup(-A)$ vardır. $\sup(-A) = \alpha$ diyelim.

O halde,

$$\forall a \in A \text{ için } -a \leq \alpha$$

ve böylece

$$\forall a \in A \text{ için } -\alpha \leq a$$ olup $-\alpha$, A kümesi için bir alt sınır olur. Şimdi m, A kümesi için keyfi bir alt sınır olsun. $-m$, $-A$ kümesi için üst sınır olmuş olur. Ancak $-A$ kümesi için üst sınırların en küçüğü α old.

$$\alpha \leq -m$$ bulunur.

Buradan $m \leq -\alpha$ olup A kümesinin keyfi alt sınırı olan m, başka bir alt sınır olan $-\alpha$ dan küçük kaldı. Yani A'nın alt sınırlarının en büyüğü $-\alpha$ olur

$$\inf A = -\alpha$$ dır.

Ayrıca $\sup(-A) = -\inf A$ eşitliği görülür.

Not: Yukarıdaki sorudan diyebiliriz ki; Reel sayıların boş olmayan ve alttan sınırlı her alt kümesinin infumumu vardır.

Çıkarım: $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı bir küme olmak üzere

$$-\sup A = \inf(-A)$$ dır (Nasıl).

Teorem: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

$\inf A = \alpha \iff$ i) $\forall x \in A$ için $\alpha \leq x$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists x_\varepsilon \in A$ $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$

veya

($\alpha < \alpha'$ ise $\exists x \in A$ $x < \alpha'$)

ispat: (ödev)

Soru: $\sup(0,1)=1$ ve $\inf(0,1)=0$ old. gösteriniz.

Çözüm:

- İlk olarak $\sup(0,1)=1$ old gösterelim.

1, $(0,1)$ kümesi için bir üst sınır olup Tamlık Aksiyomundan $\sup(0,1)$ vardır ve $\sup(0,1)=\alpha$ diyelim.
Burada α, $(0,1)$ kümesi için en küçük üst sınırdır. 1'de üst sınır olduğundan

$$\alpha \leq 1 \text{ olur.}$$

Ayrıca $\alpha > 0$ dır çünkü $1/2 \in (0,1)$ dan da büyüktür mesela.

O halde

$$0 < \alpha \leq 1 .$$

$0<\alpha<1$ ise

- $\alpha<1 \Rightarrow \frac{\alpha+\alpha}{2} < \frac{1+\alpha}{2}$

- $\alpha<1 \Rightarrow \frac{\alpha+1}{2} < \frac{1+1}{2}$

$\Rightarrow \alpha < \frac{\alpha+1}{2} < 1.$

Dikkat edilirse $\frac{\alpha+1}{2} \in (0,1)$ ve üst sınır olan α'dan büyük çıkıyor. Çelişki!!

O halde $\alpha=0$ olup

$\sup(0,1)=0$ dır.

- Şimdi $\inf(0,1)=0$ old gösterelim.

0, $(0,1)$ için bir alt sınır olup $\inf(0,1)$ vardır ve $\inf(0,1)=\alpha$ diyelim. Burada α, $(0,1)$ için en büyük alt sınır ve 0'da alt sınır old $0 \leq \alpha$ olur. Ayrıca

$$0 \leq \alpha < 1 \quad (\alpha<1 \text{ olacağını gör})$$

$0<\alpha<1$ ise

$\frac{\alpha}{2} \in (0,1)$ olduğundan

inf tanımına göre $\alpha \leq \frac{\alpha}{2}$ $\left(1 \leq \frac{1}{2}\right)$

Çelişki!!

O halde $\alpha=0$ olup

$\inf(0,1)=0$ dır.

Soru: A ve B reel sayıların baştan farklı iki alt kümesi olsun.

