**Örnek:** $C$ ile bir sabit $z_1$ nok.dan bir sbt. $z_2$ noktasına olan bir düzgün yay $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ yi gösterelim.

$$\int_C z\,dz = \int_a^b z(t) \cdot z'(t)\,dt$$

integralini hesaplayalım.

**Çözüm:** **Not:** $z = z(t) = x(t) + i y(t)$ denklemi ile tanımlanmış $C$ yayı, eğer $z'(t)$ mevcut, $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ve $\forall t \in (a,b)$ için $z'(t) \neq 0$ ise düzgün yaydır.

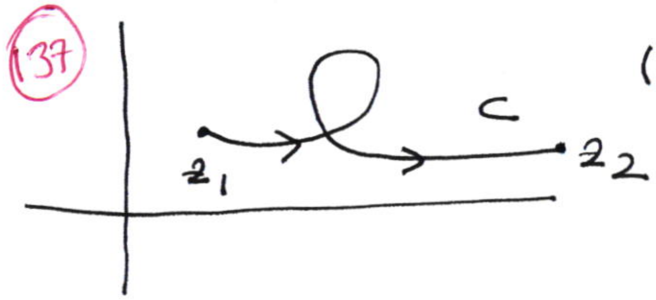
$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z(t)}{2}\right]^2 = z(t) \cdot z'(t)$$ ve $z(a) = z_1$, $z(b) = z_2$ old.dan

$$\int_C z\,dz = \left.\left[\frac{z(t)}{2}\right]^2\right|_a^b = \frac{(z(b))^2 - (z(a))^2}{2}$$

$$= \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$ elde edilir.

Bu integralin değerinin sadece $C$ nin uç noktalarına bağlı olması ve alınan yaydan bağımsız olması nedeniyle

$$(5) \quad \int_{z_1}^{z_2} z\,dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$ dir. (Düzgün yaya bağlı değil)

137 

(5) İntegral ifadesi ayrıca $c$, düzgün olması gerekmeyen bir çevre old.da da geçerlidir. 3

Çünkü bir çevre uç uca eklenmiş sonlu sayıda düzgün $c_k$ $(k=1,2,\dots,n)$ yaylarından oluşur. Daha açık biçimde $\forall c_k$ nın sbt. $z_k$ dan $z_{k+1}$ e uzandığını kabul edelim. O zaman

$$(6)\quad \int_c z\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_k} z\,dz = \sum_{1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z\,dz$$

başlangıç → bitiş

$$= \sum_{1}^{n} \frac{z_{k+1}^2 - z_k^2}{2} = \frac{z_{n+1}^2 - z_1^2}{2}$$

olduğu görülür. (6) ifadesinden $f(z)=z$ fonk.nun integralinin düzlemdeki her kapalı çevre etrafında 0' değerine sahip olduğu sonucu çıkar.

## Çevre İntegrallerin Modülleri İçin Üst Sınırlar

⟺ Ara

**Lemma:** Eğer $w(t)$, bir $a \le t \le b$ aralığı üzerinde tanımlanmış bir parçalı sürekli, kompleks değerli bir fonk. ise

$$\boxed{\left| \int_a^b w(t)\,dt \right| \le \int_a^b |w(t)|\,dt \text{ dir.}}$$

**İspat:** Yol gösterme

Sol taraftaki int. değeri sıfır ise eşitlik sağlanır. Dolayısıyla $\int_a^b w(t)\,dt = r_0 e^{i\theta_0}$ yazılır ve $r_0$ için çözülür.

**Teorem:** c, L uzunluğuna sahip bir çevreyi göstersin ve $f(z)$ fonk.u c üzerinde parçalı sürekli olsun. Eğer M, c üzerindeki $f(z)$ nin tanımlı olduğu tüm z noktaları için

$$|f(z)| < M$$

şeklinde -ve olmayan bir sbt. ise

$$\left| \int_c f(z)\,dz \right| < M.L$$

**İspat:** c nin bir parametrik temsili $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ olsun. Bir önceki lemmaya göre

$$\left| \int_c f(z)\,dz \right| = \left| \int_c f(z(t))\, z'(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(z(t)).z'(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b |f(z(t))|.|z'(t)|\,dt$$

Dolayısıyla z, c yolu üzerinde olduğu zaman $|f(z)| \leq M$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir M sbt.i için

$$\left| \int_c f(z)\,dz \right| \leq M.\underbrace{\int_a^b |z'(t)|\,dt}_{\text{yolun L uzunluğunu temsil eder.}}$$

Dolayısıyla

$$\left| \int_c f(z)\,dz \right| \leq M.L \quad \text{dir.}$$