$A \subseteq B$ olmak üzere;

i) $\sup B$ var ise $\sup A \leq \sup B$

ii) $\inf B$ var ise $\inf B \leq \inf A$

Çözüm:

i) $A \subseteq B$ old. $\sup B$, A kümesi içinde bir üst sınırdır. Tamlık Aksiyomundan $\sup A$ vardır ve $\sup A$, A kümesinin üst sınırlarının en küçüğü old.

$$\sup A \leq \sup B \text{ dur.}$$

ii) Ödev

Çıkarım: A ve B reel sayıların baştan farklı, sınırlı alt kümeleri olsun.

$A \subseteq B$ olmak üzere;

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B \text{ dir.}$$

Teorem: $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir.

ispat: Varsayalım ki $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı olsun. Tamlık Aksiyomundan $\sup \mathbb{N}$ vardır ve $\sup \mathbb{N} = x$ diyelim. Supremum tanımından

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } n \leq x \text{ dir.}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ ise } n+1 \in \mathbb{N} \text{ old}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } n \leq x-1$$ bulunur. Bu da $\mathbb{N}$'nin en küçük üst sınırı olan x ile çelişir. O halde $\mathbb{N}$ üstten sınırlı değildir.

Teorem (Arşimed Prensibi)

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $b>0$ olmak üzere

$\exists n \in \mathbb{N}$ öyleki $n \cdot b > a$ olur.

(Not: $b=1$ alınırsa, her reel sayıdan büyük bir doğal sayı vardır.)

İspat: Teoremdeki önerme doğru olmasaydı,

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $nb \leq a$ olacak şekilde $a,b \in \mathbb{R}$ $(b>0)$ durdu.

Buradan

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $n \leq \frac{a}{b}$ olup Doğal sayılar üstten sınırlı

olur (Çelişki!). O halde Teoremde verilen önerme doğrudur.

Soru:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \tfrac{1}{n}] = \{0\}$$ old gösteriniz.

Çözüm:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \in [0, \frac{1}{n}]$ old. $\{0\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$ dir.

- $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$ ele alalım.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x \in [0, \frac{1}{n}]$ olur.

{ Limitten de x'in sadece 0 olabileceği gösterilebilir. Ancak limit görmediğimiz için aşağıdaki şekilde yaklaşalım. }

Eğer $0 < x$ ise,

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $n \leq \frac{1}{x}$ olup Doğal sayıların üstten sınırlı old. söyler. O halde $x=0$ olabilir sadece.

$0 = x \in \{0\}$ olup $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}] \subseteq \{0\}$ dur

ve iki kümenin eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem: $a,b \in R$ ve $a<b$ olsun.

$\exists x \in Q$ öyleki $a<x<b$ dir.

İspat:

$a<b \Rightarrow 0<b-a \overset{\text{Arşimed ilk.}}{\Longrightarrow} \exists n \in N$ öyleki $\frac{1}{n}<b-a$

$\Rightarrow \exists n \in N$ " $1<nb-na$

$na \in R$ için $[\![na]\!] = p \in \mathbb{Z}$ ele alalım. O halde

$p \leq na < p+1$ dir.

- $na<p+1$ old $a<\frac{p+1}{n}$ ... (i)
- $p \leq na \Rightarrow p+1 \leq na+1 < nb \Rightarrow \frac{p+1}{n}<b$ ... (ii)

(i) ve (ii) den $a<\frac{p+1}{n}<b$ olacak şekilde $\frac{p+1}{n} \in Q$ vardır.

Soru: Herhangi iki farklı reel sayı arasında en az bir irrasyonel sayı vardır gösteriniz.

Çözüm: $a,b \in R$ ve $a<b$ reel sayılarını ele alalım.

$a,b \in R$ ise $\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \in R$ olup yukarıdaki teoremden

$\exists r \in Q$ öyleki $\frac{a}{\sqrt{2}}<r<\frac{b}{\sqrt{2}}$

buradan da $a<r.\sqrt{2}<b$ olup $r.\sqrt{2} \in R \setminus Q$ olur.